Langages sans ´etoile

L'approche algébrique est un outil puissant pour l'étude des ensembles rationnels. Contrairement à la théorie des automates, elle permet d'associer un objet canonique à chaque ensemble rationnel : le semigroupe syntaxique. Les chapitres précédents ont montré qu'un ensemble est rationnel si et seulement si son semigroupe syntaxique est fini. Dans le cas des mots finis, l'étude des propriétés algébriques des semigroupes syntaxiques a permis d'établir toute une hiérarchie des ensembles rationnels. Schützenberger fût le premier à considérer les ensembles dont les semigroupes syntaxiques sont finis et apériodiques, c'est-à-dire ne contenant pas de groupes. Il a montré que ces ensembles étaient exactement les langages sans étoile [38], définis par des expressions rationnelles n'utilisant que les opérations booléennes et le produit fini. Cette classe est importante d'un point de vue logique puisqu'elle contient exactement les ensembles définissables par des formules logiques du premier ordre [24]. Ces résultats ont été étendus aux mots de longueur ω par Ladner [22], Thomas [41] et Perrin [29] et même aux mots ordinaux par Bedon [5]. Etant donné un entier n, les ensembles sans étoile de mots indexés par des ordres linéaires dispersés de rang inférieur ou égal à n, sont construits à partir des lettres de l'alphabet en utilisant le produit fini et les opérations booléennes où le complément est pris dans l'ensemble des mots non vides de rang au plus n. Dans ce chapitre, on montre que le $\diamond$-semigroupe syntaxique d'un ensemble X de rang fini n est apériodique et fini si et seulement si X est sans étoile dans l'ensemble des mots de rang au plus n. Pour montrer que le semigroupe syntaxique d'un ensemble sans étoile de rang fini est apériodique, le produit de Schützenberger est généralisé aux $\diamond$-semigroupes. La preuve de la réciproque, inspirée de [4], utilise une induction sur le rang et n'est donc pas adaptable aux ordres linéaires de rang quelconque.

5.1 Semigroupes apériodiques

Définition 25 Un semigroupe S est *apériodique* s'il existe un entier k tel que pour tout s appartenant à S, $s^{k+1} = s^k$.

Un $\diamond$-semigroupe (respectivement ω-semigroupe, ω_1-semigroupe) est apériodique si son semigroupe de support est apériodique.

5.2 Langages sans étoile

Un ensemble sans étoile est défini par une expression rationnelle où l'opérateur $*$ est interdit mais dans laquelle la complémentation peut être utilisée. Nous rappelons les définitions des langages sans étoile de mots finis, infinis et ordinaux de rang fini avant de les généraliser aux mots sur les ordres linéaires dispersés de rang fini.

5.2.1 Mots finis

Définition 26 La classe $SF(A^*)$ des ensembles *sans étoile* de mots finis est la plus petite famille contenant l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ des parties de A et fermée par produit fini et par les opérations booléennes où la complémentation est prise par rapport à A^*.

Notons que l'ensemble vide est sans étoile et son complémentaire A^* aussi.

Exemple 61 L'ensemble $(ab)^+$ est sans étoile puisqu'il est défini par l'expression $(aA^* \cap A^*b) \setminus (A^+aaA^+ \cup A^+bbA^+)$.

Théorème 61 (Schützenberger) *[38] Un ensemble de mots finis est sans étoile si et seulement si son semigroupe syntaxique est apériodique et fini.*

Exemple 62 Le semigroupe syntaxique de l'ensemble $(ab)^+$, défini à l'exemple 38 par les $\sim_X$-classes $(ab)^*a$, $(ab)^+$, $b(ab)^*$, $(ba)^+$ et $A^*aaA^* \cup A^*bbA^*$ est apériodique : tout élément s vérifie $s^2 = s^3$.

5.2.2 Mots infinis

Pour les mots de longueur ω, le produit fini n'est autorisé que du coté gauche.

Définition 27 La classe $SF(A^\omega)$ des ensembles *sans étoile* de A^ω est la plus petite famille contenant $\mathcal{P}(A)$ et fermée par les opérations booléennes où la complémentation est prise par rapport à A^ω, et fermée par produit fini à gauche des ensembles sans étoile de A^*.

De même que A^* appartient à $SF(A^*)$, l'ensemble A^ω appartient à $SF(A^\omega)$ en tant que complémentaire de l'ensemble vide.

Exemple 63 L'ensemble $(ab)^\omega$ est sans étoile : $(ab)^\omega = aA^\omega \setminus (A^*aaA^\omega \cup A^*bbA^\omega)$.

Théorème 62 (Perrin) *[29] Un ensemble de mots de longueur ω est sans étoile si et seulement si son semigroupe syntaxique est apériodique et fini.*

5.2.3 Mots sur les ordinaux de rang fini

Pour tout entier n, notons $A^{<\omega^n}$ l'ensemble des mots non vide sur A indexés par un ordinal strictement inférieur à ω^n.

Définition 28 Soit n un entier naturel. La classe $SF(A^{<\omega^{n+1}})$ des ensembles *sans étoile* de mots indexés par des ordinaux inférieur à ω^{n+1} est la plus petite famille contenant l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ des parties de A et fermée par les opérations booléennes où la complémentation est prise par rapport à $A^{<\omega^{n+1}}$, et fermée par produit fini.

Exemple 64 L'ensemble $X = ((ab)^+ + (ab)^\omega)^+$ appartient à $SF(A^{<\omega^2})$. En effet, en notant $L = A^{<\omega^2} \setminus A^{<\omega^2}A$ l'ensemble des mots de $A^{<\omega^2}$ de longueur limite, il vient

$$X = abA^{<\omega^2} \setminus (LbA^{<\omega^2} + A^{<\omega^2}a + A^{<\omega^2}aaA^{<\omega^2} + A^{<\omega^2}bbA^{<\omega^2}).$$

Théorème 63 (Bedon) *[6] Un ensemble de mots indexés par des ordinaux de rang fini est sans étoile si et seulement si son semigroupe syntaxique est apériodique et fini.*

La preuve de ce théorème utilise une approche logique et montre également que les langages sans étoile de mots transfinis sont définis par des formules logiques du premier ordre.

5.2.4 Mots sur les ordres linéaires

Définition 29 Soit A un alphabet fini et soit n un entier naturel. La classe $SF_n(A)$ (ou SF_n) des ensembles sans étoile de rang au plus n est le plus petit ensemble contenant $\mathcal{P}(A)$ des parties de A et fermé par produit fini et par les opérations booléennes où le complément est pris par rapport à l'ensemble A^{W_n}.

Bien sûr, l'ensemble A^{W_n} appartient à SF_n puisque c'est le complément de $\emptyset \in SF_n$.

Exemple 65 Pour tout entier naturel n, les ensembles G et D de mots de rang au plus n et de longueur limite à gauche et à droite sont sans étoile :

$$G = A^{W_n} \setminus AA^{W_n} \ , \ \ D = A^{W_n} \setminus A^{W_n}A.$$

L'ensemble A^* des mots finis appartient aussi à SF_n : c'est l'ensemble des mots ne contenant aucun facteur de longueur limite :

$$\begin{aligned} A^* &= A^{W_n} \setminus A^{W_n}(G \cup D)A^{W_n} \\ &= A^{W_n} \setminus (A^{W_n}(G \cup D)A^{W_n} \cup GA^{W_n} \cup A^{W_n}D). \end{aligned}$$

Lemme 64 *Quels que soient les entiers naturels n et $k < n$, les ensembles A^{W_k}, $(A^{W_k})^\omega$ et $(A^{W_k})^{-\omega}$ appartiennent à SF_n.*

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'exemple 65 montre déjà que $A^* \in SF_n$. On montre que pour tout $0 \leq k < n$, si $A^{W_k} \in SF_n$, alors $(A^{W_k})^\omega, (A^{W_k})^{-\omega}$ et $A^{W_{k+1}}$ appartiennent à SF_n. Soit $0 \leq k < n$. Supposons $A^{W_k} \in SF_n$. Son complément $\overline{A^{W_k}} = A^{W_n} \setminus A^{W_k}$ appartient donc aussi à SF_n. On montre que $(A^{W_k})^\omega \in SF_n$ en utilisant l'expression sans étoile suivante :

$$(A^{W_k})^\omega = \overline{A^{W_k}} \setminus (\overline{A^{W_k}}\ \overline{A^{W_k}} \cup \overline{A^{W_k}} A^{W_k})$$

L'inclusion de gauche à droite est directe. Réciproquement, soit x appartenant au membre droit de l'égalité. Comme $x \in A^{W_n} \setminus A^{W_k}$, il existe un entier $k < r \leq n$ tel que $|x| \in W_r \setminus W_{r-1}$. Notons $|x| = \sum_{i=1}^{m} K_i$ où $K_i \in U_r$ pour tout $1 \leq i \leq m$. Comme $x \in \overline{A^{W_k}} \setminus \overline{A^{W_k} A^{W_k}}$, il existe un unique entier $1 \leq i_0 \leq m$ tel que $K_{i_0} \in U_r \setminus W_k$. De plus, $i_0 = m$ puisque $x \in \overline{A^{W_k}} \setminus \overline{A^{W_k}} A^{W_k}$. On sait donc que x admet une factorisation $x = x'x''$ où $|x'| \in W_k$ et $|x''| \in U_r \setminus W_k$. Par définition de U_r, $|x''| = \sum_{j \in J} I_j$ où pour tout $j \in J$,$I_j \in W_{r-1}$ et où $J \in \mathcal{N} \cup \{\omega, -\omega\}$. Si $J \in \mathcal{N}$ alors $|x| \in W_{r-1}$ ce qui est une contradiction. Donc $J \in \{\omega, -\omega\}$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $j_0 \in J$ tel que $I_{j_0} \in W_{r-1} \setminus W_k$. si $J = \omega$ alors les ordres linéaires $\sum_{j \leq j_0} I_j$ et $\sum_{j_0 < j} I_j$ appartiennent tous les deux à $W_{r-1} \setminus W_k$. Cela signifierait que $x \in \overline{A^{W_k} A^{W_k}}$ ce qui est une contradiction. L'argument symétrique pour $J = -\omega$ montre que $x'' \in (A^{W_k})^\omega$ ou que $x'' \in (A^{W_k})^{-\omega}$. Comme $x \in \overline{A^{W_k}} \setminus \overline{A^{W_k}} A^{W_k}$, on conclut que $x \in (A^{W_k})^\omega$ et que $(A^{W_k})^\omega \in SF_n$. De façon symétrique on obtient $(A^{W_k})^{-\omega} \in SF_n$.

Il reste à prouver que $A^{W_{k+1}} \in SF_n$. Pour cela, on montre l'égalité suivante :

$$A^{W_n} \setminus A^{W_{k+1}} = A^{W_n}(G \cup D)A^{W_n}$$

$$\text{où } G = A^{W_n} \setminus (A^{W_k} \cup (A^{W_k})^{-\omega})A^{W_n} \text{ et } \ D = A^{W_n} \setminus A^{W_n}(A^{W_k} \cup (A^{W_k})^\omega)$$

L'inclusion de gauche à droite découle du fait que tout mot appartenant à G ou à D est de rang strictement supérieur à $k+1$. Réciproquement, soit $x \in A^{W_n} \setminus A^{W_{k+1}}$. Alors x possède au moins un facteur y appartenant à $(A^{W_{k+1}} \setminus A^{W_k})^\omega$ ou à $(A^{W_{k+1}} \setminus A^{W_k})^{-\omega}$. Or $(A^{W_{k+1}} \setminus A^{W_k})^\omega \subset D$ et $(A^{W_{k+1}} \setminus A^{W_k})^{-\omega} \subset G$. D'où $x \in A^{W_n}(G \cup D)A^{W_n}$, ce qui conclut la preuve.

□

Pour tout $X \in SF_n$, on dispose d'une expression sans étoile de X où le complément est pris par rapport à l'ensemble A^{W_n}. Comme $A^{W_n} \in SF_{n+1}$, on peut remplacer dans celle-ci toute expression de la forme $A^{W_n} \setminus Y$ par $(A^{W_{n+1}} \setminus Y) \cap A^{W_n}$ et obtenir une expression sans étoile de X où le complément est pris par rapport à l'ensemble $A^{W_{n+1}}$.

Corollaire 65 *Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $SF_n \subseteq SF_{n+1}$.*

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $X \in SF_n$. On définit f inductivement par

$$\begin{array}{rl}
\forall a \in A, & f(a) = a \\
\forall X_1, X_2 \in SF_n, & f(X_1 \cdot X_2) = f(X_1) \cdot f(X_2), \\
& f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2), \\
& f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2), \\
& f(X_1 \setminus X_2) = f(X_1) \cap (A^{W_{n+1}} \setminus f(L_2)) \cap A^{W_n}.
\end{array}$$

d'après le lemme 65, $A^{W_n} \in SF_{n+1}$ d'où $X = f(X) \in SF_{n+1}$. □

Les paragraphes suivants sont consacrés à la preuve du théorème suivant :

Théorème 66 *Un ensemble de mots indexés par des ordres linéaires dispersés de rang fini est sans étoile si et seulement si son $\diamond$-semigroupe syntaxique est fini et apériodique.*

5.3 Des $\diamond$-semigroupes apériodiques vers les langages sans étoile

Soit S un $\diamond$-semigroupe fini apériodique reconnaissant un ensemble X de rang fini r. Il existe un morphisme de $\diamond$-semigroupe $\varphi : A^\diamond \longrightarrow S$ et un ensemble $P \subseteq S$ tels que $X = \varphi^{-1}(P)$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout élément $p \in S$, on note $X_{n,p}$ l'ensemble des mots de rang au plus n et d'image p par φ :

$$X_{n,p} = \varphi^{-1}(p) \cap A^{W_n}.$$

Comme $X = \bigcup_{p \in P} X_{r,p}$ et que les ensembles sans étoile sont clos par union fini, il suffit de montrer que pour tout $p \in P$, $X_{r,p} \in SF_r$. On va montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in S$, $X_{n,p} \in SF_n$. Le cas de base sera donné par le théorème de Schützenberger. Pour le pas de récurrence, on va d'abord montrer que pour tout idempotent $e \in E(S)$, si $X_{n,e} \in SF_n$ alors $X_{n,e}^\omega \in SF_{n+1}$. La preuve est une adaptation de celle du Théorème 5.4 de [32].

Lemme 67 *Quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et $e \in E(S)$, $(X_{n,e})^\omega = (A^{W'_n})^\omega \setminus Z$ où*

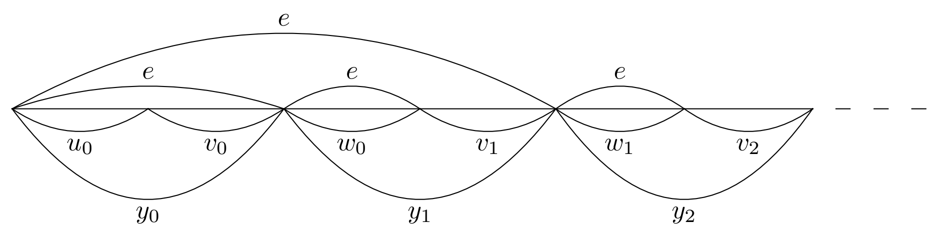
$$Z = \bigcup_{s \in S} X_{n,s}[(A^{W_n})^\omega \setminus (\bigcup_{\substack{t \in S, \\ st=e}} X_{n,t}) X_{n,e} (A^{W_n})^\omega].$$

Preuve. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $e \in E(S)$. Soit $x \in X_{n,e}^\omega$. Par l'absurde, supposons que $x \in Z$. On dispose d'une factorisation $x = x'x''$ telle que pour toute factorisation $x'' = yy'y''$, $\varphi(x'y) \neq e$ ou $\varphi(y') \neq e$. Autrement dit la longueur du plus long préfixe de x appartenant à $X_{n,e}X_{n,e}$ est bornée. La contradiction avec $x \in X_{n,e}^\omega$ assure que $x \in (A^{W_n})^\omega \setminus Z$.

Réciproquement, soit $x \in (A^{W_n})^\omega \setminus Z$ et soit $x = u_0x_0$ une factorisation quelconque. Notons $s = \varphi(u_0)$. Comme $x \notin Z$, il existe $t \in S$ tel que $st = e$ et $x_0 \in X_{n,t}X_{n,e}(A^{W_n})^\omega$. On dispose donc de v_0, $w_0 \in A^{W_n}$ tels que $\varphi(u_0v_0) = e$, $\varphi(w_0) = e$ et $x_0 = v_0w_0x_1$ pour un certain suffixe $x_1 \in (A^{W_n})^\omega$ de x. On peut réappliquer ce raisonnement à la factorisation $x = u_1 x_1$ et obtenir de façon récursive des suites $(u_i)_{i\geq 0}$, $(x_i)_{i\geq 0}$, $(v_i)_{i\geq 0}$ et $(w_i)_{i\geq 0}$ telles que pour tout $i \geq 0$,

$$x = u_i x_i \ , \quad u_{i+1} = u_i v_i w_i \ , \varphi(u_i v_i) = e \text{ et } \quad \varphi(w_i) = e$$

Soit $x = \prod_{i\in\omega} y_i$ la factorisation définie par $y_0 = u_0 v_0$ et pour tout $i > 0$, $y_i = w_{i-1} v_i$.



On dispose d'une superfactorisation $x = \prod_{i\in\omega} y'_i$ et d'une paire liée à droite $(r, f) \in S \times E(S)$ tels que $\varphi(y'_0) = r$ et pour tout $i > 0$, $\varphi(y'_i) = f$. On montre que $(r, f) = (e, e)$. Comme il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(y'_0) = \varphi(y_0 y_1 \dots y_m) = \varphi(u_m v_m)$, on obtient $r = e$. De même, on dispose de $m_1 \leq m_2$ tels que $f = \varphi(y_{m_1} \dots y_{m_2}) = \varphi(w_{m_1-1})\varphi(v_{m_1} y_{m_1+1} \dots y_{m_2}) = eg$ où $g \in S$. D'où $f = eg = eeg = ef$. Comme (e, f) est un couple lié à droite, $e = ef$ ce qui conclut $e = f$. $\square$

Etant donné $n \in \mathbb{N}$, on a montré que pour tout $p \in S$, si $X_{n,p} \in SF_n$, alors l'ensemble $Y_{n+1,p}$ défini par

$$Y_{n+1,p} = \varphi^{-1}(p) \cap A^{U'_{n+1}} = X_{n,p} \cup \bigcup_{\substack{(t,e)\in S\times E(S),\\ te^{\tau}=p}} X_{n,t} X_{n,e}^{\omega} \cup \bigcup_{\substack{(t,e)\in S\times E(S),\\ e^{-\tau}t=p}} X_{n,e}^{-\omega} X_{n,t}$$

appartient à SF_{n+1}. Le reste de la preuve est inspirée de [30] et utilise les deux lemmes ci-dessous.

Lemme 68 *Soit S un semigroupe apériodique. Quels que soient p, r et s appartenant à S, si $p = rps$ alors $p = rp = ps$.*

Preuve. Soit S un semigroupe apériodique et soient p, r, $s \in S$. On dispose d'un entier k tel que $r^{k+1} = r^k$. Il vient $p = rps = r^k ps^k = r^{k+1} ps^k = rp$. De façon similaire, on obtient $p = ps$. $\square$

Dans un semigroupe apériodique, si deux éléments p et s vérifient $s \leq_{\mathcal{R}} p$, $s \leq_{\mathcal{L}} p$ et $p \leq_{\mathcal{R}} s$ alors ils sont égaux.

Lemme 69 *Soit S un semigroupe apériodique. Quel que soit p appartenant à S, $p = (pS^1 \cap S^1 p) \setminus \{r \in S \mid p \notin S^1 r S^1\}$.*

Preuve. Soit S un semigroupe apériodique et soit $p \in S$. L'inclusion de gauche à droite est évidente. Réciproquement, soit s appartenant au membre droit de l'égalité. On dispose de a, b, c, $d \in S^1$ tels que $s = pa = bp$ et $p = csd$. Donc $s = csda$ et d'après le lemme 68, $s = cs$. On obtient $s = sd$ de façon similaire d'où $s = csd = p$. $\square$

Pour tout $p \in S$, on donne une expression de $X_{n+1,p}$ à partir des ensembles $Y_{n+1,s}$ pour $s \in S$.

Lemme 70 *Quels que soient $n \in N$ et $p \in S$,*

$$X_{n+1,p} = (RA^{W_{n+1}} \cap A^{W_{n+1}}L) \setminus A^{W_{n+1}}JA^{W_{n+1}}$$

où

$$R = \bigcup_{s\mathcal{R}p} Y_{n+1,s} \cup \bigcup_{\substack{rs\mathcal{R}p,\\ r>_{\mathcal{R}}p}} X_{n+1,r}Y_{n+1,s}$$

$$L = \bigcup_{s\mathcal{L}p} Y_{n+1,s} \cup \bigcup_{\substack{sr\mathcal{L}p,\\ r>_{\mathcal{L}}p}} Y_{n+1,s}X_{n+1,r}$$

$$J = \bigcup_{s<_{\mathcal{J}}p} Y_{n+1,s} \cup (\bigcup_{\substack{rs\geq_{\mathcal{J}}p,\\ st\geq_{\mathcal{J}}p,\\ rst<_{\mathcal{J}}p}} Y_{n+1,r}X_{n+1,s}Y_{n+1,t}) \cup (\bigcup_{\substack{r\geq_{\mathcal{J}}p,\\ s\geq_{\mathcal{J}}p,\\ rs<_{\mathcal{J}}p}} Y_{n+1,r}Y_{n+1,s}).$$

Preuve. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in S$. Soit $x \in X_{n+1,p}$. On commence par montrer que $x \in RA^{W_{n+1}}$. On dispose d'un entier m et d'une factorisation $x = \prod_{i=1}^{m} x_i$ telle que pour tout $1 \leq i \leq m$, $x_i \in Y_{n+1,p}$. Si $m = 1$, alors $x \in R$. Sinon comme $\varphi(x) = p$, il existe $1 \leq i_0 \leq m$ tel que pour tout $1 \leq i < i_0$, $\varphi(x_1 \ldots x_i) >_{\mathcal{R}} p$ et pour tout $i_0 \leq i \leq m$, $\varphi(x_1 \ldots x_i) \mathrel{\mathcal{R}} p$.

- Si $i_0 = 1$ alors $\varphi(x_1) \mathrel{\mathcal{R}} p$ et $x \in \bigcup_{s\mathcal{R}p} Y_{n+1,s}A^{W_{n+1}}$.
- Sinon $i_0 > 1$: Notons $r = \varphi(x_1 \ldots x_{i_0-1})$ et $s = \varphi(x_{i_0})$. Comme $r >_{\mathcal{R}} p$, $rs \mathrel{\mathcal{R}} p$ et $x_{i_o} \in Y_{n+1,s}$ il vient $x \in \bigcup_{\substack{rs\mathcal{R}p,\\ r>_{\mathcal{R}}p}} X_{n+1,r}Y_{n+1,s}A^{W_{n+1}}$.

D'où $x \in RA^{W_{n+1}}$. La preuve de $x \in A^{W_{n+1}}L$ peut se faire symétriquement. De plus, si $x \in A^{W_{n+1}}JA^{W_{n+1}}$ alors $\varphi(x) \neq p$ par définition de J. On obtient ainsi la première inclusion.

Réciproquement, soit $x \in (RA^{W_{n+1}} \cap A^{W_{n+1}}L) \setminus A^{W_{n+1}}JA^{W_{n+1}}$. Comme $x \in RA^{W_{n+1}}$, il vient $\varphi(x) \in pS$. De même, $x \in A^{W_{n+1}}L$ donc $\varphi(x) \in S^1p$. D'après le lemme 69, il suffit de montrer que $\varphi(x) \geq_{\mathcal{J}} p$ pour conclure que $\varphi(x) = p$. Par l'absurde, supposons que $\varphi(x) <_{\mathcal{J}} p$. Si $|x| \in U_n$, alors $x \in Y_{n+1,\varphi(x)} \subseteq J$ ce qui est une contradiction. Sinon x il existe un entier m et une factorisation $x = \prod_{i=1}^{m} x_i$ telle que pour tout $1 \leq i \leq m$, $|x_i| \in U_n$. Comme $\varphi(x) <_{\mathcal{J}} p$, il existe $1 \leq i_0 \leq j_0 \leq m$ tels que $\varphi(x_{i_0} \ldots x_{j_0}) <_{\mathcal{J}} p$,$\varphi(x_{i_0+1} \ldots x_{j_0}) \geq_{\mathcal{J}} p$ et $\varphi(x_{i_0} \ldots x_{j_0-1}) \geq_{\mathcal{J}} p$.

– Cas 1 : $i_0 = j_0$. Alors $\varphi(x_{i_0}) <_{\mathcal{J}} p$ donc $x \in A^{W_{n+1}} Y_{n+1,\varphi(x_{i_0})} A^{W_{n+1}} \subseteq A^{W_{n+1}} J A^{W_{n+1}}$.
– Cas 2 : $i_0 + 1 = j_0$. Alors $x \in A^{W_{n+1}} Y_{n+1,\varphi(x_{i_0})} Y_{n+1,\varphi(x_{j_0})} A^{W_{n+1}}$ avec $\varphi(x_{i_0})\varphi(x_{j_0}) <_{\mathcal{J}} p$, $\varphi(x_{i_0}) \geq_{\mathcal{J}} p$ et $\varphi(x_{j_0}) \geq_{\mathcal{J}} p$.
– Cas 3 : $j_0 - i_0 \geq 2$. Soit $r = \varphi(x_{i_0})$, $s = \varphi(x_{i_0+1} \dots x_{j_0-1})$ et $t = \varphi(x_{j_0})$. On a $rs \geq_{\mathcal{J}} p$, $st \geq_{\mathcal{J}} p$ et $rst <_{\mathcal{J}} p$. De plus, $x_{i_0} \in Y_{n+1,r}$ et $x_{j_0} \in Y_{n+1,t}$ donc $x \in A^{W_{n+1}} J A^{W_{n+1}}$ ce qui est une contradiction.

□

Pour tout $p \in S$, on obtient une expression de $X_{n+1,p}$ contenant des ensembles de la forme $Y_{n+1,s}$ où $s \in S$ mais aussi de la forme $X_{n+1,s}$. Le lemme suivant montre que les ensembles $X_{n+1,s}$ apparaissant dans l'expression vérifient $s >_{\mathcal{J}} p$.

Lemme 71 *Quel que soit S $\diamond$-semigroupe fini apériodique et quels que soient p, r, s et t des éléments de S,*
i) *si $p \leq_{\mathcal{R}} r$ alors $p <_{\mathcal{J}} r$;*
ii) *si $p \leq_{\mathcal{L}} r$ alors $p <_{\mathcal{J}} r$;*
iii) *si $rs \geq_{\mathcal{J}} p$, $st \geq_{\mathcal{J}} p$ et $rst <_J p$ alors $s >_{\mathcal{J}} p$.*

Preuve. Soit S un $\diamond$-semigroupe fini apériodique et soient p, r, s, $t \in S$.
i) Supposons que $p <_{\mathcal{R}} r$. Alors $p \leq_{\mathcal{J}} r$ donc $p \leq_{\mathcal{J}} r$. De plus $p \mathrel{\mathcal{J}} r$ et $p \leq_{\mathcal{R}} r$ implique $p \mathrel{\mathcal{R}} r$. Donc $r >_{\mathcal{J}} p$.
ii) Similaire à **i)**.
iii) Supposons que $rs \geq_{\mathcal{J}} p$, $st \geq_{\mathcal{J}} p$ et $rst <_{\mathcal{J}} p$. Il existe $a, b, c, d \in S$ tels que $p = arsb = cstd$, donc $p \leq_{\mathcal{J}} s$. Par l'absurde, si $p \mathrel{\mathcal{J}} s$, il existe $u, v \in S$ tels que $s = upv$ donc en utilisant le lemme 68 on obtient $s = uarsbv = uars$, $p = cuarstd$ et $p \leq_{\mathcal{J}} rst$ ce qui est une contradiction. D'où $s >_{\mathcal{J}} p$. □

On obtient alors le résultat en utilisant une induction sur la $\mathcal{D}$-classe.

Proposition 72 *Quel que soit le $\diamond$-semigroupe fini apériodique S et quel que soit le morphisme de $\diamond$-semigroupe $\varphi : A^\diamond \longrightarrow S$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in S$, $X_{n,p} \in SF_n$.*

Preuve. Soit S un $\diamond$-semigroupe fini apériodique et soit $\varphi : A^\diamond \longrightarrow S$. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que quel que soit $p \in S$, $X_{n,p} \in SF_n$. Supposons que $n = 0$ et soit $p \in S$. L'ensemble $\varphi^{-1}(p) \cap A^*$ est reconnu par le semigroupe fini apériodique support de S. Le théorème de Schützenberger donne alors $X_{0,p} \in SF_0$. Soit $0 \leq n$. Par hypothèse de récurrence, pour tout $p \in S$, $X_{n,p} \in SF_n$ donc $X_{n,p} \in SF_{n+1}$ d'après le corollaire 65. D'autre part, le lemme 64 donne $(A^{W_n})^\omega \in SF_{n+1}$ et $(A^{W_n})^{-\omega} \in SF_{n+1}$. En utilisant le lemme 67, pour tout $p \in S$, $Y_{n+1,p} \in SF_{n+1}$. On montre que pour tout $p \in S$, $X_{n+1,p} \in SF_{n+1}$ par induction sur la $\mathcal{D}$classe de p. Notons que le lemme 70 peut se récrire avec les même notations :

$$\begin{aligned} X_{n+1,p} = \quad & ((R \cup RA^{W_{n+1}}) \cap (L \cup A^{W_{n+1}} L)) \\ & \setminus (J \cup A^{W_{n+1}} J \cup JA^{W'_{n+1}} \cup A^{W_{n+1}} JA^{W_{n+1}}). \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que R, L et J appartiennent à SF_{n+1} pour conclure.

- Supposons que pour tout $s \in S$, $p \geq_{\mathcal{J}} s$. D'après le lemme 71, $R = \bigcup_{s\mathcal{R}p} Y_{n+1,s}$, $L = \bigcup_{s\mathcal{L}p} Y_{n+1,s}$ et $J = \bigcup_{s<_{\mathcal{J}}p} Y_{n+1,s} \cup \bigcup_{\substack{r\geq_{\mathcal{J}}p,\\ s\geq_{\mathcal{J}}p,\\ rs<_{\mathcal{J}}p}} Y_{n+1,r}Y_{n+1,s}$ donc $X_{n+1,p} \in SF_{n+1}$.
- Soit $p \in S$. D'après l'hypothèse d'induction sur la $\mathcal{D}$-classe, pour tout $s \in S$ tel que $s >_{\mathcal{J}} p$, $X_{n+1,s} \in SF_{n+1}$. D'après les lemmes 70 et 71, on obtient $X_{n+1,p} \in SF_{n+1}$.

$\square$

On a montré que tout ensemble de rang fini n reconnu par un $\diamond$-semigroupe fini apériodique appartient à SF_n.

Proposition 73 *Tout ensemble de rang fini et reconnu par un $\diamond$-semigroupe fini apériodique est sans étoile.*

La construction est illustrée par l'exemple suivant.

Exemple 66 Soit $S = \{e, f, s, 0\}$ le $\diamond$-semigroupe dont le produit est défini par

$$ee = e\ ,\ \ ff = sf = ef = f\ ,\ \ ss = fs = fe = es = se = s \text{ et } \ e^{\tau} = f$$

tous les autres produits valant 0.

$$\boxed{e^*}$$

$$\boxed{s^*}\boxed{f^*}$$

$$\boxed{0^*}$$

Soit φ le morphisme défini pour tout $a \in A$ par $\varphi(a) = e$. Comme S ne contient que des idempotents, il est apériodique et on cherche une expression sans étoile de $X = \varphi^{-1}(f) = (A^{\omega})^{+}$. Pour le rang 0, le seul ensemble non vide est $X_{0,e} = A^{+}$ d'où $Y_{1,e} = A^{+}$, $Y_{1,f} = A^{\omega}$ et $Y_{1,0} = A^{-\omega}$. Pour $X_{1,e}$ avec les notations du Lemme 70, $R = A^{+}$, $L = A^{+}$ et $J = A^{-\omega} \cup A^{-\omega}$ d'où $X_{1,e} = A^{+} = (A^{+}A^{W_1} \cap A^{W_1}A^{+}) \setminus A^{W_1}(A^{-\omega} \cup A^{-\omega})A^{W_1}$. Pour $X_{1,f}$, il vient, $R = A^{\omega}$, $L = A^{\omega}$ et $J = A^{-\omega}$ d'où $X = X_{1,f} = (A^{\omega}A^{W_1} \cap A^{W_1}A^{\omega}) \setminus A^{W_1}A^{-\omega}A^{W_1}$.

5.4 Des langages sans étoile vers les $\diamond$-semigroupes apériodiques

Quel que soit l'entier naturel n, rappelons que SF_n est le plus petit ensemble contenant $\{a\}$ pour tout $a \in A$ et fermé par produit fini et par les opérations booléennes où le complément est pris par rapport à l'ensemble A^{W_n}. On prouve que l'ensemble des langages reconnus par un $\diamond$-semigroupe fini apériodique vérifie ces propriétés de fermeture. Le produit de Schützenberger de deux semigroupes S et T, noté $S \diamond T$ est l'ensemble $S \times \mathcal{P}(S^1 \times T^1) \times T$ muni du produit fini défini par :

$$(s_1,\ P_1,\ t_1) \cdot (s_2,\ P_2,\ t_2) = (s_1s_2,\ s_1P_2 \cup P_1t_2,\ t_1t_2)$$

où $s_1P_2 = \{(s_1s_2,\ t_2) \mid (s_2,\ t_2) \in P_2\}$ et $P_1t_2 = \{(s_1,\ t_1t_2) \mid (s_1,\ t_1) \in P_1\}$.
Un élément $(s,\ P,\ t)$ de $S \diamond T$ est représenté par la matrice $\begin{bmatrix} s & P \\ 0 & t \end{bmatrix}$ et le produit fini est le produit matriciel. Pour tous les $\diamond$-semigroupes finis S et T, on étend $S \diamond T$ en un $\diamond$-semigroupe en définissant les fonctions τ et $-\tau$ pour tout $(s, P, t) \in S \diamond T$ par

$$\begin{bmatrix} s & P \\ 0 & t \end{bmatrix}^{\tau} = \begin{bmatrix} s^{\tau_s} & \{(s^k s', t't^{\tau_t}) \mid k \in \mathbb{N},\ (s', t') \in P\} \cup \{(s^{\tau_s}, 1)\} \\ 0 & t^{\tau_t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s & P \\ 0 & t \end{bmatrix}^{-\tau} = \begin{bmatrix} s^{-\tau_s} & \{(s^{-\tau_s} s', t't^{k}) \mid k \in \mathbb{N},\ (s', t') \in P\} \cup \{(1, t^{-\tau_t})\} \\ 0 & t^{-\tau_t} \end{bmatrix}$$

où τ_s, $-\tau_s$, τ_t et $-\tau_t$ représentent les fonctions définissant S et T.

Lemme 74 *Soient S et T des $\diamond$-semigroupes finis. Les fonctions τ et $-\tau$ sont compatibles respectivement à droite et à gauche avec $S \diamond T$.*

Preuve. On montre que τ est compatible à droite avec $S \diamond T$. La preuve concernant $-\tau$ peut se faire de façon symétrique. Soit $r \in S \diamond T$ et soit $n \in \mathbb{N}$. On montre que $(r^n)^\tau = r^\tau$. Notons $r = (s, P, t)$.

$$(r^n)^\tau \quad = \quad \begin{bmatrix} s^n & \bigcup_{i=0}^{n-1} s^i P t^{n-1-i} \\ 0 & t^n \end{bmatrix}^{\tau} \quad = \quad \begin{bmatrix} s^{\tau_s} & E \cup \{(s^{\tau_s}, 1)\} \\ 0 & t^{\tau_t} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} E = \quad & \{(s^{nk}s', t'(t^n)^{\tau_t}) \mid k \in N, (s', t') \in \bigcup_{i=0}^{n-1} s^i P t^{n-1-i}\} \\ = \quad & \bigcup_{i=0}^{n-1} \{(s^{nk+i}s', t't^{n-1-i}t^{\tau_t}) \mid k \in N, (s', t') \in P\} \\ = \quad & \bigcup_{i=0}^{n-1} \{(s^{nk+i}s', t't^{\tau_t}) \mid k \in N, (s', t') \in P\} \\ = \quad & \{(s^k s', t't^{\tau_t}) \mid k \in N, (s', t') \in P\} \end{aligned}$$

On montre à présent que quels que soient $r_1, r_2 \in S \diamond T$, $r_1(r_2r_1)^\tau = (r_1r_2)^\tau$.

Soient $r_1, r_2 \in S \diamond T$ notés $r_1 = (s_1, P_1, t_1)$ et $r_2 = (s_2, P_2, t_2)$.

$$\begin{aligned} r_1(r_2r_1)^\tau \quad &= \begin{bmatrix} s_1 & P_1 \\ 0 & t_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s_2s_1)^{\tau_s} & \{((s_2s_1)^k s', t'(t_2t_1)^{\tau_t}) \mid (s', t') \in s_2P_1 \cup P_2t_1\} \cup \{((s_2s_1)^{\tau_s}, 1)\} \\ 0 & (t_2t_1)^{\tau_t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (s_1s_2)^{\tau_s} & E \cup \{((s_1s_2)^{\tau_s}, 1)\} \\ 0 & (t_1t_2)^{\tau_t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$
\begin{array}{rlll}
E = & s_1\{((s_2s_1)^k s', t'(t_2t_1)^{\tau_t}) \mid (s',t') \in s_2P_1 \cup P_2t_1\} & \cup & P_1(t_2t_1)^{\tau_t} \\
= & \{(s_1(s_2s_1)^k s_2 s', t'(t_2t_1)\tau_t) \mid (s',t') \in P_1\} & \cup & \{(s', t'(t_2t_1)^{\tau_t}) \mid (s',t') \in P_1\} \\
\cup & \{(s_1(s_2s_1)^k s', t't_1(t_2t_1)^{\tau_t}) \mid (s',t') \in P_2\} & & \\
= & \{((s_1s_2)^{k+1} s', t'(t_1t_2)^{\tau_t}) \mid k \in N, (s',t') \in P_1t_2\} & \cup & \{(s', t'(t_1t_2)^{\tau_t}) \mid (s',t') \in P_1t_2\} \\
\cup & \{((s_1s_2)^k s', t'(t_1t_2)^{\tau_t}) \mid (s',t') \in s_1P_2\} & & \\
= & \{((s_1s_2)^k s', t'(t_1t_2)^{\tau_t}) \mid k \in N, (s',t') \in P_1t_2 \cup P_1t_2\} & &
\end{array}
$$

d'où $r_1(r_2r_1)^\tau = (r_1r_2)^\tau$ ce qui conclut que τ est compatible à droite avec $S \diamond T$.
$\square$
D'après la proposition 45, le $\diamond$-semigroupe $S \diamond T$ est donc bien défini. De plus le produit de Schützenberger de deux $\diamond$-semigroupes apériodiques est apériodique.

Proposition 75 *L'ensemble des $\diamond$-semigroupes finis apériodiques est fermé par produit de Schützenberger.*

Preuve. Soient S et T deux $\diamond$-semigroupes finis apériodiques. On dispose de deux entiers k_s et k_t tels que quel que soit $s \in S$, $s^{k_s} = s^{k_s+1}$ et quel que soit $t \in T$, $t^{k_t} = t^{k_{t+1}}$. On montre que pour tout $r \in S \diamond T$, $r^{k_s+k_t+1} = r^{k_s+k_t+2}$.

Soit $(s, P, t) \in S \diamond T$. Notons que quel que soit $k \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{bmatrix} s & P \\ 0 & t \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} s^k & \bigcup_{i=0}^{k-1} s^i P t^{k-1-i} \\ 0 & t^k \end{bmatrix}
$$

Puisque $s^{k_s+k_t+1} = s^{k_s+k_t+2}$ et $t^{k_s+k_t+1} = t^{k_s+k_t+2}$, il suffit de montrer l'égalité suivante :

$$
\begin{array}{rlll}
\bigcup_{i=0}^{k_s+k_t+1} s^i P t^{k_s+k_t+1-i} & = \bigcup_{i=0}^{k_s} s^i P t^{k_s+k_t+1-i} & \cup & \bigcup_{i=k_s+1}^{k_s+k_t+1} s^i P t^{k_s+k_t+1-i} \\
& = \bigcup_{i=0}^{k_s} s^i P t^{k_s+k_t-i} & \cup & \bigcup_{i=k_s+1}^{k_s+k_t+1} s^{i-1} P t^{k_s+k_t-(i-1)} \\
& = \bigcup_{i=0}^{k_s} s^i P t^{k_s+k_t-i} & \cup & \bigcup_{i=k_s}^{k_s+k_t} s^i P t^{k_s+k_t-i} \\
& = \bigcup_{i=0}^{k_s+k_t} s^i P t^{k_s+k_t-i} & &
\end{array}
$$

$\square$

Soient $\varphi : A^\diamond \longrightarrow S$ et $\psi : A^\diamond \longrightarrow T$ deux morphismes de $\diamond$-semigroupe. L'application $\varphi \diamond \psi$ définie pour tout $a \in A$ par

$$
\varphi \diamond \psi(a) = \begin{bmatrix} \varphi(a) & \{(\varphi(a), 1), (1, \psi(a))\} \\ 0 & \psi(a) \end{bmatrix}
$$

peut être étendue de façon unique en un morphisme de $\diamond$-semigroupe vérifiant la propriété ci-dessous.

Lemme 76 *Pour tout entier n et tout mot u de rang au plus n,*

$$\varphi \diamond \psi(u) = \begin{bmatrix} \varphi(u) & \{(\varphi(v), \psi(w)) \mid u = vw\} \\ 0 & \psi(u) \end{bmatrix}$$

Preuve. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Soit $u \in A^{W_0}$. Par définition de $\varphi \diamond \psi$, la propriété est satisfaite pour toute lettre $a \in A$. De plus, la propriété est stable par produit fini : quels que soient u et u' satisfaisant le lemme,

$$\begin{aligned}
\varphi \diamond \psi(uu') &= \varphi \diamond \psi(u)\ \varphi \diamond \psi(u') \\
&= \begin{bmatrix} \varphi(u) & \{(\varphi(v), \psi(w)) \mid u = vw\} \\ 0 & \psi(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(u') & \{(\varphi(v), \psi(w)) \mid u' = vw\} \\ 0 & \psi(u') \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \varphi(uu') & \{(\varphi(uv), \psi(w)) \mid u' = vw\} \cup \{(\varphi(v), \psi(wu')) \mid u = vw\} \\ 0 & \psi(uu') \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \varphi(uu') & \{(\varphi(v), \psi(w)) \mid uu' = vw\} \\ 0 & \psi(uu') \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $u \in A^{W_{n+1}}$. Par hypothèse de récurrence et par ce qui précède, il suffit de traiter le cas où $|u| \in (W_n)^\omega$ ou $|u| \in (W_n)^{-\omega}$. Comme ces deux cas sont symétriques, on suppose que $|u| \in (W_n)^\omega$. On dispose d'une factorisation $u = \prod_{i \in \omega} u_i$ et d'une paire liée à droite $(r, e) \in S \diamond T \times E(S \diamond T)$ tels que $\varphi \diamond \psi(u_0) = r$ et pour tout $i > 0$, $\varphi \diamond \psi(u_i) = e$. On montre le résultat pour $u' = \prod_{i>0} u_i$. Notons $e = (s, P, t)$. Comme $\varphi(u') = s^{\tau_s}$ et $\psi(u') = t^{\tau_t}$, il suffit de prouver que

$$\{(s^{\tau_s}, 1)\} \cup \{(s^k s', t' t^{\tau_t}) \mid k \in N, (s', t') \in P\} = \{(\varphi(v), \psi(w)) \mid vw = u'\}.$$

Soient v, $w \in A^{W_{n+1}}$ tels que $u' = vw$. Si $w = \epsilon$ alors $(\varphi(v), \psi(w)) = (s^{\tau_s}, 1)$. Sinon $w \neq \epsilon$ et il existe $k > 0$ et v', $w \in A^{W'_{n+1}}$ tels que $v = u_1 \ldots u_k v'$, $w = w' u_{k+2} \ldots$ et $v'w' = u_{k+1}$. Comme $\varphi \diamond \psi(u_{k+1}) = e$ et $|u_{k+1}| \in W_n$, l'hypothèse d'induction donne $(\varphi(v'), \psi(w')) \in P$ et donc $(\varphi(v), \psi(w)) = (\varphi(u_1 \ldots u_k)\varphi(v'),$ $\psi(w')\psi(u_{k+2} \ldots)) = (s^k s', t' t^{\tau_t})$ avec $(s', t') \in P$ ce qui conclut l'inclusion de la droite vers la gauche.

Réciproquement, soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $(s', t') \in P$. D'après l'hypothèse d'induction, il existe v', $w' \in A^{W_n}$ tels que $(s', t') = (\varphi(v'), \psi(w'))$ et $u_{k+1} = v'w'$. Donc, $(s^k s', t' t^{\tau_t}) = (\varphi(u_1 \ldots u_k v'), \psi(w' u_{k+2} \ldots))$. De plus, $(s^{\tau_s}, 1) = (\varphi(u'), \psi(\epsilon))$ ce qui conclut la preuve. □

On déduit de ce lemme 76 que la classe des ensembles reconnus par des $\diamond$-semigroupes finis apériodiques est fermée par produit fini et opérations booléennes.

Théorème 77 *Un ensemble de rang fini est sans étoile si et seulement si il est reconnu par un $\diamond$-semigroupe fini et apériodique.*

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $X \subseteq A^{W_n}$ et $Y \subseteq A^{W_n}$. Supposons que X et Y sont reconnus par des $\diamond$-semigroupes finis apériodiques S et T. On dispose de φ :