La théorie compositionnelle des suites modales chez Anatol Vieru

Dans cette section, nous discutons quelques applications compositionnelles de la théorie modale dont nous avons présenté les éléments théoriques majeurs dans le premier chapitre. Nous nous concentrons, en particulier, sur la théorie des suites modales, un processus compositionnel basé sur l'engendrement de suites périodiques à travers le calcul de différences finies (sur des structures algébriques particulières). Cette méthode algébrique, qui met en évidence l'articulation dialectique entre la notion de « son » et celle d'« intervalle », est décrite par le compositeur dans plusieurs écrits[252]. Nous allons reprendre certaines propriétés théoriques des suites modales pour montrer comment le compositeur roumain les a utilisées dans deux compositions des années soixante-dix : *Symphonie* n° 2 pour orchestre (1978) et *Zone d'oubli* pour alto (1973). Cependant, avant de rentrer dans cette technique compositionnelle, nous allons reprendre encore une fois le concept de « structure intervallique » pour analyser comment il est employé par Vieru dans ce qu'il appelle les « cribles ». L'utilisation des cribles par Vieru rappelle beaucoup plus le célèbre procédé d'Eratosthène que la théorie homonyme de Xenakis, telle que nous l'avons présentée dans le premier chapitre. Le compositeur utilise la technique des cribles dans sa première Symphonie intitulée *Ode au silence* (1954-1955) qui sera notre point de départ pour analyser la facette compositionnelle de la théorie modale[253].

---

[251] Ce chapitre développe une communication sur les structures algébriques en musique présentée à l'occasion de la journée d'étude sur Anatol Vieru qui s'est déroulée à l'Ircam le 2 décembre 2000 dans le cadre des Séminaires *MaMuPhi* (Mathématiques/Musique et Philosophie) dirigés par François Nicolas, Gérard Assayag et Guerino Mazzola. Pour un compte-rendu de la journée, avec le programme du concert qui a proposé de nombreuses créations françaises d'Anatol Vieru, voir aussi la contribution collective [CAZABAN *et al.* 2003].

[252] En particulier dans l'un de deux articles publiés dans *Perspectives of New Music* [VIERU 1992] et dans le chapitre V de l'ouvrage *The Book of Modes* [VIERU 1993, 113-134]. Pour une étude exhaustive des aspects algébriques des suites modales, voir notre contribution personnelle [ANDREATTA et VUZA, 2001

[253] Le compositeur utilise la technique des cribles dans d'autres compositions, en particulier dans *Le Crible d'Erathostène*, *Clepsydre I*, *Clepsydre II* et *Ecran.*

3.3.1 Structures intervalliques et technique des cribles dans « Ode au silence »

Cette pièce, qui représente dans l'intention du compositeur « *une étude musicale sur le temps et l'espace* », est divisée en trois mouvements. Le premier mouvement expose un bloc sonore, constitué de 61 hauteurs différentes, obtenu par la superposition des différents états d'une même structure modale ; ce bloc sera ensuite sculpté, découpé à l'aide de cases temporelles prédéterminées. Progressivement, les trous qui se créent ainsi sont remplis par des trémolos de gongs. Il s'agit d'une sorte de musique en creux ; la pensée modale d'Antol Vieru gère, en fait, l'avènement du silence, à l'aide d'une application rigoureuse du système des hauteurs dans le domaine rythmique et dans l'organisation des dynamiques[254].

L'importance de ce premier mouvement repose sur le fait que le compositeur exprime la transformation d'une structure modale en harmonie ; par l'intermédiaire de la technique des cribles, qui est aussi à la base de la génération du mode employé tout au long de la pièce, cette harmonie est, à son tour, mise en temps et devient forme musicale. Le « criblage » de l'espace des hauteurs se réalise par un processus de Fibonacci à partir du nombre 1 (non répété). Etant donné que le processus s'arrête presque immédiatement, cela correspond à engendrer une structure modale par les premiers nombres premiers. Ces nombres sont interprétés comme des intervalles, ce qui permet d'obtenir la structure (1 2 3 5). Cette structure intervallique est « composée », au sens de la théorie modale, avec la classe de hauteur {0}, ce qui revient à la déployer à partir du *do* central du piano[255]. Le résultat de cette première opération de « composition » est donné par la figure suivante :

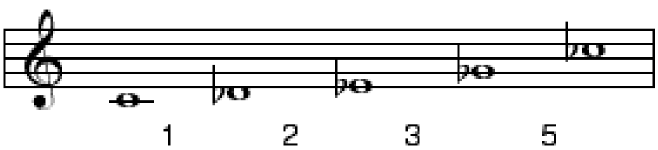


Figure 102 : Déploiement de la structure intervallique (1 2 3 5) à partir du *do*

Le processus de Fibonacci est abandonné et la structure modale est prolongée par ajouts successifs de nombres premiers. Le procédé est réalisé en « miroir » en considérant le *do* comme axe de symétrie.

[254] Le même procédé a été utilisé dans le premier épisode de l'opéra *Jonas* (1972 - 1975) ; certaines techniques, en particulier les transformations graphiques, sont ici inspirées par l'esthétique de l'artiste hollandais M.C. Escher.

[255] La même cellule génératrice est utilisée dans la pièce *Ecran*, créée à Royan en 1971, et dans les deux *Clepsydres* (1968-69 et 1970-72).

La somme de ces nombres premiers est elle-même le nombre premier 29 qui n'est évidemment pas un multiple de 12. Pour cette raison, on obtient ce qu'on appelle une gamme non octaviante qui n'est donc pas du type des 352 structures modales classées de façon systématique dans le catalogue du *Livre des Modes*. La figure suivante montre le double comportement non-octaviant de la structure intervallique que le compositeur a déployée par symétrie (autour de la note *do*) sur presque cinq octaves :

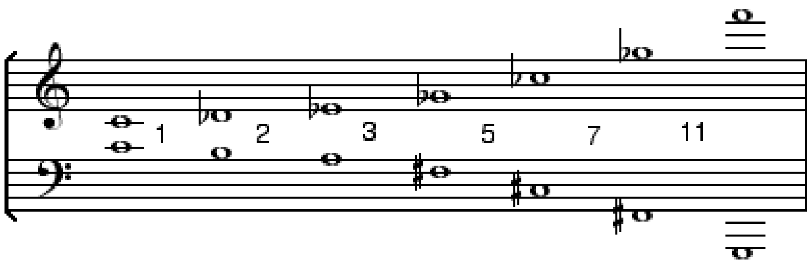


Figure 103 : Structure intervallique doublement non-octaviante

À partir des pôles ainsi obtenus, la même structure est bâtie en sens inverse, en transformant simplement un intervalle ascendant en un intervalle descendant (et vice-versa), en respectant toutefois (en valeur absolue) les intervalles de départ. Évidemment, un déploiement en sens inverse à partir des mêmes pôles ne change pas l'axe de symétrie, qui restera donc le *do* de départ, comme le montre la figure suivante.

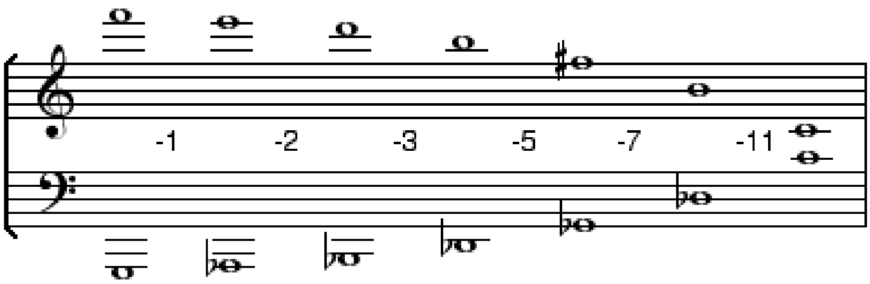


Figure 104 : Processus de déploiement de la même structure de départ mais en sens inverse

L'union ensembliste de la première et de la deuxième séquence donne le bloc harmonique suivant :

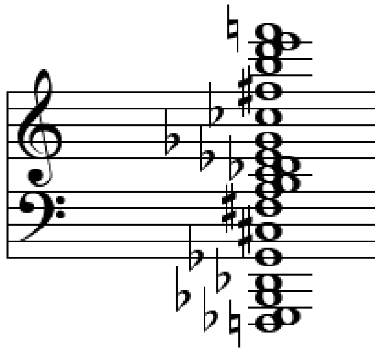


Figure 105 : Bloc harmonique obtenu par union ensembliste des deux gammes non octaviantes mutuellement symétriques

Ce bloc admet plusieurs hauteurs qui se disposent de façon symétrique par rapport à l’axe de symétrie principal (le *do*). Le compositeur choisit six hauteurs (outre *do*), ce qui permet d’extraire du bloc de départ un accord de sept notes. Cet accord est montré sur la figure suivante :

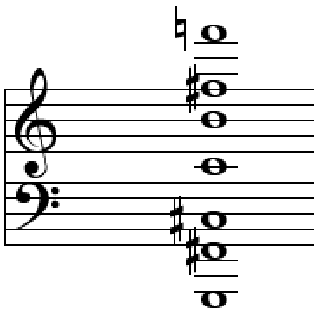


Figure 106 : Accord obtenu par extraction des pôles de symétrie de l’accord de départ

Le nouveau bloc est « enrichi » en prenant chacun de ses pivots comme point de départ d’une nouvelle suite qui utilise les mêmes nombres premiers comme intervalles.

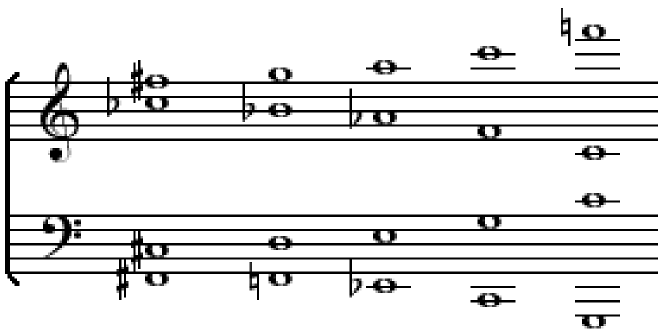


Figure 107 : Déploiement de la structure intervallique de départ à partir des nouveaux pôles

Les deux processus peuvent maintenant être réunis, comme le montre la figure suivante :

Figure 108 : Déploiement de la structure intervallique de départ à partir des nouveaux pôles

Le compositeur a ainsi fait proliférer le champ harmonique de départ en aboutissant à un bloc sonore constitué de 31 hauteurs. Il s'agit, encore une fois, d'une gamme non-octaviante qui s'étend dans la même tessiture que le bloc sonore utilisé précédemment. La densité est donc considérablement augmentée ainsi que la possibilité de repérer de nouveaux pôles disposés de façon symétrique autour du *do*. Ces pivots peuvent à leur tour engendrer de nouveaux centres de symétrie qui peuvent également correspondre à des structures micro-intervalliques. La figure suivante montre un exemple d'axes de symétrie qui appartiennent à la division de l'octave en 24 parties. Autrement dit, ces centres se situent dans le groupe cyclique **Z**/24**Z** d'ordre 24 :

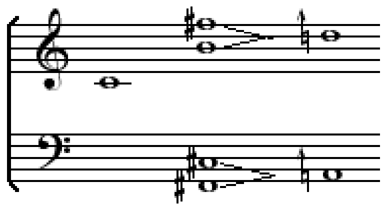


Figure 109 : Deux axes de symétrie micro-intervalliques

Ces nouveaux centres engendrent, à partir du même principe appliqué encore une fois dans les deux directions (ascendante et descendante), un espace chromatique des (trente) hauteursmais cette fois dans une division de l'octave en quarts de tons. Le bloc sera symétrique par rapport au *do* central, cette note n'étant pas incluse dans l'espace des hauteurs, comme le montre la figure suivante :

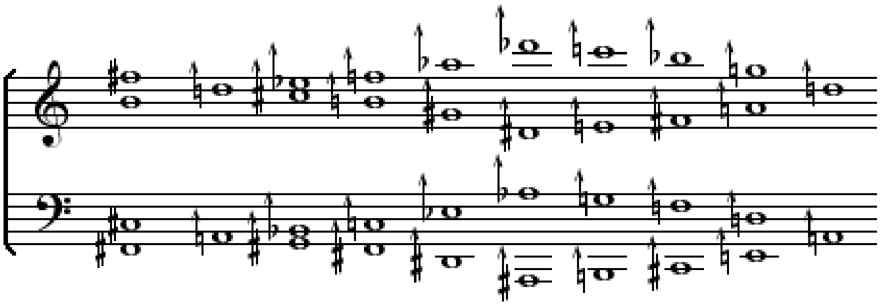


Figure 110 : Espace micro-tonal résultant du déploiement de la structure intervallique de départ selon des pôles microintervalliques

Les deux systèmes se situent à un quart de ton l'un de l'autre et forment ensemble le bloc de 61 sons qui constitue le matériau de base de la symphonie. Cet accord contient plusieurs symétries internes, qui dérivent d'une organisation très structurée de ses composantes. Cependant il n'a pas de symétrie globale, car l'union ensembliste des deux systèmes (l'un basé sur le groupe **Z/12Z** et l'autre sur le groupe **Z/24Z**) ne permet pas une extension des propriétés de symétrie locale à la forme globale. En outre, joué dans sa totalité au début de l'œuvre, ce bloc semble totalement obscur à cause de sa densité. Toutefois, lorsque le compositeur procède à des découpages, il révèle ses composantes internes en mettant en évidence la structure modale reposant sur les premiers nombres premiers.

Le processus de découpage a lieu dans la première section de la *Symphonie*, selon un procédé qui tient compte de trois variables. Ces variables constituent des « situations musicales » correspondant aux différentes caractéristiques d'intensité. Les deux premières situations correspondent respectivement à la présence de l'intensité *forte* et *piano.* La troisième variable correspond à l'absence de son (pause). Vieru dispose donc les sons selon un decrescendo écrit entre deux pôles : tous les 61 sons *forte* d'un côté, et tous les 61 sons absents de l'autre, en passant par des situations où *forte*, *piano* et silence sont mélangés.

Du bloc de marbre de 61 sons du début, le compositeur enlève progressivement des sons en faisant de découpages du bloc de base selon les registres. Il s'agit d'une « technique sculpturale » que l'on pourrait interpréter, en utilisant une expression du compositeur, comme une simple métaphore du pouvoir d'érosion du temps aveugle. Ajoutons également que le mécanisme utilisé dans ce premier mouvement de la Symphonie *Ode au silence* rappelle la technique de la musique électro-acoustique de l'époque. Pour cette raison, cette pièce possède, à l'écoute, les caractéristiques d'une composition électro-acoustique. L'auditeur perçoit le bloc initial comme un son global très riche, au point d'être assimilable au bruit blanc.

Le processus de composition, selon une lecture proposée par Costin Cazaban, correspond ainsi, dans la perception de l'auditeur, à une sorte de filtrage écrit d'un bruit blanc duquel on enlève progressivement les partiels. Ajoutons aussi que dans le final de la symphonie, la structure initiale est reconstruite, mais cette fois ponctuellement, par découpages variés, selon des figures géométriques qui organisent « en-temps » des parties du matériau de base. L'œuvre, selon les intentions du compositeur, met donc en évidence l'étroite association du temps et de l'espace chez l'auditeur, qui reste dans l'impossibilité d'approcher l'une de ces deux catégories sans faire immédiatement intervenir l'autre.

3.3.2 Théorie des suites modales et leur utilisation dans « *Symphonie n. 2* » et « *Zone d'oubli* »

Nous allons maintenant décrire quelques aspects techniques de la théorie des suites modales. Il s'agit d'une approche algébrique du calcul des différences finies, un problème que nous avons récemment étudié dans le cas de structures plus générales que les groupes commutatifs. Cependant, avant d'en donner la définition formelle, nous voudrions donner une idée intuitive d'un point de vue musical en reprenant la technique du déploiement d'une structure intervallique à partir d'une hauteur donnée telle que nous l'avons vue dans la pièce *Ode au silence*. En renversant la perspective, nous pourrions considérer comme point de départ une gamme non octaviante que nous imaginons de répéter à l'infini. En réduisant les notes de la gamme modulo l'octave, on obtient une suite (infinie) d'entiers de classe de hauteurs qu'on peut noter de la façon suivante :

$f = 0\ 1\ 3\ 6\ 11\ 6\ 5\ 0\ 1\ 3\ 6\ \ldots$

Une telle séquence se répète égale à elle même toutes les sept valeurs. On dira donc que sa *période* est égale à 7. Ses valeurs sont toujours comprises entre 0 et 11. On dira donc qu'il s'agit d'une suite périodique à valeurs dans le groupe cyclique **Z/12Z**.

Pour retrouver la structure intervallique utilisée par Vieru, il suffit de faire la différence (modulo 12) entre la deuxième valeur et la première, la troisième et la deuxième et ainsi de suite. On obtient ainsi la nouvelle suite (infinie) d'intervalles, qu'on notera *f'* :

$f' = 1\ 2\ 3\ 5\ 7\ 11\ 7\ 1\ 2\ 3\ 5\ 7\ 11\ \ldots$

Il s'agit à nouveau d'une suite infinie ayant la même période que la suite initiale, c'est-à-dire 7. On peut imaginer de réitérer le processus en interprétant les données intervalliques comme des classes de hauteurs. Par soustractions successives, on obtient ainsi les suites *f''*, *f'''*, etc. Le problème posé par Vieru, et auquel le compositeur n'a pas su complètement répondre, concerne la caractérisation du comportement des suites dérivées par le processus de soustractions successives.

Ce problème n'a trouvé une réponse qu'au début des années quatre-vingt grâce à la formalisation algébrique proposée par Dan Tudor Vuza[256]. La réponse réside dans un théorème qui caractérise toute suite périodique à valeurs dans un groupe cyclique[257]. Il s'agit d'un théorème de décomposition qui affirme la possibilité de représenter toute séquence périodique à valeurs dans un groupe cyclique **Z/nZ** comme une somme de deux séquences ayant des propriétés structurelles très particulières. Cependant, avant de commenter ce résultat fondamental, nous allons placer le problème des suites périodiques dans son contexte algébrique naturel.

D'un point de vue mathématique, une suite modale est une application *f* de **Z** des nombres entiers dans **Z/nZ**. Par exemple, la suite que nous avons prise comme point de départ correspond à l'application *f* de l'ensemble **Z** dans le groupe cyclique **Z/12Z** qui est définie de la façon suivante :

$f(0) = 0$
$f(1) = 1$
$f(2) = 3$
$f(3) = 6$
$f(4) = 11$
$f(5) = 6$
$f(6) = 5$
$f(7) = 0\ldots$

La valeur $f(0)$ indique donc le premier élément de la suite, $f(1)$ le deuxième et ainsi de suite, jusqu'à la huitième valeur $f(7)$, qui correspond à la première à cause du caractère

[256] L'étude algébrique des suites modales est envisagée d'abord dans un article adressé à un public musicologique et paru dans la revue *Muzica* [VUZA 1984]. Une présentation formelle des résultats est donnée dans la cinquième et dernière partie de la collection d'essais dédiés aux aspects mathématiques de la théorie modale d'Anatol Vieru [VUZA 1982/1986]. Nous avons récemment discuté comment généraliser cette théorie dans le cas de structures algébriques plus générales, comme les *modules* (sur un anneau commutatif). Pour cela, nous renvoyons à deux études intitulées « On some properties of periodic sequences in Anatol Vieru's modal theory » [ANDREATTA et VUZA 2001] et « Anatol Vieru : formalisation algébrique et enjeux esthétiques » [CAZABAN *et al.* 2003].

cyclique de la suite. On peut donc préciser le concept de périodicité d'une suite de la façon suivante. Une suite est périodique s'il existe un entier m tel que :

$f(x) = f(x+m)$ pour tout x de **Z**.

Le plus petit m satisfaisant cette propriété est appelé la période de la suite. Dans le cas précédent, le nombre 7 est le plus petit entier vérifiant l'équation :

$f(x) = f(x+7)$ pour tout x de **Z**.

La suite est donc périodique et sa période est égale à 7.

Considérons un autre exemple de suite périodique à valeurs dans un groupe cyclique différent, en l'occurrence **Z/9Z** :

f = 0 3 2 8 6 0 3 2 8 6 0 …

Il s'agit d'une suite périodique de période $m = 5$ car la suite se répète toutes les cinq valeurs.

Pour mettre en évidence la périodicité de la suite nous pouvons la représenter simplement comme une liste contenant tous les éléments à l'intérieur d'une période. Dans ce deuxième cas, l'exemple précédent sera noté :

f = (0 3 2 8 6)

En particulier, la période m d'une suite peut coïncider avec l'ordre n du groupe cyclique dans lequel la suite prend ses valeurs. C'est le cas précisément d'une série dodécaphonique que l'on imagine réitérée à l'infini. Du point de vue de la théorie modale, une telle série sera donc une suite périodique de période 12 dans le groupe cyclique **Z/12Z**.

Remarquons une différence fondamentale avec la notion de périodicité telle que nous l'avons employée au cours de la première partie, notamment dans le cas des modes à transposition limitée de Messiaen. Un mode à transposition limitée est un sous-ensemble *périodique* de **Z/12Z** ou, plus généralement, d'un groupe cyclique **Z/nZ**. Cependant, la périodicité est définie par rapport à l'opération d'addition, non à la caractéristique de réitération de ses éléments. Par exemple, le mode octotonique {0 1 3 6 7 9}, si interprété comme une séquence infinie à valeurs dans **Z/12Z**, correspond à la suite suivante :

f = 0 1 3 6 7 9 0 1 3 6 7 9…

[257] La théorie développée par Vuza concerne les suites à valeurs dans tout groupe commutatif. Cependant, nous allons la présenter ici dans le cas de la structure de groupe cyclique **Z/nZ** qui est celle qui a intéressé de plus près le compositeur roumain.

Cette suite est périodique de période $m = 6$, à la différence du mode de Messiaen correspondant, qui admet $t = 3$ comme le plus petit entier vérifiant (modulo 12) l'équation suivante :

$t + \{0\ 1\ 3\ 6\ 7\ 9\} = \{0\ 1\ 3\ 6\ 7\ 9\}$

La notion de période ayant été formalisée, nous pouvons détailler un peu le processus de calcul des différences finies. Pour cela, il faut définir d'abord deux *opérateurs* de base de toute suite périodique : l'opérateur « différence » et l'opérateur « translation »[258].

3.3.2.1 Opérateur de différence *D*

Si $G^{\mathbf{Z}}$ est l'ensemble des suites à valeurs dans le groupe G, l'opérateur D est défini de $G^{\mathbf{Z}}$ à valeurs dans $G^{\mathbf{Z}}$. Pour tout élément f de $G^{\mathbf{Z}}$, la suite différence Df est définie formellement par l'équation suivante :

$Df(x)=f(x)-f(x-1)$.

3.3.2.2 Opérateur de translation *T*

L'opérateur T a le même ensemble de définition (domaine) et le même ensemble de valeurs (co-domaine) que l'opérateur D. Il est donc défini de $G^{\mathbf{Z}}$ à valeurs dans $G^{\mathbf{Z}}$, tel que :

$Tf(x)= f(x+1)$.

On peut donc « redéfinir » la notion de périodicité d'une suite modale uniquement en termes d'opérateur « translation » T. En fait, une suite est *périodique* s'il existe un entier m tel que, si l'on note avec T^m la réitération m fois de l'opérateur translation T, on ait l'équivalence formelle :

$T^m (f) = f$.

De même, on notera avec D^m la réitération m fois de l'opérateur différence D. Le but d'une formalisation algébrique de la théorie des suites modales est de caractériser les rapports entre une suite f, ses opérateurs T et D et le groupe dans lequel une telle suite prend ses valeurs.

[258] Le terme « opérateur » est synonyme de « fonction », mais nous l'utilisons ici pour mettre en évidence que les nouvelles fonctions que nous allons définir (fonctions « différence » et « translation ») opèrent à leur tour sur des fonctions, non sur des nombres (comme dans le cas de la fonction f définissant une suite périodique).

3.3.2.3 Suites réductibles et suites reproductibles

Une première caractérisation des suites modales est la *réductibilité*[259]. Une suite *réductible* est une suite modale telle qu'une réitération de l'opérateur D appliquée un nombre k de fois à la même séquence la rend égale à la suite constamment nulle, c'est-à-dire à la séquence f représentée par :

f = 0 0 0 0 0 0 0

Formellement, une suite f est *réductible* s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $D^k f = 0$.

Exemple :

Prenons la suite suivante à valeurs dans **Z**/12**Z** et ayant une période de 6 éléments :

f = 11 6 7 2 3 10 11 6 7 2 3 10…

Df = 7 1 7 1 7 1 7 1…

$D^2 f$ = 6 6 6 6 6…

$D^3 f$ = 0 0 0…

Notons qu'on pourrait renverser la perspective et considérer une suite réductible comme la suite qu'on obtient à partir d'un élément de base (dans ce cas le 6) par des additions successives (modulo 12). Cependant, à la différence du procédé de soustractions successives, il faudra dans le cas additif spécifier la valeur de départ de chaque niveau. On verra un exemple d'utilisation de cette technique « duale » dans le cas de la pièce pour alto *Zone d'oubli* (1973). En outre, cette technique permet d'étudier le comportement statistique de certaines valeurs à l'intérieur d'une suite périodique.

Une autre famille importante de suites modales est représentée par les suites *reproductibles*[260]. Une suite est reproductible si elle vérifie l'équation $D^k f = f$ pour un entier $k \geq 1$.

Exemple :

Prenons la suite suivante à valeurs dans **Z**/12**Z** et ayant la même période de la suite réductible précédente :

f = 11 10 11 7 2 7 11 10 11 7 2 7 11 10 11 7 2 7…

[259] Vieru utilise le terme suite modale comme synonyme de toute suite réductible.
[260] Vieru parle à ce propos de suites irréductibles mais sans jamais les caractériser.

Df = 4 11 1 8 7 5 4 11 1 8 7 5 4 11 1 8 7 5…

$D^2 f$ = 11 7 2 7 11 0 11 7 2 7 11 0…

$D^3 f$ = 1 8 7 5 4 11 1 8 7 5 4 11…

$D^4 f$ = 2 7 11 10 11 7 2 7 11 10 11 7 2 7 11 10 11 7 …

La quatrième réitération du processus de différence est donc égale à la suite de départ (à une permutation circulaire près).

Le processus de différences successives doit parfois être réitéré un nombre très élevé de fois pour retrouver la suite initiale ou bien pour la réduire à 0. En outre, il y a des suites qui ne sont ni *réductibles* ni *reproductibles*, d'où l'intérêt d'aborder le problème d'un point de vue algébrique. En effet, une formalisation algébrique du problème permet de dégager des critères de réductibilité (ou d'irréductibilité) pour une suite périodique sans effectuer tous les calculs de différences finies. Pour cela, il faut d'abord rappeler un résultat fondamental d'algèbre qui concerne la décomposition d'un groupe cyclique en p-groupes[261]. Il s'agit du théorème de décomposition de Sylow, qui établit un isomorphisme entre tout groupe cyclique **Z/nZ** et la somme directe de ses p-sous-groupes maximaux[262].

Voyons maintenant comment appliquer ces résultats pour établir des critères de réductibilité d'une suite modale à partir du cas de la représentation toroïdale du groupe cyclique **Z/12Z**, telle que nous l'avons discutée dans le premier chapitre. La décomposition de 12 en facteurs premiers donne : $12 = 2^2 \times 3$. Le groupe cyclique **Z**/12**Z** est donc somme directe de H_1 et H_2 , les sous-groupes ayant respectivement 4 et 3 éléments. H_1 est le sous-groupe engendré par l'intervalle de tierce mineure et correspond aux éléments {0, 3, 6, 9} tandis que H_2 est le sous-groupe engendré par l'intervalle de tierce majeure et correspond aux éléments {0, 4, 8}. Si l'on note g et h les projections de **Z**/12**Z** sur les sous-groupes H_1 et H_2 respectivement, on peut facilement les calculer à travers le tableau suivant :

[261] Un groupe commutatif fini est appelé un p-groupe (p étant un nombre premier) si son nombre d'éléments est une puissance de p.

[262] En général un groupe commutatif G est somme directe d'une famille de sous groupes H_1, …, H_n si tout élément de G se décompose (avec unicité de décomposition) dans la somme $x_1+\ldots+x_n$ où chaque élément x_i appartient à H_i.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
g	0	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3
h	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8

Figure 111 : Tableau des projections du groupe Z/12Z sur ses sous-groupes maximaux

Ces applications seront maintenant utilisées pour établir des critères de réductibilité d'une suite de 72 éléments :

f = 0 0 1 5 2 6 7 7 8 0 9 1 2 2 3 7 4 8 9 9 10 2 11 3 4 4 5 9 6 10 11 11 0 4 1 5 6 6 7 11 8 0 1 1 2 6 3 7 8 8 9 1 10 2 3 3 4 8 5 9 10 10 11 3 0 4 5 5 6 10 7 11 0 0…

Il suffit de transformer chaque valeur *x* de la suite de départ dans ses composantes ayant valeur partie à valeurs dans le groupe {0,3,6,9} isomorphe à **Z/4Z** et {0,4,8} isomorphe à **Z/3Z**. Les projections sont respectivement :

g = 0 0 9 9 6 6 3 3 0 0 9 9 6 6 3 3 0 0 …

h = 0 0 4 8 8 0 4 4 8 0 0 4 8 8 0 4 4 8 …

Le théorème qui permet de donner une caractérisation complète des suites réductibles est le suivant[263] :

Une suite f à valeurs dans un p-groupe **Z**/p^k **Z** est réductible si et seulement si sa période est une puissance (éventuellement nulle) de p.

En général, pour vérifier qu'une suite à valeurs dans **Z/nZ** est réductible il suffit de décomposer **Z/nZ** dans ses *p*-groupes maximaux, de prendre les projections de la suite du départ sur ces groupes et d'appliquer le critère précédent. Dans le cas de l'exemple précédent, les suites *g* et *h* sont respectivement 9-périodique et 8-périodique, ce qui permet d'affirmer que la suite est réductible[264].

3.3.2.4 Théorème fondamental de décomposition.

Le résultat central de la théorie modale est un théorème de décomposition qui affirme la possibilité de décomposer (de façon unique) toute suite périodique à valeurs dans un groupe cyclique **Z/nZ** en une somme d'une suite réductible et d'une suite reproductible. L'algorithme

[263]Pour la démonstration, qui est essentiellement un raisonnement par récurrence sur la puissance *k* du nombre premier *p*, on renvoie à l'article « On some properties of periodic sequences in Anatol Vieru's modal theory » [ANDREATTA et VUZA 2001].

[264] Notons que, réciproquement, en connaissant les projections *g* et *h* on retrouve la suite *f* du départ à travers la formule : *f* (*x*) = 4*g* (*x*) - 3*h* (*x*) mod 12.

de décomposition, qui a été implémenté dans *OpenMusic*, permet d'aborder des propriétés de suites modales étudiées du point de vue théorique par Dan Tudor Vuza en suivant le processus de décomposition de la suite initiale dans toutes ses étapes intermédiaires. Voici un exemple d'une telle décomposition dans le cas d'une série dodécaphonique déjà analysée dans la première partie[265]. Considérons la série tous-intervalles du premier mouvement de la *Suite Lyrique* d'Alban Berg.

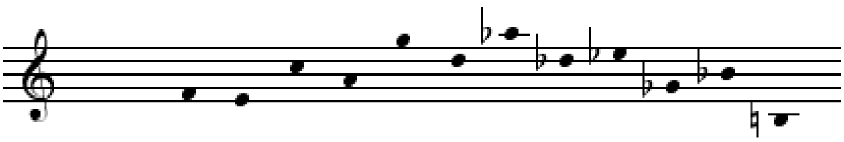


Figure 112 : Série tous-intervalles

Si l'on considère la série d'intervalles et si l'on imagine de les répéter à l'infini, on obtient la suite périodique suivante de période égale à 11 :

f = 11 8 9 10 7 6 5 2 3 4 1 11 8 9 10 7 6 5 2 3 4 1 …

Les composantes réductibles et reproductibles de la suite sont données par :

f_{red} = 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 …

f_{rep} = 5 2 3 4 1 0 11 8 9 10 7 …

Ainsi, chaque intervalle de la série de départ a été décomposé d'une manière unique en somme de deux intervalles. Pour représenter musicalement cette décomposition, on peut transformer la série dodécaphonique initiale en un nouveau profil mélodique en plaçant dans chaque intervalle une nouvelle note réalisant cette décomposition.

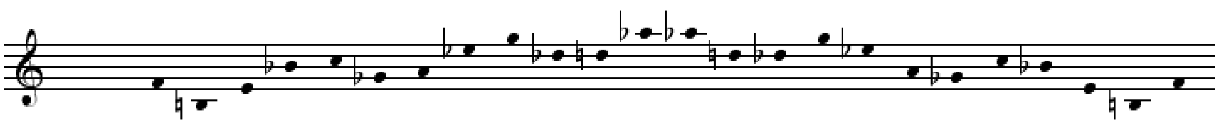


Figure 113 : Profil mélodique obtenu à partir de la décomposition d'une série tous-intervalles

La suite des intervalles qui se situent à gauche des notes ajoutées est réductible tandis que la suite des intervalles à droite de celles-là est reproductible. Dans ce cas, la reproductibilité est loin d'être immédiate, car elle s'obtient après 7503 réitérations du processus des

[265] Voir, en particulier, l'*Interludium* qui conclut la première partie.

différences finies ! Le résultat fondamental de décomposition d'une suite périodique nous sert comme point de départ pour étudier certaines propriétés de prolifération des valeurs d'une suite modale à travers le processus « duale » de celui décrit jusqu'à maintenant.

3.3.2.5 Engendrement des suites modales par additions successives et propriété de prolifération des valeurs d'une suite périodique.

La technique d'engendrement des suites modales par additions successives représente, comme nous l'avons mentionné, une approche duale de celle basée sur le calcul des différences finies. Anatol Vieru utilise cette technique en particulier dans la pièce *Zone d'oubli* pour alto. Le système est dérivé d'une valeur de base (le 6, correspondant au triton) par additions successives (modulo 12). Le niveau I commence par 7, ce qui donne la suite 2-périodique suivante :

f = 7 1 7 1 7 1 7 1 …

Le niveau II commence par 10 et donne lieu, selon le même principe, à une séquence 6-périodique et ainsi de suite, jusqu'au niveau X ayant période 864. Les trois premiers niveaux de la suite sont représentés par la figure suivante :

```
II    10  5  6  1  2  9  10
I        7  1  7  1  7  1
O         6  6  6  6  6
```

Figure 114 : Trois niveaux dans le processus d'additions successives

Remarquons que chaque niveau peut être considéré a priori comme une suite de hauteurs ou d'intervalles, le calcul des différences finies (ou d'additions successives) étant précisément le procédé qui permet de passer d'un niveau à l'autre.

Dans le cas de la pièce *Zone d'oubli*, les niveaux sont attachés à des paramètres différents :

1 Les *hauteurs* sont choisies selon les valeurs contenues dans le niveau V et sont représentées comme toujours en termes de classes de résidus modulo 12.

2 Les *durées* sont données par le niveau IV, en prenant comme unité minimale la double-croche. La valeur 0 est attribuée à une *acciaccatura*.

3 Les *registres* grave, médium et aigu sont déterminés par le niveau VIII, avec les valeurs correspondant aux ensembles {1, 5, 9}, {2, 3, 4} et {6, 7, 8} respectivement.

4 Pour gérer les *intensités*, Vieru utilise le niveau IX, avec 0=*mf*, 3=*mp*, 6=*pp*, 9=*p*. Les éléments 7, 10, 1 et 4 correspondent à des restes.

5 Finalement, les 4 modes de jeu employés dans la pièce sont attachés au même niveau IV qui gère les durées, mais cette fois selon la correspondance :

(a) {0, 1}=*vibrato*,

(b) {3, 4}=normal,

(c) {6, 7}= al ponticello

(d) {9, 10}=*tremolo.*

La figure suivante montre un extrait de *Zone d'oubli* complété avec les différents niveaux du processus d'additions successives.

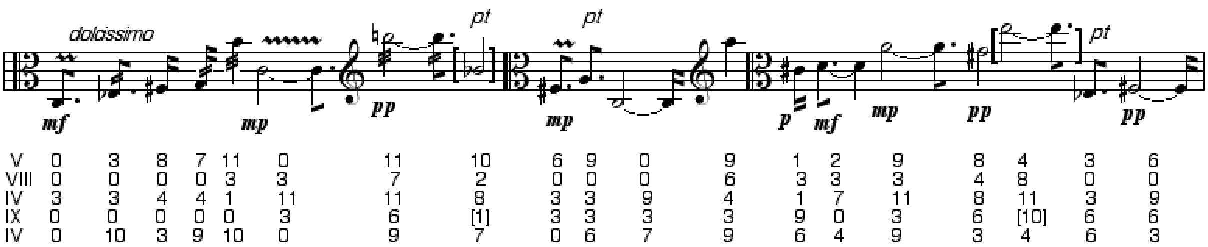


Figure 115 : Extrait de la pièce *Zone d'oubli* avec l'« architecture » numérique sous-jacente

Dans le passage suivant, les mêmes paramètres ont été attachés à d'autres niveaux. En particulier, les hauteurs correspondent maintenant à la suite 6-périodique du niveau II tandis que les deux registres (inférieur et supérieur) sont donnés par les valeurs respectivement impaires et paires de la suite du niveau VI.

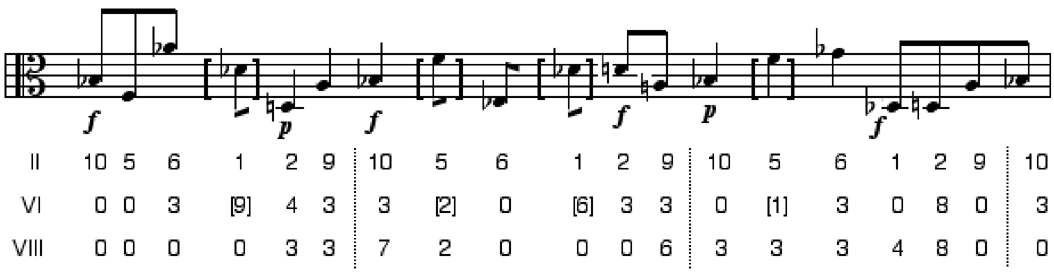


Figure 116 : Extrait de la même pièce après changement de paramètres musicaux

Parfois, le processus d'additions successives met en évidence des propriétés de croissance de certaines valeurs particulières. Vieru considère, par exemple, la suite correspondant au deuxième mode de Messiaen à transposition limitée comme niveau zéro pour engendrer d'autres suites par additions successives. Si l'on note avec f = (2 1) la suite associée à la structure intervallique du mode de Messiaen[266], on peut engendrer d’autres suites périodiques par additions successives à partir de certaines valeurs.

Les deux premiers niveaux sont obtenus en prenant comme points de départ respectivement les valeurs 11 et 2. Pour le troisième niveau, en prenant comme valeur initiale le 8 on obtient une suite modale 14-périodique. La figure suivante montre le processus d’engendrement des trois premiers niveaux :

III	8	10	11	1	5	1	2	10	2	4	5	7	11	7	8	4…	
II		2	1	2	4	8	1	8	4	2	1	2	4	8	1	8	4
I			11	1	2	4	5	7	8	10	11	1	2	4	5	7…	
O				2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1…

Figure 117 : Processus d’engendrement des trois premiers niveaux d’une suite modale

Les niveaux successifs commencent par des 8 et ont la particularité d’avoir une prolifération progressive de valeurs 8 et 4. Notons cependant que ses valeurs sont moins importantes en correspondance du niveau qui précède le changement de la période. Ce comportement est montré par la figure suivante qui offre aussi le pourcentage des valeurs 8 et 4 :

IV 37.5% des 8 et 4

8 4 2 1 2 7 8 10 8 10 2 7 2 1 8 4

V 50% des 8 et 4

8 4 8 10 11 1 8 4 2 10 8 10 5 7 8 4

VI 50% des 8 et 4

8 4 8 4 2 1 2 10 2 4 2 10 8 1 8 4

VII 25% des 8 et 4

8 4 8 4 8 10 11 1 11 1 5 7 5 1 2 10
2 10 2 10 2 4 5 7 5 7 11 1 11 7 8 4

VIII 37.5% des 8 et 4

8 4 8 4 8 4 2 1 2 1 2 7 2 7 8 10
8 10 8 10 8 10 2 7 2 7 2 1 2 1 8 4

IX 50% des 8 et 4

8 4 8 4 8 4 8 10 11 1 2 4 11 1 8 4

[266] La représentation compacte exprime le fait que le mode de Messiaen (aussi appelé mode octotonique) est obtenu par alternance de tons et demi-tons. Il est donc un mode périodique, sa période étant donnée par la somme des deux valeurs 2 et 1.

2	10	8	4	2	10	8	10	5	7	2	4	5	7	8	4

X 68.75% des 8 et 4

8	4	8	4	8	4	8	4	2	1	2	4	8	7	8	4
8	10	8	4	8	10	8	4	2	7	2	4	8	1	8	4

XI 56.25% des 8 et 4

8	4	8	4	8	4	8	4	8	10	11	1	5	1	8	4
8	4	2	10	2	10	8	4	8	10	5	7	11	7	8	4

XII 68.75% des 8 et 4

8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	2	1	2	7	8	4
8	4	8	10	8	10	8	4	8	4	2	7	2	1	8	4

XIII 75% des 8 et 4

8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	10	11	1	8	4
8	4	8	4	2	10	8	4	8	4	8	10	5	7	8	4

Figure 118 : Comportement des suites modales jusqu'au treizième niveau

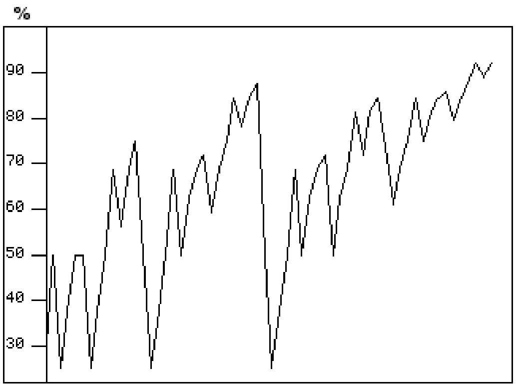
Voyons comment expliquer ce comportement à l'aide du théorème fondamental de décomposition. La suite (2 1) se décompose de façon unique en une partie réductible f_{red}=(6,9) et une partie reproductible f_{rep}=(8 4). Or, f_{red}=(6 9) et f_{rep}=(8 4) sont deux suites à valeurs dans les sous-groupes isomorphes à **Z/4Z** et **Z/3Z** respectivement. On peut montrer (par récurrence) qu'une telle décomposition est caractéristique de toutes les suites f qui ont la propriété suivante :

10. L'opérateur « différence », en correspondance d'un certain niveau, donne la suite f = (2 1).

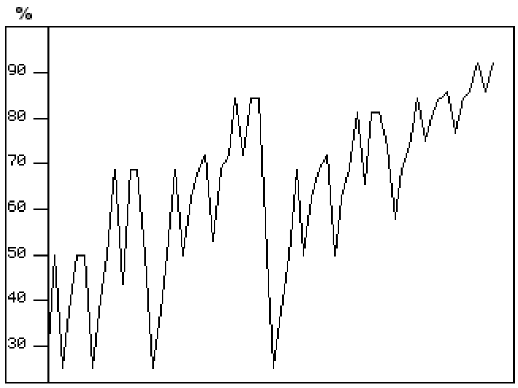
Les niveaux commencent par un entier x tel que $p(x)$=8, où p est la projection dans le sous-groupe isomorphe à **Z/3Z**.

La prolifération des facteurs 8 et 4 dans les différents niveaux n'est donc pas nécessairement liée au fait que tous les niveaux, à partir du troisième, commencent par 8. Parmi les éléments x vérifiant l'équation $p(x)$=8, il y a la valeur « 8 », mais aussi d'autres valeurs, et plus précisément les trois valeurs suivantes : 11 (=8+3), 2 (=8+6) et 5 (=8+9).

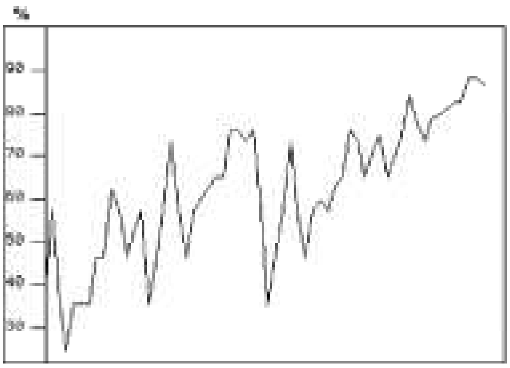
Vieru a donc choisi, pour ainsi dire, une valeur parmi les bonnes. La prolifération des valeurs 8 et 4 aurait eu lieu avec les mêmes proportions si l'on avait pris comme point de départ un des entiers x précédents. La figure suivante montre les courbes de croissance des valeurs 8 et 4 au fur et à mesure que les niveaux augmentent (en abscisse) et en fonction des quatre valeurs initiales admises :



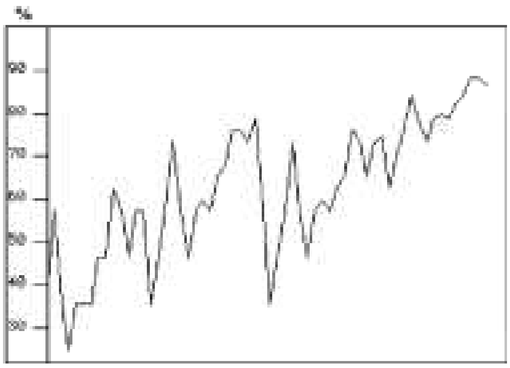
Valeur initiale = 8



Valeur initiale = 2



Valeur initiale = 5



Valeur initiale = 11

Figure 119 : Prolifération des valeurs 8 et 4 en fonction des quatre valeurs initiales

La figure suivante montre la courbe de croissance des mêmes valeurs dans le cas où les différents niveaux ont comme point de départ un nombre dont la projection dans le sous-groupe isomorphe à **Z/3Z** n'est pas égale à 8. Notons que, à la différence des cas précédents, qui produisent un grand pourcentage de 8 et de 4 (environs 90% des valeurs possibles, après 60 itérations), le choix du 4 comme valeur initiale limite fortement la croissance des valeurs 8 et 4, qui ne va jamais au-delà du 50%.

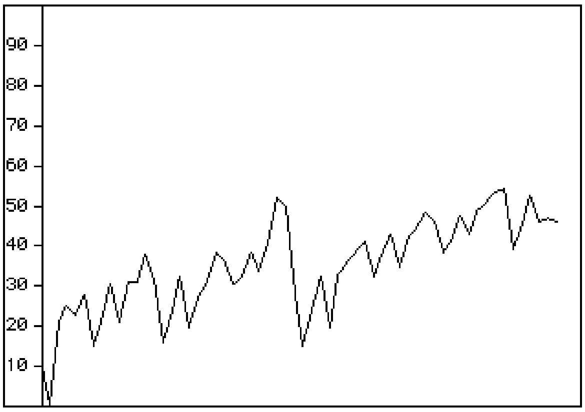


Figure 120 : des valeurs 8 et 4 en correspondance du valeur initial *x* = 4

La technique de prolifération de certaines valeurs par additions successives (ou, en renversant le processus, par différences successives) a beaucoup fasciné le compositeur, surtout à partir des années quatre-vingt-dix. Il s'agit d'un aspect qui rend la théorie modale assez proche d'une certaine tradition minimaliste américaine, pour reprendre les propos contenus dans un article paru dans la revue *Perspectives of New Music* [VIERU 1992][267]. Vieru parle également de procédé fractal, ce qui ne correspond pourtant pas à la nature du processus, qui n'a pas de liens directs avec les théories de l'auto-similarité en composition musicale[268].

Remarquons, pour conclure, que d'un point de vue théorique, le résultat de décomposition de toute suite périodique en partie réductible et partie reproductible offre une technique très puissante de génération et prolifération d'un matériau de base n'ayant pas, a priori, de régularités remarquables. Il s'agit de concepts qui dépassent le cadre strict de la théorie modale développée par Vieru et qui peuvent être appliqués dans différentes démarches compositionnelles.Applications compositionnelles récentes : le modèle algébrique des canons musicaux rythmiques

3.3.3 Olivier Messiaen et la notion de canon musical rythmique

Comme nous l'avons vu au cours du premier chapitre, l'idée d'établir une correspondance entre univers des hauteurs et domaine rythmique est au centre des préoccupations des nombreux théoriciens du XX[e] siècle, en particulier des trois compositeurs/théoriciens dont nous avons analysé la pensée algébrique en théorie de la musique et en composition. Nous

[267] La prolifération de certaines valeurs a été employée par Vieru en particulier dans le huitième et dernier quatuor à cordes, le seul qui est resté inédit à ce jour.

avons aussi mentionné l'importance, surtout dans le cas de Iannis Xenakis et d'Anatol Vieru, de la figure d'Olivier Messiaen, « compositeur et rythmicien » - pour reprendre une de ses appellations - qui a probablement essayé le premier de théoriser la question d'une correspondance entre l'univers des hauteurs et celui des rythmes.

Cependant, comme nous l'avons déjà souligné en suivant une idée de Célestin Deliège, le compositeur n'a fait qu'effleurer les techniques dont il a été l'initiateur[269]. On a vu un exemple de ce paradoxe en considérant la réflexion de Messiaen sur les modes à transposition limitée, une technique compositionnelle qu'il a étudiée dans ses diverses propriétés structurelles, sans arriver, pourtant, à en décerner le caractère éminemment *algébrique*. Ainsi, non seulement le catalogue des modes ayant cette propriété n'est pas exhaustif, à la différence de ce qu'il semble soutenir, mais tout essai d'établir une correspondance précise entre hauteurs et rythmes se heurte à des difficultés majeures. L'analyse de ces difficultés peut servir comme point de départ pour comprendre les solutions offertes par l'approche algébrique.

L'interprétation rythmique des modes à transposition limitée s'appuie sur la notion de *rythme non rétrogradable*, un concept qui est introduit dans l'ouvrage *Technique de mon langage musical* [MESSIAEN 1944] et qui est discuté à plusieurs reprises dans le deuxième tome du *Traité de rythme, de couleur et d'ornithologie* [MESSIAEN 1992]. Nous allons nous concentrer sur cet ouvrage posthume dans lequel le concept de rythme non rétrogradable sert de point de départ pour caractériser, d'un point de vue théorique, le processus de construction des canons rythmiques.

Selon la définition de Messiaen, les rythmes non rétrogradables sont « deux groupes de durées, rétrogradés l'un par rapport à l'autre, encadrant une valeur centrale libre et commune aux deux groupes. Lisons le rythme de gauche à droite ou de droite à gauche, l'ordre de ses durées reste le même. C'est un rythme absolument fermé » [MESSIAEN 1992, 7]. Comme Messiaen le souligne, la non rétrogradation correspond à ce qu'en littérature ou en mathématiques on appelle le palindrome. Un rythme est donc non rétrogradable si la succession de ses valeurs est un nombre palindrome, la valeur centrale étant un nombre unique ou bien la répétition du même nombre. L'analogie entre les rythmes non

---

[268] Nous renvoyons à un des ouvrages parmi les plus intéressants parus ces dernières années sur les processus fractals en composition musicale, *Self-Similar Melodies* du compositeur et théoricien américain Tom Johnson [JOHNSON 1996].

[269] Voir dans la première partie notre discussion sur les modes à transposition limitée du point de vue de la théorie des cribles

rétrogradables et les modes à transposition limitée est postulée à plusieurs reprises dans le Traité, en particulier dans un extrait qui est tiré du premier ouvrage théorique et que nous allons regarder en détail :

> « *Les modes à transpositions limitées réalisent dans le sens vertical (transposition) ce que les rythmes non-rétrogradables réalisent dans le sens horizontal (rétrogradation). En effet, ces modes ne peuvent se transposer au-delà d'un certain nombre de transpositions, sous peine de retomber dans les mêmes notes (enharmoniquement parlant) ; de même, ces rythmes ne peuvent être lus en sens rétrograde sans que l'on retrouve exactement le même ordre de valeurs que dans le sens droit. […] Ces modes sont divisibles en groupes symétriques ; ces rythmes aussi, avec cette différence que la symétrie des groupes rythmiques est une symétrie rétrograde. […] L'analogie est donc complète.* » [MESSIAEN 1992, 9].

L'analogie est loin d'être complète, comme d'autres théoriciens l'on bien souligné[270]. Si l'on cherche une analogie qui soit un *isomorphisme* entre rythmes non rétrogradables et certaines configurations de hauteurs, il faudra considérer d'autres propriétés que la transposition limitée.

Nous avons analysé, en particulier dans la deuxième partie, l'effet de l'opération d'*inversion* sur la structure intervallique d'un ensemble de classes de hauteurs. Une inversion induit une rétrogradation au niveau de la structure intervallique, ce qui permet d'établir une correspondance entre *rythmes non rétrogradables* et ensembles des classes de hauteurs symétriques par inversion (ou modes *auto-inverses*). Dans ce cas, l'analogie est complète. De plus, elle est un isomorphisme : à tout rythme non-rétrogradable de longueur n (c'est-à-dire ayant n divisions minimales) on peut faire correspondre, d'une façon naturelle, un mode auto-inverse dans une division de l'octave en un nombre n de parties égales et vice-versa à tout mode *auto-inverse* dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ correspond toujours un rythme *non-rétrogradable* ayant comme période n. La correspondance est établie au niveau de la structure intervallique, ce qui implique qu'en changeant l'unité minimale on peut attacher à un même mode une infinité de rythmes non rétrogradables, comme le montre la figure suivante :

[270] Par exemple, voir la discussion dans *Geometrie der Töne* [MAZZOLA 1990, 98-99], reprise et prolongée dans *The Topos of Music* [MAZZOLA 2003, 150-152].

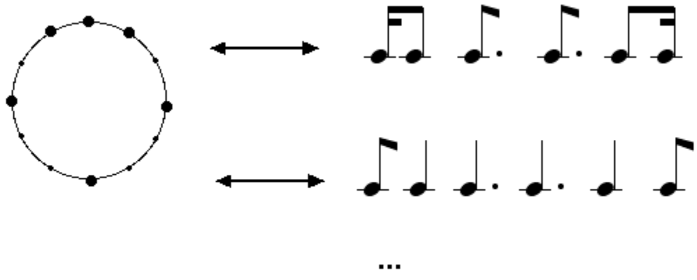


Figure 121 : Deux interprétations rythmiques d'un mode auto-inverse

Nous reviendrons dans la suite de ce chapitre au problème de la formalisation algébrique précise de cette correspondance entre domaine de hauteurs et domaine des rythmes, en présentant le modèle du rythme périodique de Dan Tudor Vuza [VUZA 1985]. Ce modèle explique les possibles réalisations d'une structure intervallique à partir d'une formalisation du rythme périodique comme sous-ensemble de l'axe **Q** des nombres rationnels. Mais avant de discuter cette approche, qui permet également une formalisation rigoureuse de la forme musicale de canon rythmique, nous voulons montrer comment Messiaen utilise la propriété des rythmes non-rétrogradables et le changement d'unité minimale décrit précédemment pour produire des structures de canons rythmiques ayant des caractéristiques géométriques particulières.

Le problème de la construction des canons rythmiques est mentionné dans la partie B du deuxième Tome du *Traité* (« Technique des rythmes non rétrogradables ») et développé, de façon plus systématique, dans le deuxième chapitre intitulé « Pédales et canons rythmiques ». Il s'agit, à notre connaissance, du premier essai de définition de la forme de canon musical en considérant exclusivement l'organisation rythmique, sans s'appuyer préalablement sur la structure mélodique ou l'organisation harmonique.

Par définition, un canon rythmique est la répétition, décalée dans le temps, d'une même structure rythmique, ou d'une de ses transformations. Le pattern rythmique de base, ou *pédale rythmique*, est à son tour répété, ce qui donne le caractère cyclique (et donc infini) de tout canon rythmique. Messiaen prend en considération plusieurs types d'opérations sur cette forme musicale. Une première opération permet d'obtenir un canon » de plus en plus serré » [MESSIAEN 1992, 61] simplement en réduisant la valeur qui établit la distance entre chaque voix.

Notons que cette valeur est toujours la même pour un canon donné. Autrement dit, les voix entrent régulièrement l'une après l'autre, chacune à la même distance temporelle de celle qui la précède. Comme nous l'avons déjà mentionné dans la définition précédente, les voix ne doivent pas nécessairement être les mêmes, mais Messiaen autorise dans la définition de canon des opérations comme les *augmentations* ou les *diminutions*, deux notions qui ne respectent pas, comme le fait remarquer Célestin Deliège, la « *convention terminologique utilisée dans le contrepoint classique* » [DELIÈGE 2003, 28].

Dans la terminologie de Messiaen, l'augmentation (respectivement la diminution) d'une structure rythmique correspond à l'ajout (*resp.* la soustraction) à chaque valeur du pattern rythmique d'un point ou d'une fraction de sa valeur. À travers le processus d'augmentation, Messiaen peut considérer des canons rythmiques dont les voix sont superposées (c'est-à-dire qu'elles démarrent en même temps), mais par le fait du processus d'augmentation (ou de diminution) les voix se décalent l'une par rapport à l'autre.

Un cas particulier de canon rythmique s'obtient en considérant comme pattern rythmique de base un rythme non rétrogradable ou une concaténation de rythmes non rétrogradables. Messiaen discute deux exemples de canons de rythmes non rétrogradables, les deux étant des » triple canons », c'est-à-dire des canons à trois voix. Il s'agit, d'un point de vu structurel, du même canon, la différence étant la valeur minimale qui correspond à une croche dans le premier cas et à une double-croche dans le deuxième.

Le premier exemple est le canon que Messiaen utilise dans la 7^{e} partie de la pièce *Harawi* (1945) intitulée *Adieu*. L'extrait est montré par la figure suivante :

Figure 122 : Le triple canon rythmique non rétrogradable dans *Harawi*

D’un point de vue rythmique, le canon précédent est un canon à trois voix, chaque voix (ou pédale rythmique) étant la concaténation de trois rythmes non rétrogradables, comme le montre la figure suivante :

Figure 123 : Pédale rythmique de *Harawi*

Une valeur rythmique constante, la croche, sépare les différentes entrées de voix, selon la technique traditionnelle de construction des canons rythmiques chez Messiaen. À la différence des canons musicaux traditionnels, chaque voix est une succession différente d’accords qui sont répétés cycliquement sous la forme *d’un* « *ostinato harmonique indépendant des rythmes* » [MESSIAEN 1992, 46]. La première voix correspond à la première portée qui contient six accords différents, tandis que les deux autres ostinato harmoniques correspondent, respectivement, aux trois notes de la portée médiane et aux deux notes de la portée inférieure.

Cependant, l’aspect fondamental de ce processus compositionnel est l’effet des rythmes non rétrogradables et des entrées régulières sur la structure globale du canon. Le compositeur est très clair sur le caractère à la fois chaotique et très organisé de cette forme :

> « *Remarquons […] que les trois rythmes non rétrogradables divisent les durée en 5+5+7 durées, alors que les termes des trois ostinatos harmoniques contiennent toujours six sonorités pour le supérieur, et trois sonorités pour les deux autres. Ajoutons que les durées sont très inégales. Il résulte de tout cela que les différentes sonorités se mélangent ou s’opposent de manières très diverses,* ***jamais au même moment ni au même endroit […]. C’est du désordre organisé*** » [MESSIAEN 1992, 46][271].

Nous avons vu dans cette démarche compositionnelle l’intention, de la part de Messiaen, d’obtenir ce que nous avons appelé un « canon rythmique de pavage » ou *tiling canon* [ANDREATTA *et al.* 1999]. Un canon de pavage a la propriété de se dérouler dans le temps de telle façon qu’à chaque instant il n’y a qu’une (et une seule) attaque parmi les différentes voix. Autrement dit, les voix sont *complémentaires* et la pulsation résultante des différentes pédales rythmiques est *régulière*.

[271] C’est nous que soulignons.

Cette propriété n'est que partiellement vérifiée dans le cas du triple canon de rythmes non rétrogradables utilisé dans *Harawi*, comme la représentation suivante le montre. Cette représentation utilise une grille temporelle dans laquelle les points correspondent à des attaques de voix. Il y a des instants temporels qui ne sont remplis par aucune attaque des trois voix et, de même, il y a des moments où les attaques de deux ou plusieurs voix coïncident[272].

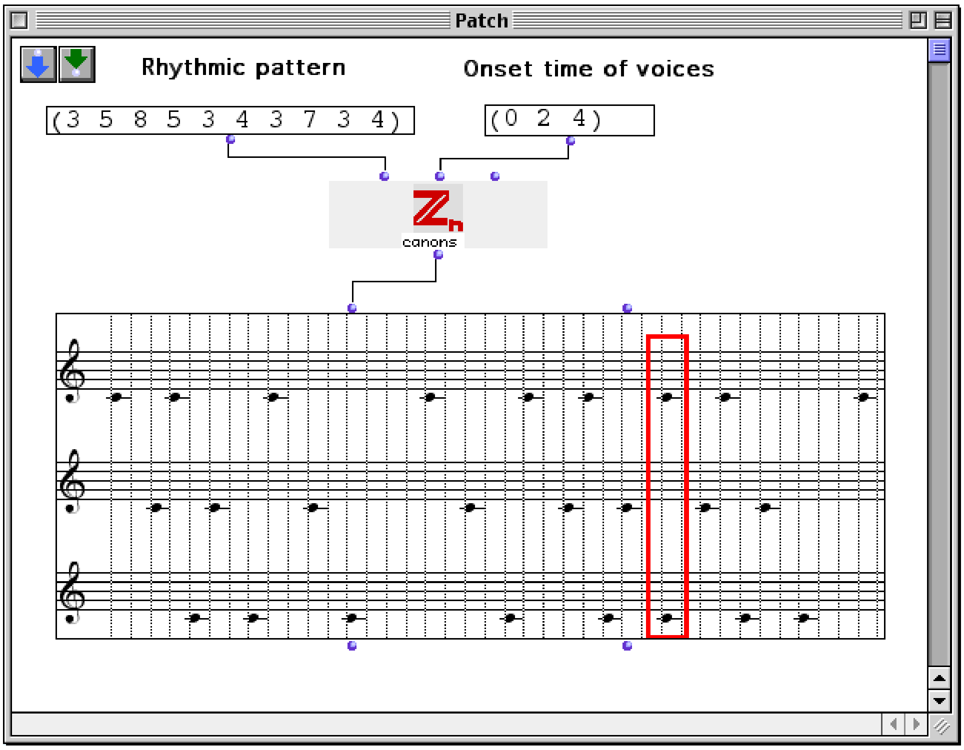


Figure 124 : Représentation du canon de *Harawi* par une grille

La même structure formelle est employée dans la pièce pour deux pianos *Visions de l'Amen* (1943), plus précisément dans la partie intitulée *Amen des anges, des saints, du chant des oiseaux*. Il s'agit donc encore une fois d'un triple canon de rythmes non rétrogradables mais avec une unité minimale d'une triple-croche au lieu d'une double-croche. La figure suivante montre la « nouvelle » structure du canon rythmique en notation traditionnelle.

[272] Nous avons entouré la première intersection entre deux voix par un rectangle.

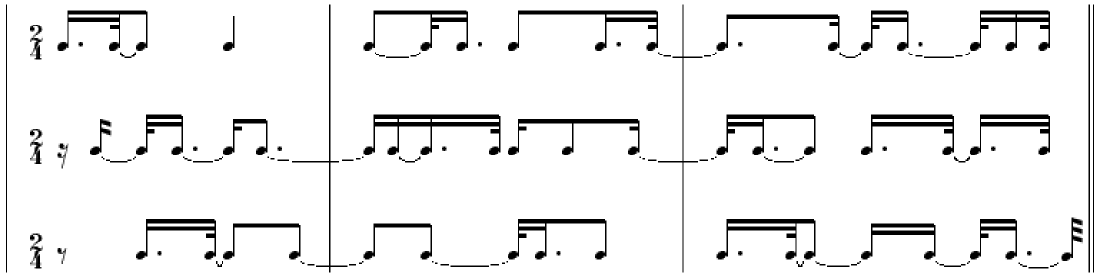


Figure 125 : Triple canon de rythmes non rétrogradables dans la pièce *Visions de l’Amen*

Comme dans le cas d’*Harawi*, ce canon rythmique réalise partiellement le principe du pavage de l’axe du temps. Cependant, les deux exemples précédents nous offrent la possibilité de mettre en évidence certaines limitations du modèle rythmique proposé par Messiaen.

Une première limitation concerne les entrées toujours régulières des différentes voix. Le décalage temporel de la pédale rythmique est constant et le compositeur ne discute jamais de cas où les entrés de voix sont de longueurs variables. Pourtant, pour réaliser intégralement le pavage de l’axe du temps, une bonne formalisation du processus de décalage temporel entre les voix s’avère nécessaire. Messiaen semble sous-estimer cet aspect quand il discute la propriété de « chaos organisé » du canon final exclusivement par rapport à la structure irrégulière de la pédale rythmique. Le choix d’une pédale rythmique de rythmes non rétrogradables est l’une des possibilités que le compositeur se donne pour s’approcher de la propriété de pavage, mais cette stratégie compositionnelle relève, il nous semble, plus du *charme des impossibilités* de certaines structures musicales que d’une démarche théorique consciente. Pour cette raison, nous allons maintenant discuter la manière de généraliser, à l’aide d’outils algébriques, le modèle de canon rythmique proposé par Messiaen, en particulier en ce qui concerne la propriété de pavage de l’axe du temps.

3.3.4 Formalisations algébriques équivalentes d’un canon rythmique de pavage

Le modèle algébrique des canons rythmiques de pavage que nous allons présenter a été proposé par Dan Tudor Vuza dans les années quatre-vingt-dix. À la base de ce modèle, il y a une interprétation rythmique de la théorie modale d’Anatol Vieru, en particulier de l’opération de *composition* ou « combinaison transpositionnelle » [*transpositional combination*] que nous avons discutée dans la première partie.

Nous avons déjà analysé ce modèle dans plusieurs écrits précédents ; l’intérêt de reprendre ces travaux ici est lié aux développements compositionnels récents que nous avons pu suivre de près grâce au travail d'implémentation du modèle algébrique réalisé en *OpenMusic*[273]. Nous allons donc résumer ici certaines propriétés de base de la théorie des canons de pavage, à commencer par une définition plus générale de canon rythmique que celle qu'on retrouve chez Messiaen.

Pour établir une telle définition, il faut d'abord remplacer la propriété de régularité dans les entrées des voix par une condition plus générale qui permet des distances différentes entre les voix d'un même canon. La façon la plus simple de généraliser le modèle de Messiaen est tout d'abord celle de représenter les informations sur les entrées des voix à l'aide d'une structure rythmique quelconque. Nous désignerons indifféremment cette structure par le terme *classe métrique* [VUZA 1991] ou bien *rythme externe* [ANDREATTA *et al*. 1999].

Tout canon rythmique est donné par le choix d'un *rythme de base*[274], qu'on notera souvent *R*, et d'un rythme externe, qu'on notera *S*. La figure suivante montre un exemple de canon rythmique ayant comme *rythme de base* la structure *R*=(2 8 2) et comme *rythme externe* la structure *S*=(5 1 5 1) :

[273] L'implémentation de la théorie des canons rythmique de Vuza a ouvert la voie à une exploration systématique, de la part des compositeurs, des structures rythmiques à la base d'un canon de pavage. Les applications compositionnelles récentes de ce modèle de canons rythmique concernent, en particulier, un travail de collaboration avec le compositeur Georges Bloch, dont nous analyserons quelques aspects au cours du présent chapitre.

[274] Le terme « rythme de base » [*ground rhythm*], introduit par Vuza, remplace le concept de pédale rythmique chez Messiaen.

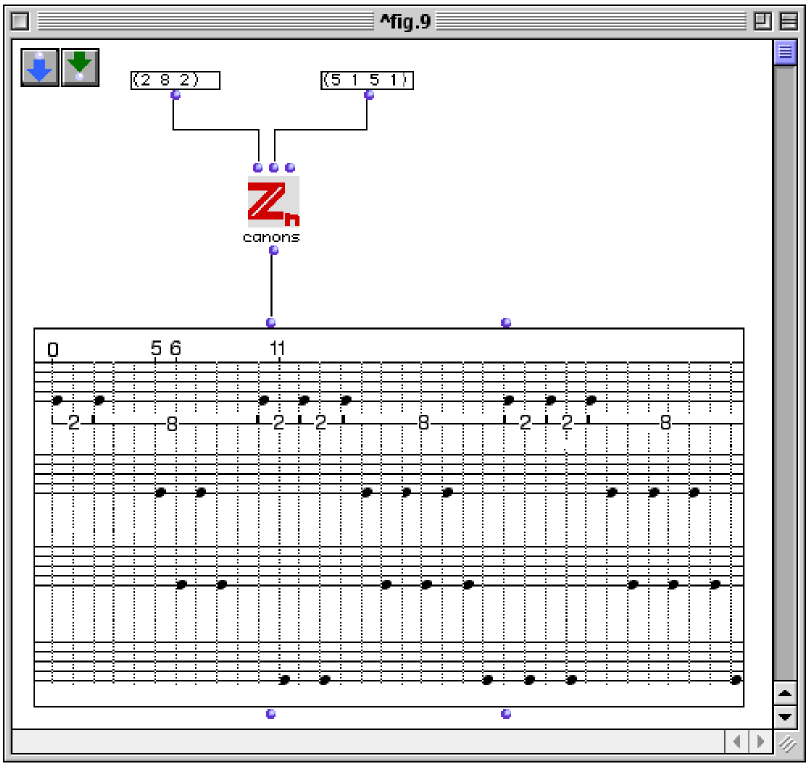


Figure 126 : Exemple d’un canon rythmique de pavage

On vérifie aisément qu’il s’agit d’un *canon de pavage* car dès que la quatrième et dernière voix est entrée, chaque instant temporel est rempli par une attaque d’une (et une seule) voix. Dans la terminologie de Vuza, un tel canon s’appelle *canon régulier complémentaire*, la régularité étant la caractéristique du rythme résultant de la *projection* des attaques des voix différentes sur l’axe du temps et la complémentarité étant la propriété qui empêche d’avoir deux ou plusieurs voix avec la même attaque au même instant temporel.

La propriété de pavage d’un canon peut être formalisée, d’un point de vue algébrique, en suivant deux stratégies différentes.

Une première stratégie consiste à considérer un canon comme une *factorisation* d’un groupe cyclique **Z/nZ** dans une *somme directe* de deux sous-ensembles. Dans le cas du canon de pavage précédent, les deux sous-ensembles sont les deux *modes* *R’* et *S’* ayant respectivement *R* et *S* comme structure intervallique. La *somme directe* garantit que tout élément de **Z/nZ** peut s’écrire, de façon unique, comme somme d’un élément de *R’* et d’un élément de *S’*.

Si l’on reprend l’exemple précédent, il suffit donc d’interpréter les structures *R*=(2 8 2) et *S*=(5 1 5 1) comme ensembles de classes de résidus. Le processus de transformation d’une structure intervallique dans un ensemble des classes de hauteurs est un cas particulier de l'opération de *composition* dans la théorie modale[275]. Plus précisément, il s'agit de la composition entre une structure intervallique et une note. En choisissant pour *R* et *S* respectivement les entiers de classes de hauteurs 10 et 0, on obtient les deux sous-ensembles R' et S' en appliquant la définition de *composition* entre une structure modale et un entier :

R'=(2 8 2)•{10}={10+2, 10+2+8, 10+2+8+2}={0,8,10}
S'=(5 1 5 1) •{0}={0+5, 0+5+1, 0+5+1+5, 0+5+1+5+1}={0,5,6,11}

On peut vérifier que les deux sous-ensembles *R'* et *S'* représentent une *factorisation de* **Z/12Z**, dans le sens que chaque élément du groupe cyclique **Z/nZ** peut s'exprimer (de façon unique) comme la somme d'un élément de *R'* et d'un élément de *S'*. En effet :

0	=	0	+	0
1	=	8	+	5
2	=	8	+	6
…				
11	=	0	+	11

Cependant, à côté de cette stratégie algébrique qui repose sur la notion de *factorisation*, une deuxième stratégie est possible. Cette nouvelle démarche algébrique s'appuie directement sur la notion de *composition* entre structures intervalliques. Rappelons que composer deux structures intervalliques *R* et *S* signifie transposer la première structure sur les degrés de la deuxième.

L'interprétation de cette opération dans le domaine rythmique découle immédiatement lorsqu'on remplace la « transposition » par le concept de « translation temporelle ». Composer deux structures rythmiques signifie translater temporellement une structure rythmique selon les valeurs de la deuxième. Autrement dit, d'un point de vue rythmique, la composition est équivalente à la construction d'un canon rythmique ayant la première structure comme *rythme de base* et la deuxième comme *classe métrique*. Dans le cas où le résultat de cette composition est le groupe cyclique complet, alors le canon correspondant est

[275] Voir, en particulier, les discussions sur les cas possibles d'opérations de *composition* (entre une structure intervalique et une note, entre une structure intervallique et un ensemble de classes de hauteurs et entre deux structure intervalliques) dans la première partie de ce travail.

un canon de pavage. La figure suivante montre le processus de composition sous-jacent au canon de pavage précédent :

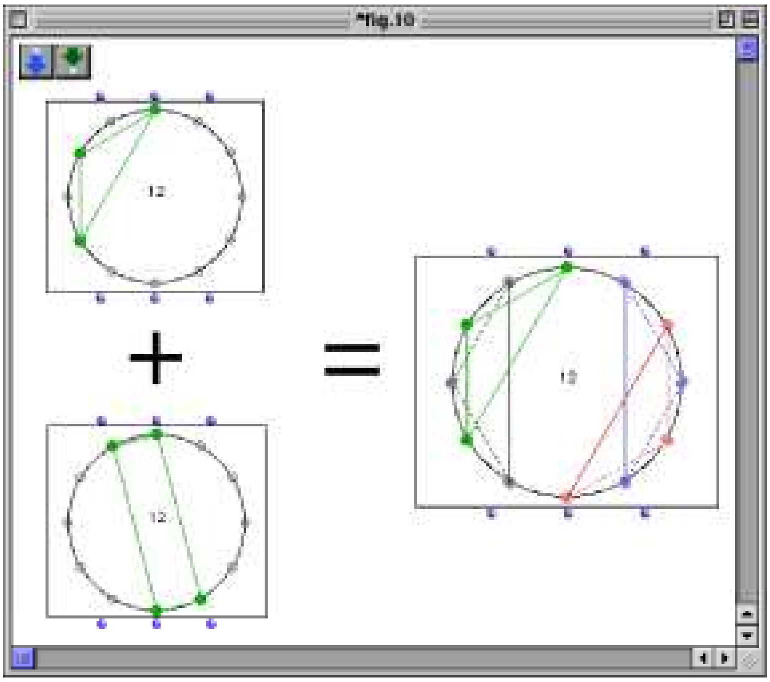


Figure 127 : Equivalence entre factorisation et composition de structures intervalliques

L'exemple précédent de canon rythmique de pavage est une première généralisation du modèle de canon proposé par Messiaen car les entrées des voix ne sont plus régulières. Cependant, ces entrées sont organisées selon une propriété de « transposition limitée », comme on peut le voir en observant la représentation circulaire du deuxième sous-ensemble, correspondant à la structure intervallique (1 5 1 5).

On se heurte, dans ce cas, à un problème conceptuel qui soulève un doute sur une correspondance complète entre le domaine des hauteurs et le domaine rythmique. En effet, un mode à transposition limitée correspond à une structure rythmique dont la période n'est pas minimale. Autrement dit, si l'on considère le cas du groupe cyclique **Z/12Z**, un mode à transposition limitée correspond à une structure rythmique qui a une période inférieure à 12.

Par exemple, le mode à transposition limitée (5 1 5 1) corresponds à la structure rythmique (5 1) de période égale à six, comme le montre la figure suivante :

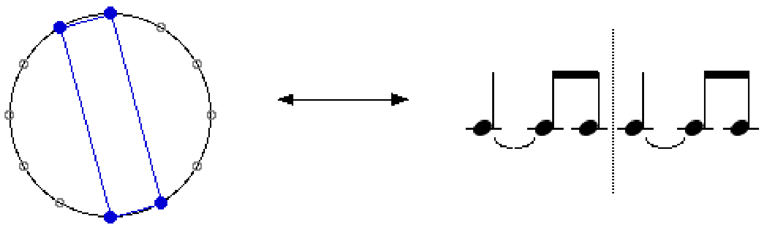


Figure 128 : Structure rythmique attachée au mode à transposition limitée (5 1 5 1)

Pour cette raison, on doit ajouter dans la définition même d'un canon rythmique de pavage une condition ultérieure sur la factorisation (ou, de façon équivalente, sur les structures intervalliques qu'on « compose »). La condition peut se résumer ainsi :

Dans la composition de deux structures rythmiques, aucune des deux structures ne doit être un mode à transposition limitée.

En ajoutant à la définition précédente de canon de pavage cette nouvelle condition, on obtient ce qu'on appelle les *canons réguliers complémentaires de catégorie maximale*, en abrégé canons RCCM. Cette famille de canons rythmiques de pavage a été le point de départ de la démarche compositionnelle de George Bloch[276]. Nous allons maintenant procéder à une courte analyse des propriétés majeures de cette famille de canons rythmiques pour discuter ensuite la façon dont le compositeur s'est servi des résultats théoriques et du modèle informatique.

3.3.5 Les canons RCCM ou canons rythmiques réguliers complémentaires de catégorie maximale

Une première contrainte d'un canon RCCM concerne sa période. Vuza démontre que la période d'un tel canon rythmique doit respecter les cinq conditions négatives suivantes[277]. Elle ne doit pas être :

1. Une puissance d'un nombre premier ;
2. Le produit d'une puissance d'un nombre premier par un autre nombre premier ;
3. Le produit des carrés de deux nombres premiers distincts ;
4. Le produit de deux nombres premiers par un troisième nombre premier ou son carré ;

[276] D'un point de vue mathématique, la famille des canons RCCM est liée à une ancienne conjecture de théorie des nombres avancée par Hermann Minkowski à la fin du XIX^e siècle et résolue dans la moitié des années quarante par le mathématicien hongrois G. Hajós. Nous allons décrire l'histoire de la « Conjecture de Minkowski » et la métamorphose musicale de ce problème mathématique dans l'*Interludium* qui conclut ce troisième chapitre.
[277] Il s'agit d'un résultat connu en théorie des groupes de Hajós, comme nous allons le montrer à la fin du chapitre.

5. Le produit de quatre nombres premiers distincts.

La liste des périodes inférieures à 1000 est la suivante :

(72 108 120 144 168 180 200 216 240 252 264 270 280 288 300 312 324 336 360 378 392 396 400 408 432 440 450 456 468 480 500 504 520 528 540 552 560 576 588 594 600 612 616 624 648 672 675 680 684 696 700 702 720 728 744 750 756 760 784 792 800 810 816 828 864 880 882 888 900 912 918 920 936 945 952 960 968 972 980 984 1000)

La factorisation du groupe cyclique en deux sous-ensembles non-périodiques est calculée à travers un algorithme qui utilise un résultat de décomposition de la période *n* d'un tel groupe cyclique. Ce résultat affirme que toute période *n* d'un canon RCCM peut se décomposer en un produit $p_1 \cdot p_2 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ de cinq nombres entiers, tels que :

(a) Les nombres p_i sont premiers (distincts)
(b) Les deux produits $p_1\ n_1$ et $p_2 \cdot n_2$ sont relativement premiers entre eux
(c) Les n_i sont supérieurs ou égaux à 2.

Pour une période *n* donnée, les décompositions peuvent être très différentes[278]. La théorie affirme qu'un canon RCCM ayant une période *n* qui se décompose en le produit $p_1 \cdot p_2 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ (avec les propriétés précédentes) sera décrit par deux structures rythmiques *R* et *S* ayant respectivement des cardinalités égales à $p_1 \cdot p_2 \cdot n_3$ et $n_1 \cdot n_2$.

La structure rythmique *R* étant le rythme de base, l'indication sur sa cardinalité nous permet de conclure que *R* a un nombre d'attaques égal au produit $p_1 \cdot p_2 \cdot n_3$. De même, *S* étant la structure rythmique qui décrit les décalages entre les voix, sa cardinalité restitue le nombre total de voix du canon, qui sera donc toujours égal au produit $n_1 \cdot n_2$.

De manière évidente, si l'on multiplie le nombre d'attaques de chaque voix par le nombre total des voix du canon, on obtient comme résultat le nombre total d'attaques dans une période, c'est-à-dire *n.* Cela correspond précisément à la propriété de *pavage* de l'axe du temps.

La figure suivante montre un exemple de Canon RCCM de période 72. Ce canon à six voix a comme rythme de base et classes métrique respectivement :

R=(1 4 1 6 13 4 7 6 6 1 4 19)
S=(8 10 8 14 18 14).

[278] C'est le cas, par exemple, de la période *n*=180 qui admet cinq décompositions différentes. Pour les deux premières valeurs (*n*=72 et *n*=108) la décomposition est unique.