

La représentation des objets géométriques le statut du dessin

Dans son étude de la représentation de l'espace chez l'enfant, Piaget (1948) est parti des études de Luquet (1927) sur le dessin enfantin. On peut même remarquer dans les différentes

illustrations précédentes qu'il demandait aux enfants de réaliser les dessins à main levée sans utiliser de règle puisque cela aurait rajouté des difficultés liées à la motricité pour les enfants les plus jeunes. En mathématiques, on entend souvent parler de figure, de dessin, de représentation et d'objet géométrique. Il convient ici de clarifier un peu les choses avant d'aller plus loin.

2.1. Le statut du dessin en mathématiques : dessin vs figure

De nombreux didacticiens se sont penchés sur les différences entre figure, dessin et objet mathématique ou plus précisément géométrique. Arsac (1989, p.86) distingue la figure et le dessin de part leur appartenance à deux mondes différents que sont le « monde mathématique » et le « monde sensible » :

« Nous distinguerons dans la suite le dessin et la figure, désignant par dessin le dessin concrètement tracé sur une feuille de papier (ou dans le sable pour Archimède) et par figure l'objet mathématique dont le dessin n'est qu'une représentation... Ainsi, la figure est un élément du "monde mathématique" et non du monde sensible. »

De son côté, Parzysz (1988, 1989) différencie la figure qui correspond à l'objet géométrique théorique du dessin qui n'en est qu'une représentation parmi toutes celles possibles. En 1994, Laborde et Capponi affinent la différence entre figure et dessin :

« En tant qu'entité matérielle sur un support, le dessin peut être considéré comme un signifiant d'un référent théorique (objet d'une théorie géométrique comme celle de la géométrie euclidienne, ou de la géométrie projective). La figure géométrique consiste en l'appariement d'un référent donné à tous ses dessins, elle est alors définie comme l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier terme étant le référent, le deuxième étant un des dessins qui le représente; le deuxième terme étant pris dans l'univers de tous les dessins possibles du référent. Le terme figure géométrique renvoie dans cette acception à l'établissement d'une relation entre un objet géométrique et ses représentations possibles. Dans cette approche, les rapports entre un dessin et son référent construits par un sujet, lecteur ou producteur du dessin, constituent le signifié de la figure géométrique associé pour ce sujet. »

Ces distinctions entre figure et dessin, nous semblent complémentaires. En effet dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace au primaire et au collège les tâches demandées aux élèves portent sur trois types d'objets :

- l'objet physique qui vient du monde sensible proposé par Arsac ;
- l'objet géométrique qui est un objet mathématique rattaché à une théorie ;
- le dessin qui est une représentation soit de l'objet physique, soit de l'objet géométrique.

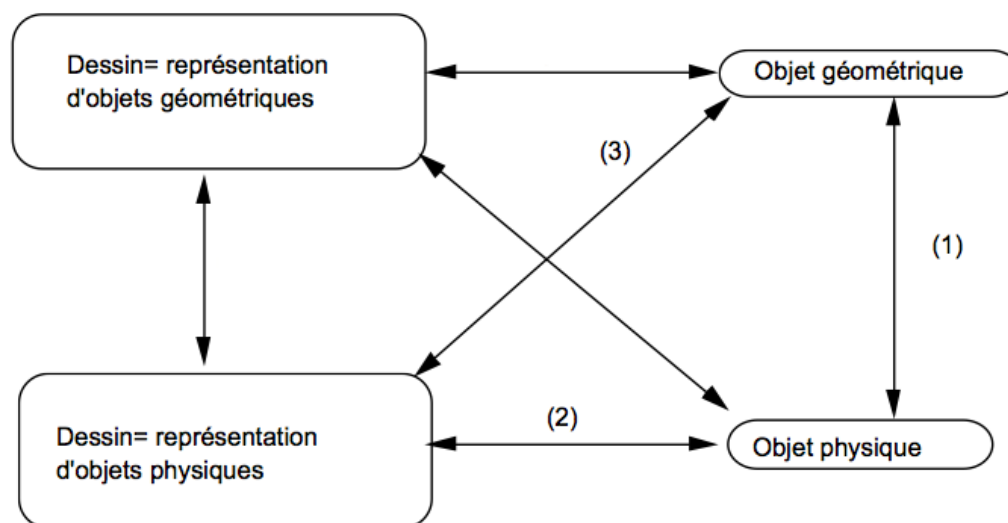


Figure 1.7 – Représentation des relations entre l’objet physique, l’objet géométrique et le dessin (Chaachoua, 1997).

Chaachoua (1997) propose un schéma qui permet de visualiser l’ensemble des relations qui existent entre ces trois types d’objets (figure 1.7). Dans le même temps, il dégage aussi trois statuts différents du dessin dans l’enseignement de la géométrie :

- le dessin comme objet physique : dans ce cas, il est considéré comme l’objet d’étude ;
- le dessin comme modèle d’un objet géométrique : dans ce cas, il est considéré comme le signifiant d’un référent théorique au sens de Laborde et Capponi ;
- le dessin comme modèle d’un objet physique, ce qui est particulièrement le cas en primaire avec la représentation des solides qui fait intervenir les axes (1), (2) et (3) de la figure 1.7.

Dans le cas de la géométrie dans l’espace, des difficultés supplémentaires viennent s’ajouter à celles de la géométrie plane. En effet, il faut être capable de représenter un objet de dimension trois par des dessins qui, étant généralement réalisés sur des feuilles de papier, sont de fait en dimension deux. Dans ce cas, la représentation des objets géométriques de l’espace ne peut se faire en dimension deux qu’en passant par des projections qui entraînent des pertes d’information. Il devient alors nécessaire de représenter ces objets en utilisant des codes qui permettent de pouvoir réaliser et interpréter ces représentations. Nous pouvons à ce sujet citer Bkouche (1983) :

« Une situation spatiale apparaît ainsi à travers une représentation qui la transforme en figure plane, ceci nécessite l’explicitation d’un code, code d’écriture et code de lecture... Dans ces conditions, l’appréhension de la situation spatiale à travers la médiation de la représentation plane ne s’appuie plus sur l’évidence comme c’est le cas en géométrie plane, on ne peut plus raisonner sur une figure qui est déjà distincte de la *réalité* qu’elle est

censée représenter, ceci nécessite donc la mise au point de méthodes de raisonnement plus complexes ... »

Nous développerons par la suite des différentes possibilités de représentations des objets géométriques de l'espace.

Dans ce contexte Chaachoua propose une adaptation de son schéma liant objet physique, objet géométrique et dessin (figure 1.7) afin de prendre en compte la complexité supplémentaire apportée par la géométrie dans l'espace (figure 1.8).

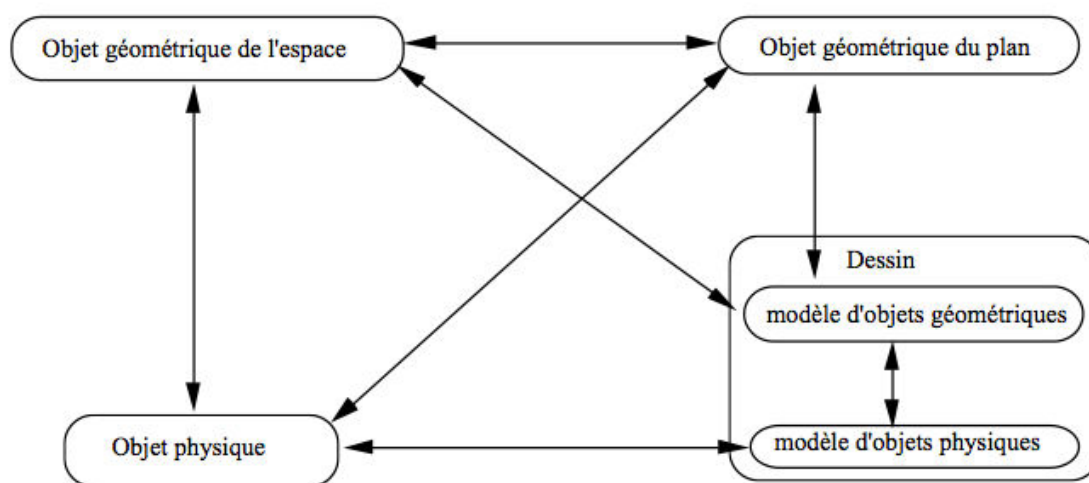


Figure 1.8 – Représentation des relations entre l'objet physique, l'objet géométrique et le dessin dans le cadre de la géométrie dans l'espace (Chaachoua, 1997).

Après avoir clarifié les différences et les liens entre figure et dessin, nous allons présenter l'utilisation des représentations en géométrie et plus particulièrement en géométrie dans l'espace.

2.2. L'utilisation des représentations en géométrie

Tout au long de la scolarité de l'élève et plus particulièrement sur la période allant de l'école primaire au collège, l'utilisation des représentations en géométrie évolue. Les élèves passent ainsi par trois types de géométrie :

- la géométrie perceptive dans laquelle le simple fait de voir quelque chose sur un dessin suffit à justifier une affirmation (c'est un losange parce que je le vois) ;
- la géométrie instrumentée dans laquelle l'utilisation des instruments permet de justifier son raisonnement (c'est un losange parce que j'ai mesuré les quatre côtés et ils sont de même longueur) ;
- la géométrie déductive dans laquelle l'élève utilise les propriétés des figures au travers de démonstrations pour montrer un résultat (c'est un losange car ses diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires).

Comme le souligne Parzysz (2006), le passage entre ces différentes géométries est souvent source d'erreur pour les élèves :

« [. . .] bien [que la représentation] constitue une aide précieuse dans les conjectures, elle peut également constituer un obstacle à la démonstration, car “l'évidence de la figure” peut être source de confusion dans l'utilisation des données. »

Dans ce contexte, nous allons présenter les paradigmes géométriques de Houdemont et Kuzniak ainsi que l'approche plus cognitive de Duval.

2.2.1. Les trois paradigmes géométriques de Houdemont et Kuzniak

Houdemont et Kuzniak (2006) ont mis en avant trois paradigmes géométriques :

- la géométrie naturelle
- la géométrie axiomatique naturelle
- la géométrie axiomatique

2.2.1.1. La géométrie naturelle (GI)

La géométrie naturelle (GI) repose sur une première modélisation du réel. Dans cette géométrie, la validation s'appuie sur la confrontation avec le monde sensible, c'est-à-dire le monde physique réel. Elle est donc principalement basée sur la perception et l'utilisation des instruments de géométrie sur les objets. Mithalal (2010) en accord avec Balacheff (1999) considère « qu'il est possible dans GI de substituer à l'action matérielle une *action intériorisée*, une expérience mentale dans laquelle la référence à l'action matérielle n'est pas moins présente. ».

La géométrie naturelle englobe la géométrie perceptive et la géométrie instrumentée et se situe dans l'enseignement sur la période allant du primaire au début du collège. Dans cette géométrie, il n'y a donc pas de formalisation des objets géométriques à proprement parler et la démonstration n'a pas réellement de sens ici puisqu'elle reste basée sur les dessins et non sur les figures.

2.2.1.2. La géométrie axiomatique naturelle (GII)

La géométrie axiomatique naturelle (GII) repose sur un système axiomatique. Dans cette géométrie, la validation s'appuie sur les propriétés des objets mathématiques et des lois hypothético-déductives. Cette géométrie reste « naturelle » dans le sens où elle est attachée à une référence au réel par opposition à une géométrie purement formelle. Par ailleurs, son axiomatique vise à modéliser les problèmes spatiaux, ce qui la contraint à rester dans le domaine de la géométrie euclidienne.

La géométrie axiomatique naturelle englobe la géométrie déductive qui est étudiée dans l'enseignement secondaire.

2.2.1.3. La géométrie axiomatique (GIII)

La géométrie axiomatique (GIII) repose uniquement sur des axiomes dont la validité ne tient qu'à leur non-contradiction. Cette géométrie est détachée du réel et englobe par exemple la géométrie non-euclidienne ou la géométrie projective. Etant totalement absente de l'enseignement primaire et secondaire, nous n'irons pas plus loin concernant cette géométrie.

2.2.1.4. Articulation des différents paradigmes

Comme nous avons pu le voir GI et GII englobent l'enseignement du primaire et du secondaire. Ainsi, bien qu'à certains moments les élèves soient plus dans l'un ou l'autre de ces paradigmes, ils ne passent pas instantanément de l'un à l'autre. Afin de prendre en compte l'articulation entre ces différentes géométries et les glissements, voire les allers-retours entre elles, Houdemont et Kuzniak (2006) (figure 1.9) et par la suite Kuzniak (2006) ont développé la notion d'espace de travail (ETG) :

« De manière plus précise [Kuzniak 2003 et 2004], nous avons appelé espace de travail géométrique, le lieu organisé par le géomètre pour mettre en réseau les trois pôles que sont l'espace réel et local en tant que support matériel, l'ensemble des artefacts qui seront les outils et instruments mis au service du géomètre et enfin un référentiel théorique éventuellement organisé en un modèle théorique qui dépendra de la géométrie choisie. L'espace de travail ne prend son intérêt et ne devient opérationnel que lorsqu'il est possible de mettre en réseau et de donner du sens aux trois pôles que nous venons de dégager. »

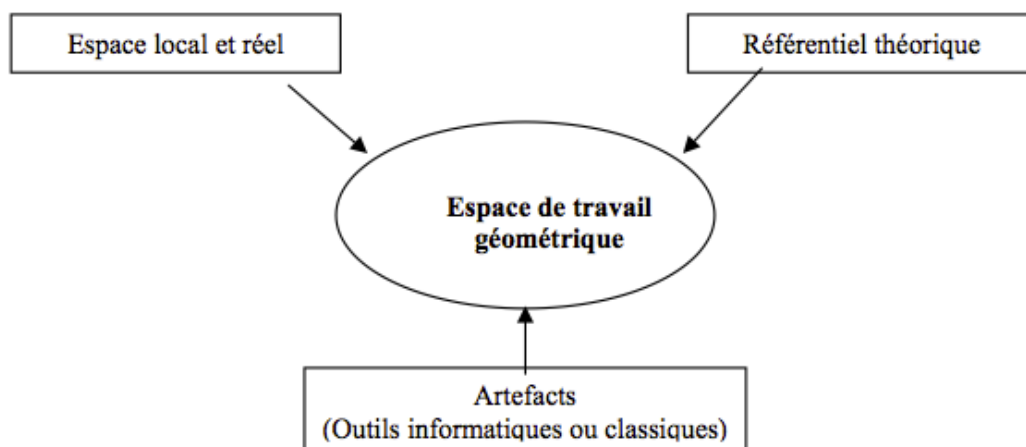


Figure 1.9 – Schématisation de l'espace de travail géométrique (Houdemont et Kuzniak, 2006).

Après avoir étudié les paradigmes géométriques de Houdemont et Kuzniak, nous allons maintenant nous pencher sur l'approche plus cognitive de Duval qui a elle-même fait évoluer la schématisation de l'espace de travail géométrique.

2.2.2. Le point de vue cognitif de Duval

Bien que le plus souvent nous ne nous en rendions pas compte l'acte de « voir » fait intervenir deux opérations complémentaires mais différentes et indépendantes l'une de l'autre. La première de ces deux opérations est « *la reconnaissance discriminative de formes* » et la seconde « *l'identification des objets correspondant aux formes reconnues* » (Duval, 2005). Aussi même si dans la vie courante ces deux opérations semblent simultanées, ce n'est plus le cas dès lors que l'on est confronté à des représentations construites par production de tracés (Duval, 2005) :

« En revanche, il n'en va plus de même pour la perception des représentations construites par production de tracés. Il n'y a aucune relation intrinsèque entre les formes reconnues dans un tracé et l'objet que ce tracé “ veut ” représenter. Comment alors peut s'effectuer le passage de l'un à l'autre ?

Le passage repose sur une “ ressemblance ” entre la forme visuellement discriminée et la forme typique de l'objet représenté. »

La figure 1.10 illustre le propos de Duval. En effet, sur la gauche, on reconnaît immédiatement un cube ou plus précisément un Rubik's Cube alors que sur la droite, nous avons la représentation d'un cube en perspective isométrique qui peut aussi être vu comme l'assemblage de trois losanges.

Duval (2005) a mis en avant l'opposition de deux modes de fonctionnement cognitif dans la visualisation en géométrie : la visualisation iconique et la visualisation non-iconique.

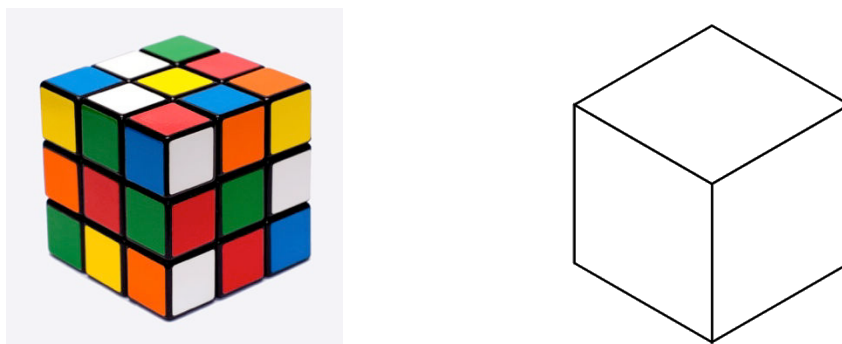


Figure 1.10 – Sur la gauche un Rubik's cube qui a la forme d'un cube et sur la droite un cube en perspective isométrique qui peut aussi être vu comme l'assemblage de trois losanges.

2.2.2.1. La visualisation iconique

Dans le cas de la visualisation iconique, l'opération d'identification est basée sur la ressemblance entre la représentation reconnue et un objet de référence du point de vue de la forme. Dans ce cadre, la forme est avant tout vue comme un profil stable qui ne peut pas être transformé. Ici, l'objet d'étude est le dessin et l'on se situe dans une géométrie de type GI. Ainsi d'après Duval (2005) :

« Ces tendances lourdes de la visualisation iconique vont contre le développement de ce qui doit devenir le geste réflexe pour faire de la géométrie : décomposer toute forme, que l'on reconnaît d'emblée dans un ensemble de tracés ou dans n'importe quelle figure de départ, en une configuration d'autres unités figurales du même nombre de dimensions ou d'un nombre inférieur de dimensions. »

2.2.2.2. La visualisation non-iconique

Dans le cas de la visualisation non-iconique, les formes peuvent être décomposées en composants élémentaires appelés *unités figurales* qui peuvent s'assembler pour former des figures. Suivant le contexte, le point, le segment ou encore le polygone, sont des unités figurales. Par exemple, pour un rectangle, les segments représentant les côtés sont des unités figurales et pour ces segments, les points sont des unités figurales. Dans ce cadre, Duval (2005) parle de la *déconstruction* des formes dont le but est exactement l'opposé, c'est-à-dire sa *reconstruction* :

« Autrement dit l'activité de construction de figures [...] repose sur leur déconstruction en tracés[. . .]. *Mais dans cette activité de déconstruction toute l'attention porte sur la reconstruction* [...] »

Ainsi pour réaliser une construction de figure, il faut être capable de déconstruire mentalement cette figure, c'est-à-dire de décomposer cette figure en *unités figurales* ou de retrouver son programme de construction (et sa chronologie). Pour réaliser ces déconstructions Duval mais en avant deux types de procédures : l'ajout de tracés auxiliaires et l'ajout de tracés réorganisateurs.

L'ajout de tracés auxiliaires consiste à faire apparaître et/ou à retrouver les tracés qui ont pu servir à la construction du dessin qui dans ce contexte est vu comme un enchaînement temporel d'actions (figure 1.11). L'ajout de tracés auxiliaires est alors associé à une déconstruction instrumentale que Mithalal (2010) définit de la façon suivante :

« Nous définirons une déconstruction instrumentale d'un objet *comme l'identification d'un ensemble d'unités figurales indépendantes, les **primitives**, et d'une succession*

d'actions effectuées grâce à l'usage d'instruments, permettant de reconstruire soit l'objet lui-même, soit une représentation graphique de cet objet. »

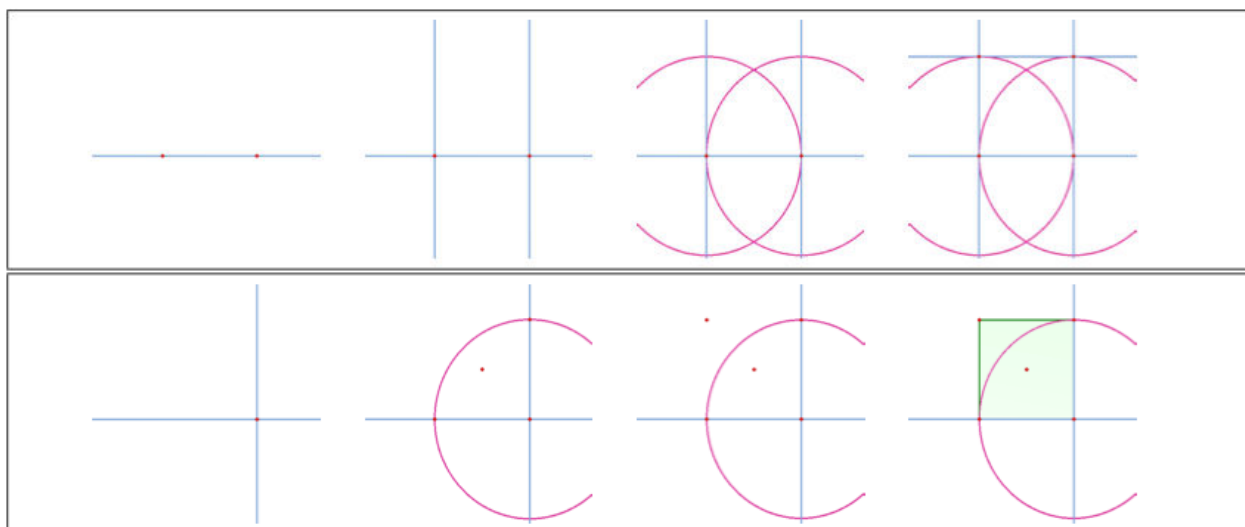


Figure 1.11 – Deux déconstructions instrumentales du carré proposées par Mithalal (2010)

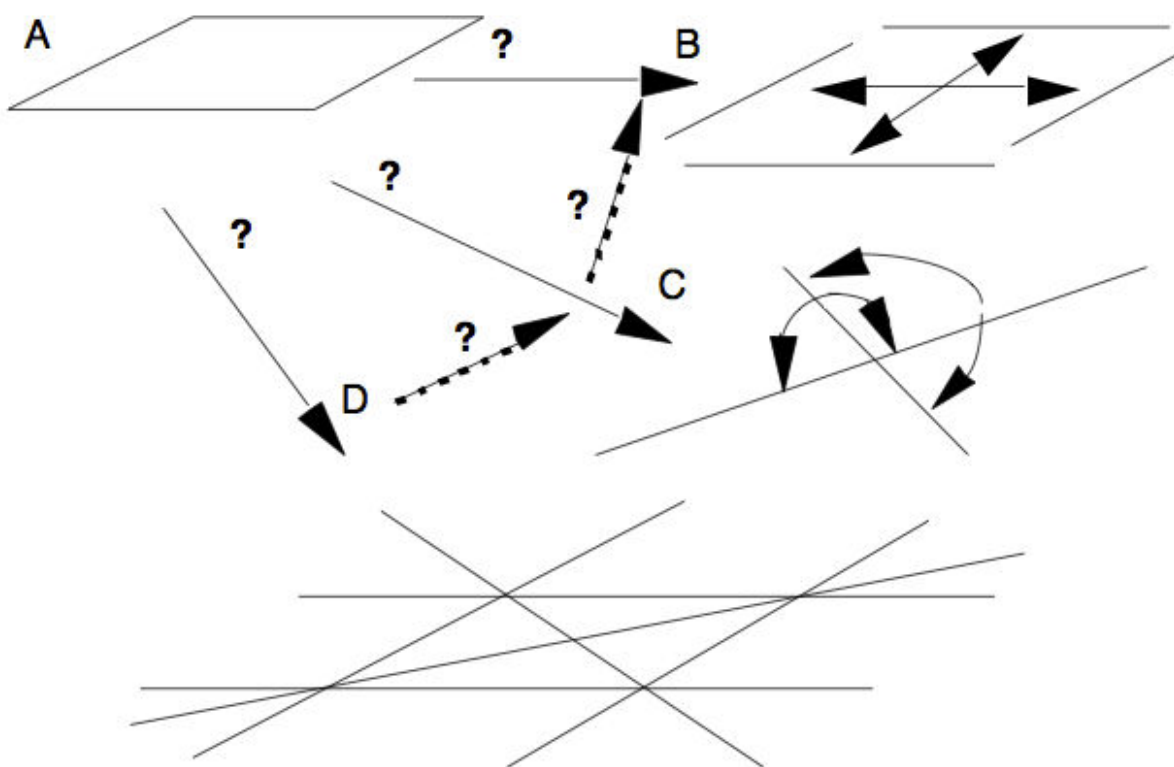


Figure 1.12 – Décomposition en unités figurales par déconstruction dimensionnelle d'un parallélogramme (A), à partir de ses côtés (B), de ses diagonales (C) ou par un ensemble de tracés (D). Duval (2005).

L'ajout de tracés réorganisateurs correspond à la déconstruction dimensionnelle qui repose sur la décomposition de la représentation en un ensemble d'unités figurales de dimensions inférieures dont la cohérence est assurée par des relations (figure 1.12). Mithalal (2010) définit cette déconstruction dimensionnelle de la façon suivante :

« Nous définirons par la suite la déconstruction dimensionnelle d'un objet comme un couple ($\{\text{unités figurales}\}, \{\text{relations}\}$). Effectuer cette opération sur un dessin, c'est ainsi rattacher un dessin à un couple ($\{\text{unités figurales}\}, \{\text{relations}\}$) dont il peut être un représentant. L'effectuer sur une figure, c'est déterminer un tel couple permettant une description de la figure elle-même. »

Il est à noter qu'une même figure peut être décrite par plusieurs déconstructions dimensionnelles différentes au sens de Mithalal.

2.2.2.3. Le hiatus dimensionnel

En prenant appui sur la visualisation non-iconique et la déconstruction dimensionnelle, Duval (2005) a mis en évidence le hiatus qui oppose le mode « normal » de visualisation et le discours « formel ». En effet, le mode « normal » de visualisation « tend à fusionner *les unités figurales de rang inférieur* EN UNE SEULE UNITÉ FIGURALE DE RANG SUPÉRIEUR. ». A l'opposé, le discours géométrique « formel » tend à considérer la déconstruction dimensionnelle comme évidente et de ce fait du point de vue scolaire, les connaissances sont introduites suivant des progressions qui semblent organisées de la façon suivante :

(((points → droites) → segments de droites) → polygones) → polyèdres)

La figure 1.13 illustre cette contradiction que Duval qualifie de « cognitivement paralysante ». Afin de faciliter la compréhension de cette figure nous introduisons la définition suivante de Mithalal :

« On appellera par la suite “unité figurale nD/mD” une unité figurale de dimension n plongée dans un espace à m dimensions.

Par exemple, un point représenté dans le plan sera une unité figurale 0D/2D. Un segment, une unité figurale 1D/2D s'il est représenté dans le plan, 1D/3D s'il est représenté dans l'espace. »