

# La transformée de Radon sur lignes brisées en forme de lettre V

---

En 1997, Basko [6] est le premier à introduire l'idée d'une transformée de Radon sur une paire de demi droites formant le motif d'une lettre V en essayant de modéliser la formation d'image tomographique utilisant une caméra Compton unidirectionnelle [74]. Dans ce cas précis l'axe de symétrie de la ligne brisée était non fixe et pouvait tourner autour d'un point du plan représentant la couche de détecteur (où se produit la diffusion dans une caméra Compton), mais l'inversion de cette transformée n'a pas été trouvée analytiquement. Il faudra ensuite attendre les travaux de Nguyen [51] et de Florescu [26] sur des géométries à axe fixe pour voir l'apparition des premières transformées de Radon sur des lignes brisées inversibles analytiquement.

Dans ce chapitre nous allons dans un premier temps mettre en œuvre le calcul analytique des problèmes direct et inverse d'une classe de transformée de Radon sur des lignes brisées avec une direction des axes de symétrie fixée (TRV).

Nous allons donc étudier la TRV dans plusieurs procédés d'imagerie : le premier où nous incorporerons un miroir pour aboutir à une tomographie par transmission et réflexion de rayons X, le second est l'imagerie d'émission à partir du rayonnement gamma diffusé et le troisième est la toute première bimodalité en tomographie utilisant le rayonnement diffusé. Dans ces nouvelles imageries le mouvement du détecteur est réduit au minimum alors que dans la tomographie conventionnelle la rotation relative entre le détecteur et l'objet sous étude est obligatoire (ce qui peut devenir un problème rédhibitoire dans certaines applications). De plus, nous avons développé un algorithme de correction de l'atténuation innovant pour ces nouvelles imageries.

## II.1 Application de la TRV en tomographie par transmission-réflexion

En tomographie conventionnelle, une source ponctuelle de rayons X calibrée émet à travers une coupe en deux dimensions d'un objet le long d'une ligne droite avant que

chaque photon atteint un détecteur. Dans ce cas précis, l'atténuation subit par le rayonnement est exprimée par la transformée de Radon classique.

Au lieu d'utiliser simplement une représentation sur des lignes droites, nous allons généraliser la transformée de Radon sur des lignes brisées ce qui permet de représenter la mesure de l'atténuation du rayonnement X le long d'une trajectoire en forme de V.

L'idée physique pour réaliser ceci sera de briser la trajectoire rectiligne en utilisant un miroir adapté et cette cassure serait localisé en un point  $\mathbf{R}$  comme le montre la figure II.1(b). Les miroirs qui réfléchissent les rayonnements X ont de nombreuses applications en optique et astrophysique fondamental (NASA ...), nous pourrions citer notamment les miroirs Gobel [36]. Les données requièrent un nombre important d'angle d'incidence  $\theta$  sur le miroir (qui seront obtenu par une variation de la distance  $\mathbf{SD}$  comme sur la figure II.1(a). L'autre paramètre à faire varier sera le point de réflexion  $x_R$  qu'on pourra faire varier par translation de l'objet par exemple.

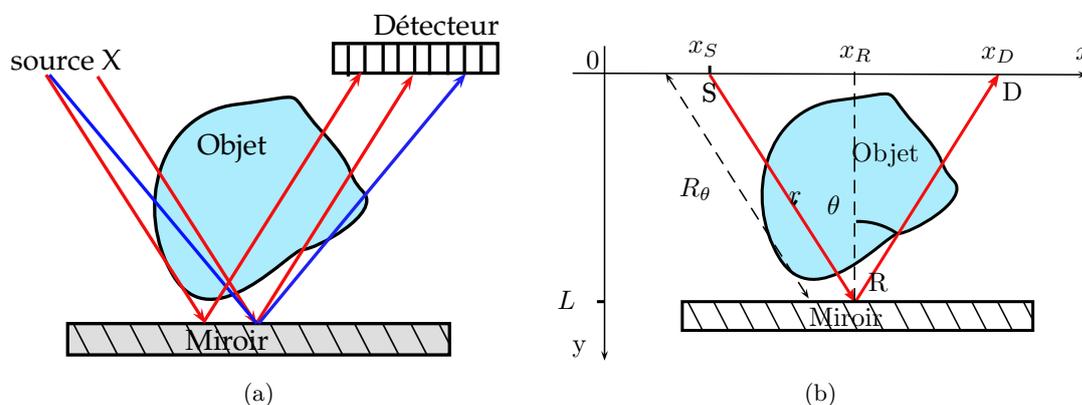


FIGURE II.1 – Principes de fonctionnement de l'imagerie transmission-réflexion

Ce type de système est un nouveau type de scanner couplant les phénomènes de transmission et de réflexion et qui pourrait être utilisé là où le mouvement de rotation est problématique car ici ce dernier est remplacé par un mouvement de translation, ce qui est très appréciable par exemple pour le contrôle de bagages dans les aéroports ou le contrôle de convoyeurs.

### II.1.1 Modélisation de l'imagerie de transmission-réflexion

Les figures II.1(a) et II.1(b) montrent schématiquement le fonctionnement principal de cette nouvelle modalité d'imagerie. Une série de points sources à intensité calibrée est alignée et une autre série de points détecteurs est placée sur cette même ligne. A l'opposé, nous placerons le miroir qui réfléchira le rayonnement émis vers les points détecteurs. Donc l'ensemble de la trajectoire de la radiation s'effectue sur une ligne brisée en forme de V, dont le sommet est à la surface du miroir et dont l'angle d'ouverture varie pour chaque paire source-détecteur.

En tradant parallèlement à l'axe source-détecteur et en considérant tous les angles de réflexion sur le miroir nous pouvons compléter notre jeu de donnée et ainsi remplacer

la rotation habituelle des scanners.

Pour exprimer l'évolution du flux de photons, nous nous plaçons pour l'instant dans un cas optimal (sans diffusion). L'idée basique est de considérer un point source ponctuel  $\mathbf{S}$  émettant un flux de radiation primaire à travers l'objet. En sortie d'objet, les photons sont réfléchis en un point  $\mathbf{R}$  du miroir puis après un passage à nouveau à travers le milieu sont collectés en un point détecteur  $\mathbf{D}$ . La physique du modèle requiert que toute la densité du flux de radiation  $\widehat{g}(\mathbf{D})$  enregistrée en un point  $\mathbf{D}$  est due à tous les sites potentiels  $\mathbf{R}$  reliant un point source  $\mathbf{S}$  quelconque à ce même point  $\mathbf{D}$  (chaque couple de point source-détecteur étant symbolisé par une variation d'angle  $\theta$  avec  $0y$ ).

Dans ce cadre, nous pouvons distinguer deux étapes :

1. De  $\mathbf{S}$  à  $\mathbf{R}$  : le flux de photon est incident, possédant une énergie initiale  $E_0$ , est soumis à un facteur d'atténuation dû à l'objet.
2. De  $\mathbf{R}$  à  $\mathbf{D}$  : L'intensité des rayonnements réfléchies est diminuée par un coefficient du miroir  $c(\theta)$  (nous utiliserons par la suite régulièrement la notation  $p(\theta) = \ln(c(\theta))$ ) représentant la réflexion partielle sur de tel miroir. Ce coefficient est malheureusement aussi dépendant de l'angle d'incidence. Puis le flux de photon sera à nouveau soumis à un coefficient d'atténuation en retraversant l'objet.

Force est de constater qu'on aura une perte sèche au niveau du flux importante car il sera soumis à un passage plus long dans un milieu diffusant, aux imperfections du miroir et à un effet de durcissement du flux plus important.

Posons la fonction positive à support compact  $f(x, y)$  représentant la carte d'atténuation inconnue de l'objet.

Par analogie avec la transformée de Radon classique (voir le premier chapitre), nous allons maintenant écrire la transformée directe dans notre cas. Nous utiliserons la paramétrisation  $(x_R, \theta)$  pour notre transformée.

Les données projetées  $\widehat{g}(x_R, \theta)$  mesurées au point  $x_D$  ( $x_D = x_R + L \times \tan(\theta)$ ) après avoir été émis à un site  $x_S$  ( $x_S = x_R - L \times \tan(\theta)$ ) et subi un angle de réflexion  $\theta$  (voir Fig. II.1(b)) peut être écrit comme la transformée de Radon suivant :

$$\begin{aligned}
 \widehat{g}(x_R, \theta) &= \mathcal{V}\widehat{f}(x_R, \theta) \\
 &= \frac{1}{\cos(\theta)} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\delta(x - x_R - y \tan(\theta))dx dy + p(\theta) \\
 &\quad + \frac{1}{\cos(\theta)} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\delta(x - x_R + y \tan(\theta))dx dy \\
 &= \int_0^\infty f(x_R + r \sin(\theta), r \cos(\theta))dr + p(\theta) + \int_0^\infty f(x_R - r \sin(\theta), r \cos(\theta))dr
 \end{aligned}
 \tag{II.1}$$

Cette équation définit la transformée de Radon sur des lignes brisées (*TRV1*) et décrit l'acquisition des données sur les récepteurs et ainsi l'équation de la formation d'images de notre nouvelle modalité d'imagerie par transmission-réflexion. Maintenant nous allons continuer notre analyse avec pour l'instant un coefficient  $p(\theta)$  nul (miroir parfait sans perte). Ce coefficient additif que l'on peut calibrer pouvant être compensé en post traite-

ment .

On constate donc que l'écriture de l'équation (II.1) peut aussi s'écrire si nous négligeons  $p(\theta)$  sous la forme d'une transformée intégrale dans  $\mathbb{R}^2$  avec un noyau de Dirac concentré sur la ligne V :

$$g(x_R, t) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \kappa(x_R, \theta | x, y) dx dy, \quad (\text{II.2})$$

avec  $t = \tan \theta$  et

$$\kappa(x_R, \theta | x, y) = \delta((x - x_R) \cos(\theta) - y \sin(\theta)) + \delta((x - x_R) \cos(\theta) + y \sin(\theta)) \quad (\text{II.3})$$

Donc l'image d'un point source donné à  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  est la somme de deux distributions de Dirac, qui a un support sur le plan  $(t, x_R)$ , constituant deux demi-droites, avec  $t > 0$ , croisant l'axe des  $x_R$  à  $x = x_R$  et ayant une pente de  $\pm y^{-1}$  i.e.

$$\theta = \arctan \left| \frac{x - x_R}{y} \right| \quad (\text{II.4})$$

Dans la représentation  $(\theta, x_R)$ , le support d'un point source est juste une courbe d'arctangente, ce qui implique que le support de cette transformée est non compact dans cette représentation.

L'opérateur adjoint de cette transformée peut s'écrire :

$$\mathcal{V}^\dagger \hat{f}(x_R, \theta) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{\cos(\theta)} g(x + y \tan(\theta), \theta) d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(\theta)} g(x - y \tan(\theta), \theta) d\theta. \quad (\text{II.5})$$

Cet opérateur revient à un opérateur classique de rétroprojection mais ici pour la transformée de Radon sur lignes brisées.

### II.1.2 Inversion de la transformée de Radon sur des lignes brisées

Nous allons maintenant donner la méthode d'inversion analytique de cette transformée [78].

On utilise maintenant plus naturellement le paramètre  $t = \tan \theta$  en lieu et place de  $\theta$ . Nous pouvons établir une relation entre la transformée de Radon et la transformée de Fourier pour obtenir l'inverse de la transformée de Radon en ligne V ( $(TRV_1)^{-1}$ ). Pour la transformée de Radon classique, nous avons déjà vu qu'une telle relation existe avec le théorème de la coupe centrale [5]. Notons  $\tilde{f}(q, y)$  (resp.  $\tilde{g}(q, t)$ ) la transformée de Fourier unidimensionnelle suivant la variable  $x$  (resp.  $(x_R)$ ) de la carte d'atténuation  $f(x, y)$  (resp.  $g(x_R, t)$ ),

$$\begin{aligned} g(x_R, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(q, t) e^{2i\pi q x_R} dq \\ f(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(q, y) e^{2i\pi q x} dq. \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

L'équation (II.1) devient avec le changement de variable  $z = r \cos(\theta)$

$$\text{pour } \theta \in [0, \pi/2] \quad \frac{\tilde{g}(q, t)}{\sqrt{1+t^2}} = \int_0^\infty \tilde{f}(q, z) 2 \cos(2\pi qzt) dz \quad (\text{II.7})$$

$$\text{pour } \theta \in [-\pi/2, 0] \quad \frac{\tilde{g}(q, -t)}{\sqrt{1+t^2}} = \int_0^\infty \tilde{f}(q, -z) 2 \cos(2\pi qzt) dz. \quad (\text{II.8})$$

Nous multiplions (II.7) (resp. (II.8)) des deux côtés par  $\int_0^\infty 2 \cos(2\pi zt) dt$  et en utilisant l'identité suivante

$$\int_0^\infty 4 \cos(2\pi \eta x) \cos(2\pi \eta' x) dx = \delta(\eta + \eta') + \delta(\eta - \eta'), \quad (\text{II.9})$$

nous obtenons

$$\text{pour } \theta \in [0, \pi/2] \quad \tilde{f}(q, z) = |q| \int_0^\infty \frac{\tilde{g}(q, t)}{\sqrt{1+t^2}} 2 \cos(2\pi qtz) dt, \quad (\text{II.10})$$

$$\text{pour } \theta \in [-\pi/2, 0] \quad \tilde{f}(q, -z) = |q| \int_0^\infty \frac{\tilde{g}(q, -t)}{\sqrt{1+t^2}} 2 \cos(2\pi qtz) dt. \quad (\text{II.11})$$

Donc pour une plage angulaire complète, nous pouvons utiliser la formule unifiée suivante :

$$\tilde{f}(q, z) = |q| \int_0^\infty 2 \cos(2\pi qtz) \cdot H(z) \tilde{g}(q, t) \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} + |q| \int_0^\infty 2 \cos(2\pi qtz) \cdot H(-z) \tilde{g}(q, -t) \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}, \quad (\text{II.12})$$

où  $H(\cdot)$  est la fonction de Heaviside.

On en déduit que  $f(x, y)$  peut être reconstruite par la transformée de Fourier suivante

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2 \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \int_{\mathbb{R}} |q| \cos(2\pi qty) \tilde{w}(y, t) e^{2i\pi qx} dq \\ &= \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x-ty} \frac{\partial}{\partial z} \hat{w}(y, t) dz \\ &+ \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x+ty} \frac{\partial}{\partial z} \hat{w}(y, t) dz \quad (\text{II.13}) \\ &= \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} (h(x-ty) + h(x+ty)) \\ &= \int_0^{\pi/2} [h(x-y \tan \theta, \theta) + h(x+y \tan \theta, \theta)] d\theta, \end{aligned}$$

avec  $\mathcal{F}$  l'opérateur de Fourier, v.p. la valeur principale au sens de Cauchy,

$$h(y, \theta) = \mathcal{F}^{-1} [|q| \cdot \mathcal{F} [w(y, \theta)]] (y) \quad (\text{II.14})$$

et

$$\begin{aligned} w(y, \theta) &= [H(y) \mathcal{V} f(x, \theta) + H(-y) \mathcal{V} f(x, -\theta)] (q) \\ \tilde{w}(y, t) &= (H(y) \tilde{g}(q, t) + H(-y) \tilde{g}(q, -t)) \quad (\text{II.15}) \\ \hat{w}(y, t) &= (H(y) \mathcal{V} f(z, t) + H(-y) \mathcal{V} f(z, -t)). \end{aligned}$$

Cette expression est une somme de deux intégrales et se rapproche au final d'une transformée de Radon classique et peut être vue comme une somme de deux transformées de Radon sur des demi-droites. En science de l'imagerie, l'équation (II.13) est appelée une "somme d'image" de données de Radon rétroprojectées ([5]), ce qui permet l'utilisation d'algorithmes de rétroprojection. Ceci a donc l'avantage d'offrir des algorithmes rapides. Techniquement nous allons donc assigner la valeur  $g(x_R, t) = \hat{g}(x_R, \theta)$  à tous les points sur la ligne V, qui ont contribué à donner cette valeur. Nous regarderons les résultats de cet algorithme dans la partie simulation.

### II.1.3 Implémentation et résultats

Bien que faisant partie intégrante de l'étude de notre classe de transformée de Radon sur des lignes brisées, cette application reste une partie marginale de cette étude qui s'est avant tout portée sur l'imagerie Compton qu'on étudiera juste après. Cette partie simulation est donc non exhaustive mais prouve la faisabilité théorique de cette modalité. Dans cette partie, nous simulons la formation d'images et la reconstruction utilisant la  $TRV_1$  et son inverse sur différents objets dans le cadre du contrôle non destructif (une fissure sur une barre plastique et une valise Fig. II.2(a) et II.3(a)). Pour se concentrer sur l'essentiel, nous n'avons pas pris en compte certains défauts techniques comme le bruit électronique des équipements de mesures, de la même manière nous négligerons le bruit photonique poissonnien qui le quel de très nombreuses méthodes de correction, comme celle à base d'ondelettes ou celle de maximum de vraisemblance, existent mais ce n'est pas ce qui nous importe ici. Ici les images originales sont de taille  $128 \times 128$  pixels et la discrétisation du pas angulaire est de  $\Delta\theta = 0.005$  rad. Fig. II.2(b) et II.3(b) montrent les projections de la transformée  $TRV_1$  de la fissure et de la valise respectivement. Les résultats de la reconstruction sont donnés dans les figures II.2(c) et II.4(e). Nous pouvons notamment voir une bonne reconstruction de la fissure, malgré la présence de quelques artefacts.

L'utilisation de la rétroprojection sur les lignes brisées génèrent plus d'artefacts que la rétroprojection sur des droites dans une transformée de Radon classique, ceci étant dû à un nombre plus important de fausses intersections. Heureusement un grand nombre de ces artefacts se trouvent dans les hautes fréquences et donc un filtre d'apodisation (ici un filtre de Hann) classique limite l'influence de ces derniers.

Néanmoins pour obtenir une reconstruction parfaite, il faudrait faire varier notre angle d'incidence sur l'ensemble de la plage angulaire allant de  $0$  à  $\pi/2$ . Ce qui est bien évidemment impossible car cela voudrait dire faire tendre la distance **SD** (entre la source et le détecteur) vers l'infini pour les angles rasants le miroir. Nous avons donc dû nous limiter fortement à une plage entre  $0$  and  $\pi/4$  dans nos simulations (314 projections pour chaque position de la source). Ceci entraîne donc une perte d'information très importante qui se retrouve tout particulièrement sur les détails suivant l'axe de translation **SD**.

Ce phénomène se retrouve notamment dans la simulation de la valise Fig. II.3(a) (objet qu'on a choisi pour le contexte d'un contrôle des armes illicites). A cause de cette perte d'information citée plutôt, nous pouvons constater une reconstruction approximative de l'image de la valise (voir Fig. II.3(c)).

Cette image montre d'importants artefacts avec l'apparition de lignes obliques à  $45^\circ$ ,

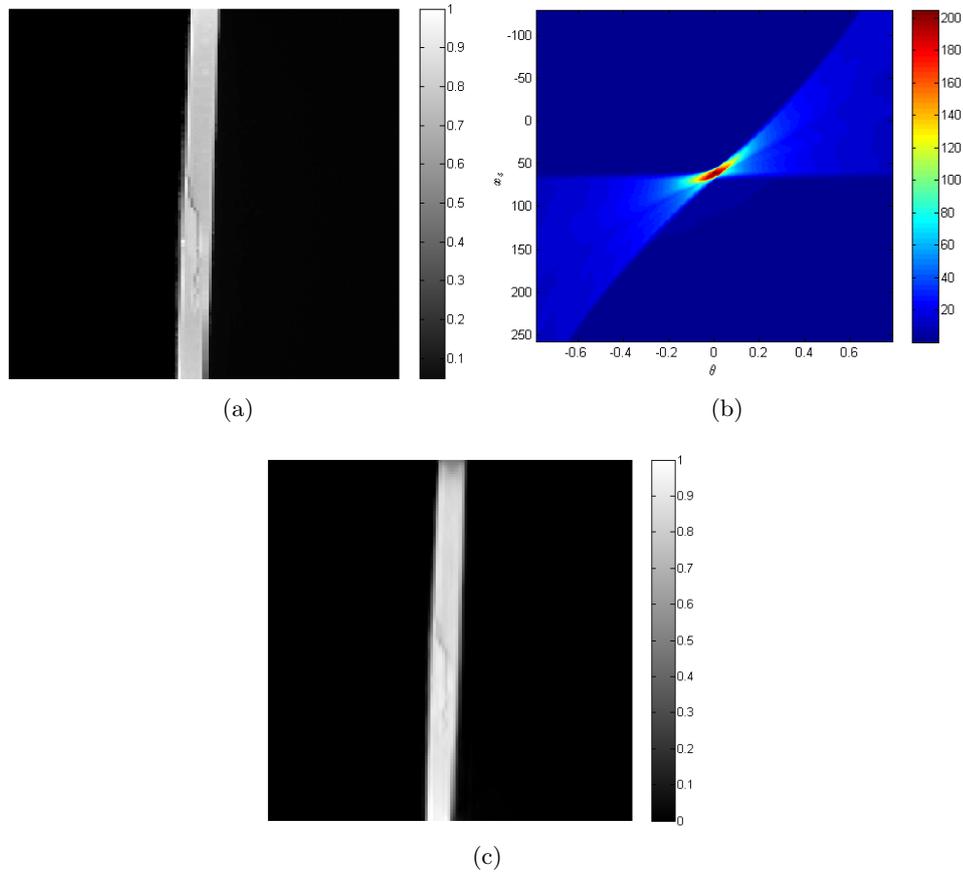


FIGURE II.2 – (a) Image originale de la fissure sur le barreau. (b) Données issues de l’image originale de la Fig. II.2(a) avec la discrétisation angulaire  $\Delta\theta = 0.005$  rad. Sur l’axe des abscisses, nous retrouvons le paramètre  $\theta$  et nous avons le paramètre  $x_S$  sur l’axe des ordonnées. (c) Reconstruction par rétroprojection filtrée de la fissure avec la discrétisation angulaire  $\Delta\theta = 0.005$  rad, nous pouvons notamment voir que les petites structures sont clairement reconstruites.

ce qui correspond à notre borne angulaire ici. Il est important de noter que la perte d’information se retrouve pour tous les contours avec une orientation comprise entre  $\pi/4$  et  $\pi/2$  en terme de  $\theta$  ce qui correspond bien à notre plage réduite.

Il faut donc essayer de compenser cette perte de données.

#### II.1.4 Compensation du manque de données

Une idée possible pour résoudre ce problème est d’utiliser un autre jeu de données en utilisant un autre miroir placé perpendiculairement au premier et donc avec un autre jeu de sources et détecteurs (voir . On peut aussi imaginer seulement une rotation de l’objet étudié de  $\pi/2$  pour obtenir le même résultat.

Cette opération génère donc un autre jeu de données (voir Fig. II.4(c)) correspondant au nouveau set de détecteurs, à partir duquel nous pouvons créer une autre image de reconstruction (Fig.II.4(d)). Une simple fusion (superposition par une simple moyenne de

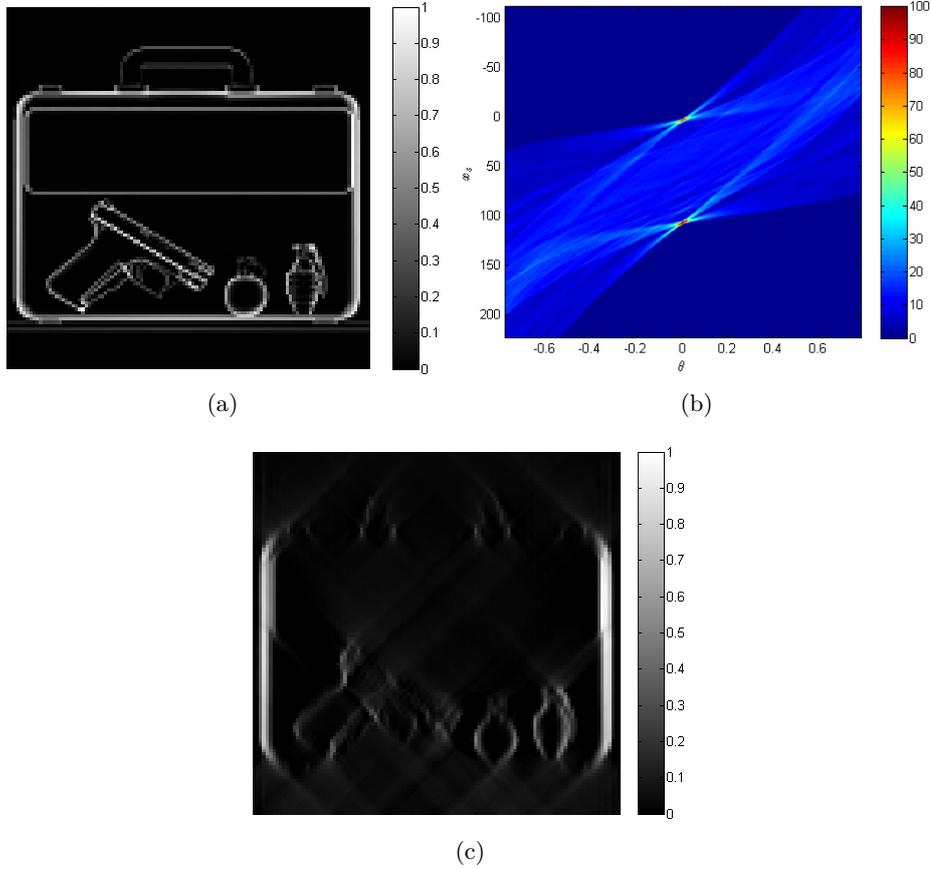


FIGURE II.3 – (a)Image de la valise originale. (b)Projections de l’image montrée en Fig. II.3(a) avec la discrétisation angulaire  $\Delta\theta = 0.005$  rad. Sur l’axe des abscisses, nous retrouvons le paramètre  $\theta$  et nous avons le paramètre  $x_S$  sur l’axe des ordonnées. (c)Reconstruction par rétroprojection filtrée de la valise avec avec la discrétisation angulaire  $d\theta = 0.005$  rad.

ces images après recalage) est suffisante pour donner une image de bonne qualité comme nous pouvons le constater sur la figure II.4(e), ce qui a l’avantage d’être immédiat à implémenter, mais bien entendu d’autres méthodes basées sur des algorithmes de traitement de l’image (méthodes d’extraction de contours ...) peuvent être envisager. Nous pouvons aussi au lieu d’effectuer cette fusion dans l’espace des images, la réaliser dans l’espace des données.

Encore faut-il que cette démarche ait un sens, ce que nous allons démontrer maintenant.

Posons

$$g_1(x_R, \theta) = \int_0^\infty f(x_R + r \sin \theta, r \cos \theta) dr, \quad (\text{II.16})$$

nous pouvons écrire que notre transformée de Radon peut s’écrire comme

$$\mathcal{V}f(x_R, \theta) = g_1(x_R, \theta) + g_1(x_R, -\theta). \quad (\text{II.17})$$

Posons maintenant

$$g_2(x_R, \theta) = \int_0^\infty f(r \cos \theta, x_R + r \sin \theta) dr \quad (\text{II.18})$$

et donc pour la fonction  $f^T$  définie comme  $f^T(x, y) = f(y, x)$ , la  $TRV_1$  de cette fonction peut s'écrire :

$$\mathcal{V}f^T(x_R, \theta) = g_2(x_R, \theta) + g_2(x_R, -\theta). \quad (\text{II.19})$$

Appliquons maintenant le changement de variable  $r' = r + \frac{x_R}{\sin \theta}$  à  $g_1$  :

$$\begin{aligned} g_1(x_R, \theta) &= \int_{\frac{x_R}{\sin \theta}}^{\infty} f(r' \sin \theta, r' \cos \theta - \frac{x_R}{\tan \theta}) dr' \\ g_1(x_R, \frac{\pi}{2} - \theta) &= \int_{\frac{x_R}{\cos \theta}}^{\infty} f(r' \cos \theta, r' \sin \theta - x_R \tan \theta) dr' \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

Si le terme  $\frac{x_R}{\cos \theta}$  est suffisamment petit (ce qui sera le cas en pratique dans l'hypothèse d'une construction d'un appareil imageur), nous pouvons alors identifier la relation entre les mesures  $g_1$  et les mesures  $g_2$  suivante :

$$g_1(x_R, \frac{\pi}{2} - \theta) = g_2(-x_R \tan \theta, \theta). \quad (\text{II.21})$$

Cette relation fait émerger une complémentarité dans les données pour  $\theta \in [0, \pi/4]$  puisque les données manquantes pour  $g_1$  sont obtenues à partir des données  $g_2$ . Cette complémentarité peut également s'interpréter dans le processus de reconstruction :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{\pi/4} (h_1(x - y \tan \theta, \theta) + h_1(x + y \tan \theta, \theta)) d\theta \\ &+ \int_0^{\pi/4} (h_2(y - x \tan \theta, \theta) + h_2(y + x \tan \theta, \theta)) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} (h_1(x - y \tan \theta, \theta) + h_1(x + y \tan \theta, \theta)) d\theta \\ &+ \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left( h_2\left(y - \frac{x}{\tan \theta}, \theta\right) + h_2\left(y + \frac{x}{\tan \theta}, \theta\right) \right) d\theta \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

avec

$$h_1(z, \theta) = \mathcal{F}^{-1} [ |q| \mathcal{F} [ H(z) \mathcal{V}f(x, \theta) + H(-z) \mathcal{V}f(x, -\theta) ] (q) ] (z) \quad (\text{II.23})$$

et

$$h_2(z, \theta) = \mathcal{F}^{-1} [ |q| \cdot \mathcal{F} [ H(z) \mathcal{V}f^T(x, \theta) + H(-z) \mathcal{V}f^T(x, -\theta) ] (q) ] (z) \quad (\text{II.24})$$

Notre démarche est donc ainsi vérifiée, la transposition étant équivalente à la construction de notre deuxième jeu de données. Dans notre exemple, la superposition de nos images entraîne une perte de contraste due au moyennage, pour lequel nous pouvons éventuellement faire un rehaussement de contraste ou effectuer une autre méthode que la simple fusion des images pour éviter cet effet. Il s'avère donc que cette modalité est théoriquement applicable et peut ouvrir la voie à des nouvelles modalités de scanner si le prix des miroirs à rayons X est abordable, la qualité (coefficient de réflexion différent de 1) et le coût de ces miroirs restant le principal frein de l'utilisation de cette technique sur du court terme. Néanmoins comme précisé plus tôt, l'étude de cas pratiques n'est en soi pas le principal résultat de l'étude de notre classe de transformée de Radon sur lignes brisées, et nous allons maintenant entrer un peu plus dans le cœur de nos contributions.

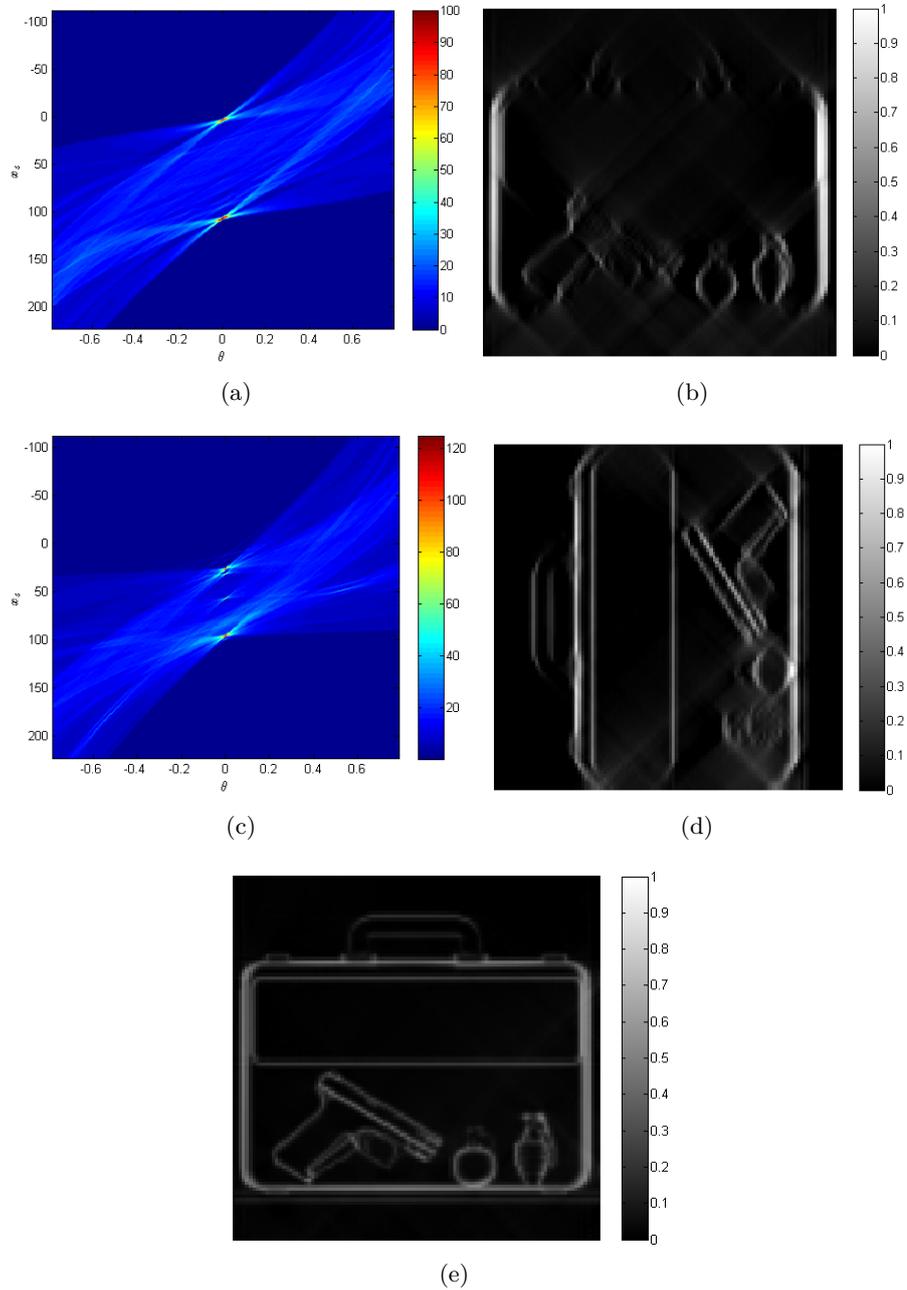


FIGURE II.4 – (a) et (c) Projections pour les deux positions de l'image originale avec la discrétisation angulaire  $\Delta\theta = 0.005$  rad. Sur les axes des abscisses, nous retrouvons le paramètre  $\theta$  et nous avons le paramètre  $x_S$  sur les axes des ordonnées. (b) et (d) Reconstruction de l'image de la valise par rétroprojection filtrée pour chacune des deux positions. (e) Reconstruction globale par fusion des deux images reconstruites, les petites structures dans l'objet sont bien reconstruites maintenant.

## II.2 Application de la TRV en tomographie par émission

A partir de 2002, Nguyen [55] a commencé à proposer une nouvelle approche de l'imagerie gamma par émission s'éloignant des standards de l'imagerie SPECT. Cette nouvelle approche essaie d'exploiter les phénomènes de diffusion pour augmenter la qualité de reconstruction des images. Dans cette partie nous allons étudier l'une des modalités qui en découle et qui se base sur une nouvelle version de la transformée de Radon sur des lignes brisées qu'on appellera par la suite  $TRV_2$ .

### II.2.1 Concept

On considère ici un milieu qui émet des photons de type gamma dont nous cherchons à reconstruire la densité d'émission radioactive. Un photon émis d'un point source  $N$  de l'objet subira une diffusion de Compton sur un point  $M$  d'un détecteur diffusant (voir Fig. II.5). La somme des photons détectés ensuite sur le second détecteur pourra donc bien s'interpréter comme la contribution de tous les points sources sur une paire de droites de sommet  $M$  et avec le même angle de diffusion et donc suivre de transformée de Radon sur des lignes brisées.

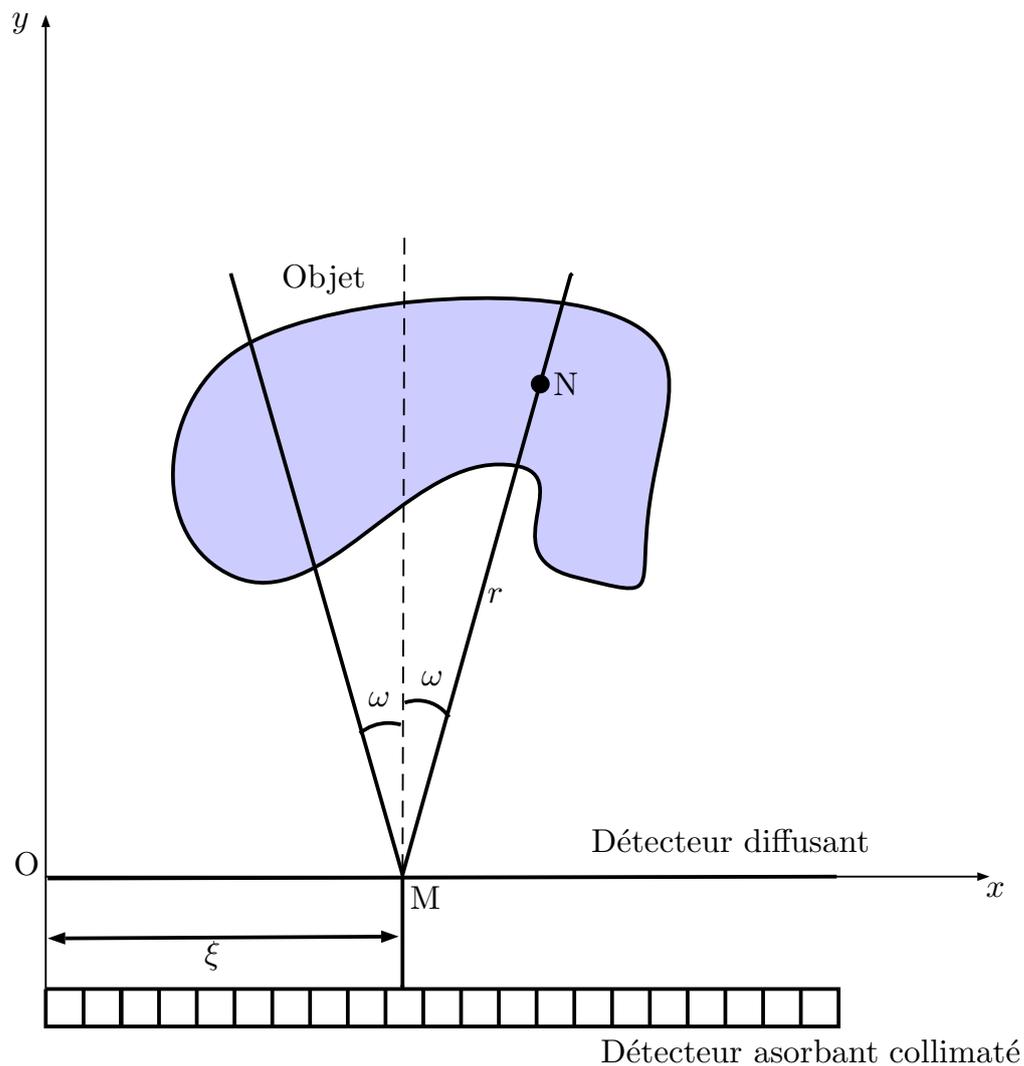
Techniquement ce principe requiert une camera assez similaire à une caméra Compton [74]. L'idée de base de la caméra Compton est de remplacer le collimateur mécanique d'une caméra gamma classique par un collimateur électronique utilisant l'effet Compton dans le but d'améliorer la sensibilité de la caméra. Une caméra Compton est constituée de deux détecteurs. Le premier détecteur est généralement une matrice de détecteurs en silicium. Comme le silicium est un semi-conducteur de numéro atomique faible, il n'a pas assez de pouvoir d'arrêt pour absorber un photon gamma, mais suffisamment pour que ce photon incident subisse une diffusion Compton (on observera la position et l'énergie de l'électron de recul). Le second détecteur qui dans notre cas sera collimaté (contrairement à une caméra Compton classique) quant à lui est plus classique et sert à capter les photons diffusés. Il détermine la position et l'énergie du photon diffusé. Une électronique de coïncidence permet de lier le photon gamma incident au photon diffusé. Avec les mesures d'énergie effectuées, nous pouvons en déduire le niveau d'énergie avant diffusion du photon incident et ainsi trouvé l'angle de diffusion, ce qui nous permet d'évaluer la provenance du photon sur un cône de sommet donné par la position du photon sur le premier détecteur et par l'angle de diffusion et d'axe passant par les positions des photons données par les deux détecteurs (dans le cas bidimensionnel ou collimaté, ce cône est ramené à deux demi-droites comme présenté dans la Fig. II.5). La reconstruction d'un point source s'effectue à la suite de plusieurs mesures en cherchant l'intersection de tous les cônes (ou des demi-droites).

### II.2.2 Formation d'image

Pour une analyse fine, la mesure d'intégration est donnée par la loi photométrique en deux dimensions suivante :

$$m_\sigma(r) = \frac{1}{\pi\sigma} \arctan \frac{\sigma}{2r} \quad (\text{II.25})$$

où  $\sigma$  est la taille linéaire des diffuseurs. Nous ignorerons ici le facteur cinématique de Compton. Si nous considérons une paire de demi-droites se rencontrant en un point  $M$  d'abscisse  $\xi$  sur l'axe  $Ox$ , chacune d'entre elles faisant un angle  $\omega$  ( $0 < \omega < \pi/2$ ) avec l'axe

FIGURE II.5 – Principe de fonctionnement de l'imagerie par émission utilisant la  $TRV_2$ 

Oy. Soit  $f(x, y)$  une fonction continue non-négative de  $L^1(\mathbb{R}^2)$  avec un support compact dans  $\{\mathbb{R}^2 | y > 0\}$ . Nous appelons

$$\mathbb{V}f(\xi, t) = \int_0^\infty dr m_\sigma(r) (f(\xi + r \sin \omega, r \cos \omega) + f(\xi - r \sin \omega, r \cos \omega)), \quad (\text{II.26})$$

la transformée de Radon sur des lignes V (ou  $TRV_2$ ) de  $f$ . Pour simplifier le problème, nous émettrons l'hypothèse classique que  $\sigma$  est très petit, l'équation pourra donc se réécrire comme :

$$\mathbb{V}f(\xi, t) = \int_0^\infty \frac{dz}{2\pi z} (f(\xi + tz, z) + f(\xi - tz, z)), \quad (\text{II.27})$$

où  $t = \tan \omega$  et  $z = r \cos \omega$ .

## II.2.3 Reconstruction d'image

Posons  $(\tilde{f}(p, y), \text{resp. } \widetilde{\nabla}f(p, \omega))$  qui est la transformée de Fourier sur  $(x, \text{resp. } \xi)$  de  $(f(x, y), \text{resp. } \nabla f(\xi, \omega))$ . Nous avons

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{2i\pi px} \mathbf{F}(p, y) \\ \nabla f(\xi, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{2i\pi p\xi} \mathbb{V}\mathbf{F}(p, \omega). \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

On peut donc obtenir à partir de l'équation (II.28) :

$$\widetilde{\nabla}f(p, t) = 2 \int_0^{\infty} \frac{dz}{z} \tilde{f}(p, z) \cos(2\pi pzt). \quad (\text{II.29})$$

L'équation (II.29) apparaît donc comme la transformée cosinus de  $\widetilde{F}(p, z) = \frac{\widetilde{f}(p, z)}{z}$

$$\widetilde{\nabla}f(p, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz \mathbf{F}(p, z) \cos(2\pi pzt). \quad (\text{II.30})$$

On va utiliser la propriété de la transformée cosinus suivante :

$$\int_0^{\infty} dt \cos(2\pi tv) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{2i\pi p\xi} \mathbb{V}\mathbf{F}(p, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dz \mathbf{F}(p, z) \frac{1}{2} (\delta(v + pz) + \delta(v_p z)) \quad (\text{II.31})$$

Nous posons  $y = |v/p|$ . Grâce à la propriété précédente, nous pouvons montrer que l'équation (II.30) (pour laquelle nous aurons appliqué des deux côtés de l'égalité l'opérateur intégral  $\int_0^{\infty} dt \cos(2\pi tv)$ ) devient :

$$\tilde{f}(p, |v/p|) = 2\pi|v| \int_0^{\infty} dt \cos(2\pi tv) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-2i\pi\xi p} \mathbb{V}\mathbf{f}(\xi, t). \quad (\text{II.32})$$

$f(x, y)$  est reconstruit seulement pour  $y = |v/p| > 0$  par inversion de la transformée de Fourier sur la variable  $p$  et peut se mettre sous la forme de la triple intégrale suivante :

$$f(x, y) = 2\pi y \int_{-\infty}^{\infty} |p| dp e^{2i\pi px} \int_0^{\infty} dt 2 \cos(2\pi pty) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-2i\pi\xi p} \mathbb{V}\mathbf{f}(\xi, t), \quad (\text{II.33})$$

Nous obtenons finalement la formule explicite de reconstruction suivante :

$$f(x, y) = -\frac{y}{\pi} \int_0^{\infty} dt \text{v.p.} \left( \int_{\mathbb{R}} d\xi \left[ \frac{\mathbb{V}'\mathbf{f}(\xi, t)}{(x + ty - \xi)^2} + \frac{\mathbb{V}'\mathbf{f}(\xi, t)}{(x - ty - \xi)^2} \right] \right). \quad (\text{II.34})$$

où  $\mathbb{V}'\mathbf{f}(\xi, t)$  est la dérivée selon  $\xi$  de  $\mathbb{V}\mathbf{f}(\xi, t)$

Il est à noter que la singularité apparente pour  $\omega = \pi/2$  n'existe pas à cause de la limitation du support de  $f$ .

### II.2.4 Résultats

La  $TRV_2$  permet donc de modéliser un procédé d'imagerie par émission utilisant une caméra Compton. Nous allons ici présenter quelques résultats utilisant l'équation (II.34).

Les figures (II.6(a), II.6(b), II.6(c)) montrent respectivement l'image originale d'un fantôme de thyroïde, le jeu de données acquis et la reconstruction par l'algorithme de rétro-projection. Nous pouvons remarquer ici avec une caméra Compton fixe (aucun mouvement de rotation) quelques artefacts liés à l'existence d'intersections des jeux de demi-droites, mais globalement nous avons ici une reconstruction performante, pouvant reconstruire les petites structures et ce sans utiliser plusieurs vues (les différents angles de diffusion venant ici prendre ce rôle), ce qui montre bien la faisabilité de cette imagerie. Plus important encore, l'étude théorique de cette inversion, nous permet d'ouvrir la voie vers une autre modalité de tomographie et une autre transformée de Radon généralisée que nous allons étudier dans la partie suivante.

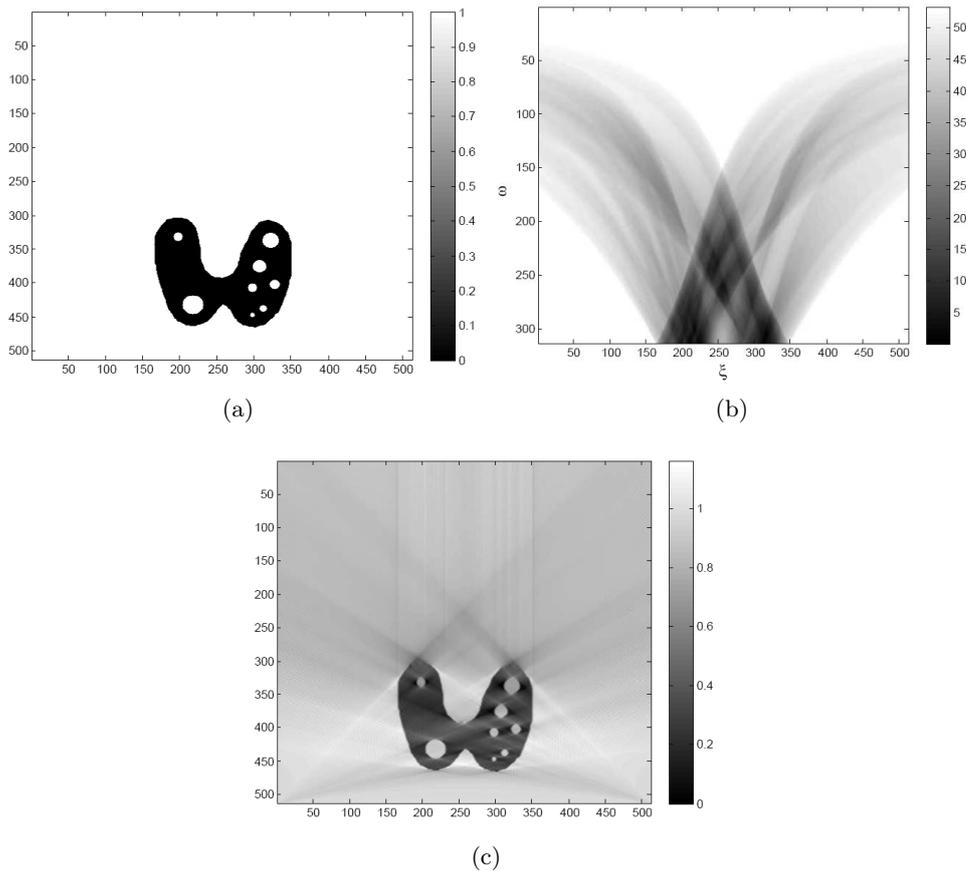


FIGURE II.6 – (a) Fantôme original de la thyroïde. (b) Application de la  $TRV_2$  sur le thyroïdien avec la discrétisation angulaire  $d\omega = 0.005$  rad. Sur les axes des abscisses nous retrouvons le paramètre  $\xi$  et nous avons le nombre de valeurs du paramètre  $\omega$  sur les axes des ordonnées. (c) Reconstruction du fantôme par rétroprojection filtrée

## II.3 Application de la TRV en tomographie Compton par émission

### II.3.1 Contexte de la tomographie Compton

La tomographie Compton est basée, comme son nom l'indique, sur le phénomène de la diffusion Compton. En tomographie traditionnelle, le rayonnement diffusé est filtré comme du bruit car cette diffusion entraîne des fausses détections et est responsable de la perte de photons dans le rayonnement primaire ce qui est très dommageable en imagerie gamma par émission SPECT ou finalement très peu de photons du rayonnement primaire arriveront aux détecteurs. Au final l'imagerie gamma possède, à cause de la perte d'information due à la diffusion, une qualité de reconstruction assez faible et une très grande sensibilité au bruit, à cause du collimateur un seul sur 10000 photons émis arrive au détecteur. A cela s'ajoute la nécessité de filtrer énergiquement après le collimateur, car après ce dernier nous avons encore un ratio de 30 à 40% de photons diffusés.

La tomographie Compton ou tomographie à partir du rayonnement diffusé se propose donc d'utiliser le rayonnement diffusé au lieu de perdre tout ce flux, ce qui peut ouvrir à de toutes nouvelles applications dans de nombreux domaines aussi bien en imagerie biomédicale qu'en astronomie gamma ou en contrôle non destructif. De la toute première modalité Compton proposé par Norton [59] en 1994 aux dernières proposées par Nguyen et Truong [56], ce type de tomographie reste sous estimé et nous nous proposerons dans la suite de ce chapitre, de proposer une méthode novatrice et utilisable pour une modalité Compton.

### II.3.2 La transformée de Radon sur des lignes brisées composées (TRVC)

Le principe de fonctionnement de la modalité de tomographie Compton (CST) est décrite dans la Fig. II.7 dans un cadre idéal (sans atténuation et avec une densité électronique constante  $n_e$ ).

L'idée est ici de considérer un objet contenant une certaine zone radioactive qui va émettre un rayonnement gamma primaire. Mais là où le système va se détacher de la modalité TRV, c'est que l'objet sera ici la source de la diffusion et nous n'aurons pas recours à un diffuseur externe comme avec la caméra Compton. Les photons ainsi diffusés dans l'objet vont perdre de l'énergie et vont être captés par des détecteurs collimatés d'une caméra gamma. La géométrie induite par le phénomène de diffusion nous amène à interpréter les données  $g(\mathbf{D})$  enregistrées en un point  $\mathbf{D}$  du détecteur à une énergie de diffusion donnée  $E_\omega$  comme la somme de toutes les contributions de tous les points sources positionnés sur deux demi-droites de sommet  $\mathbf{M}$  d'inclinaison  $\omega$  par rapport à l'axe perpendiculaire au détecteur et ceci pour tous les points de diffusions possibles  $\mathbf{M}$  le long de cet axe. De par la multitude des lignes brisées possibles, nous parlerons alors de transformée de Radon sur des lignes V composées.

Soit  $a(x, y)$  la fonction d'activité que l'on veut reconstruire, la mesure du flux de densité en un point  $\mathbf{D}$  sous un angle de diffusion  $\omega$ , peut s'écrire :

$$\mathcal{V}a(\xi, \omega) = P(\omega) \int_0^{+\infty} \frac{d\eta}{2\pi\eta} \int_0^{+\infty} \frac{dr}{2\pi r} a(\xi_\pm, \eta + r \cos \omega) \quad (\text{II.35})$$

où  $P(\omega)$  est la section différentielle de diffusion Compton (formule de Klein-Nishina

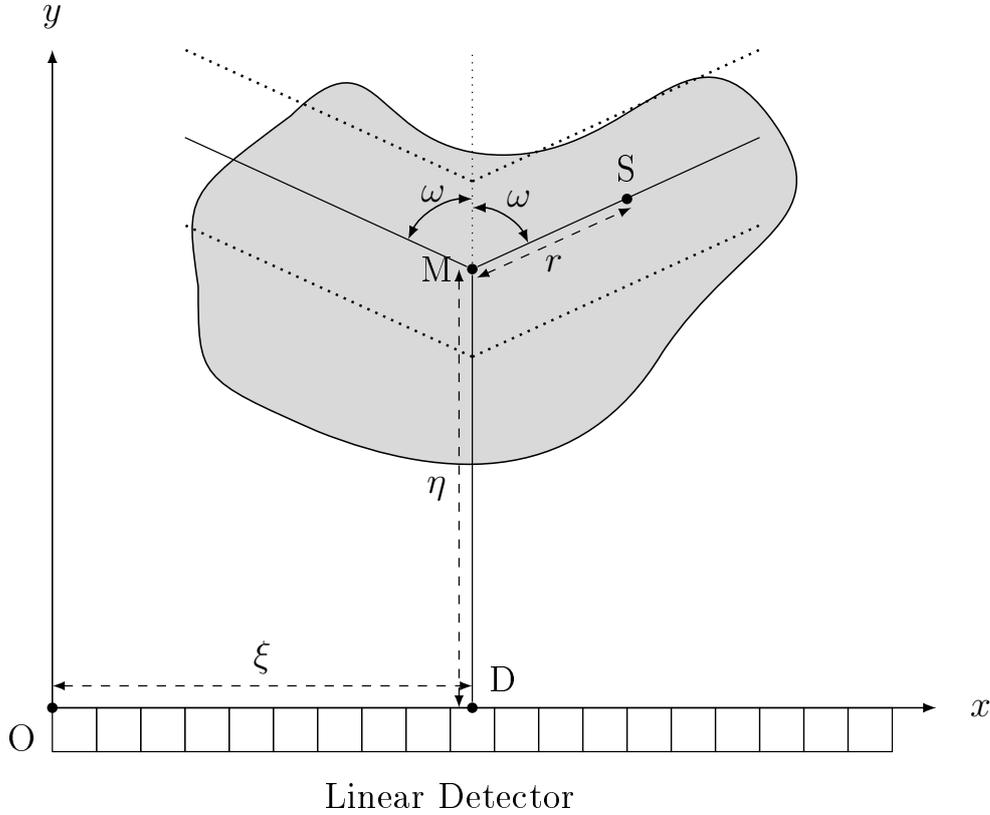


FIGURE II.7 – Principe de la tomographie Compton par émission

[40] et  $\xi_{\pm} = \xi \pm r \sin \omega$ .

L'équation (II.35) définit la TRVC et c'est l'équation de la formation d'image (la transformée directe). On peut aussi la réécrire avec une formulation utilisant le noyau intégrale, l'équation devient alors :

$$\mathcal{V}a(\xi, \tau) = P(\tau) \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy \mathcal{K}_{\mathcal{V}}(x, y | \xi, \tau) a(x, y), \quad (\text{II.36})$$

avec  $\tau = \tan(\omega)$ ,  $H(\cdot)$  la fonction de Heavidade et

$$\mathcal{K}_{\mathcal{V}}(x, y | \xi, \tau) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{H(y - |x - \xi|\tau)}{|x - \xi| y - |x - \xi|\tau}, \quad (\text{II.37})$$

A partir de là nous pouvons obtenir la PSF de cette transformée. Pour :

$$a_0(x, y) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0), \quad (\text{II.38})$$

on a :

$$\mathcal{V}a_0(\xi, \tau) = P(\tau) \frac{1}{4\pi^2} \frac{H(y_0 - |x_0 - \xi|\tau)}{|x_0 - \xi| y_0 - |x_0 - \xi|\tau}. \quad (\text{II.39})$$

L'équation (II.36) représentant la formation d'images présente des singularités notamment si la distance minimale entre l'objet et les détecteurs est faible. Pour éviter cela, nous considérerons que l'objet d'intérêt est placé à un minimum de distance du détecteur (cette valeur

ne va pas au delà de quelques centimètres, ce qui est cohérent avec des appareils imageurs).

Maintenant que le modèle direct est fixé, il ne reste plus qu'à proposer une formule inverse associée.

### II.3.3 Reconstruction d'image

Considérons maintenant le problème simplifié où nous négligeons le terme  $P(\tau)$  et où la densité électronique est toujours constante. Posons

$$h(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{d\eta}{2\pi\eta} a(x, \eta + y) . \quad (\text{II.40})$$

En suivant un procédé analogue à celui proposé par [78], nous obtenons la formule d'inversion suivante :

$$a(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi q(y-z)} h(x, z)}{\gamma + i\frac{\pi}{2} \text{sgn}(q) - \ln(2\pi|q|)} dzdq \quad (\text{II.41})$$

avec

$$h(x, z) = \frac{z}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{v.p.} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{V}\tilde{a}(u, \omega)}{u - x \cos \omega \pm z \sin \omega} du \right) \frac{d\omega}{\cos \omega} + \frac{z}{\pi} \int_0^{\infty} \text{v.p.} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{V}a(\xi, -\tau)}{\xi - x \pm z\tau} d\xi \right) d\tau, \quad (\text{II.42})$$

où  $\omega = \arctan \tau$ ,  $u = \xi \cos \omega$  et  $\mathcal{V}\tilde{a}(u, \omega) = \mathcal{V}a(\xi, \tau)$ . Cette expression s'écrivant comme une rétroprojection sur des lignes brisées convoluée avec un filtre, il est relativement simple à implémenter et ne nécessite pas une forte régularisation. Le seul problème restant ici est qu'il n'est pas en pratique applicable car il nécessite des hypothèses invérifiables dans énormément d'occasions. En effet ce modèle néglige l'atténuation mais surtout pose l'hypothèse que la probabilité que s'effectue une diffusion en un point est homogène dans tout l'objet (*i.e.* que la densité électronique est homogène dans l'objet), ce qui est en pratique jamais vraie. Nous allons donc voir maintenant un modèle beaucoup plus réaliste.

### II.3.4 Prise en compte d'autres phénomènes physiques dans la TRVC

Dans notre modèle présenté jusqu'alors, nous n'avons pas pris en compte de nombreux phénomènes physiques qui vont venir déformer le flux de photon.

Dans l'évolution de ce flux nous pouvons considérer trois étapes principales :

- Les photons sont émis d'une source interne de l'objet jusqu'à subir une diffusion, le flux sera soumis durant ce trajet à une atténuation  $\mu_a$ .
- Le photon subit une diffusion, la probabilité que le photon soit diffusé en un point  $\mathbf{M}$  étant proportionnelle à la densité électronique en ce point, nous devons considérer la densité électronique  $n_e(\mathbf{M})$  comme un paramètre important et ne plus considérer cette dernière comme constante.
- Le flux de photon diffusé se propage jusqu'à être capté par les détecteurs. Sur ce trajet il subit une atténuation  $\mu_\omega$  qui dépend fortement de l'énergie de chaque photons après la diffusion où nous devons faire attention au phénomène de durcissement du rayonnement.

Si nous ajoutons, tous ces nouveaux paramètres physiques dans notre processus, nous obtenons le modèle physique suivant :

$$\mathcal{V}^\Phi a(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{2\pi\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dr}{2\pi r} H(r)H(\eta) P(\tau) n_e(\xi, \eta) e^{-\int_0^\eta \mu_\omega(\xi, \eta') d\eta'} e^{-\int_0^r \mu_a(\xi_\pm, \eta+r' \cos \omega) dr'} a(\xi_\pm, \eta + r \cos \omega). \quad (\text{II.43})$$

Si nous décidons de simuler cette formule pour l'image du fantôme de Zubal réduit à une coupe du cœur (voir Fig. II.8(a)), nous obtenons le jeu de données numériques présenté dans la figure (voir Fig. II.8(b)).

On peut noter qu'on retrouve malgré les altérations la forme caractéristique d'un jeu de données de la transformée de Radon sur des lignes V, c'est à dire la forme en "V" légèrement curviligne pour les hautes valeurs d'angle de diffusion, gardant une cohérence avec la transformée de Radon sans les facteurs physiques et de la fonction de PSF.

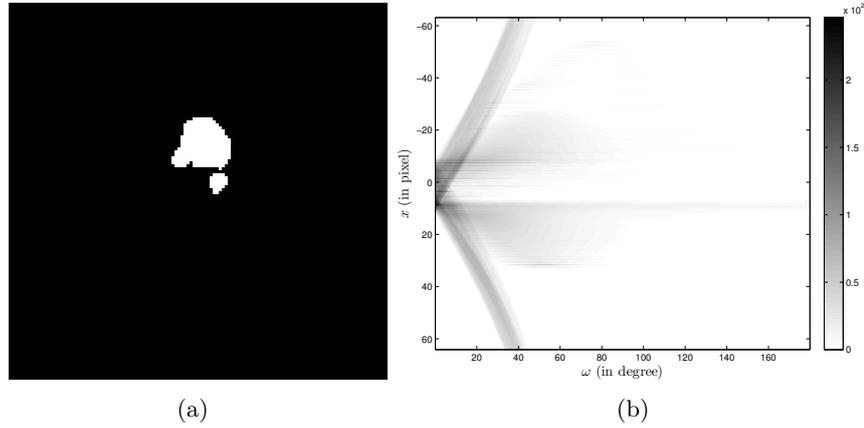


FIGURE II.8 – (a) Fantôme original de la carte d'activité d'un cœur à l'aide d'une coupe de Zubal. (b) Application de la TRVC sur cette image avec prise en compte des paramètres physiques.

L'équation (II.43) est appelée la TRVC atténuée et ne permet malheureusement pas de pouvoir utiliser la procédure d'inversion de sa version non atténuée dans l'immédiat et devient un problème non-linéaire qui ne permet pas en l'état de procéder à une inversion directe. Il faudra donc nécessairement trouver une méthode de correction afin de gérer ces facteurs physiques additionnels pour pouvoir se ramener à un cadre où nous pouvons réutiliser nos algorithmes d'inversion (ceux définis pour la TRVC non atténuée).

La correction des paramètres physiques pour l'obtention d'une inversion de la TRVC atténuée ainsi que les résultats liés à cette transformée seront abordés dans la prochaine partie.

## II.4 Bimodalité en tomographie Compton

Dans l'optique de corriger la TRVC après l'ajout des paramètres physiques, nous nous sommes plongés dans l'étude des différents types de corrections. Cette recherche en plus

d'aboutir vers un nouvel algorithme de correction, le GIPC, nous a aussi amené à mettre au point la toute première bimodalité en tomographie Compton.

#### II.4.1 Le concept d'un nouveau système d'imagerie bimodal

Les systèmes bimodaux en imagerie médicale deviennent de plus en plus importants de part la nécessité de récupérer à la fois des données fonctionnelles et anatomiques du patient et qu'elles soient cohérentes entre elles (pas de décalage temporel entre les deux types de données, ce qui est le cas avec deux examens séparés). C'est ainsi que de nombreux appareils essaient de coupler deux modalités d'imagerie. Notre nouveau concept peut être comparé au système PET/CT dans le sens où il combine à la fois de l'imagerie par transmission et par émission mais s'en éloigne car il permet d'utiliser le rayonnement diffusé du premier ordre par l'effet Compton. Il a donc fallu trouver une modalité de transmission pouvant compléter la TRVC et qui assure une certaine cohérence architecturale. Le choix s'est porté naturellement vers la modalité proposée par Norton [59] et dont les récents travaux de Rigaud [66] ont permis d'améliorer les algorithmes liés à ce procédé. Cette modalité offre l'avantage de reconstruire une carte de densité électronique du milieu diffusant, ce qui est une information nécessaire pour compléter le modèle de la TRVC.

Dans ce contexte, il faut prendre en compte l'ensemble des phénomènes mis en jeu notamment l'atténuation et la non homogénéité de la densité électronique pour la TRVC. Hormis dans le cadre de la transformée de Radon sur des lignes droites pour l'atténuation, l'inversion analytique de tels modèles restent inconnues. Pour résoudre cette difficulté nous proposerons dans la suite de ce chapitre un nouvel algorithme de correction, le Generalized Iterative Pre-Correction algorithm (GIPC) qui est une généralisation d'un des algorithmes couramment utilisés pour la correction de l'atténuation dans le cadre de l'imagerie SPECT, l'algorithme IPC de [48].

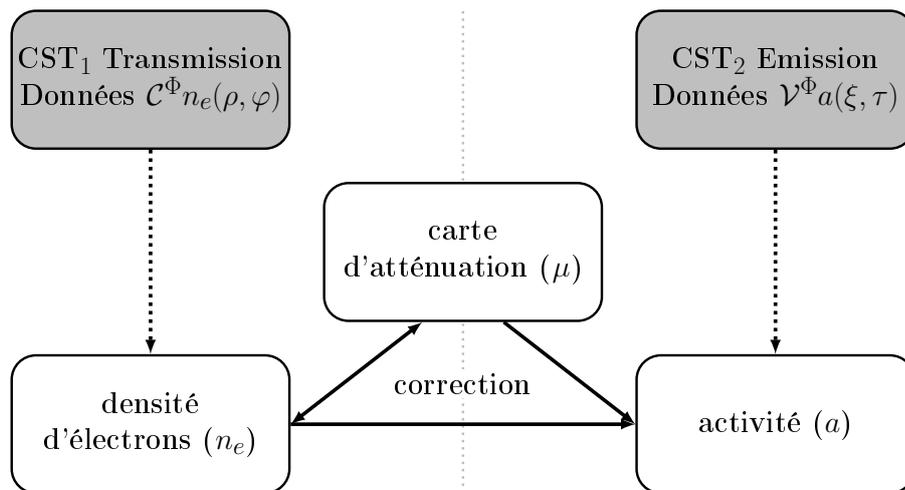


FIGURE II.9 – Concept du nouveau système de bimodalité

### II.4.1.a Couplage avec une modalité associée d'émission : la transformée de Radon avec des arcs de cercles (CART)

#### Modélisation par transformée de Radon sur des arcs de cercles

Avant d'associer les deux modalités, nous allons regarder d'un peu plus près la modalité par transmission. Le principe physique de la modalité de Norton [59] est présenté dans la figure II.10. Dans un contexte idéal (sans atténuation et sans effet de durcissement du rayonnement), cette modalité se base sur une simple idée, un point source **S** émet un rayonnement gamma primaire à travers un objet dans lequel se produira une diffusion à un point **M**. Un détecteur **D** se déplaçant le long de l'axe  $Ox$ -axis collecte, à une énergie  $E_\omega$ , les photons diffusés dans l'objet. La géométrie de la diffusion de Compton implique que tout le flux de photon  $g(\mathbf{D})$  détecté en une position du détecteur **D** issu de **S** sera dû à la contribution de tous les points de diffusion **M** le long d'un arc de cercle allant de **S** à **D** et avec  $\widehat{SMD} = \pi - \omega$  où  $\omega$  est l'angle de diffusion.

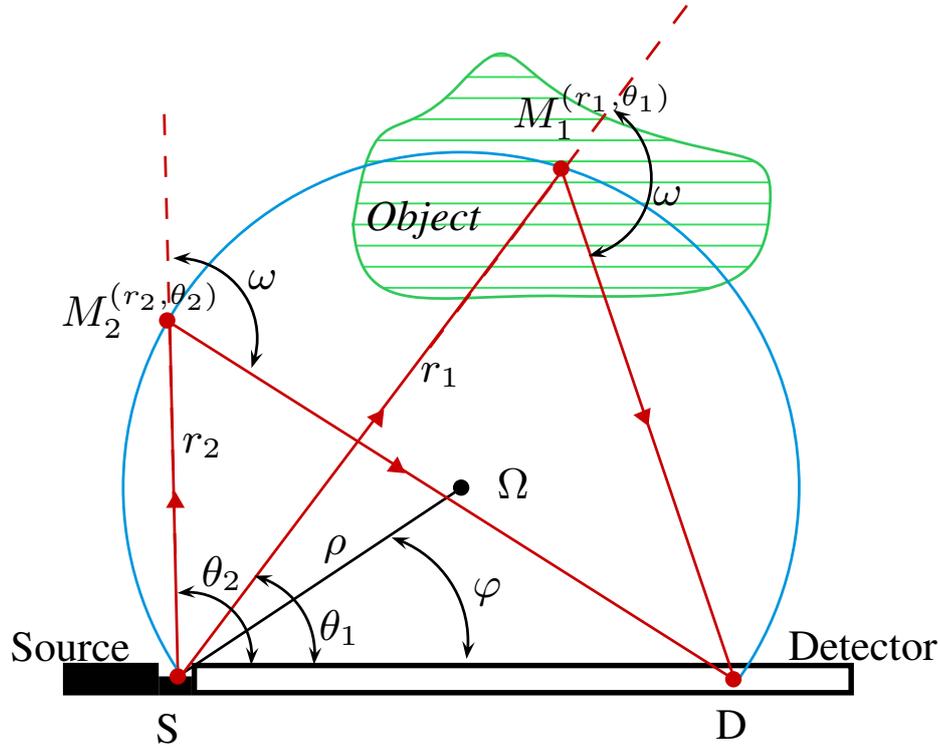


FIGURE II.10 – Principe de la modalité de Norton en tomographie Compton

En absence d'atténuation, Norton a formulé l'acquisition des données de la manière suivante :

$$\mathcal{C}(\rho, \varphi) = \int_0^\pi \int_0^\infty n_e(r, \theta) w(r, \theta; \rho, \varphi) \delta[r - 2\rho \cos(\theta - \varphi)] dr d\theta, \quad (\text{II.44})$$

où  $w(\cdot)$  est

$$w(r, \theta; \rho, \varphi) = \frac{b r s(\theta) \sigma^c(\omega)}{4\pi (2\rho)^3 \sin^2 \theta}, \quad (\text{II.45})$$

avec  $b$  qui représente l'aire de l'élément de détection,  $s(\theta)$  exprimant la dépendance angulaire de la distribution de la source de rayonnement gamma et faisant référence à la section différentielle de Klein-Nishina (see eq. (I.18)). Mathématiquement,  $\mathcal{C}(\rho, \varphi)$  est essentiellement la transformée de Radon de la carte de densité électronique  $n_e(r, \theta)$  sur des arcs de cercle passant par un point fixe  $\mathbf{S}$  d'équation  $r = 2\rho \cos(\theta - \varphi)$ .

Maintenant nous pouvons prendre en compte le facteur d'atténuation pour modéliser ce système d'imagerie, notre modèle de CART atténué s'écrit alors

$$\mathcal{C}^\Phi(\rho, \varphi) = \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty dr n_e(r, \theta) w(r, \theta; \rho, \varphi) w_{att}(r, \theta; \rho, \varphi) \delta[r - 2\rho \cos(\theta - \varphi)] \quad (\text{II.46})$$

avec

$$w_{att}(r, \theta; \rho, \varphi) = \exp\left(-\int_0^r \mu_0(t \cos \theta, t \sin \theta) dt - \int_0^{r_1} \mu_\omega(r \cos \theta + t \cos(\omega - \theta), r \sin \theta + t \sin(\omega - \theta)) dt\right). \quad (\text{II.47})$$

$$\text{et } r_1 = \frac{r \sin \theta}{\sin(\theta - \omega)}$$

Le facteur  $w_{att}$  ne peut pas être séparé en un produit  $w_1(r, \theta) \cdot w_2(\rho, \varphi)$ , c'est pourquoi nous ne pouvons pas utiliser ici les algorithmes de Rigaud [66] dérivé de Cormack [19] directement ici. Pour le moment, nous ne savons pas comment inverser cette transformée analytiquement.

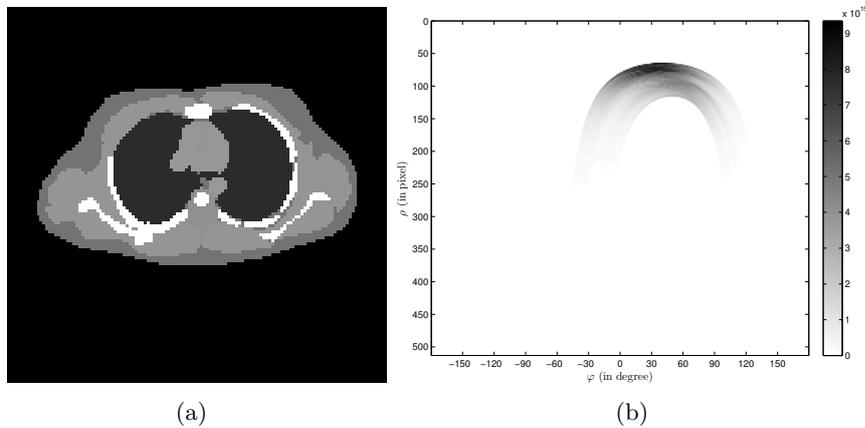


FIGURE II.11 – (a) Fantôme originale d'une coupe thoracique de Zubal. (b) Application de la CART sur cette image avec prises en compte des paramètres physique.

### Inversion transformée de Radon sur des arcs de cercles

Norton a développé une formule d'inversion, qui pouvait être interprétée comme une procédure de rétroprojection sur des arcs de cercle accompagné par des simulations numériques validant le modèle sans atténuation dans un premier temps. Néanmoins nous utiliserons plutôt dans notre cas la méthode fondée sur les travaux de Rigaud [66] et inspirée par Cormack [19], cette méthode reconstruit une image compatible avec les données

dans l'espace des harmoniques circulaires.

Nous partons de l'équation (II.46). Soit :

$$\begin{cases} \mathcal{C}f(p, \varphi) &= \mathcal{C}^\Phi n_e\left(\frac{p}{2}, \varphi\right) \frac{p^4}{P(\varphi + \pi/2)} \\ f(r, \theta) &= n_e(r, \theta) \frac{bs(\theta)r}{8\pi \sin^2 \theta} . \end{cases} \quad (\text{II.48})$$

En substituant (II.48) dans (II.46) nous obtenons :

$$\mathcal{C}f(p, \varphi) = \int_0^\pi d\theta \int_0^{+\infty} dr p f(r, \theta) \delta \{r - p \cos(\theta - \varphi)\} . \quad (\text{II.49})$$

Nous pouvons appliquer ici la transformée de Fourier sur des composantes angulaires (voir [19]) pour  $f$  et  $\mathcal{C}f$ . Nous obtenons :

$$f_l(r) = \frac{1}{\pi r} \int_0^r \frac{e^{-|l| \cosh^{-1}(r/p)}}{\sqrt{\left(\frac{r}{p}\right)^2 - 1}} (\mathcal{C}f_l)'(p) dp - \frac{1}{\pi r} \int_r^{+\infty} U_{||-1}(r/p) (\mathcal{C}f_l)'(p) dp \quad (\text{II.50})$$

où  $U_{l-1}(\cos x) = \sin lx / \sin x$  est le polynôme de second degré de Tchebychev.  $f(r, \theta)$  est reconstruit à partir de ces composantes en harmoniques circulaires  $f_l(r)$ . Le changement de fonction (eq (II.48)), nous permet d'étudier le modèle de Norton comme l'inversion de la transformée de  $\mathcal{C}$  dans l'espace  $(p, \varphi)$ , l'implémentation numérique ayant été réalisé dans [66].

## II.4.2 Algorithmes de corrections d'atténuation classiques

Très tôt après l'invention de l'imagerie SPECT, la correction de l'atténuation est devenu un enjeu clé pour améliorer la qualité de reconstruction. Nous allons ici passer en revue les algorithmes les plus usités avant de présenter notre algorithme dans la partie qui suivra.

*Remarque :* la plupart des algorithmes de correction nécessite l'extraction des contours du milieu atténuant, ces méthodes sont très bien expliquées dans l'ouvrage [30].

### II.4.2.a Correction d'un facteur d'atténuation constant

Ces méthodes sont à utiliser en cas de facteur d'atténuation constant ou variant très peu. Elles est donc adaptées en imagerie médicale aux examens de l'abdomen ou du cerveau car tous les tissus présents (si nous enlevons le cas de la boîte crânienne) ont une atténuation sensiblement identique. Ce cas simple a été le premier étudié et donc un nombre important de méthodes existent pour ce cas de figure, mais nous pouvons distinguer trois types d'algorithmes principaux : les méthodes de pré-traitement où la compensation de l'atténuation est effectuée sur les projections avant la reconstruction (en nécessitant des a priori sur l'épaisseur de la source de radiation ou celle du l'objet étudié) et les méthodes de post-traitement où la correction n'intervient qu'après la reconstruction de l'image qui sont en général des variantes de l'algorithme de Chang [14]. Ces méthodes sont généralement très faciles à mettre en œuvre mais n'améliorent la qualité de l'image que pour des objets à géométrie simple et d'activité constante.

**Exemple de méthode de pré-traitement : La méthode de Sorenson [71]**

L'idée est d'obtenir une correction de l'atténuation pour chaque pixel à partir de la moyenne géométrique des projections mesurées  $p'(r, \theta)$  et  $p(r, \theta + \pi)$  par la caméra en deux positions opposées. A cette moyenne un terme de correction en  $\sinh$  est appliqué. Les projections modifiées sont obtenues en supposant l'activité distribuée de manière uniforme (si la source est étendue) et l'atténuation constante  $p(r, \theta)$  supposées être celles obtenues sans atténuation dans l'objet.

$$p(r, \theta) = \sqrt{p'(r, \theta).p'(r, \theta + \pi)} \mu F.L/2 \frac{e^{\mu F.L/2}}{\sinh \mu F.L/2} \quad (\text{II.51})$$

avec

$\mu$  coefficient d'atténuation linéaire constant,

$L$  épaisseur du milieu atténuant,

$F$  fraction active de  $L$  sur laquelle l'activité est considérée (supposé constant en fonction de  $\mu$ ).

En pratique  $F$  (portion d'activité) n'est pas connue et est fixée généralement à 1 ou à  $1/2$ . Ce choix influence peu les résultats, le facteur correctif ajouté à la moyenne géométrique dépend peu de  $F$ .

**Exemple de méthode de post-traitement : La méthode de Chang [14, 70]**

La méthode de Chang est sans doute la méthode la plus employée. Une reconstruction est appliquée sur les projections mesurées, par exemple une rétroprojection avec un filtre rampe. Une image non corrigée de l'atténuation est alors obtenue. Chaque pixel de celle-ci sera corrigé par la moyenne des coefficients d'atténuation sur tous les angles de projections. Pour le pixel de coordonnées  $x, y$  nous avons le coefficient de correction suivant :

$$C(x, y) = \frac{1}{1/N \sum_{i=1}^N e^{-iI_{\theta_i}}} \quad (\text{II.52})$$

avec

$N$  le nombre de projections sur 360 degrés,

$I_{\theta_i}$  distance du point de l'objet au contour de celui-ci dans la direction de propagation  $\theta_i$ .

Cette méthode, simple à mettre en œuvre, impose de connaître  $\mu$  et le contour l'objet étudié. Elle n'est malheureusement exacte que dans le cas d'une source ponctuelle dans un milieu d'atténuation uniforme. Avec une source étendue, le facteur de correction surestime ou sous estime certains endroits de la distribution.

**II.4.2.b Correction d'un facteur d'atténuation avec une carte d'atténuation hétérogène connu**

Dans la plupart des cas, la carte d'atténuation n'est pas constante et donc nous devons avoir recours à d'autres méthodes. Les méthodes de l'état de l'art se base sur un gros a priori, à savoir la connaissance de la carte d'atténuation.

L'étude comparative de Muraze [53] sur les différentes méthodes itératives a montré que la méthode de Chang est une des plus efficace (convergence la plus rapidement avec une erreur relativement faible) dans le cadre d'une carte constante, Maze [48] a donc proposé une adaptation de ce dernier dans le cadre d'une atténuation non uniforme appelée GCC (Generalized Chang Correction).

### La méthode GCC (Generalized Chang Correction)

Le principe de la méthode GCC reste assez semblable à la méthode conventionnelle de Chang. La matrice de correction change pour refléter les inhomogénéités du milieu. Pour le point de coordonnées  $(x, y)$  de l'objet à reconstruire le coefficient de correction  $C(x, y)$  vaut :

$$C(x, y) = \frac{1}{1/N \sum_{i=1}^N e^{-\int_{C_{\theta_k}^{x,y}} \mu_{x,y}(r, \theta_k)}} \quad (\text{II.53})$$

avec

$C_{\theta_k}^{x,y}$  le chemin en ligne droite du point de coordonnées  $x, y$  de l'objet jusqu'au contour de l'objet dans la direction  $\theta$ ,

$\mu_{x,y}(r, \theta_k)$  valeur de l'atténuation en coordonnées polaires centrée sur le point de coordonnées  $(x, y)$  dans la direction  $\theta_k$ .

L'inconvénient majeur de cette méthode de post-correction est que si l'atténuation produit une perte totale de photons dans certaines zones de l'image, l'activité ne pourra être restituée en quelques itérations, mais seulement après un assez grand nombre.

C'est pourquoi Maze [48] a aussi proposé un algorithme de pré-correction dans le cadre d'une atténuation non homogène connu, le IPC (Iterative Pre Correction) où dès la première itération des résultats quantitatifs commencent à être obtenus.

### La méthode IPC (Iterative Pre Correction)

Les projections sont corrigées avant la reconstruction alors que dans la méthode de Chang, cette correction se fait sur l'image reconstruite. A partir des images mesurées, le but est d'obtenir les images qui seraient mesurées si l'atténuation n'existait pas. L'atténuation de l'activité de chaque point de coordonnées  $(x, y)$  mesurée dans la direction  $\theta_k$  est donnée par le facteur suivant :

$$e^{-\int_{C_{\theta_k}^{x,y}} \mu_{x,y}(r, \theta_k)} \quad (\text{II.54})$$

Pour chaque point d'une projection (image acquise par le détecteur sous un certain angle) un certain nombre de pixels (de l'objet source) participent à sa formation. Entre un point donné de la projection et chaque pixel de l'objet source, le flux de photons entre ces points subit une atténuation donnée. Le coefficient de correction employé pour un point d'une projection (image acquise par le détecteur sous un certain angle) sera la moyenne arithmétique de toutes les atténuations définies précédemment.

$$\sum_{E_k} e^{-\int_{C_{\theta_k}^{x,y}} \mu_{x,y}(r, \theta_k)} \quad (\text{II.55})$$

avec  $E_k$  ensemble des points de la zone d'activité participant à la formation des projections de l'activité dans la direction  $\mu_k$  sur une ligne donnée.

L'étape initiale de l'algorithme IPC permet d'obtenir les premières projections corrigées en divisant point à point les projections originales (images du détecteur) par la matrice de correction proposée. La rétroprojection des premières projections corrigées permet d'obtenir une première estimation de l'objet. Les itérations successives de l'algorithme IPC permettent d'affiner l'estimation de l'objet et l'algorithme suit les étapes suivantes :

- Les projections de la première estimation de l'objet sont simulées en tenant compte de la carte d'atténuation, nous les appelons projections atténuées.
- Les erreurs de la projection atténuée sont calculées par soustraction de celle-ci aux projections originales, nous les appelons projections erreurs.
- Les projections erreurs sont corrigées de la même manière que les projections originales en les divisant point à point par la matrice de correction.
- Les projections erreurs corrigées sont à leur tour rétroprojetées pour obtenir l'objet erreur.
- Enfin cet objet erreur est ajouté à l'estimation de l'objet à l'itération précédente pour donner une nouvelle estimation de l'objet plus précise.

### II.4.3 Algorithme de précorrection d'atténuation généralisé (GIPC)

#### II.4.3.a Principe de notre correction

Jusqu'à présent dans les méthodes classiques de correction d'atténuation, comme le GCC ou le IPC, une connaissance de la carte d'atténuation était requise. Mais cet *a priori* peut être considéré comme trop fort. Notre nouvelle méthode se propose de pouvoir corriger le facteur d'atténuation avec un *a priori* beaucoup plus faible. Étant donné que l'une de nos modalités permet de reconstruire la carte de densité d'électrons, il est possible de faire un lien via la section efficace  $\sigma_E$  entre cette carte et la carte d'atténuation. En effet en un point  $M$ , nous avons bien :

$$\mu_E(M) = \sigma_E(M).n_e(M) \quad (\text{II.56})$$

Une connaissance *a priori* des sections efficaces, permet donc de connaître l'atténuation à partir de la densité électronique. Or la section efficace est fortement corrélée avec le type de matière, il s'en suit qu'on peut créer un algorithme de clustering qui peut pour une valeur de densité électronique associée un type de matière avec une section efficace fixé et donc un coefficient d'atténuation et cela pour chaque point du milieu étudié. Ainsi donc l'*a priori* de la connaissance de la carte d'atténuation devient juste un *a priori* sur le type de matière que compose le milieu étudié. Par exemple dans un contexte cérébrale, nous pouvons supposer qu'une tranche sous étude peut être composée de : matière grise, matière blanche, tissu tumoraux, sang, os ...

Notre schéma de reconstruction et de correction présenté à la Fig.II.9 peut donc se résumer à :

1. Nous obtenons les données brutes sur les détecteurs pour nos deux modalités
2. A partir de ces données brutes pour la modalité par transmission, nous effectuons une première estimation de la densité d'électrons et nous en déduisons une première estimation de la carte d'atténuation.

3. Nous corrigeons nos données grâce à l'estimation de la carte d'atténuation et nous recalculons notre estimation de la carte de densité électronique et celle de la carte d'atténuation. Nous réitérons jusqu'à convergence grâce à notre algorithme de correction.
4. Nous utilisons les cartes d'atténuation et de densité électronique pour corriger notre jeu de donnée issu de la modalité par émission, ce qui nous permet de calculer la carte d'activité.

### II.4.3.b Présentation de l'algorithme

Pour arriver à réussir cette correction, il nous a donc fallu généraliser le concept de l'algorithme Iterative Precorrection [48] à une plus grande variété de transformations afin de résoudre de manière itérative le problème de correction de l'atténuation dans un contexte plus général. Le principe de notre algorithme est donné Fig.II.12.

Nous pouvons le réécrire de manière plus formel dans un cadre très générale. Considérons les deux espaces mesurables  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^4$ . Soit  $\mathcal{L}_+^2(\mathcal{X})$  (resp.  $\mathcal{L}_+^2(\mathcal{Y})$ ) l'espace des fonctions carré sommables définies sur  $\mathcal{X}$  (resp.  $\mathcal{Y}$ ) tel que :

$$\forall f \in \mathcal{L}_+^2(\mathcal{X}) \quad \text{and} \quad \forall X \in \mathcal{X}, \quad f(X) \geq 0. \quad (\text{II.57})$$

Soit  $T : \mathcal{L}_+^2(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{L}_+^2(\mathcal{Y})$  un opérateur intégral tel que

$$(Tf)(Y) = \int_{X \in \mathcal{X}} K_T(Y, X) f(X) dX. \quad (\text{II.58})$$

avec

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \quad K_T(Y, X) \geq 0,$$

donc  $T$  est un opérateur linéaire positif.

Le noyau intégral de  $T$  est soumis à une déformation  $D(Y, X) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$  telle que

$$\exists D_m \in \mathbb{R}^+ < \infty \quad \text{s.t.} \quad \forall (X, Y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \quad D(Y, X) \leq D_m \quad (\text{II.59})$$

Donc nous pouvons définir un opérateur dit "déformé"  $T^\Phi : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ ,

$$(T^\Phi f)(Y) = \frac{1}{D_m} \int_{X \in \mathcal{X}} D(Y, X) K_T(Y, X) f(X) dX. \quad (\text{II.60})$$

De cette définition, nous pouvons en déduire que :

$$d\|Tf\|_2 \leq \|T^\Phi f\|_2 \leq D_m \|Tf\|_2 \quad (\text{II.61})$$

L'injectivité de  $T^\Phi$  pouvant être montrée par l'absurde de l'injectivité de  $T$ .

L'algorithme consiste alors à itérer la récurrence suivante, la preuve de la convergence sera donnée dans la partie suivante :

$$f^{n+1} = f^n + T^{-1} \circ T^\Phi (f - f^n) \quad \text{avec} \quad f^0 = 0. \quad (\text{II.62})$$

Pour appliquer notre algorithme, il faut donc avoir quelques hypothèses satisfaites. Mais si nous considérons le problème de correction pour les transformées de Radon généralisées, nous savons que nos opérateurs sont positifs et que la fonction de distorsion

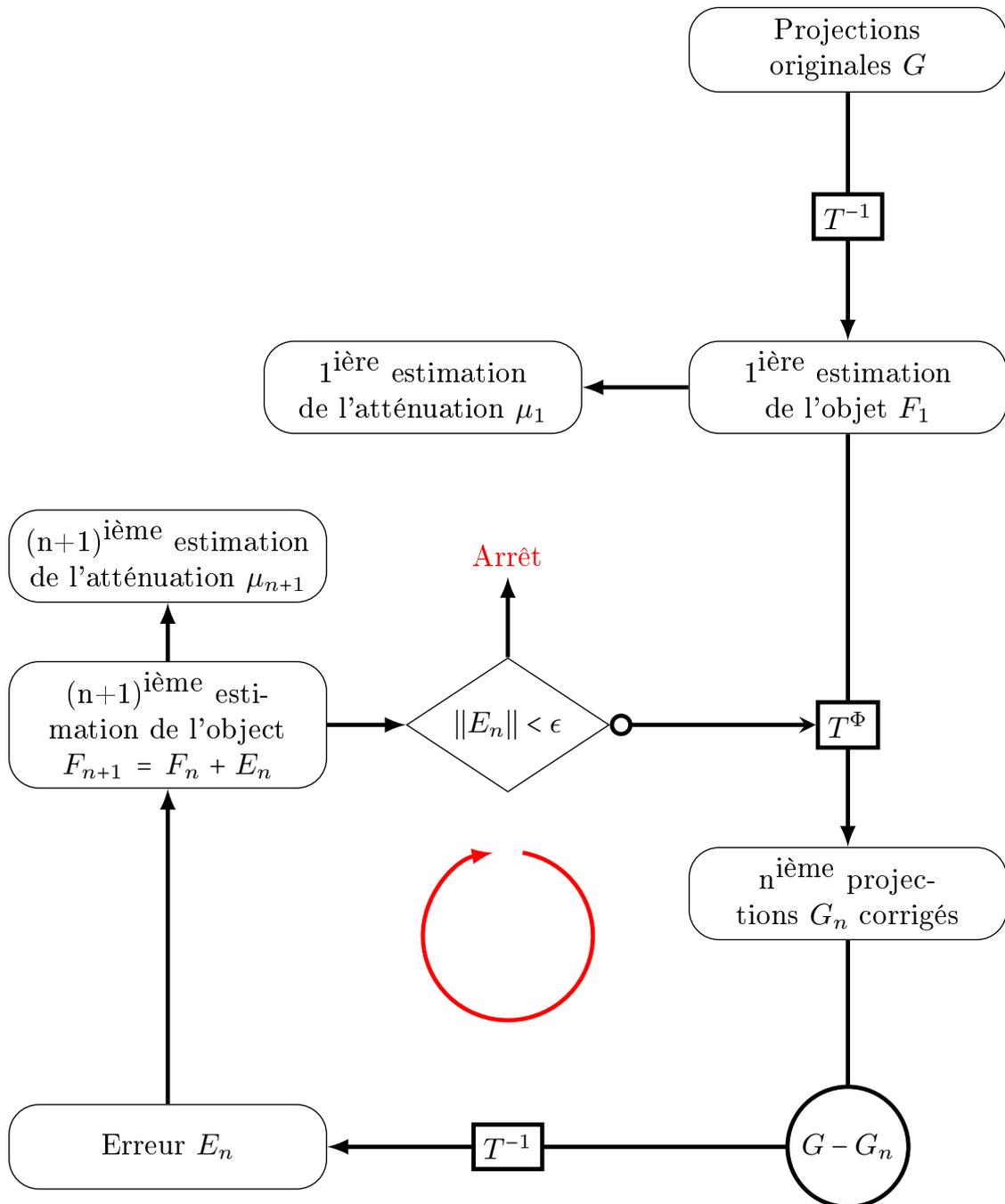


FIGURE II.12 – Principe de fonctionnement de l’algorithme GIPC

vérifie  $\forall (X, Y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ,  $0 < D(Y, X) < 1$ . Dans notre cas de bimodalité, l'opérateur  $T$  va successivement devenir l'opérateur de Radon CART puis TRVC, pour lesquels les injectivités ont été démontrés [66, 78]. Concrètement pour le critère d'arrêt, nous prendrons soit un nombre d'itérations, soit un seuil entre l'écart sur l'erreur quadratique moyenne entre deux itérations.

### II.4.3.c Convergence de l'algorithme

Il nous reste donc à prouver que notre algorithme est convergent pour assurer qu'il tendra vers une solution stable et que cette solution est unique.

Pour se faire nous avons besoin de montrer que l'erreur tend vers 0, ce qui signifie que :

$$|f^{n+1} - f^n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0_{\mathcal{F}_1} . \quad (\text{II.63})$$

L'écriture de cette erreur peut être mis sous cette forme

$$\begin{aligned} f^{n+1} - f^n &= T^{-1} \circ T^\Phi (f - f^n) \\ &= (Id_{\mathcal{F}_1} - T^{-1} \circ T^\Phi)^n (f^1) . \end{aligned} \quad (\text{II.64})$$

Nous définissons la norme de notre opérateur  $T$  (en utilisant la norme  $\mathcal{L}_2$ ) comme :

$$|||T||| = \sup_{f \in \mathcal{F}_1} \frac{\|Tf\|_2}{\|f\|_2} , \quad (\text{II.65})$$

la preuve de la convergence devenant ici

$$|||Id_{\mathcal{L}_+^2(\mathcal{X})} - T^{-1} \circ T^\Phi||| < 1 . \quad (\text{II.66})$$

Nous pouvons noter que  $T^{-1} \circ T = Id_{\mathcal{F}_1}$  donc

$$Id_{\mathcal{F}_1} - T^{-1} \circ T^\Phi = T^{-1} \circ (T - T^\Phi) . \quad (\text{II.67})$$

Pour  $f \in \mathcal{F}_1$ , nous avons donc,

$$\begin{aligned} (T^{-1} \circ (T - T^\Phi)) f &= \\ &= T^{-1} \left( \int_{\mathcal{X}} \left( 1 - \frac{D(Y, X)}{D_m} \right) K_T(Y, X) f(X) dX \right) . \end{aligned} \quad (\text{II.68})$$

On a donc l'existence d'une constante  $M$  telle que

$$\left( 1 - \frac{D(Y, X)}{C} \right) \leq M = 1 - \min_{(X, Y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \left\{ \frac{D(Y, X)}{C} \right\} < 1 . \quad (\text{II.69})$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned} (T^{-1} \circ (T - T^\Phi)) f &\leq M \times T^{-1} \left( \int_{\mathcal{X}} K_T(Y, X) f(X) dX \right) , \\ &\leq M \times f \end{aligned} \quad (\text{II.70})$$

et donc

$$\|Id_{\mathcal{F}_1} - T^{-1} \circ T^\Phi\| \leq M^2 < 1, \quad (\text{II.71})$$

ce qui assure la convergence.

Il nous reste donc à prouver que la solution obtenue est unique et que cette solution est bien la fonction  $f$  originale. A la convergence, nous avons :

$$f^{n+1} - f^n = T^{-1} (T^\Phi (f - f^n)) = 0. \quad (\text{II.72})$$

L'injectivité de nos opérateurs impliquent que notre algorithme implique l'unicité de notre solution :

$$\begin{aligned} T^{-1} (T^\Phi (f^{n+1} - f^n)) = 0 &\implies T^\Phi (f - f^n) = 0 \\ &\implies f^n = f. \end{aligned} \quad (\text{II.73})$$

Notre algorithme assure donc la convergence et l'unicité de notre solution.

#### II.4.4 Implémentation et résultats

Nous suivons le schéma Fig. II.9. La première étape est de reconstruire la densité d'électrons, puis une carte d'atténuation est déduite de la première estimation de  $n_e$  et nous appliquons l'algorithme itératif pour obtenir à la fois une carte de densité électronique corrigée et une estimation correcte de la carte d'atténuation. Une fois la première modalité corrigé, nous pouvons reconstruire la carte d'activité issue de la TRVC en la corrigeant grâce à l'algorithme de correction et des deux cartes (carte d'atténuation et  $n_e$ ) obtenues avec la correction de la première modalité.

Fig. II.13 montre les reconstructions des différentes données de l'image du thorax (voir Fig. II.11(a) en transmission et II.8(a) en émission). Nous utilisons les mesures qu'on a pu observer pour la modalité CART à l'image II.11(b) et pour la modalité TRVC à l'image II.8(b). Nous réalisons bien entendu les différentes corrections via l'algorithme GIPC pour lequel nous utiliserons le critère d'arrêt suivant : l'erreur quadratique entre deux itérations soit être inférieur à 0.1%. Nous négligerons les diffusions d'ordre supérieur à un pour garder nos modèles valides, ce qui ajoutera du bruit supplémentaire en pratique. Nous modéliserons donc ce bruit par un bruit poissonnien pour lequel nous choisirons des niveaux de rapport signal sur bruit réaliste en imagerie tomographique à savoir 20dB et 30dB. Nous pouvons constater sur II.13 une bonne qualité de reconstruction aussi bien pour la carte de densité électronique que pour l'activité.

Nous pouvons étudier à partir de là, la qualité intrinsèque apportée par notre algorithme de correction. Pour se faire, nous allons regarder l'évolution du terme d'erreur quadratique moyenne relative (EQMR) suivant le nombre d'itérations. Ce résultat est montré à la Fig. II.14. L'évolution de ces courbes montre clairement la gain en terme de qualité et ce pour plusieurs niveaux de bruit. Cette amélioration est d'autant plus flagrante sur la carte d'activité qui, sans la correction de la densité électronique, possède un niveau d'erreur trop élevé pour être exploitée. Quoi qu'il en soit l'algorithme de correction permet de faire diminuer de façon drastique l'EQMR, même pour un niveau d'erreur de 20dB.

Nous avons donc bien montré la faisabilité de cette bimodalité fondée sur le rayonnement diffusé. Les deux modalités apparaissent réalisables théoriquement, grâce à l'apport

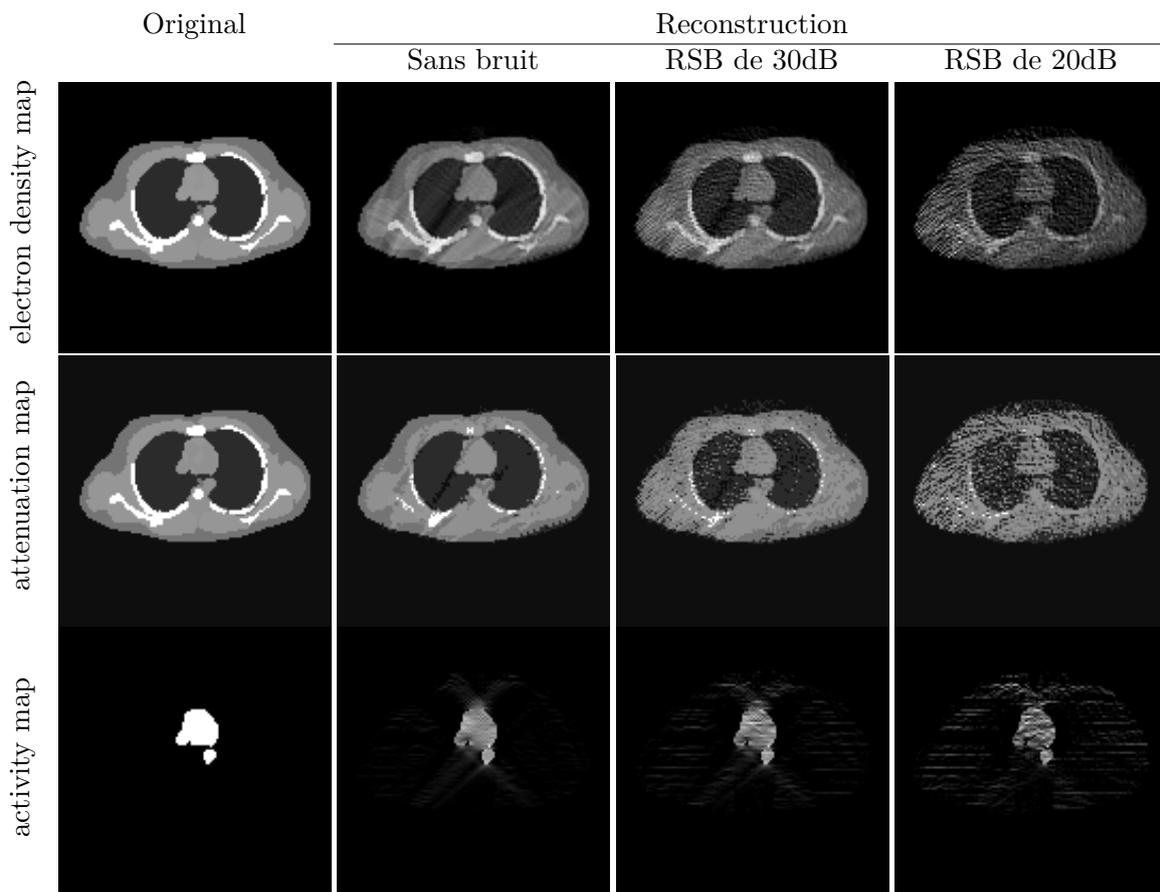


FIGURE II.13 – Différentes reconstructions de la carte de densité électronique, de la carte d'activité et une estimation de la carte d'atténuation pour différent niveau de RSB. Les reconstructions sont obtenues en l'algorithme GIPC et le bruit est généré par un procédé poissonien. Nous commençons l'algorithme à partir des données données dans les figures II.11(b) et II.8(b).

de notre algorithme de correction notamment, et complémentaires, offrant de nouvelles perspectives et de nouvelles approches en imagerie médicale et proposant une alternative possible aux bimodalités classiques.

## II.5 Conclusion

Nous avons donc vu comment la généralisation de la transformée de Radon sur des lignes brisées pouvaient être utilisée concrètement à travers ces trois formes. La première pouvant permettre une reconstruction d'image par transmission en limitant les prises de vu grâce à l'ajout d'un miroir. Les deux suivantes exploitant avantageusement le phénomène de diffusion Compton pour pouvoir faire de la tomographie par émission. La dernière application nous ayant permis d'ouvrir la voie vers une nouvelle modalité de bimodalité tomographique. Ainsi grâce notamment à la création d'un nouvel algorithme de correction des données, nous avons vu comment coupler deux modalités d'imagerie Compton et comment réussir à corriger efficacement les phénomènes physiques d'atténuation et de

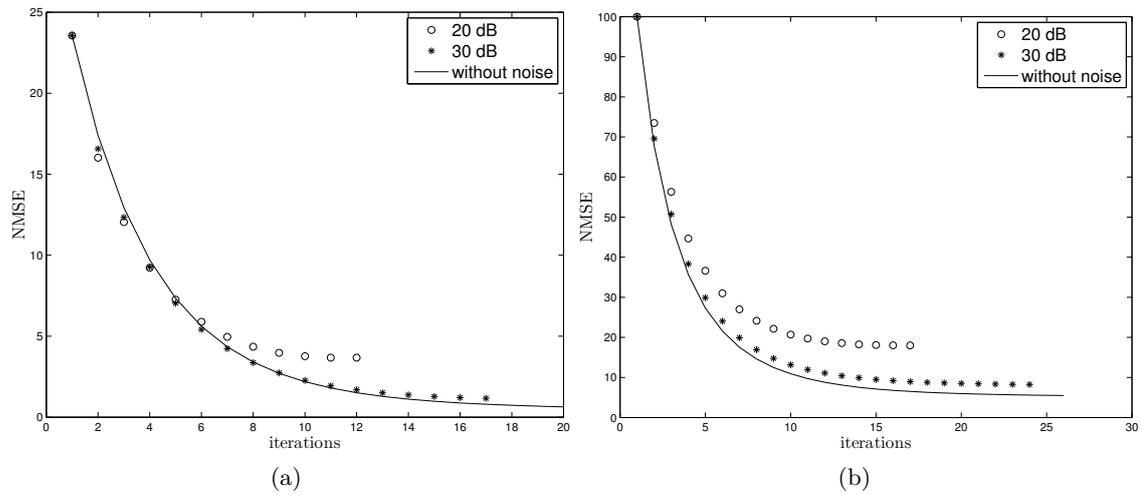


FIGURE II.14 – Évolution de l'EQMR (en %) suivant le nombre d'itérations de l'algorithme pour la correction de la densité d'électrons (a) et pour la carte d'activité (b) pour différents niveaux de RSB. Les différentes courbes s'arrêtent quand le critère d'arrêt de l'algorithme est atteint.

non-uniformité de la densité électronique.

Tous ces résultats prouvent l'intérêt de l'étude des transformées de Radon généralisées sur des lignes brisées et ouvrent la possibilité d'une nouvelle approche de l'imagerie.

