
La méthode LATIN pour le multiphysique

DANS CE CHAPITRE, on propose une stratégie alternative pour la simulation des problèmes multiphysiques, dont le point de départ est l'introduction du concept d'interface entre physiques. On rappelle les principes de la méthode LATIN, qui sert de « moteur » à cette stratégie, et on montre comment elle peut être adaptée au cas qui nous intéresse. On explique ensuite comment le concept d'interface entre physiques permet de prendre en compte de manière naturelle les aspects multiéchelles. On conclut par de premiers résultats et comparaisons avec une méthode classique de partitionnement.

1 Concept d'interface entre physiques

En calcul de structures, la simulation de la réponse de structures complexes conduit à des problèmes de grande taille. Le parallélisme est, depuis longtemps maintenant, un des outils majeurs utilisés pour la résolution de ces modèles. Les plus puissants calculateurs actuels sont d'ailleurs très souvent à architecture parallèle et les algorithmes de résolution ont dû être adaptés à ce type d'ordinateurs [Dur00]. Parmi ces algorithmes, des formulations « mécaniques » ont été proposées, comme les méthodes de décomposition de domaine.

Ce type de stratégies consiste à décomposer la structure étudiée en sous-domaines et à utiliser une méthode itérative durant laquelle les résolutions globales n'ont lieu que sur les sous-domaines (cf. **Figure 2.1**). Le nouveau problème est alors de taille considérablement réduite. Une méthode de décomposition de domaine mixte, fondée sur la méthode LATIN qui sera détaillée dans la section suivante, a été proposée au LMT-Cachan, d'abord dans le cadre des structures faiblement hétérogènes [Dur98a, Lad99b], puis dans celui des structures fortement hétérogènes [Lad00, Lad01b], éven-

tuellement avec contacts [Lad02b] et, plus récemment, avec une technique d'homogénéisation à la fois en temps et en espace [Lad02a, Lad03]. Dans cette méthode, les interfaces entre sous-domaines constituent une entité mécanique à part entière pour laquelle les efforts et les déplacements sont traités de manière identique. La stratégie proposée consiste à vérifier alternativement des propriétés sur les sous-structures, supposées indépendantes, et des propriétés d'interfaces, qui permettent de transmettre les couplages entre les sous-domaines.

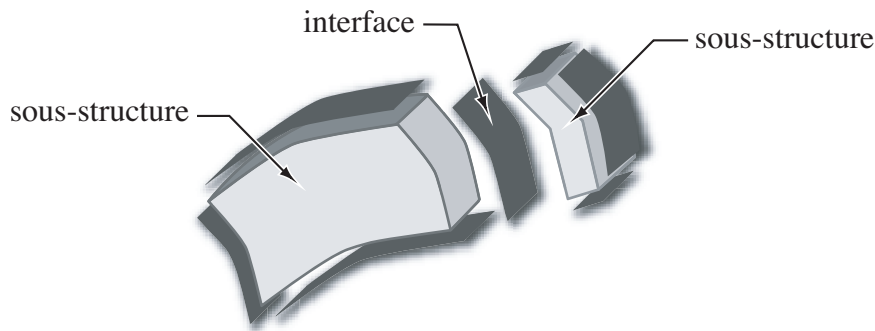


Figure 2.1 • Interface entre sous-structures

Dans le cas des problèmes multiphysiques, l'idée est similaire. Elle consiste à traiter chaque physique séparément, en résolvant toutes les équations indépendantes, puis à recouvrer les couplages en vérifiant les équations restantes. Si l'on dote une entité de propriétés correspondant à ces équations de couplage, celle-ci peut être vue comme une interface entre les physiques. La notion d'*interface matérielle entre sous-structures* a alors été étendue à celle d'*interface entre physiques*. Il est important de noter que, contrairement au cas de la décomposition de domaine, cette interface n'a pas forcément de réalité « matérielle ». Dans le cas de l'aéroélasticité, elle peut être vue comme la « peau » de la structure en contact avec le fluide qui l'entoure. Dans le cas des milieux poreux que l'on traite du point de vue macroscopique, le couplage a lieu en tout point du domaine et l'interface a un sens plus abstrait (cf. **Figure 2.2**).

2 Principes de la méthode LATIN

Initialement, la méthode LATIN a été proposée par P. Ladevèze pour traiter les problèmes non linéaires d'évolution [Lad85]. LATIN est l'acronyme de *L*Arge *T*ime *I*Ncrement *M*ethod ou méthode à grand incrément de temps. C'est ce caractère non incrémental qui la distingue de la plupart des démarches classiques, qui construisent une solution pas de temps par pas de temps. Dans son cas, partant d'une approximation (parfois grossière) en tout point de la structure et sur tout l'intervalle de temps, une succession d'itérations améliore automatiquement la connaissance de la solution. À

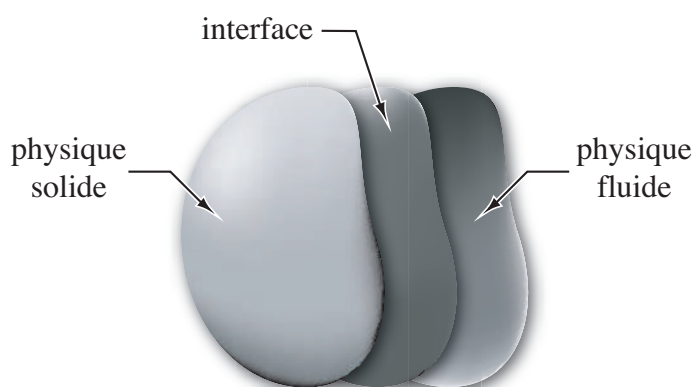


Figure 2.2 • Interface entre physiques

chacune de ces itérations, on dispose donc d'une solution approchée en tout point de la structure et sur tout l'intervalle de temps.

Une présentation détaillée de la stratégie LATIN peut être trouvée dans [Lad99a]. Brièvement, elle est fondée sur trois principes, qui seront développés dans les sections suivantes :

- **P1** la séparation des difficultés ;
- **P2** une résolution itérative en deux étapes ;
- **P3** une représentation mécanique adaptée des inconnues.

De nombreuses applications ont été proposées au cours des vingt dernières années, notamment dans le domaine des problèmes non linéaires et des méthodes multi-échelles de décomposition de domaine. On peut cependant citer quelques contributions récentes. Tout d'abord des travaux concernant la simulation des problèmes de dynamique avec contact ou chocs [Bou00, Lem02]. Puis, la proposition d'une méthode de décomposition de domaine mixte [Lad92, Cog96, Cha97] et multi-échelle [Dur98b] qui a servi de base à une technique d'homogénéisation pour les structures fortement hétérogènes [Lad01b]. Enfin, une nouvelle stratégie de calcul multi-échelle incluant une procédure d'homogénéisation automatique à la fois en temps et en espace pour traiter les problèmes non linéaires d'évolution [Lad02a, Lad03].

2.1 Séparations des difficultés

Le principe **P1** de la méthode préconise la séparation des difficultés. Le choix de ce partitionnement n'est pas trivial et est dicté par la volonté de séparer les équations découplées et les équations couplées (qui serviront à définir l'interface entre physiques).

Pour cela, la technique consiste à séparer les équations en deux groupes, ce qui permet en outre d'éviter d'avoir à traiter simultanément un problème global et un problème couplé.

On introduit $\mathbf{A_d}$, l'ensemble des solutions des équations linéaires et découplées, éventuellement globales (ici les conditions d'admissibilité (1.1) et (1.2)) :

$$\mathbf{A_d} = \left\{ \mathbf{s} \mid \mathbf{s} \text{ vérifie (1.1) et (1.2)} \right\}$$

et Γ , l'ensemble des solutions des équations locales, éventuellement couplées (ici les relations de comportement (1.3) et les conditions initiales (1.4)) :

$$\Gamma = \left\{ \hat{\mathbf{s}} \mid \hat{\mathbf{s}} \text{ vérifie (1.3) et (1.4)} \right\}$$

La solution $\mathbf{s}_{ex}$ du problème de référence est donc :

$$\mathbf{s}_{ex} = \mathbf{A_d} \cap \Gamma$$

2.2 Résolution itérative en deux étapes

Le principe **P2** de la méthode LATIN propose de construire la solution $\mathbf{s}_{ex}$ à l'aide d'un schéma itératif à deux étapes. La **Figure 2.3** détaille une itération $n + 1$ typique.

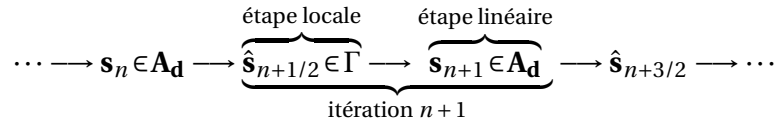


Figure 2.3 • Une itération de la méthode LATIN

Si l'on suppose que l'itération n a généré un élément $\mathbf{s}_n$ de $\mathbf{A_d}$, l'*étape locale* consiste à chercher un élément $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$ de Γ en utilisant une première direction de recherche E^+ . Ce nouvel élément étant connu, l'*étape linéaire* consiste à chercher un élément $\mathbf{s}_{n+1}$ de $\mathbf{A_d}$ en utilisant une seconde direction de recherche E^- , conjuguée de la précédente. La **Figure 2.4** donne une représentation de principe de la stratégie dans l'espace $\mathbf{S}^{[0,T]}$ et les sous-sections suivantes détaillent chacune de ces étapes.

2.2.1 Étape locale à l'itération $n + 1$

On suppose que l'étape précédente a produit une solution $\mathbf{s}_n$ de $\mathbf{A_d}$ et on se donne un espace linéaire E^+ appelé *direction de recherche à l'étape locale* :

$$E^+ = \left\{ \Delta \mathbf{s} \mid \Delta \sigma + \mathbf{L} \Delta \dot{\epsilon} = 0, \Delta q + r \Delta p = 0, \Delta \underline{W} + \mathbf{M} \Delta \underline{Z} = 0 \right\}$$

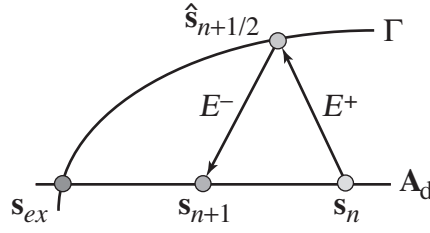


Figure 2.4 • Représentation de principe de la méthode

où les opérateurs $\mathbf{L}$, r et $\mathbf{M}$, qui sont les paramètres de la méthode, seront précisés ultérieurement.

Le problème est maintenant de trouver $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$ dans Γ tout en imposant que $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} - \mathbf{s}_n$ appartienne à E^+ , *i.e.* :

$$\begin{aligned} (\hat{\sigma}_{n+1/2} - \sigma_n) + \mathbf{L}(\hat{\varepsilon}_{n+1/2} - \varepsilon_n) &= 0 \\ (\hat{q}_{n+1/2} - q_n) + r(\hat{p}_{n+1/2} - p_n) &= 0 \\ (\hat{W}_{n+1/2} - W_n) + \mathbf{M}(\hat{Z}_{n+1/2} - Z_n) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

En utilisant les relations de comportement (1.3), l'étape locale consiste alors à résoudre en chaque point d'espace le système différentiel en temps suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\hat{\varepsilon}_{n+1/2} + \mathbf{D}\hat{\varepsilon}_{n+1/2} - b\hat{p}_{n+1/2}\mathbf{I} &= \mathbf{A}_n \\ \frac{1}{Q}\hat{p}_{n+1/2} + r\hat{p}_{n+1/2} + b\text{Tr}\hat{\varepsilon}_{n+1/2} &= \alpha_n \\ (\mathbf{M} + \mathbf{H})\hat{Z}_{n+1/2} &= \underline{\beta}_n \end{aligned} \quad (2.2)$$

dans lequel les seconds membres :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_n &= \sigma_n + \mathbf{L}\varepsilon_n \\ \alpha_n &= q_n + r p_n \\ \underline{\beta}_n &= W_n + \mathbf{M}Z_n \end{aligned} \quad (2.3)$$

sont des quantités connues à cette étape. Les conditions initiales en pression et en déformations sont $p(t=0) = p_0$ et $\hat{\varepsilon}(t=0) = \varepsilon(\underline{U}_0)$. Notons que l'équation qui permet de calculer $\hat{Z}_{n+1/2}$ ne posera pas de problème particulier lors de la résolution puisqu'elle est indépendante des deux autres et ne couple pas les quantités solides et fluides. Les quantités duales $\hat{\sigma}_{n+1/2}$, $\hat{q}_{n+1/2}$ et $\hat{W}_{n+1/2}$ sont ensuite calculés en utilisant la direction de recherche (2.1).

2.2.2 Étape linéaire à l'itération $n + 1$

Une fois $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$ de Γ déterminée, on se donne un espace linéaire E^- appelé *direction de recherche à l'étape linéaire* :

$$E^- = \left\{ \Delta \mathbf{s} \mid \Delta \sigma - \mathbf{L} \Delta \dot{\varepsilon} = 0, \Delta q - r \Delta p = 0, \Delta \underline{W} - \mathbf{M} \Delta \underline{Z} = 0 \right\}$$

conjuguée de la précédente. Ce choix permet de ne pas recoupler le problème solide et le problème fluide à cette étape.

Le problème est maintenant de trouver $\hat{\mathbf{s}}_{n+1}$ dans $\mathbf{A}_d$ tout en imposant que $\mathbf{s}_{n+1} - \hat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$ appartienne à E^- , i.e. :

$$\begin{aligned} (\sigma_{n+1} - \hat{\sigma}_{n+1/2}) - \mathbf{L}(\dot{\varepsilon}_{n+1} - \hat{\dot{\varepsilon}}_{n+1/2}) &= 0 \\ (q_{n+1} - \hat{q}_{n+1/2}) - r(p_{n+1} - \hat{p}_{n+1/2}) &= 0 \\ (\underline{W}_{n+1} - \hat{\underline{W}}_{n+1/2}) - \mathbf{M}(\underline{Z}_{n+1} - \hat{\underline{Z}}_{n+1/2}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Si l'on écrit les équations d'admissibilité (1.1) et (1.2) sous forme variationnelle, l'étape linéaire se décompose en deux problèmes. Le *problème solide* consiste à trouver $\dot{\varepsilon}_{n+1} = \varepsilon(\underline{\dot{U}}_{n+1})$ avec $\underline{U}_{n+1} \in \mathcal{U}^{[0,T]}$ vérifiant à chaque instant t de $[0, T]$:

$$\forall \underline{U}^* \in \mathcal{U}_0, \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{\dot{U}}_{n+1}) \mathbf{L} \varepsilon(\underline{U}^*)] d\Omega = \int_{\Omega} \text{Tr}[\hat{\mathbf{A}}_{n+1/2} \varepsilon(\underline{U}^*)] d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^* dS \quad (2.5)$$

et le *problème fluide* à trouver p_{n+1} dans $\mathcal{P}^{[0,T]}$ vérifiant à chaque instant t de $[0, T]$:

$$\begin{aligned} \forall p^* \in \mathcal{P}_0, \quad & \int_{\Omega} \underline{\text{grad}} p_{n+1} \cdot \mathbf{M} \underline{\text{grad}} p^* d\Omega + \int_{\Omega} p_{n+1} r p^* d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \hat{\alpha}_{n+1/2} p^* d\Omega + \int_{\Omega} \hat{\beta}_{n+1/2} \cdot \underline{\text{grad}} p^* d\Omega + \int_{\partial_4 \Omega} w_d p^* dS \end{aligned} \quad (2.6)$$

dans lesquelles les seconds membres :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}_{n+1/2} &= -\hat{\sigma}_{n+1/2} + \mathbf{L} \hat{\dot{\varepsilon}}_{n+1/2} \\ \hat{\alpha}_{n+1/2} &= -\hat{q}_n + r \hat{p}_n \\ \hat{\beta}_{n+1/2} &= -\hat{\underline{W}}_{n+1/2} + \mathbf{M} \hat{\underline{Z}}_{n+1/2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

sont des quantités connues à cette étape.

Les équations (2.5) et (2.6) forment deux problèmes globaux découplés qu'il faut résoudre à chaque pas de temps. Après discrétisation en espace, les problèmes peuvent s'écrire :

$$LV = B_{\sigma}^T \hat{A} + f_d \quad (2.8)$$

$$[M + R]p = B_q^T \hat{\alpha} + B_w^T \hat{\beta} + g_d \quad (2.9)$$

où f_d représente les forces généralisées associées à $\underline{F}_d$, g_d les flux généralisés associés à w_d et, afin de ne pas alourdir les notations et en l'absence d'ambiguïté, les champs discrétisés associés à $\underline{\dot{U}}_{n+1}$, $\hat{\mathbf{A}}_{n+1/2}$, p_{n+1} , $\hat{\alpha}_{n+1/2}$ et $\hat{\beta}_{n+1/2}$ sont simplement notés V , $\hat{A}$, p , $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$. Les opérateurs L , B_σ , $[M + R]$, B_q , B_w (ainsi que deux autres, B_ε et B_z , qui seront utilisés par la suite) sont définis par :

$$\begin{aligned}
 \forall \underline{V}, \quad \varepsilon &= B_\varepsilon V \\
 \forall (\underline{V}^*, \underline{V}), \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{V}^*) \mathbf{L} \varepsilon(\underline{V})] d\Omega &= V^{*T} L V \\
 \forall (\underline{V}^*, \sigma), \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{V}^*) \sigma] d\Omega &= V^{*T} B_\sigma^T \sigma \\
 \forall p, \quad Z &= B_z p \\
 \forall (p^*, p), \quad \int_{\Omega} (\underline{\text{grad}} p^* \cdot \mathbf{M} \underline{\text{grad}} p + p^* r p) d\Omega &= p^{*T} [M + R] p \\
 \forall (p^*, q), \quad \int_{\Omega} p^* q d\Omega &= p^{*T} B_q^T q \\
 \forall (p^*, \underline{W}), \quad \int_{\Omega} \underline{\text{grad}} p^* \cdot \underline{W} d\Omega &= p^{*T} B_w^T \underline{W}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

dans lesquels V , ε , σ , p , Z , q et W désignent les champs discrétisés associés à $\underline{V}$, $\varepsilon(\underline{V})$, σ , p , $\underline{\text{grad}} p$, q et $\underline{W}$.

2.2.3 Initialisation

Nous verrons dans la suite qu'une manière simple pour déterminer une solution initiale $\mathbf{s}_0$ de $\mathbf{A}_d$ consiste à résoudre une étape linéaire après avoir posé $\hat{\mathbf{A}}_{-1/2} = 0$, $\hat{\alpha}_{-1/2} = 0$ et $\hat{\beta}_{-1/2} = 0$.

2.3 Représentation des inconnues

Le principe **P3** de la méthode préconise l'utilisation d'une représentation mécanique *ad hoc* des inconnues. Cette technique est un point clé pour gagner en performances [Lad99a]. Elle consiste à nouveau à tirer parti du caractère non incrémental de la stratégie en proposant pour chaque approximation de la solution qui est générée, une représentation adaptée à la qualité qu'on peut attendre. Il s'agit là d'une technique adaptative, puisqu'au fur et à mesure des itérations, la solution peut être représentée de plus en plus finement.

Une approximation qui s'est avérée pertinente pour les problèmes d'évolution quasi-statique est la superposition de chargements radiaux. On choisit de représenter une

quantité admissible $\mathbf{s}(\underline{M}, t)$ de $\mathbf{A}_d$ sous la forme :

$$\mathbf{s}(\underline{M}, t) = s_0(t)S_0(\underline{M}) + \sum_i s_i(t)S_i(\underline{M})$$

où S_0 est un champ admissible particulier et les S_i des champs admissibles à zéro ; les s_0 et s_i sont des fonctions scalaires du temps. Le nombre de couples (s_i, S_i) peut être augmenté au cours des itérations si cela est nécessaire pour améliorer la précision de la solution : typiquement, un couple peut être ajouté à chaque étape linéaire et donc chaque itération.

Dans le chapitre suivant, on décrira en détail comment une telle approximation transforme l'étape linéaire. Principalement, on verra qu'elle permet de remplacer la résolution d'un système global à résoudre à chaque pas de temps (pour calculer $\mathbf{s}(\underline{M}, t)$) en celle d'un faible nombre de systèmes globaux, indépendants du temps (pour calculer $S_i(\underline{M})$). Cette technique permet donc un gain substantiel en terme de coût de calcul.

On note $\mathbf{R}^{[0,T]}$, l'ensemble des champs qui peuvent s'écrire comme la superposition de chargements radiaux :

$$\mathbf{R}^{[0,T]} = \left\{ \mathbf{s} \mid \exists n \in \mathbb{N}, \exists \{(s_i, S_i)\}_{i \in \{0, \dots, n\}}, \mathbf{s}(\underline{M}, t) = s_0(t)S_0(\underline{M}) + \sum_{i=1}^n s_i(t)S_i(\underline{M}) \right\}$$

Lors d'une étape linéaire, on cherche un élément $\mathbf{s}$ appartenant à $\mathbf{A}_d$ et à la direction de recherche E^- . si l'on ajoute comme contrainte supplémentaire qu'il puisse s'écrire sous forme représentée, *i.e.* $\mathbf{s} \in \mathbf{R}^{[0,T]}$, le problème devient surcontraint. Il faut alors choisir entre :

- vérifier exactement la direction de recherche et seulement « au mieux » l'admissibilité (cf. **Figure 2.5(a)**) ;
- vérifier exactement l'admissibilité et seulement « au mieux » la direction de recherche (cf. **Figure 2.5(b)**).

Cette notion de vérification « au mieux » (ou vérification faible en un certain sens) sera précisée ultérieurement.

Enfin, une étape dite *préliminaire* peut également être mise en place. Elle consiste, à partir d'une solution $\mathbf{s}_n$ de $\mathbf{A}_d$ exprimée sous forme représentée, à calculer à moindre frais une « meilleure » solution $\bar{\mathbf{s}}_{n+1}$, en ne modifiant que les fonctions du temps. La phase la plus coûteuse, celle de génération de nouvelles fonctions de l'espace est alors évitée. Cette étape préliminaire prend place après l'étape locale et la **Figure 2.6** donne une représentation de principe de la méthode.

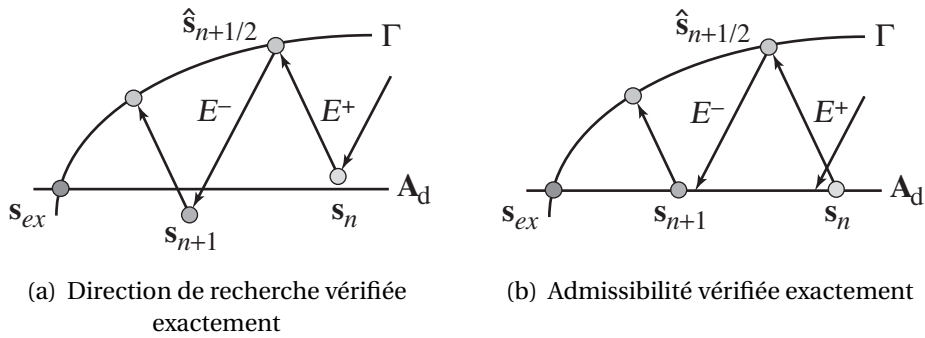


Figure 2.5 • Méthode LATIN avec représentation

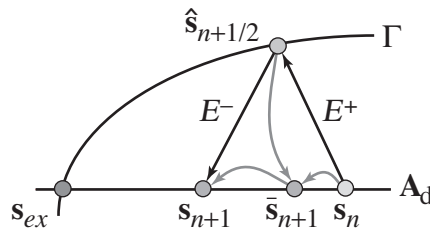


Figure 2.6 • Représentation de principe de la méthode avec étape préliminaire

Un critère fondé sur l'efficacité de l'étape préliminaire permet de décider si elle doit ou non être suivie d'une étape linéaire classique (avec génération de nouvelles fonctions d'espace). La **Figure 2.7** détaille une nouvelle itération $n + 1$ typique de la méthode. Ce critère sera détaillé dans la section suivante.

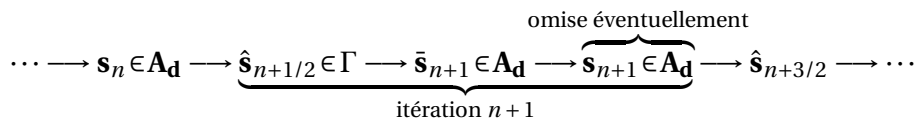


Figure 2.7 • Une itération de la méthode LATIN avec étape préliminaire

Remarque • Notons que la technique d'approximation radiale n'a été utilisée que pour les champs de $\mathbf{A}_d$, ce qui se traduit par une modification de l'étape linéaire uniquement. On pourrait tout à fait imaginer étendre cette technique à l'ensemble des champs manipulés dans le problème. On serait alors certainement amené à développer un cadre mathématique spécifique sur l'ensemble des couples (fonction du temps, fonction de l'espace).

La méthode complète de résolution est décrite dans l'**Algorithme 2.1**. Les étapes marquées d'un **///** sont parallélisables.

//	Initialisation solide	résolution d'un problème global solide
//	Initialisation fluide	résolution d'un problème global fluide
	<i>Boucle sur les itérations</i>	
	Étape locale	résolution de systèmes différentiels locaux
	Étape préliminaire solide	mise à jour des fonctions du temps
	<i>Si nouveau couple requis</i>	
//	Étape linéaire solide	point fixe sur un problème global solide pour calculer un nouveau couple
	<i>Fin si</i>	
	Étape préliminaire fluide	mise à jour des fonctions du temps
	<i>Si nouveau couple requis</i>	
//	Étape linéaire fluide	point fixe sur un problème global fluide pour calculer un nouveau couple
	<i>Fin si</i>	
	<i>Critère d'arrêt</i>	calcul des indicateurs d'erreur
	<i>Fin des itérations</i>	

Algorithme 2.1 • Méthode LATIN pour le multiphysique

2.4 Convergence de la méthode

2.4.1 Choix des directions de recherche

Dans le cas de figure où l'on n'utilise pas de représentation et où les directions de recherche sont constantes, une démonstration de la convergence de la méthode peut être établie en suivant la démarche présentée dans [Lad99a]. Elle se base sur des propriétés de stabilité vérifiées par le matériau. Pour cela, on définit la forme bilinéaire « travail » $\langle \cdot, \cdot \rangle : (\mathbf{S}^{[0,T]})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivante :

$$\forall (\mathbf{s}, \mathbf{s}') \in (\mathbf{S}^{[0,T]})^2,$$

$$\langle \mathbf{s}, \mathbf{s}' \rangle = \int_{[0,T]} \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_{\Omega} (\text{Tr}[\sigma \dot{\varepsilon}'] + \text{Tr}[\sigma' \dot{\varepsilon}] + qp' + q'p + \underline{W} \cdot \underline{Z}' + \underline{W}' \cdot \underline{Z}) d\Omega dt$$

qui fait intervenir les membres des couples de grandeurs duales $(\dot{\varepsilon}, \sigma)$, (p, q) et $(\underline{Z}, \underline{W})$. En remarquant les propriétés :

$$\forall (\mathbf{s}, \mathbf{s}', \mathbf{s}'') \in (\mathbf{A}_d)^3, \langle \mathbf{s} - \mathbf{s}', \mathbf{s} - \mathbf{s}'' \rangle = 0$$

et

$$\forall (\mathbf{s}, \mathbf{s}') \in (\Gamma)^2, \langle \mathbf{s} - \mathbf{s}', \mathbf{s} - \mathbf{s}' \rangle \geq 0$$

on peut montrer que des directions de recherches de la forme (2.1) et (2.4) permettent d'assurer la convergence, à condition que les opérateurs $\mathbf{L}$, r et $\mathbf{M}$ soient définis positifs.

Après analyse dimensionnelle, on voit qu'on peut les choisir de la forme :

$$\mathbf{L} = t_m \mathbf{D}, \quad r = \frac{1}{t_h Q} \quad \text{et} \quad \mathbf{M} = \mathbf{H} \quad (2.11)$$

où t_m et t_h sont deux temps caractéristiques. Ces deux temps sont des paramètres de la méthode : ils ne modifient pas la solution à convergence mais leurs valeurs influent sur le taux de convergence de l'algorithme.

Dans le cadre de la méthode multiéchelle avec homogénéisation développée dans [Lad02a, Lad03], de récents travaux ont été menés sur l'interprétation et l'optimisation de ces directions de recherche lorsqu'on se restreint au cas de l'élastostaticité linéaire [Vio03].

On construit maintenant, à partir de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, une norme sur les quantités solides, définie sur $\mathbf{S}^{[0,T]}$:

$$\phi_S^2(\mathbf{s}) = \int_{[0,T]} \|\varepsilon\|_{\mathbf{D}}^2 dt \quad \text{avec} \quad \|\varepsilon\|_{\mathbf{D}}^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr}[\varepsilon \mathbf{D} \varepsilon] d\Omega$$

une norme sur les quantités fluides :

$$\phi_F^2(\mathbf{s}) = \int_{[0,T]} \|p\|_{Q^{-1}}^2 dt \quad \text{avec} \quad \|p\|_{Q^{-1}}^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} p Q^{-1} p d\Omega$$

une norme sur l'ensemble des deux physiques :

$$\phi^2(\mathbf{s}) = \phi_S^2(\mathbf{s}) + \phi_F^2(\mathbf{s})$$

ainsi que les grandeurs adimensionnées sur $(\mathbf{S}^{[0,T]})^2$:

$$\Phi_S(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \frac{\phi_S(\mathbf{s} - \mathbf{s}')}{\phi_S\left(\frac{1}{2}(\mathbf{s} + \mathbf{s}')\right)} \quad \text{et} \quad \Phi_F(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \frac{\phi_F(\mathbf{s} - \mathbf{s}')}{\phi_F\left(\frac{1}{2}(\mathbf{s} + \mathbf{s}')\right)}$$

Ces grandeurs vont être utilisées pour définir un certain nombre d'indicateurs d'erreur et de critères pour la méthode.

2.4.2 Erreur vis-à-vis d'une référence

Supposons que l'on dispose d'une solution de référence $\mathbf{s}_{ex}$ et que l'on veuille mesurer l'erreur entre $\mathbf{s}_{ex}$ et un élément quelconque $\mathbf{s}$ de $\mathbf{S}^{[0,T]}$. On introduit une mesure de l'erreur sur les quantités solides : $E_S = \Phi_S(\mathbf{s}, \mathbf{s}_{ex})$ et une mesure sur les quantités

fluides : $E_F = \Phi_F(\mathbf{s}, \mathbf{s}_{ex})$. On introduit de la même façon la contribution à l'erreur totale de la partie solide :

$$\eta_S^2 = \frac{\phi_S^2(\mathbf{s} - \mathbf{s}_{ex})}{\phi^2(\mathbf{s}_{ex})}$$

et de la partie fluide :

$$\eta_F^2 = \frac{\phi_F^2(\mathbf{s} - \mathbf{s}_{ex})}{\phi^2(\mathbf{s}_{ex})}$$

de telle sorte qu'une mesure de l'erreur totale soit :

$$\eta = \sqrt{\eta_S^2 + \eta_F^2} = \frac{\phi(\mathbf{s} - \mathbf{s}_{ex})}{\phi(\mathbf{s}_{ex})}$$

Dans les exemples numériques qui suivront, si l'on dispose d'une solution de référence $\mathbf{s}_{ex}$, on étudiera notamment l'évolution de l'erreur entre $\mathbf{s}_{n+1}$ de $\mathbf{A}_d$ et $\mathbf{s}_{ex}$.

2.4.3 Indicateur d'erreur pour arrêter les itérations

La qualité de la solution générée par la LATIN s'améliore au cours des itérations. Il est donc nécessaire de se poser la question de l'arrêt des itérations. On utilise le caractère non incrémental pour construire un indicateur d'erreur qui prenne en compte la solution sur tout le domaine et tout l'intervalle de temps étudié.

Parmi les différents indicateurs possibles pour stopper l'algorithme après l'itération $n + 1$, on choisit d'introduire $e_{S,n+1} = \Phi_S(\mathbf{s}_{n+1}, \hat{\mathbf{s}}_{n+1/2})$ sur les quantités solides et $e_{F,n+1} = \Phi_F(\mathbf{s}_{n+1}, \hat{\mathbf{s}}_{n+1/2})$ sur les quantités fluides. On introduit de la même façon un indicateur total :

$$e_{n+1} = \frac{\phi(\mathbf{s}_{n+1} - \hat{\mathbf{s}}_{n+1/2})}{\phi\left(\frac{1}{2}(\mathbf{s}_{n+1} + \hat{\mathbf{s}}_{n+1/2})\right)}$$

Ces indicateurs peuvent être vus comme une mesure de distance entre deux solutions successives générées par la méthode (cf. **Figure 2.8**).

2.4.4 Critère de saut d'étape linéaire

Rappelons que si l'étape préliminaire $n + 1$ a permis de réduire de manière significative l'erreur vis-à-vis d'une itération précédente, on peut considérer qu'il n'est pas nécessaire de générer une nouvelle fonction de l'espace. On introduit les indicateurs

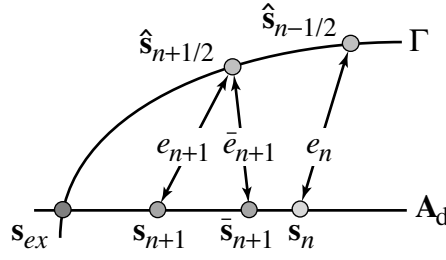


Figure 2.8 • Indicateurs à l'itération $n + 1$

$\bar{e}_{S,n+1} = \Phi_S(\bar{s}_{n+1}, \hat{s}_{n+1/2})$ pour la partie solide et $\bar{e}_{F,n+1} = \Phi_F(\bar{s}_{n+1}, \hat{s}_{n+1/2})$ pour la partie fluide (cf. **Figure 2.8**).

Les étapes linéaires $n + 1$ solide, resp. fluide, seront omises lorsque :

$$\frac{\bar{e}_{S,n+1}}{e_{S,n}} < \zeta \quad \text{resp.} \quad \frac{\bar{e}_{F,n+1}}{e_{F,n}} < \zeta$$

où le seuil ζ sera choisi par la suite.

3 Aspects multiéchelles

Une des caractéristiques majeures des problèmes multiphysiques concerne les aspects multiéchelles et la nécessité de pouvoir utiliser des discrétisations différentes pour chacune des physiques. Dans ce type de problèmes, des échelles de temps et d'espace très différentes peuvent être amenées à « cohabiter » [Pip95b, Far98, Fel01] et il est primordial de maîtriser l'utilisation de discrétisations différentes en temps car :

- elle permet de réduire le coût de la simulation en évitant des calculs inutiles sur les champs pour lesquels une discrétisation plus grossière est suffisante ;
- elle évite les transferts d'informations trop fréquents entre les codes [Pip95b] ;

et en espace car elle est nécessaire :

- lorsque les codes utilisent des méthodes d'adaptation pour générer automatiquement des maillages *ad hoc*, qui ne sont pas forcément compatibles ;
- lorsque les schémas utilisés ne sont pas identiques (*e.g.* dans un problème d'aéroélasticité, éléments finis pour la partie structure et différences finies pour la partie fluide [Far98, Bec00, Mat03]).

Dans les méthodes de partitionnement, l'aspect multiéchelle en temps est le plus souvent traité en sous-itérant sur la physique qui nécessite la discrétisation la plus fine. Des techniques adaptées de prédiction des autres champs permettent alors de conserver la stabilité inconditionnelle des schémas [Pip95b, Fel01]. Pour l'utilisation de discrétisations spatiales différentes, que ce soit dans une méthode monolithique ou de partitionnement, un certain nombre de techniques ont été proposées dans le cadre de la résolution des problèmes couplés (*e.g.* [Mam95, Far98, Bec00] pour l'aéroélasticité).

Dans la méthode LATIN, la prise en compte de ce type d'aspects multiéchelles s'intègre naturellement dans le cadre de l'interface entre les deux physiques. Pour cela, on donne un sens concret à l'interface en la munissant de ses propres discrétisations en temps et en espace (cf. **Figure 2.9**). La vérification des relations de comportement est alors réalisée sur ces discrétisations. La difficulté provient évidemment de la nécessité de transférer des champs spatiaux et temporels entre les discrétisations de l'interface et celles de chacune des physiques. Les techniques de transfert qui ont été mises en place seront développées dans des chapitres ultérieurs. Notons que le traitement indépendant de chacune des physiques avec une approche multiéchelle n'a pas été abordé dans ce travail, mais qu'il pourrait être introduit par le biais de la technique d'homogénéisation en temps et en espace présentée dans [Lad02a, Lad03].

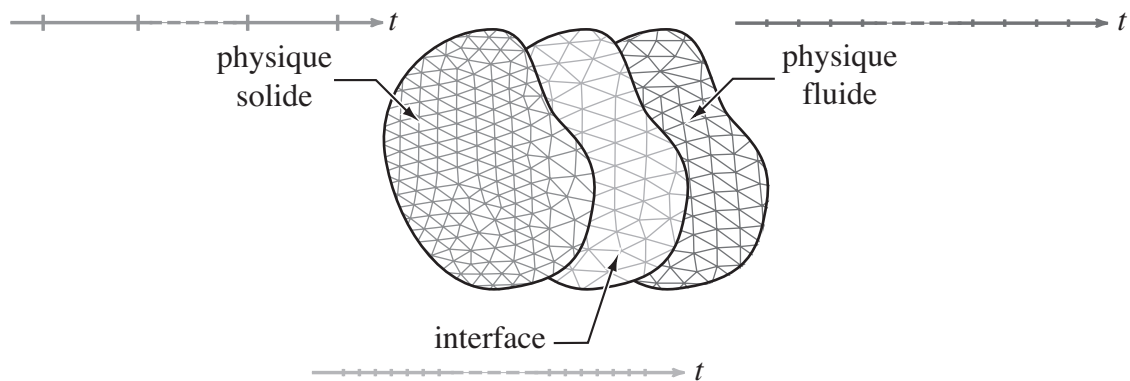


Figure 2.9 • Discrétisations de l'interface

Dans ce travail, on ne considère que des milieux poreux non fissurés et sans cavités de taille importante, qui empêcheraient l'utilisation d'une procédure d'homogénéisation pour travailler sur les grandeurs macroscopiques. L'utilisation de méthodes fondées sur la partition d'unité (du type X-FEM [Moë99, Moë02] ou G-FEM [Str01]) devrait permettre de prendre en compte de telles irrégularités.

4 Cas test

Le cas test qui est proposé ici permet de montrer la faisabilité de la méthode. Il a été traité dans l'environnement MatlabTM et interfacé avec le code éléments finis Cast3MTM (CEA Saclay, France) [Ver88] pour le pré et le post-traitement. Les résultats présentés sont issus de [Dur03c]. Dans un premier temps, la simulation a été réalisée sans utiliser la technique d'approximation radiale ni prendre en compte les aspects multiéchelles.

4.1 Description du problème

On considère le problème de consolidation d'un sol, soumis à un chargement imposé en effort. La géométrie est représentée sur la **Figure 2.10** et correspond à la même répartition des conditions aux limites que la **Figure 1.2**. Le problème est traité sous une hypothèse de déformations planes. L'intervalle de temps étudié est $T = 36$ s et les chargements $p_1 = 1,54$ GPa et $p_0 = 380$ MPa avec $t_1 = T/10$. La condition $w_d = 0$ correspond à une imperméabilité de la roche environnante. La condition initiale en pression est $p(t = 0) = p_0$. On suppose que le sol est en grès de Béréa saturé d'eau, dont les caractéristiques ont été identifiées dans [GRE90] et sont présentées dans le **Tableau 2.1**.

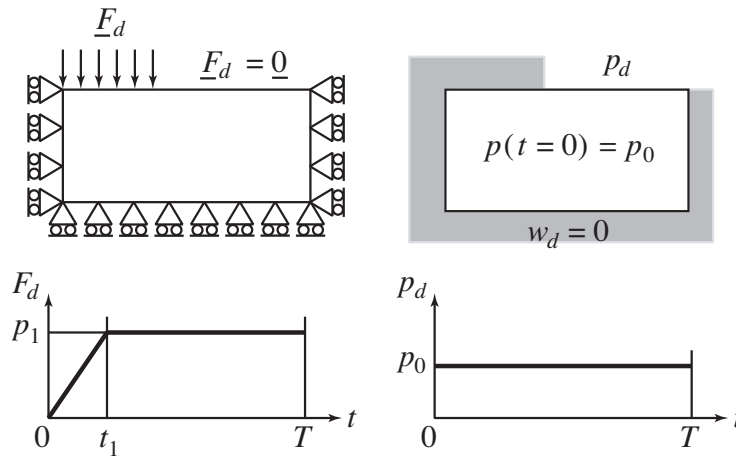


Figure 2.10 • Cas test avec effort imposé, conditions aux limites sur les parties solide et fluide

Ces caractéristiques présentent des ordres de grandeur très différents et on procède à une « adimensionnalisation » pour que les opérateurs qui interviennent dans la résolution soient bien conditionnés. On se place pour cela dans un nouveau système d'unités ($[L], [M], [T]$), avec $1 [L] = 1$ m, $1 [M] = 10^{10}$ kg et $1 [T] = 1$ s, de telle sorte que les valeurs du module d'Young, du module de Biot et de la perméabilité, soient

Porosité	$n = 0,19$	Module d'Young	$E = 14,4 \text{ GPa}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,2$	Module de Biot	$Q = 13,5 \text{ GPa}$
Coefficient de Biot	$b = 0,78$	Perméabilité	$H = \frac{K}{\mu_w} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3 \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1}$

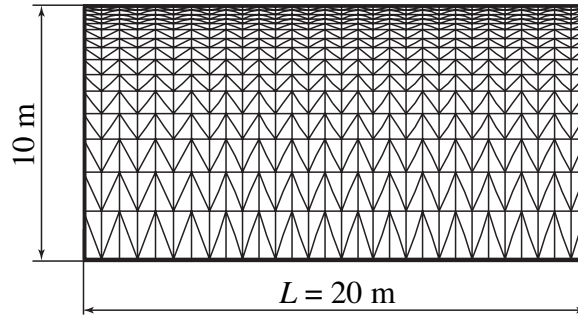
Tableau 2.1 • Caractéristiques du grès de Bér  a saturé

de l'ordre de grandeur de 1. Les valeurs des caractéristiques du Grès de B  r  a dans ce système sont reprises dans le **Tableau 2.2**.

Porosité	$n = 0,19$	Module d'Young	$E = 1,44 [L]^{-1} [M] [T]^{-2}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,2$	Module de Biot	$Q = 1,35 [L]^{-1} [M] [T]^{-2}$
Coefficient de Biot	$b = 0,78$	Perméabilité	$H = \frac{K}{\mu_w} = 2 [L]^3 [M]^{-1} [T]$

Tableau 2.2 • Caractéristiques du gr  s de B  r  a saturé exprimées dans le système d'unités ($[L]$, $[M]$, $[T]$)

Les quantités solides (les déplacements) sont discr  t  s  es en espace en utilisant des éléments P2 (triangles à 6 nœuds). Les quantités fluides (la pression) sont discr  t  s  es en utilisant des éléments P1 (triangles à 3 nœuds avec une interpolation linéaire continue entre les éléments). Ce choix vérifie la condition LBB [Zie86, Bre91] et le maillage est représenté sur la **Figure 2.11**. 7 points de Gauss sont utilisés pour l'intégration et la représentation des éléments de la solution $\mathbf{s}$ [Zie00].

**Figure 2.11** • Maillage du domaine

Une discr  t  s  ation en temps identique est utilisée pour tous les champs avec n_T pas de temps de taille $\Delta t = T/120$. Le schéma d'intégration est la θ -méthode avec $\theta = 1$.

4.2 Premiers résultats et comparaisons

La simulation est réalisée avec la méthode monolithique, dont la solution est considérée comme référence $\mathbf{s}_{ex}$, la stratégie LATIN et la procédure ISPP.    titre de comparaison, on étudie les erreurs entre les solutions générées par ces deux dernières méthodes

et $\mathbf{s}_{ex}$. La **Figure 2.12** représente l'évolution de la pression interstitielle dans le domaine et la **Figure 2.13** celle de son maximum au cours de l'intervalle de temps $[0, T]$. On peut constater que cet intervalle correspond à une partie transitoire de la réponse du sol.

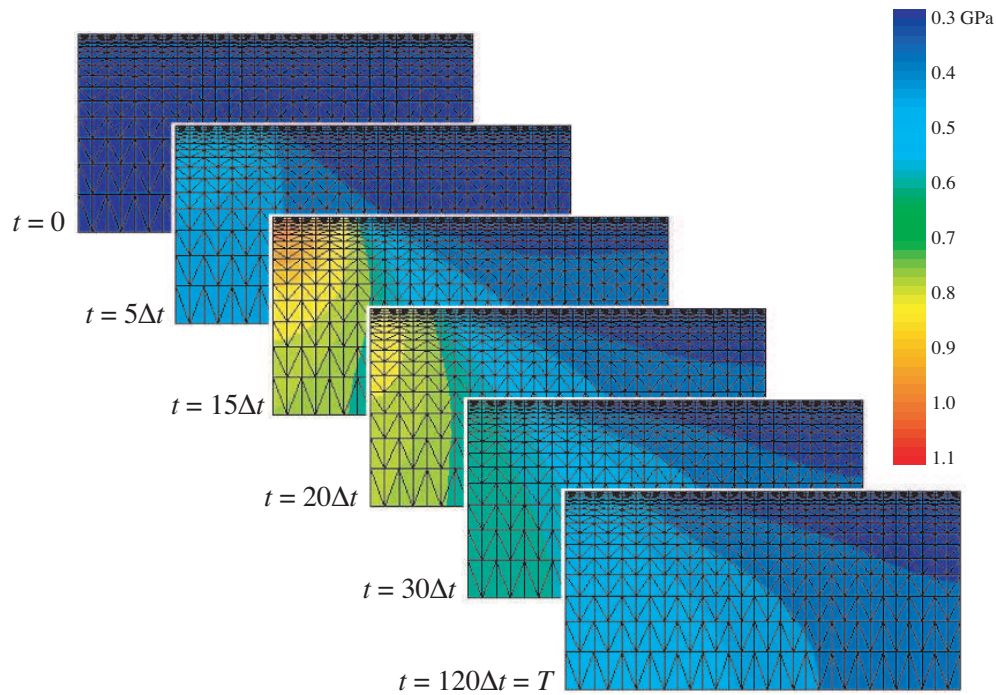


Figure 2.12 • Évolution de la pression interstitielle

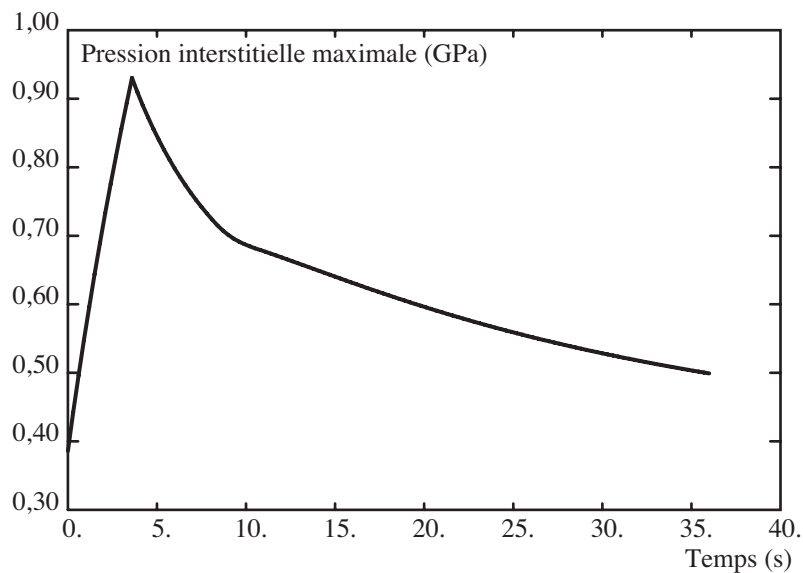


Figure 2.13 • Évolution de la pression interstitielle maximale

Pour la méthode LATIN, utilisée ici sans technique de représentation des inconnues, les paramètres des directions de recherche (2.11) ont été optimisés et fixés à $t_m = 0,015t_c$ et $t_h = 0,030t_c$. Le temps caractéristique t_c a été introduit après analyse dimensionnelle, $t_c = L^2/(QH)$ où L est la largeur de la structure, et vaut $t_c = 148$ s dans cet exemple.

La **Figure 2.14** montre l'influence du choix des paramètres t_m et t_h sur le taux de convergence de la méthode en représentant l'évolution de l'erreur η vis-à-vis de la référence s_{ex} en fonction du nombre d'itérations n_{it} . On peut constater que ce taux est plus sensible au paramètre fluide t_h qu'au paramètre solide t_m . Répétons que le choix automatique de ces paramètres reste pour l'instant une question ouverte.

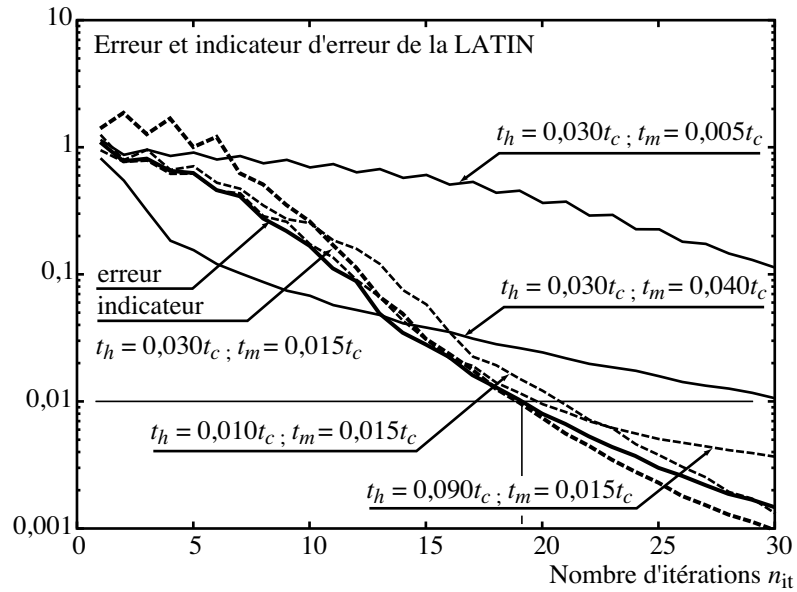


Figure 2.14 • Convergence de la méthode LATIN sans représentation

4.2.1 Comparaison avec la méthode monolithique

Une étape linéaire de la méthode LATIN consiste à résoudre à chaque pas de temps t_i , les deux problèmes globaux indépendants (2.8) et (2.9) de la forme :

$$\begin{aligned} LV_i &= B_\sigma^T \hat{A}_i + f_{di} \\ [H + R]p_i &= B_q^T \hat{\alpha}_i + B_w^T \hat{\beta}_i + g_{di} \end{aligned}$$

qu'il faut comparer au système monolithique (1.10) de la forme :

$$\begin{bmatrix} K & -N \\ -N^T & -S - \theta \Delta t_i H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ p_i \end{bmatrix} = D_i$$

Pour des directions de recherche du type (2.11), les matrices L et R peuvent s'exprimer en fonction des matrices K et S : $L = t_m K$ et $R = \frac{1}{t_h} S$. Il est important de noter que, contrairement à la méthode monolithique, le pas de temps Δt_i n'intervient pas dans les membres de gauche de la stratégie LATIN. Les matrices L et $[H + R]$ ne nécessitent donc qu'une seule factorisation, même lorsqu'une discrétisation en temps non uniforme est utilisée.

L'étape locale est, pour sa part, traitée pour un coût modique en intégrant en temps les petits systèmes différentiels (2.2) en chaque point de Gauss de chaque élément.

4.2.2 Comparaison avec la procédure ISPP

La **Figure 2.15** montre l'influence du paramètre de relaxation ω sur l'évolution de l'erreur η en fonction du nombre de sous-itérations à chaque pas de temps n_{sub} . Une valeur optimale du paramètre semble être proche de $\omega = 0,5$, tandis des valeurs plus grandes (proches de 1) nuisent à la convergence.

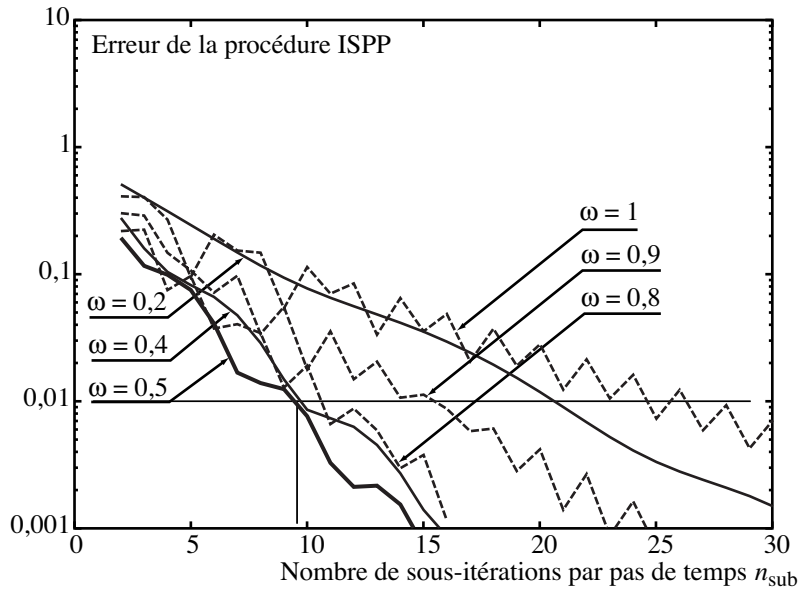


Figure 2.15 • Convergence de l'ISPP

Pour un pas de temps t_i , à chaque sous-itération, la procédure ISPP nécessite la résolution de deux problèmes indépendants (1.12) de la forme :

$$\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -S - \theta \Delta t_i H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ p_i \end{bmatrix} = E_i$$

La même remarque que pour la méthode monolithique peut être faite concernant

l'utilisation d'une discrétisation en temps non constante. Pour comparer les méthodes LATIN et ISPP, un indicateur est le nombre n_S de systèmes globaux à résoudre pour la partie solide et n_F pour la partie fluide afin d'atteindre un niveau d'erreur donné :

- pour la méthode LATIN : $n_S = n_F = n_{it} \times n_T$;
- pour la procédure ISPP : $n_S = n_F = n_{sub} \times n_T$.

Évidemment, ces résolutions globales ne constituent pas le seul coût de l'algorithme mais la part la plus importante, en particulier dans le cas des problèmes de grande taille. Il serait cependant intéressant de mener une analyse plus précise du coût de la simulation.

En comparant les **Figure 2.14** et **Figure 2.15**, on constate que pour atteindre un niveau d'erreur η de 1%, il faut $n_{it} = 18$ itérations pour la LATIN et $n_{sub} = 9$ sous-itérations pour l'ISPP. Dans cet exemple, le nombre total de résolutions globales $n_S + n_F$ nécessaire pour atteindre un niveau d'erreur donné est environ deux fois plus grand pour la méthode LATIN que pour l'ISPP.

5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous venons de présenter les idées de base de la méthode LATIN et d'illustrer son fonctionnement sur le cas de la consolidation d'un sol poreux, ce qui a permis de valider sa faisabilité.

On l'a ensuite comparée à la méthode monolithique et à la procédure ISPP et constaté qu'elle ne s'avérait pas compétitive vis-à-vis de la stratégie de partitionnement lorsque la technique d'approximation radiale n'était pas utilisée. Celle-ci est mise en place dans le chapitre qui suit.