

La Décomposition Modale Empirique

Sommaire

4.1	Introduction	40
4.2	EMD : Méthode originelle ou EMD classique	40
4.2.1	Quelques définitions	40
4.2.2	Principe	41
4.2.3	Algorithme	42
4.2.4	Exemples	45
4.2.5	Prise en charge des effets de bord	50
4.2.6	Critères d'arrêt	50
4.3	Propriétés fondamentales de l'EMD	51
4.3.1	Non-linéarité	51
4.3.2	Pseudo-orthogonalité	52
4.3.3	Localité	52
4.3.4	Aspect multirésolution	52
4.3.5	Auto-adaptativité	53
4.4	Analyse Spectrale de Hilbert	53
4.5	Différentes variantes de l'EMD	54
4.5.1	EMD B-spline	54
4.5.2	EMD locale	55
4.5.3	EMD en ligne	56
4.5.4	Ensemble EMD	56
4.6	Quelques extensions de l'EMD	57
4.6.1	EMD pour les signaux à valeurs complexes	57
4.6.2	EMD pour les signaux à n composantes	57
4.6.3	Approche EDP pour l'EMD	58
4.6.4	A propos de l'orthogonalité pour l'EMD	60
4.7	Vers l'EMD sans sifting	60
4.7.1	Opérateur enveloppe moyenne	60
4.7.2	Construction de l'opérateur d'extraction directe de modes	62

4.7.3	Convergence de l' <i>EMD sans sifting</i>	65
4.7.4	Quelques résultats	65
4.7.5	Forme analytique	70
4.7.6	Quelques exemples	70
4.8	Conclusion	72

4.1 Introduction

LA DÉCOMPOSITION MODALE EMPIRIQUE - ou *EMD pour Empirical Mode Decomposition* - est une méthode algorithmique de décomposition adaptative du signal : au lieu d'analyser le signal dans une base fixe comme avec Fourier, on construit au fur et à mesure les fonctions de base, appelées *Fonction Mode Intrinsèque* en anglais *Intrinsic Mode Function (IMF)*. Elle a été introduite pour traiter de manière relativement souple des données quelconques, pouvant être non-stationnaires et non-linéaires [HSLa98]. Cette méthode, relativement jeune, a fait depuis son introduction l'objet de nombreux travaux, la plupart essayant de la formaliser et de la justifier mathématiquement. En effet, le gros défaut de cette méthode a longtemps été l'absence de théorie, notamment pour le processus de tamisage, qui extrait les *IMFs*, appelé *Sifting Process (SP)*. En cela s'ajoute le problème du mélange de modes et la présence d'intermittence. Des versions bidimensionnelles de l'*EMD* on vu le jour, mais restent pour la majorité très couteuses en complexité algorithmique. Ainsi, de nombreuses études ont modifié le fonctionnement de ce *sifting process*, ou bien l'ont formalisé à l'aide d'outils mathématiques solides, afin de justifier la méthode.

4.2 *EMD* : Méthode originelle ou *EMD* classique

4.2.1 Quelques définitions

Définition 4.2.1 *Notion de moyenne locale* : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ le domaine de définition d'une fonction $x \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $I_\delta = [t - \frac{\delta}{2}, t + \frac{\delta}{2}]$, une fenêtre d'observation. La moyenne locale du signal x définie au travers de I_δ est donnée par :

$$Mloc_\delta[x](t) = \frac{1}{\delta} \int_{I_\delta} x(y) dy \quad (4.1)$$

La fonction $Mloc_\delta[x](t)$ est plus régulière que x en ce sens qu'elle est dérivable sur I_δ .

Définition 4.2.2 *L'enveloppe moyenne d'un signal s est une extension de la notion de moyenne locale. En pratique, elle est définie par la demi-somme de ses enveloppes supérieure et inférieure, qui sont obtenues par interpolation des maxima et des minima respectivement. Il existe différentes méthodes d'interpolation pour les enveloppes. La plus utilisée est l'interpolation par spline cubique.*

Définition 4.2.3 *Un IMF (pour Intrinsic Mode Function) est une fonction oscillante de moyenne nulle, c'est-à-dire une fonction :*

- dont le nombre d'extrema et le nombre de passages par zéro diffèrent d'au plus un.
- dont la moyenne locale, au sens de la définition précédente, est nulle en tout point.

Définition 4.2.4 *Un signal AM-FM monocomposante est un signal pouvant s'écrire sous la forme :*

$$s(t) \triangleq a(t) \cos \left(\int_0^t 2\pi f(\tau) d\tau \right) \quad (4.2)$$

Cette définition contient à la fois la fonction AM, $a(t)$ et la fonction FM, $f(t)$. Ces signaux sont largement utilisés et peuvent modéliser efficacement des systèmes comme la transmission d'informations dans un canal, les systèmes RADAR et SONAR. L'intérêt principal en traitement du signal est la facilité d'extraction d'informations relatives à des grandeurs comme l'amplitude instantanée $a(t)$ et la fréquence instantanée $f(t)$ à partir d'un signal modulé $s(t)$.

Définition 4.2.5 *On appelle **Sifting Process** (SP) la procédure qui consiste à soustraire à un signal sa moyenne locale, plusieurs fois de suite jusqu'à obtenir une moyenne (quasi) nulle.*

Définition 4.2.6 *Une **intermittence** est une perturbation additionnelle localisée sur un signal. Le fait d'avoir des propriétés d'un IMF le rend difficile à extraire sans une opération supplémentaire après sifting.*

Définition 4.2.7 *Un **mixage de modes** ou **mode mixing** est une superposition, dans des proportions déterminées, de deux ou de plusieurs modes. Ce mélange garde toutefois les propriétés d'un IMF, ce qui rend difficile la séparation avec les méthodes classiques.*

4.2.2 Principe

L'EMD postule que tout signal réel se décompose en une *moyenne locale* ou *tendance locale* m et une *composante plus oscillante* d_1 . On a ainsi :

$$s = d_1 + m \quad (4.3)$$

Considérons un signal s , l'EMD va le décomposer en une somme finie de modes oscillants. On pourra alors écrire :

$$s = \sum_{k=1}^N d_k + r \quad (4.4)$$

Les modes oscillants d_k appelés *IMFs* (*Intrinsic Mode Function*), sont des fonctions oscillantes autour de 0, et de moyenne locale nulle. Le résidu r est plutôt moins oscillant donc plus basse fréquence que d_k , c'est-à-dire qu'il contient au plus 3 extrema.

La méthode originale définit l'enveloppe supérieure d'un signal (resp. inférieure) comme l'interpolation par splines cubiques des maxima (resp. minima) du signal. On peut alors définir l'enveloppe moyenne comme demi-somme de ces deux enveloppes. L'algorithme consiste donc à extraire successivement les modes en soustrayant au signal son enveloppe moyenne. Cependant, les modes ainsi extraits ne sont pas des *IMF* : bien qu'ils oscillent autour de 0, ils ne pourront être ainsi que si leur moyenne locale est nulle. Le rôle du *sifting process* est de tamiser ces protomodes pour obtenir de véritables *IMFs*. Pour cela, on soustrait au mode son enveloppe moyenne, plusieurs fois, jusqu'à obtenir une moyenne locale - ou enveloppe moyenne - quasi-nulle.

4.2.3 Algorithme

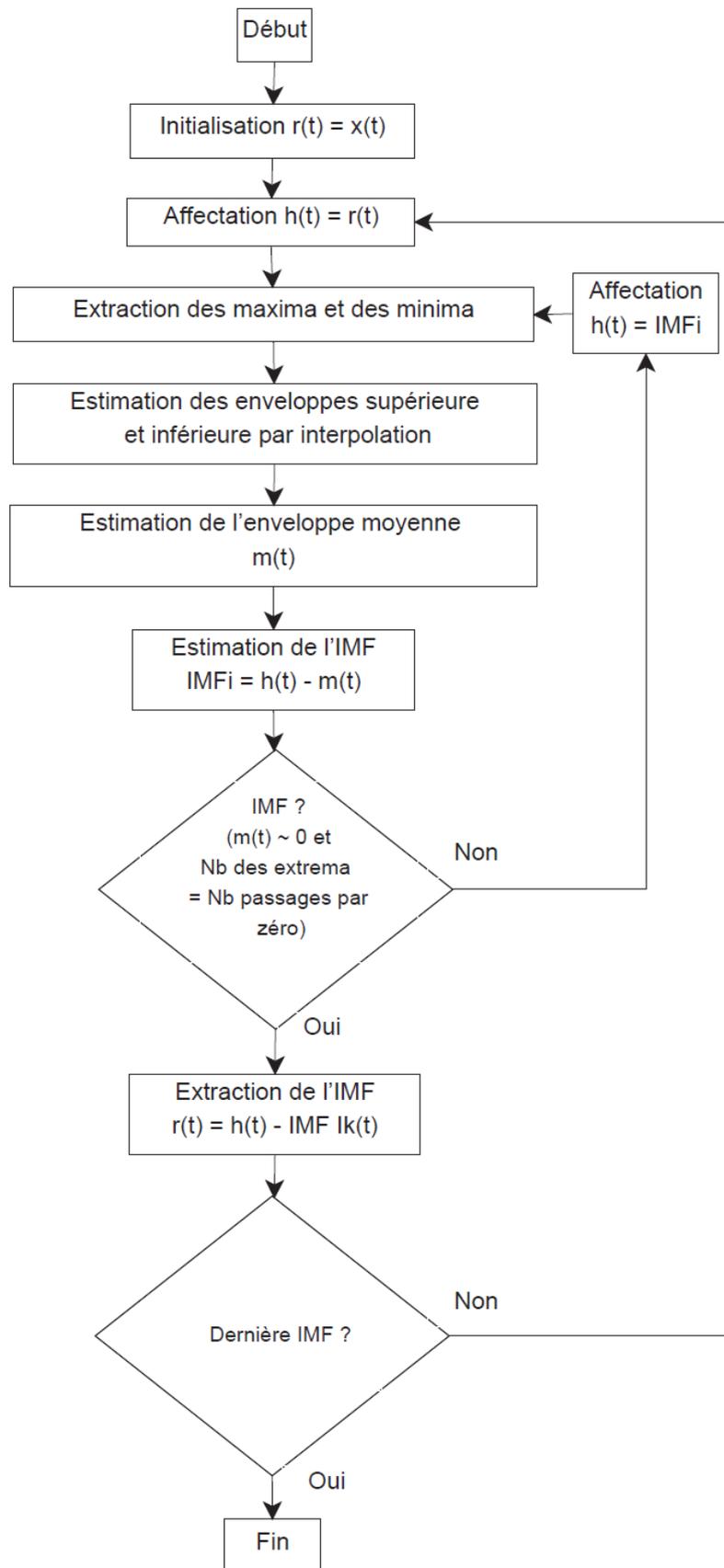
Algorithm 1 : EMPIRICAL MODE DECOMPOSITION ALGORITHM

- 1: **Initialisation** : $r = f, k = 1$
 - 2: **Calcul de l'enveloppe moyenne** e de r (i.e. la moyenne de l'enveloppe des minima et de l'enveloppe des maxima de r).
 - 3: **Extraction de fonctions intermédiaires** $p_i = r - e$ et posons $r = e$.
 - 4: **Tant que p_i n'est pas un IMF répéter**
 - Calcul de l'enveloppe moyenne e de p_i
 - $p_{i+1} = p_i - e_i ; i = i + 1$
 - 5: $d_k = p_i, r = r - d_k$
 - 6: Si r n'est pas monotone, retour à l'étape 2 et posons $k = k + 1$ sinon la décomposition est terminée.
-

Le *sifting process*, que l'on pourrait traduire par processus de tamisage, correspond à l'extraction d'un *IMF*, à partir d'un signal donné. La fonction de mode intrinsèque, ou *IMF*, ainsi obtenue peut être vue comme les détails du signal, de variation rapide. Pour cela, on extrait de façon itérative ces détails, jusqu'à conserver un *IMF*. Lorsqu'un *IMF* est extraite du signal, le signal résiduel est privé des variations les plus rapides, qui ont été capturées par la fonction mode intrinsèque. On constate ainsi expérimentalement une diminution du nombre d'extrema et donc l'arrêt de l'algorithme. En particulier, le dernier

résidu est une fonction monotone, qui traduit la tendance générale du signal. On aura finalement, une décomposition de la forme :

$$x(t) = m_N + \sum_{i=1}^N d_i \quad (4.5)$$

FIGURE 4.1 – Algorithme de la décomposition par *EMD*

4.2.4 Exemples

Voyons ici le comportement de l'EMD sur des exemples bien contrôlés. On considère des signaux dont on connaît *a priori* les différentes *IMFs*, par construction. Dans la figure 4.2 on voit bien comment l'EMD retrouve remarquablement bien les différentes composantes.

- *Signal – test₁* : mélange de sinusoïdes (figure 4.2)

$$s_1 = \sum_{i=1}^3 \sin(2\nu_i \pi t),$$

avec $\nu_1 = 28$, $\nu_2 = 13$ et $\nu_3 = 4$.

- *Signal – test₂* : mélange de sinusoïdes modulées AM/FM (figure 4.3)

$$s_2 = \sum_{i=1}^3 a_i(t) \sin(\phi_i(t)t),$$

On ne donnera pas l'écriture analytique des amplitudes et fréquences instantanées de chaque composante, mais on pourra se reporter à la figure.

- *Signal – test₃* : Signal oscillant discontinu (figure 4.4).

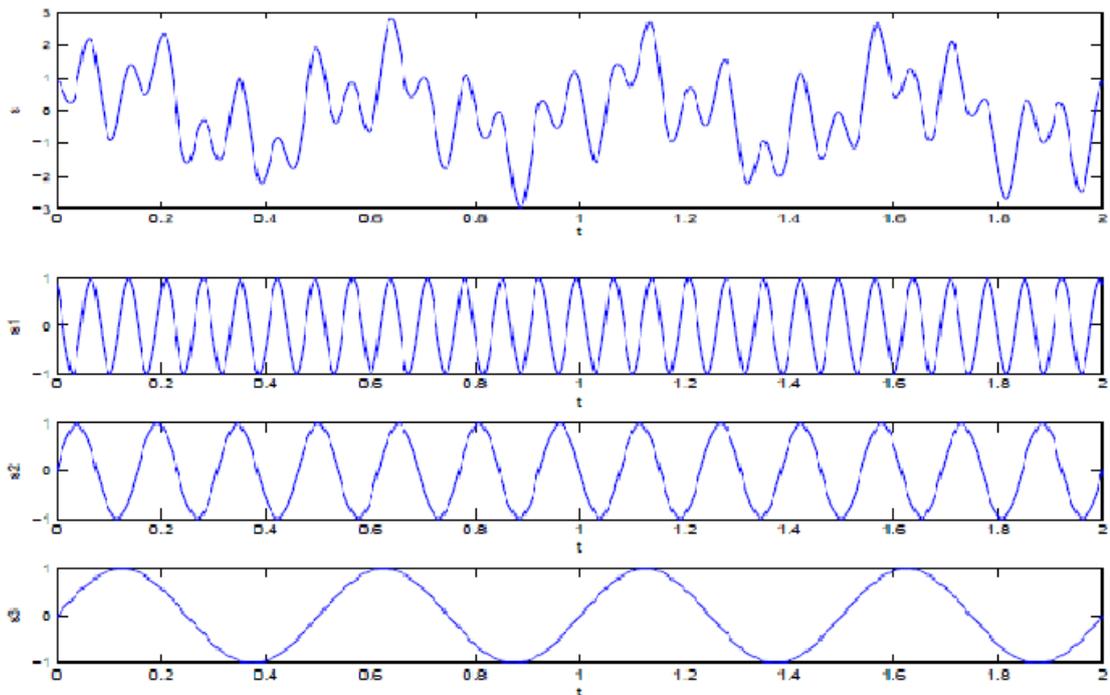


FIGURE 4.2 – *Signal – test₁* : mélange de sinusoïdes. En haut : le signal original. En bas : ses trois composantes.

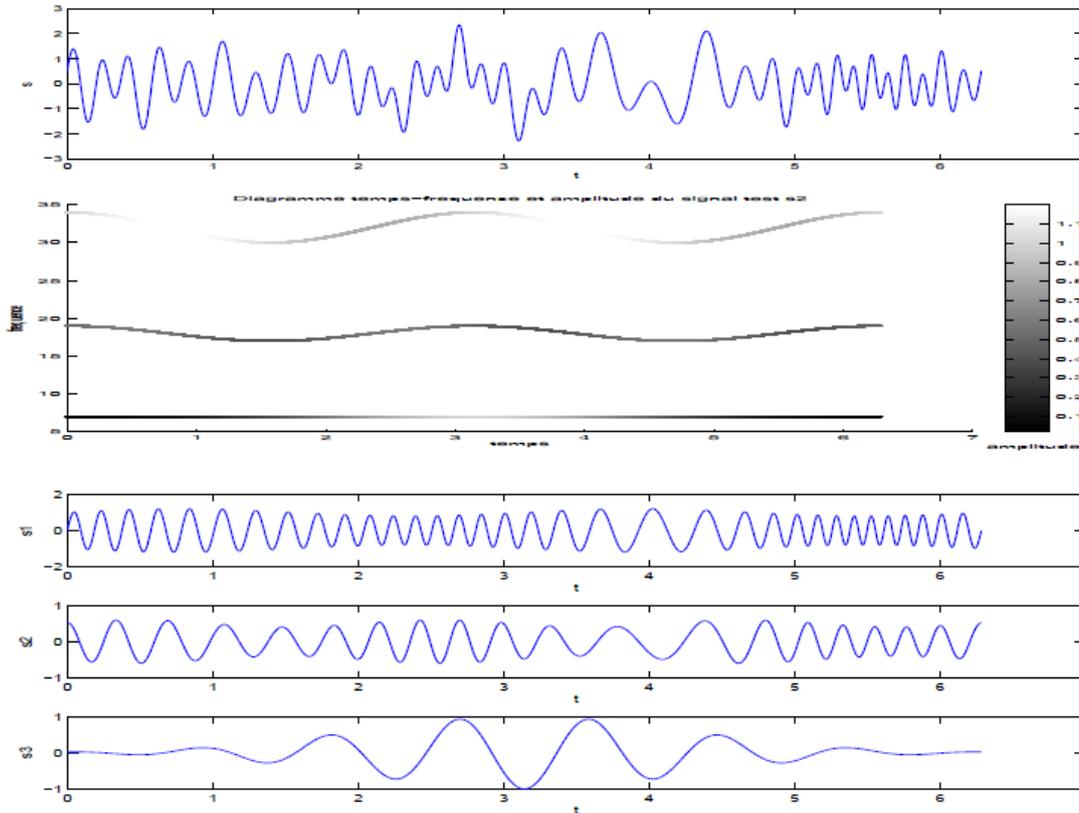


FIGURE 4.3 – *Signal – test₂* : mélange de sinusoïdes modulées AM/FM. En haut : le signal, représentation temporelle et dans le plan *temps/fréquence*. En bas : ses trois composantes.

Pour chacun de ces signaux, on connaît la composante de plus haute fréquence : nous allons l'appeler dans la suite la *composante réelle* de la décomposition : c'est l'*IMF* que nous souhaitons obtenir par la décomposition *EMD*. On réalise ici une analyse qualitative : pour chaque signal test, nous donnons sa décomposition *EMD* et nous comparons chaque *IMF* à la *composante réelle* connue *a priori*. Nous donnerons également le nombre d'itérations du *SP* réalisées pour chaque mode. Nous vérifions facilement que les résultats correspondent aux composantes réelles, avec toutefois un décalage non négligeable, sur certains exemples.

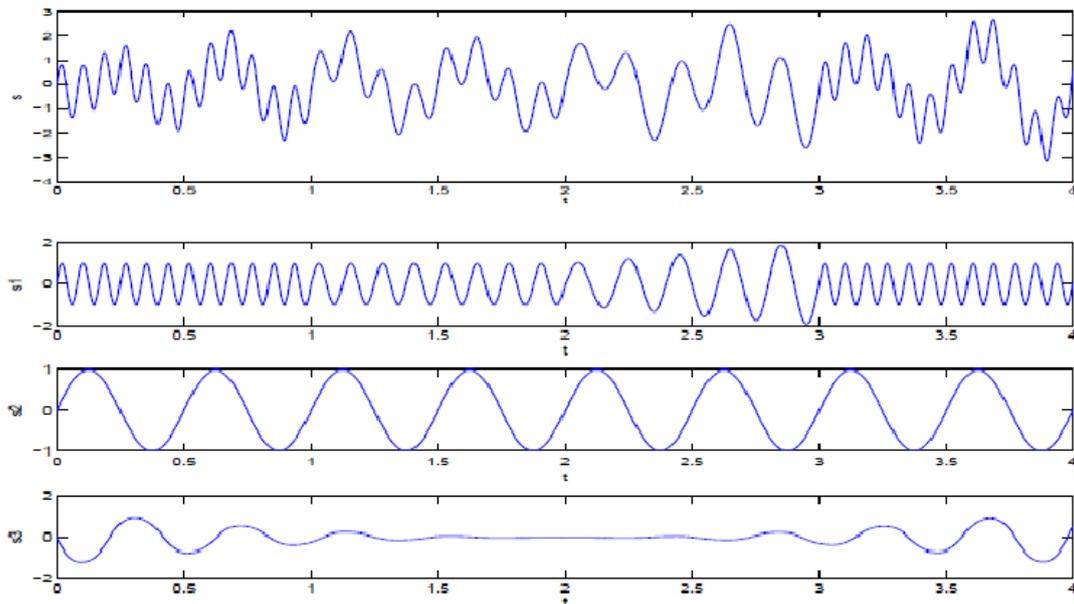


FIGURE 4.4 — *Signal – test₃* : mélange de sinusoïdes modulées avec des sauts d’amplitude et de fréquence. En haut : le signal. En bas : ses trois composantes.

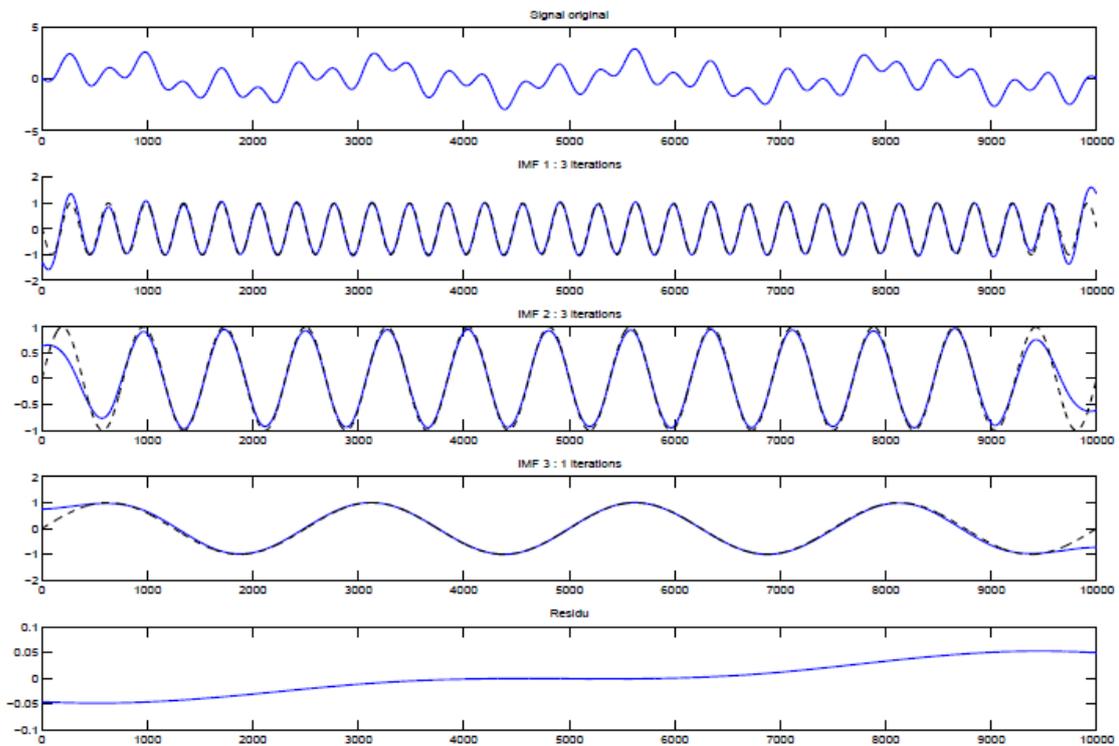


FIGURE 4.5 — Résultat de l’EMD sur le *signal – test₁*. Pour chaque *IMF*, on donne le résultat obtenu (trait plein, en bleu) et le résultat attendu (trait pointillé, noir).

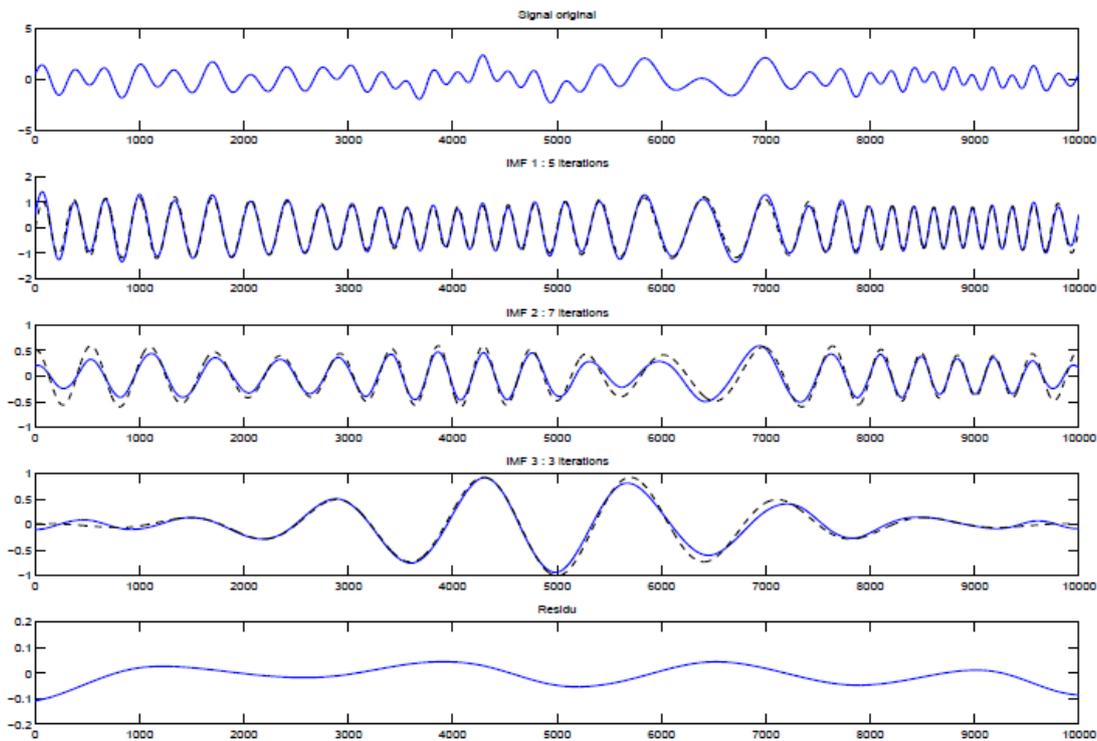


FIGURE 4.6 – Résultat de l'EMD sur le *signal-test₂*. Pour chaque *IMF*, on donne le résultat obtenu (trait plein, en bleu) et le résultat attendu (trait pointillé, noir).

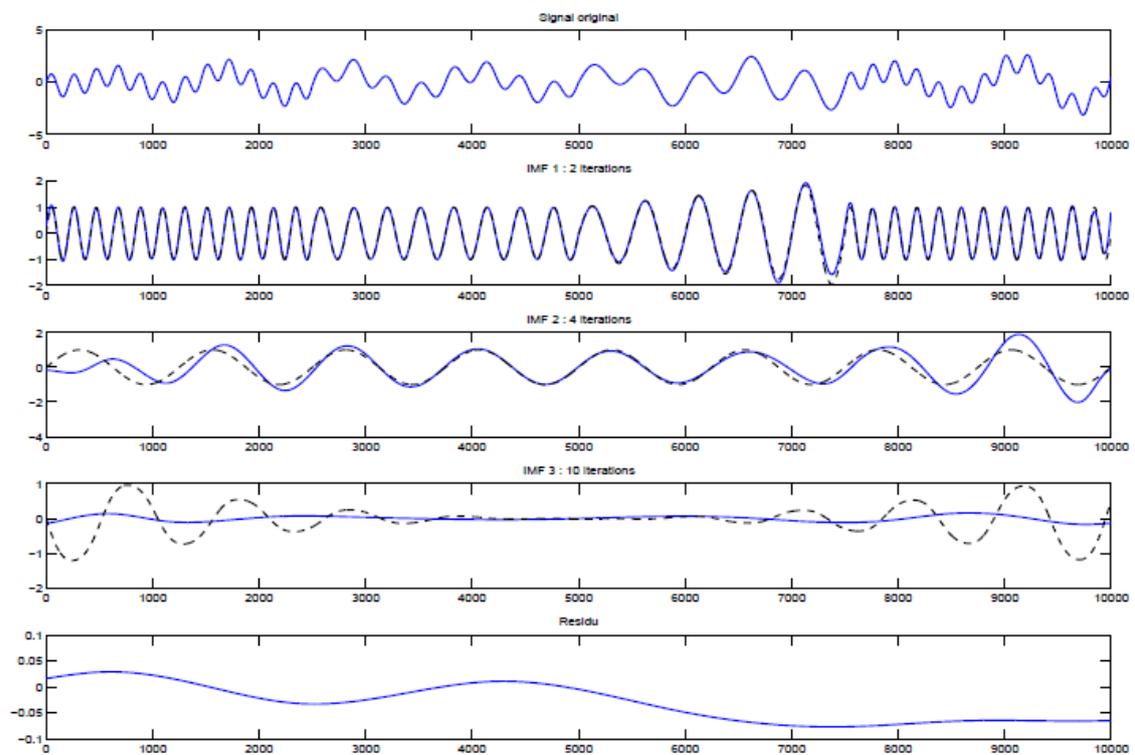


FIGURE 4.7 – Résultat de l'EMD sur le *signal-test3*. Pour chaque IMF, on donne le résultat obtenu (trait plein, en bleu) et le résultat attendu (trait pointillé, noir).

4.2.5 Prise en charge des effets de bord

Comme dans beaucoup de techniques d'analyse ou d'approximation des signaux, il se pose le problème de la gestion des effets de bords. Pour l'*EMD*, ce problème concerne l'interpolation des extrema : ainsi, la spline interpolant les minima n'est définie qu'à partir du premier minimum du signal, et jusqu'au dernier. Or on a besoin de la calculer sur tout le signal. De plus, il faut éviter la création d'artefacts, car l'itération du Sifting Process pourra les aggraver et les propager : le problème localisé aux bords deviendra global. Plusieurs techniques de prolongement ont été envisagées, dont *Rilling* a fait une étude assez exhaustive dans sa thèse [Ril07]. Parmi les nombreuses approches, il distingue les techniques utilisant une fonction fenêtre, celles consistant à prolonger le signal, et celles prolongeant uniquement les extrema. La technique préconisée est un prolongement par *symétrie miroir* des extrema : au lieu de travailler sur le signal - *on n'en a pas besoin* -, il suffit de prolonger quelques extrema en effectuant une symétrie miroir par rapport au dernier : c'est plus simple, et cela permet de gérer les cas particuliers. Cependant, même avec un bon prolongement, on peut créer des effets de bord. Ce phénomène est par exemple visible sur la figure 4.5. Dans cet exemple, le nombre d'itérations du *SP* est faible, les effets de bord ne se propagent donc pas à tout le signal.

Une autre technique consiste à considérer les bords comme des min et des max simultanément. Cela permet d'imposer à l'enveloppe moyenne de passer forcément par ces points aux bords, ce qui fait que ces effets de bords seront plus ou moins négligeables d'où la propagation sera moindre.

4.2.6 Critères d'arrêt

Nous avons vu qu'un *IMF* est une fonction oscillante de *moyenne locale nulle* presque partout. En fait, pour l'*EMD* et l'application de la transformée de Hilbert, si la condition les maxima sont positifs et les minima négatifs est fondamentale, la condition de symétrie des enveloppes - *c'est-à-dire de moyenne locale nulle* - n'a pas besoin d'être respectée strictement. D'ailleurs, *Sharpley et Vatchev* remarquent dans [SV06] que les modes que l'on souhaite obtenir, c'est-à-dire des composantes *AM-FM*, ne vérifient pas strictement la condition de symétrie des enveloppes. Algorithmiquement, cela revient à fixer un critère d'arrêt pour le procédé de tamisage (*SP*). Dans la suite, on notera $h_1, \dots, h_k, \dots, h_K$ les *IMFs* de s . Pour tout k , on note h_i^k le résultat de la i^{me} itération du *SP* lors du calcul de h_k . Le critère proposé à l'origine [HSLa98] consiste à mesurer l'écart entre h_{i-1}^k et h_i^k , au moyen de la valeur :

$$SD_k = \frac{\sum_{i=0}^T |h_k^i(t) - h_k^{i-1}(t)|^2}{\sum_{i=0}^T |h_k^{i-1}(t)|^2} \quad (4.6)$$

Lorsque h_i^k oscille bien autour de 0 et a un SD très faible, on est proche de la convergence donc on peut s'arrêter. Même si ce critère fonctionne bien en pratique, ce n'est pas le plus pertinent :

- On teste avec un critère de type *Cauchy* si l'on est proche de la convergence, mais on ne vérifie pas directement que h_i^k satisfait les conditions d'un *IMF*.
- Ce critère est une mesure globale, qui évalue l'évolution en norme L_2 . Cependant, on peut avoir des différences significatives sur un intervalle petit, qui rendent SD grand alors que l'on aimerait s'arrêter.

Il paraît alors judicieux de choisir un critère local, contrôlant directement les propriétés de l'*IMF*, muni d'une tolérance sur des intervalles de mesure petite. Le critère suivant, proposé dans [RFG03], propose d'arrêter le processus de sifting dès que :

- Les minima sont strictement négatifs et les maxima strictement positifs.
- Les enveloppes courantes $E_{sup}(t)$ et $E_{inf}(t)$ vérifient, sur un ensemble de mesure supérieure à $(1 - \alpha)T$:

$$|E_{sup}(t) + E_{inf}(t)| \leq \epsilon |E_{sup}(t) - E_{inf}(t)|$$

- Ces mêmes enveloppes vérifient, sur toute la durée du signal $[0, T]$:

$$|E_{sup}(t) + E_{inf}(t)| \leq \epsilon_2 |E_{sup}(t) - E_{inf}(t)|$$

4.3 Propriétés fondamentales de l'EMD

Le *sifting process*, apparemment simple et intuitif, se révèle difficile à étudier mathématiquement. Ainsi, aucune propriété importante de l'*EMD* n'a été démontrée. Pourtant, certaines propriétés empiriques importantes font consensus. Nous allons ici en présenter quelques unes.

4.3.1 Non-linéarité

L'algorithme de l'*EMD* est globalement non linéaire. En effet, l'*EMD* d'une somme de deux signaux est en général différente de la somme des *EMD* des signaux séparés : le nombre d'*IMF* de la somme n'est pas contrôlé par les nombres d'*IMFs* des signaux séparés, un *IMF* de la somme n'est pas généralement descriptible en termes de somme d'un ensemble quelconque d'*IMFs* des signaux séparés ni même une combinaison linéaire.

4.3.2 Pseudo-orthogonalité

Selon [HSLa98], un certain type d'orthogonalité est approximativement atteint expérimentalement. La comparaison effectuée est globale à l'ensemble des modes et [HSLa98] introduit un indice d'orthogonalité IO , de l'ordre de 10^{-3} pour les signaux étudiés, où IO est défini par :

$$IO = \int \frac{1}{X^2(t)} \left[\sum_{i < j} d_i(t)d_j(t) + \sum_i d_i(t)m_k(t) \right] \quad (4.7)$$

Cependant, on recherche ici une monotonie dans le comportement de l'énergie, et on veut donc une orthogonalité des modes et de la tendance dans leur ensemble. De plus, plutôt que de regarder exactement le produit scalaire $\langle d_i | d_j \rangle$, ou $\langle d_i | m_k \rangle$, dont l'ordre de grandeur dépend de l'échelle choisie pour l'échantillon, on peut s'intéresser à l'angle géométrique θ entre d_i et d_j , défini par :

$$\cos(\theta) = \frac{\langle d_i | d_j \rangle}{\|d_i\| \times \|d_j\|}.$$

4.3.3 Localité

Dans le cadre de l'*EMD*, l'échelle locale est définie par les extrema. Pour s'en convaincre, il suffit de rappeler que la moyenne locale est définie à partir des enveloppes du signal qui interpolent les *maxima* et les *minima*. La notion d'enveloppe étant intrinsèquement locale, on en déduit que la valeur, par exemple de l'enveloppe supérieure, en un point donné dépend essentiellement des deux maxima qui entourent ce point et dans une moindre mesure des autres maxima plus éloignés. Par conséquent, on peut considérer que les enveloppes, et donc la moyenne locale, sont définies localement à l'échelle correspondant à l'espacement entre les *maxima/minima*.

4.3.4 Aspect multirésolution

L'*EMD* réalise une décomposition multi-échelles, ou multirésolution, dans la mesure où elle explore successivement les échelles du signal de la plus fine, représentée par le premier *IMF*, à la plus grossière, représentée par le dernier *IMF* ou le *résidu*.

Par rapport à d'autres méthodes d'analyse multirésolution, telle que la transformée en ondelettes, l'*EMD* présente un certain nombre de particularités. Tout d'abord, à l'instar de la transformée en ondelettes discrète, elle propose une décomposition en échelles discrètes dans la mesure où la décomposition est constituée d'un nombre fini de composantes.

4.3.5 Auto-adaptativité

L'*EMD* fournit une décomposition *auto-adaptative* contrairement à la transformée en ondelettes pour laquelle on est obligé de choisir une ondelette mère adéquate selon la nature ou la classe du signal à décomposer. L'avantage de l'*EMD* réside dans le fait que la décomposition ne dépend que des points caractéristiques qui sont des données intrinsèque au signal à décomposer en l'occurrence les maxima, minima ou points d'inflexion.

4.4 Analyse Spectrale de Hilbert

L'analyse spectrale de Hilbert fournit une méthode pour l'examen de la fréquence instantanée $f_k(t)$ et de l'amplitude instantanée $a_k(t)$ en fonction du temps. La transformée de Hilbert (*TH*) est appliquée sur chacune des N *IMFs* $c_k(t)$ séparément. Ensuite, il est possible d'obtenir :

$$a_k(t) = \sqrt{c_k^2(t) + \hat{c}_k^2(t)} \quad (4.8)$$

et

$$f_k(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left\{ \arctan \left[-\frac{\hat{c}_k(t)}{c_k(t)} \right] \right\} \quad (4.9)$$

où $\hat{c}_k(t)$ est la *TH* de $c_k(t)$, pour $k \in [1, N]$. Donc, le signal analytique $z_{x(t)}(t)$ associé à $x(t)$ peut être exprimé comme

$$z_{x(t)}(t) = \sum_{k=1}^N a_k(t) \exp(j\Phi_k(t)) \quad (4.10)$$

où $\Phi_k(t)$ est la phase du signal analytique. La fréquence instantanée s'écrit

$$f_k(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi_k(t)}{dt} \quad (4.11)$$

Le signal original peut alors s'exprimer par

$$x(t) = \Re \sum_{k=1}^N a_k(t) \exp(j2\pi f_k(t)t) \quad (4.12)$$

On remarque ici l'absence du résidu r_n . En effet, compte tenu de sa longue oscillation, et à cause de l'intérêt porté à l'information contenue dans les autres composantes - *plus énergétiques* -, le résidu, qui est aussi la dernière composante *non-IMF*, n'est pas pris en considération [HS05].

4.5 Différentes variantes de l'EMD

4.5.1 EMD B-spline

Dans l'algorithme 1, l'interpolation des extrema est réalisée à l'aide de splines cubiques. Dans l'article [CHRX06], *Chen et al.* ont proposé une autre méthode d'interpolation qui se base sur les B-splines. Sans rentrer dans les détails, les B-splines sont une généralisation des courbes de Bézier. Elles peuvent être à leur tour généralisées par les *NURBS* - *pour Non-Uniform Rational Basis Splines* -. Ce sont des combinaisons linéaires positives de fonctions polynomiales pondérées par les points à interpoler. Le degré de la B-spline doit être fixé à l'avance. Elles ont en effet l'avantage de s'écrire et se manipuler facilement. De plus, elles possèdent plusieurs bonnes propriétés, qui conviennent bien aux résultats attendus. Enfin, dans [CHRX06], *Chen et al.* ont montré que les B-splines offrent de bonnes propriétés pour la transformée de Hilbert.

Définition 4.5.1 *La j^{ime} B-spline d'ordre k d'une séquence τ_j , $j \in \mathbb{Z}$ est définie par la différence divisée d'ordre k , $[\tau_j, \dots, t_{j+k}]$, aux $k + 1$ points τ_j, \dots, t_{j+k} , appliquée à la puissance tronquée comme une fonction de x*

Définition 4.5.2 *On appelle B-spline périodique de degré n sur la subdivision τ toute combinaison linéaire des $B_{j,\tau}^n$*

Propriétés : *Les B-splines vérifient les propriétés classiques suivantes :*

- *La famille (B_1^n, \dots, B_N^n) est une base de l'espace des splines périodiques de degré n sur la subdivision τ .*
- *Chaque spline B_j^n est un polynôme par morceaux de degré n , de classe C^{n-1} , positive et nulle en dehors de l'intervalle $[\tau_j, \tau_{j+n+1}]$.*
- *famille (B_j^n) forme une partition de l'unité sur $[0, 1]$:*

$$\forall t \in [0, 1], \sum_{j=1}^N B_j^n(t) = 1. \quad (4.13)$$

- La dérivée de B_j^n vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\frac{d}{dt} B_j^n(t) = \frac{n}{\tau_{j+n} - \tau_j} B_j^{n-1} - \frac{n}{\tau_{j+n+1} - \tau_{j+1}} B_j^{n-1} \quad (4.14)$$

4.5.2 EMD locale

Dans la mise en œuvre de l'EMD classique, le processus de tamisage est appliqué sur toute la longueur du signal, et il est réitéré tant qu'il existe une zone locale où la moyenne des enveloppes n'est pas considérée comme suffisamment petite. Cependant, le fait de trop itérer sur la totalité du signal pour avoir une meilleure approximation locale présente l'inconvénient de contaminer d'autres parties du signal, et les modes adjacents. Pour apporter une solution à un tel problème, *Rilling et al.* ont introduit dans [RFG03] une variante de l'algorithme EMD où le tamisage est appliqué seulement là où il y en a besoin. Cette variante est liée à la méthode de détermination des nombres d'itérations *locales*. Le principe est en quelque sorte une mesure locale de la qualité d'un IMF, c'est-à-dire une fonction binaire qui en chaque instant détermine si le signal en cours de traitement est localement un IMF ou non. Cette fonction est de la forme :

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \left| \frac{E_{max}(t) + E_{min}(t)}{E_{max}(t) - E_{min}(t)} \right| < \epsilon \\ 0 & \text{si } \left| \frac{E_{max}(t) + E_{min}(t)}{E_{max}(t) - E_{min}(t)} \right| \geq \epsilon \end{cases} \quad (4.15)$$

où $E_{max}(t)$ et $E_{min}(t)$ désignent respectivement les enveloppes supérieure et inférieure du signal et ϵ est un paramètre fixé par l'utilisateur. De là, l'algorithme de l'EMD locale est alors le même que celui de l'EMD originale avec un opérateur de tamisage modifié (voir algorithme 2).

Algorithm 2 : OPÉRATEUR DE TAMISAGE LOCAL

- 1: **Extraire les maxima et les minima** de $x(t) : \{t_i^{max}, x_i^{max}\}, \{t_i^{min}, x_i^{min}\}$.
 - 2: **Interpoler les ensembles de maxima** $\{t_i^{max}, x_i^{max}\}$ et les ensembles de minima $\{t_i^{min}, x_i^{min}\}$ pour obtenir les enveloppes supérieure et inférieure : $e_{max}(t)$ et $e_{min}(t)$.
 - 3: **Calculer la moyenne des enveloppes** $m(t) = (e_{max}(t) + e_{min}(t))/2$.
 - 4: **Calculer la fonction d'évaluation** $s(t)$ (4.15).
 - 5: **Créer une fonction positive** $f(t)$ qui vaut 1 là où $s(t)$ vaut 1 et qui descend doucement vers zéro autour.
 - 6: **Soustraire la moyenne** multipliée par $f(t)$ au signal :
 - 7: $S^{local}[x](t) = x(t) - m(t)f(t)$.
-

4.5.3 EMD en ligne

Rilling et al. ont proposé dans [RFG03] une seconde variante de l'EMD basée sur l'observation que l'étape de tamisage repose sur l'interpolation des extrema, et donc ne nécessite qu'un nombre fini d'entre eux - 5 minima et maxima 5 dans le cas des splines cubiques - pour être exploité à un moment donné. Ceci suggère que l'extraction d'un mode pourrait donc être possible par blocs, sans une connaissance nécessaire sur la totalité du signal. Cette remarque a ouvert la voie au développement d'un algorithme EMD qui fonctionne en ligne et peut donc être appliqué aux flux de données (voir algorithme 3).

Algorithm 3 : OPÉRATEUR DE TAMISAGE LOCAL EN LIGNE

- 1: Extraire les maxima et les minima de $x(t)$: $\{t_i^{max}, x_i^{max}\}, \{t_i^{min}, x_i^{min}\}$.
 - 2: Interpoler les ensembles de maxima $\{t_i^{max}, x_i^{max}\}$ et les ensembles de minima $\{t_i^{min}, x_i^{min}\}$ pour obtenir les enveloppes supérieure et inférieure : $e_{max}(t)$ et $e_{min}(t)$.
 - 3: Calculer la moyenne des enveloppes $m(t) = (e_{max}(t) + e_{min}(t))/2$.
 - 4: Calculer la fonction d'évaluation $s(t)$ (4.15).
 - 5: Créer une fonction positive $f_2(t)$ qui vaut 1 là où $s(t)$ vaut 1 et qui descend doucement vers zéro autour.
 - 6: **Multiplier par une fenêtre glissante $w(t)$ qui parcourt la durée du signal :**
 $f_2(t) = f(t)w(t)$.
 - 7: Soustraire la moyenne **multipliée par $f_2(t)$** au signal :
 - 8: $S^{online}[x](t) = x(t) - m(t)f_2(t)$.
-

4.5.4 Ensemble EMD

En 2009, *Wu et Huang* ont présenté dans [WH09] une nouvelle version de l'EMD nommée *Ensemble Empirical Mode Decomposition (EEMD)*. Cette nouvelle approche est une version de l'EMD assistée par addition de bruit blanc. Il a été développé pour résoudre le problème du mélange de mode qui peut se produire avec EMD classique. Le principe de l'EEMD est décrit comme suit : Etant donné un signal $x(t)$,

1. Générer N réalisations $n_i(t)$, $1 \leq i \leq N$ de bruit blanc gaussien de variance σ^2
2. Calculer N jeux d'IMFs $d_k^{(i)}(t)$ $1 \leq i \leq N$ à partir des N signaux $x(t) + n_i(t)$
3. les IMFs EEMD sont alors les moyennes de l'ensemble des IMFs précédents.

$$d_k^{EEMD}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_k^{(i)} + r \quad (4.16)$$

4.6 Quelques extensions de l'EMD

4.6.1 EMD pour les signaux à valeurs complexes

La première extension de l'EMD à valeurs complexes a été proposée par *Tanaka et Mandic* en 2006 [TM07], en utilisant le concept de signal analytique et par la suite appliqué la norme EMD à analyser des données complexes/bivariées. Cependant, cette méthode ne garantit pas un nombre équivalent d'IMFs réels et imaginaires, ce qui limite ses applications. Une extension de EMD qui fonctionne entièrement dans le domaine complexe, dite *rotation invariant EMD (RI-EMD)* a d'abord été proposé par *Altaf et al.* 2007 [AGTM07]. Les extrema d'un signal complexe/bivarié choisis sont les points où l'angle de la dérivée du signal complexe est nulle, ceci est basé sur la variation de la phase du signal. L'algorithme *RI-EMD* utilise efficacement les extrema de la partie imaginaire du signal complexe, ce qui entraîne l'obtention des enveloppes sur la base de la projection sur seulement deux directions. Un algorithme qui donne des valeurs plus précises de la moyenne locale est le *bivariate EMD (B-EMD)* introduit par *Rilling et al.* en 2007, [RFGL07] où les enveloppes correspondant aux multiples directions dans le plan complexe sont générées, puis moyennées pour obtenir la moyenne locale. L'ensemble des vecteurs de direction pour les projections sont choisis en des points équidistants le long du cercle unité. La *RI-EMD* et les algorithmes *B-EMD* sont équivalentes pour $k = 4$ vecteurs de direction.

4.6.2 EMD pour les signaux à n composantes

En général, pour les signaux multivariés, les maxima et minima locaux ne peuvent pas être définis directement. En outre, la notion de *modes oscillatoires* définissant un IMF est plutôt source de confusion pour les signaux multivariés. Pour pallier ces problèmes, la version *EMD multivariée (M-EMD)* qui génère plusieurs enveloppes à n dimensions en prenant la projection du signal le long des différentes directions dans l'espace à n dimensions a été proposée dans [RM10], ces projections sont ensuite moyennées pour obtenir la moyenne locale. Le choix des vecteurs de direction pour les projections peut être basé sur le système de coordonnées polaires et sphériques pour *deux variables* et pour l'EMD *trivarié* respectivement. Cependant, pour le *M-EMD*, les séquences de *quasi Monte Carlo à faible divergence* sont utilisées afin de fournir un meilleur échantillonnage *n -sphérique*. Une fois le signal moyen est défini, le reste de la procédure est assez similaire à l'EMD classique résumée dans l'algorithme 1. Considérons une séquence de vecteurs à N dimensions $\{v(t)_{t=1}^T\} = \{v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t)\}$ qui représente un signal à plusieurs variables avec N le nombre de composantes, et $x^{\theta_k} = \{x_1^k, x_2^k, \dots, x_N^k\}$ désignant un ensemble de vecteurs

de directions choisies données par les angles $\theta^k = \{\theta_1^k, \theta_2^k, \dots, \theta_N^k\}$ sur une $(n-1)$ -sphère. L'algorithme *EMD multivariée* proposé est décrit dans l'algorithme 4.

Algorithm 4 : MULTIVARIATE EMPIRICAL MODE DECOMPOSITION ALGORITHM

- 1: Choisir un échantillonnage de points adapté pour sur une $(n-1)$ -sphère ;
- 2: Calculer les projections $p^{\theta_k}(t) \}_{t=1}^T$, du signal d'entrée $\{v(t) \}_{t=1}^T$ suivant les vecteurs de direction x^{θ_k} ;
- 3: Trouver les instants $\{t_i^{\theta_k}\}$ correspondant au maxima de l'ensemble des signaux projetés $p^{\theta_k}(t) \}_{k=1}^K$;
- 4: Interpoler $[t_i^{\theta_k}, v(t_i^{\theta_k})]$ pour obtenir les enveloppes multivariées $e^{\theta_k}(t) \}_{k=1}^K$;
- 5: L'enveloppe moyenne $m(t)$ est déterminée en moyennant les différentes d'enveloppes calculées pour les K directions choisies comme suit :

$$m(t) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K e^{\theta_k}(t) \quad (4.17)$$

- 6: Extraire le *détail* $d(t)$ en utilisant la formule $d(t) = x(t) - m(t)$. Si $d(t)$ remplit le critère d'arrêt d'un *IMF multivariée*, appliquer la procédure ci-dessus pour $x(t) - d(t)$, sinon appliquer la à $d(t)$.
-

4.6.3 Approche *EDP* pour l'*EMD*

L'*EMD*, et notamment le *Sifting Process*, sont des constructions assez simples, intuitives. Mais, si elles sont aisées à mettre en place algorithmiquement, leur étude mathématique est complexe. De plus, elles comportent certains défauts, liées notamment à l'interpolation. L'absence de cadre mathématique est la grande lacune de l'*EMD* : les propriétés évoquées au paragraphe précédent n'ont aucune justification rigoureuse. Pire, il n'existe aucune garantie de la convergence de l'algorithme, même pour une classe de signaux réduite. Plusieurs approches ont été proposées pour pallier cette lacune, notamment celle basée sur les équations aux dérivées partielles, essayant d'adapter l'*EMD* à un formalisme, tout en conservant au maximum la généralité et les bonnes propriétés de la méthode. D'importants travaux ont été réalisés dans ce sens ces dernières années [DLN05, Nia07, NDL10, HAB10, NTG⁺12a] dans laquelle une alternative à la définition algorithmique du processus de tamisage utilisés dans la méthode empirique de la décomposition du mode de *Huang* originale (*EMD*) a été principalement proposée. Les principales améliorations apportées par ce modèle consistent à la résolution non-itérative de l'équation aux dérivées partielles pour le calcul dans le processus de tamisage, une nouvelle définition de la fonction d'arrêt, et enfin un processus de régularisation auto-

matique basée sur la théorie des problèmes inverses afin de traiter avec problème de la détection de mixage ou de mode transitoire [NDL10]. Les résultats obtenus confirment les bonnes propriétés de la version du processus de tamisage basé sur les équations aux dérivées partielles et son utilité pour la décomposition de divers types de données.

Comme proposé dans [DLN05], une forme possible pour l'équation de diffusion d'ordre quatre est :

$$\frac{\partial s(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(g(x, t) \frac{\partial^3 s(x, t)}{\partial x^3} \right) = 0 \quad (4.18)$$

où $g(x, t)$ est la fonction de diffusion dépendant à la fois de la position et du temps, et où la variable temps est artificielle, et mesure le degré de traitement (par exemple, le lissage) du signal, par opposition à un temps réel. L'équation (4.18) peut être considérée comme une équation de diffusion à long terme - *long-range diffusion LRD* - dépendant uniquement de la position de certains points fixes caractéristiques du signal à décomposer. Après dérivation, (4.18) pouvant s'écrire :

$$s_t(x, t) + \delta_x^1 (g(x) \delta_x^3 s(x, t)) = 0 \quad (4.19)$$

où l'indice t dénote la différenciation partielle par rapport à la variable t et δ_x^q dénote la différenciation partielle d'ordre q par rapport à la variable x . Dans ce qui suit, nous utilisons la notation $s_0(x) = s(x, t = 0)$ pour les conditions initiales et $s_\infty(x) = s(x, t = \infty)$ pour la solution asymptotique de (4.19) dont l'existence est prouvée dans [Nia07].

Pour implémenter le processus de tamisage, les étapes suivantes sont basées sur la définition de points caractéristiques du signal. A partir de ces points caractéristiques, un système *EDP* couplé est défini pour estimer enveloppes inférieure et supérieure qui ne sont rien d'autre que les solutions asymptotiques.

Ainsi, le système *EDP* couplées, base sur l'équation (4.19) s'écrit :

$$\begin{cases} s_t^+(x, t) = -\delta_x^1 (g^+(x) \delta_x^3 s^+(x, t)) \\ s_t^-(x, t) = -\delta_x^1 (g^-(x) \delta_x^3 s^-(x, t)) \end{cases} \quad (4.20)$$

avec $s_t^+(x, t = 0) = s_t^-(x, t = 0) = s_0$, et g^\pm les fonctions de diffusion dépendant des dérivés du signal d'entrée s_0 . Un choix raisonnable pour les fonctions de diffusion a été :

$$g^\pm(x) = \frac{1}{9} [|\text{sgn}(\delta_x^1 s_0(x))| \pm \text{sgn}(\delta_x^2 s_0(x)) + 1]^2 \quad (4.21)$$

Après la convergence du système (4.20), les solutions asymptotiques s_∞^+ , et s_∞^- , représentent respectivement les enveloppes supérieure et inférieure du signal à décomposer. Par conséquent, l'enveloppe moyenne est obtenue comme suit :

$$s_\infty(x) = \frac{1}{2} [s_\infty^+(x) + s_\infty^-(x)] \quad (4.22)$$

Une fois l'enveloppe calculée, on la soustrait au signal pour ensuite voir si le résultat satisfait aux conditions d'un *IMF*. Sinon, le même processus est réitéré jusqu'à l'obtention d'un mode.

4.6.4 A propos de l'orthogonalité pour l'*EMD*

L'orthogonalité de la décomposition *EMD* était à l'état de conjecture. Dans [DLN05, NDL10, NTG⁺12a], un cadre fonctionnel de calcul des enveloppes moyennes par un modèle *EDP* et une approche spectrale est introduit par *O.Niang et al.* dans l'implémentation de l'*EMD*. A partir de l'approche spectrale d'une part, une analogie avec une suite de projections orthogonales en cascade est faite, et d'autre part, la construction d'un dictionnaire issu de l'*EMD* à partir des enveloppes moyennes passant par les points caractéristiques [NGT⁺11].

4.7 Vers l'*EMD* sans *sifting*

Comme nous l'avons vu, tout le succès de l'algorithme de la décomposition modale empirique repose principalement sur l'estimation de l'enveloppe moyenne du signal à analyser. Dans la méthode originelle, cette enveloppe moyenne est obtenue en calculant la demi-somme entre l'enveloppe supérieure et l'enveloppe inférieure qui représentent respectivement l'interpolation, des maxima et des minima du signal, généralement par spline cubique. L'opération qui consiste à extraire progressivement l'enveloppe du signal en vue d'obtenir une composante modulée en amplitude et en fréquence est appelé processus de tamisage - ou *sifting process en anglais*-. Ces composantes *AM-FM* ainsi extraites sont appelées Fonctions Modes Intrinsèques - *IMF pour Intrinsèque Mode Fonctions* -.

Elles vérifient les critères d'éligibilités suivants :

- tous les maxima sont positifs, et tous les minima négatifs - *le nombre d'extrema et le nombre de passage par zéro diffèrent d'au plus 1* -.
- la moyenne locale, au sens de la définition 4.2.1, est nulle en tout point.

Dans [NTS⁺15], nous introduisons un nouvel opérateur permettant d'extraire directement un *IMF* sans utiliser les processus de tamisage.

4.7.1 Opérateur enveloppe moyenne

Récemment, dans [NTD⁺13] nous avons introduit un nouvel interpolateur basé sur les équations aux dérivées partielles qui permet de calculer l'enveloppe moyenne du signal pouvant utiliser une gamme de point caractéristique plus élargie, par exemple les points de

maximum et minimum de courbure et les points d'inflexion. Les détails de la modélisation mathématique de l'interpolateur EDP sont étudiés dans le chapitre 6.

L'enveloppe supérieur Env_{sup} et l'enveloppe inférieure Env_{inf} , d'un signal donné, sont obtenues en appliquant respectivement les opérateurs E_{sup} et E_{inf} sur le signal à décomposer comme définit dans le chapitre 6.

On aura alors les relations suivantes :

$$Env_{sup} = E_{sup} * s_0^\top \quad (4.23)$$

et

$$Env_{inf} = E_{inf} * s_0^\top \quad (4.24)$$

d'où l'enveloppe moyenne

$$Env_{moy} = \frac{1}{2} (Env_{sup} + Env_{inf}) \quad (4.25)$$

il vient :

$$Env_{moy} = \frac{1}{2} (E_{sup} * s_0^\top + E_{inf} * s_0^\top) \quad (4.26)$$

on peut donc écrire :

$$Env_{moy} = \frac{1}{2} (E_{sup} + E_{inf}) * s_0^\top \quad (4.27)$$

on peut alors considérer l'opérateur

$$E_{moy} = \frac{1}{2} (E_{sup} + E_{inf}) \quad (4.28)$$

qui nous permet de calculer directement l'enveloppe moyenne par la relation suivante :

$$Env_{moy} = E_{moy} * s_0^\top \quad (4.29)$$

4.7.2 Construction de l'opérateur d'extraction directe de modes

Vu que l'opérateur enveloppe ne dépend que de la position des points caractéristiques et que l'on constate que ces derniers ne bougent presque pas après extraction de l'enveloppe qui est après tout une composante très basse fréquence, on pourra considérer le même opérateur E_{moy} pour le calcul des enveloppes à chaque étape du *sifting process*. La figure 4.8 montre comment évolue la position des points caractéristiques durant les différentes itération pour l'obtention d'un *IMF*. Nous pouvons constater parfois l'apparition de points parasites qui est tout simplement du à certaines imperfections du schéma numérique utilisé pour l'implémentation de l'algorithme. De là, on peut construire progressivement l'opérateur qui permet d'obtenir directement un mode en se passant du processus habituel de tamisage et cela pourra nous permettre d'échapper aux problèmes numériques liés à l'implémentation. On parle alors d'*EMD sans sifting*.

On pose :

$$pIMF_1 = s_0^\top - Env_{moy} \quad (4.30)$$

le premier *proto-mode* obtenu après extraction de la première enveloppe du signal à décomposer. on peut alors écrire :

$$pIMF_1 = s_0^\top - E_{moy} * s_0^\top$$

soit :

$$pIMF_1 = (I_N - E_{moy}) * s_0^\top$$

avec I_N la matrice identité d'ordre N , N étant la taille du signal à décomposer.

En restant toujours dans l'esprit de l'*EMD* classique, on applique d'une manière itérative le même opérateur sur les *proto-modes* afin d'obtenir à partir d'un certain rang, un mode éligible.

Ce qui permet d'écrire :

$$pIMF_2 = (I_N - E_{moy1}) * pIMF_1$$

ou alors :

$$pIMF_2 = (I_N - E_{moy}) * (I - E_{moy}) * s_0^\top$$

ce qui peut s'écrire :

$$pIMF_2 = (I_N - E_{moy})^2 * s_0^\top$$

et il va suivre :

$$pIMF_3 = (I_N - E_{moy})^3 * s_0^\top$$

.....

Et à la fin :

$$pIMF_n = (I_N - E_{moy})^n * s_0^\top$$

Maintenant le problème qui reste posé est la détermination du rang à partir duquel on peut extraire un *IMF*. Dans un premier temps, nous allons choisir grossièrement un rang n assez élevé qui permettra de dépasser au moins le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir un *IMF*. Ce choix peut se justifier par la propriété qui veut que les *IMFs* soient de moyenne locale nulle. Par extension à la moyenne générale, nous pouvons constater que l'enveloppe moyenne d'un *IMF* est nulle, donc même si on continue à appliquer le sifting process, on restera sur la même valeur du signal. C'est alors un critère empirique de convergence. Pour la condition d'arrêt sur le résidu, on garde la même que pour l'*EMD* classique - *c'est-à-dire une valeur de standard deviation (SD) assez faible* -.

En effet, si on considère un certain rang N assez grand qui nous permet d'obtenir un mode, nous pouvons nous permettre d'écrire chaque *IMF* par la formule suivante :

$$IMF_k = (I_N - E_k)^N * s_0^\top \quad (4.31)$$

avec E_k l'opérateur enveloppe moyenne calculé pour extraire la $k^{ième}$ *IMF*.

Nous avons testé la méthode avec comme opérateur, un polynôme de degré $N=50$ sur des signaux maîtrisés et nous avons eu des résultats meilleures que avec la méthode *EMD* classique.

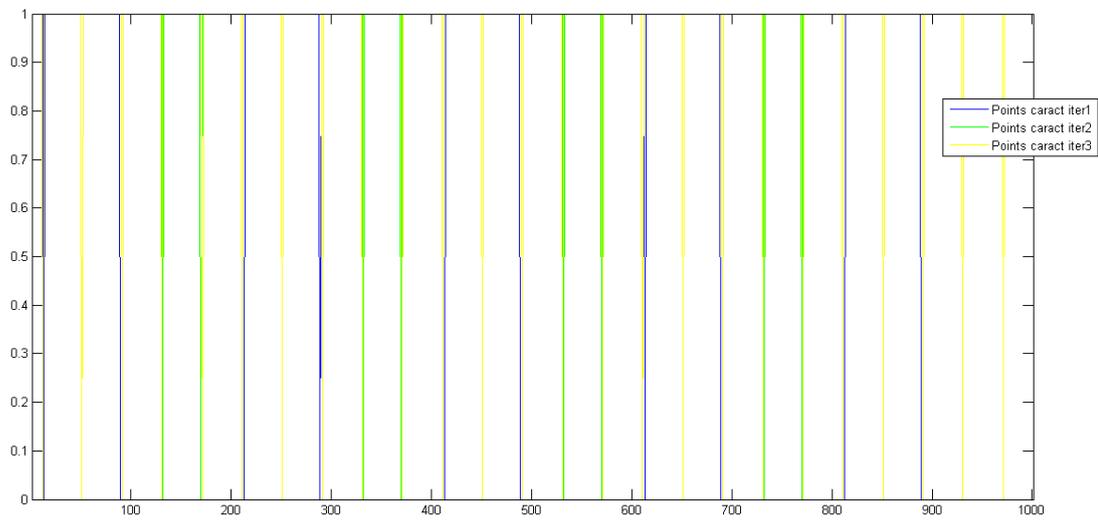


FIGURE 4.8 – Evolution de la position des points caractéristiques durant les trois premières itérations pour obtenir le premier *IMF*.

4.7.3 Convergence de l'EMD sans sifting

On a :

$$(I - E)^n = [I + (-E)]^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-E)^k$$

avec

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1) \frac{1}{k!}$$

Nous pouvons considérer alors la série entière de terme général :

$$U_k = n(n-1)\dots(n-k+1) \frac{(-E)^k}{k!}$$

$$\Rightarrow U_{k+1} = n(n-1)\dots(n-k) \frac{(-E)^{k+1}}{(k+1)!}$$

d'où

$$\frac{|U_{k+1}|}{|U_k|} = \frac{n-k}{n+1} |E|$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|U_{k+1}|}{|U_k|} = |E|$$

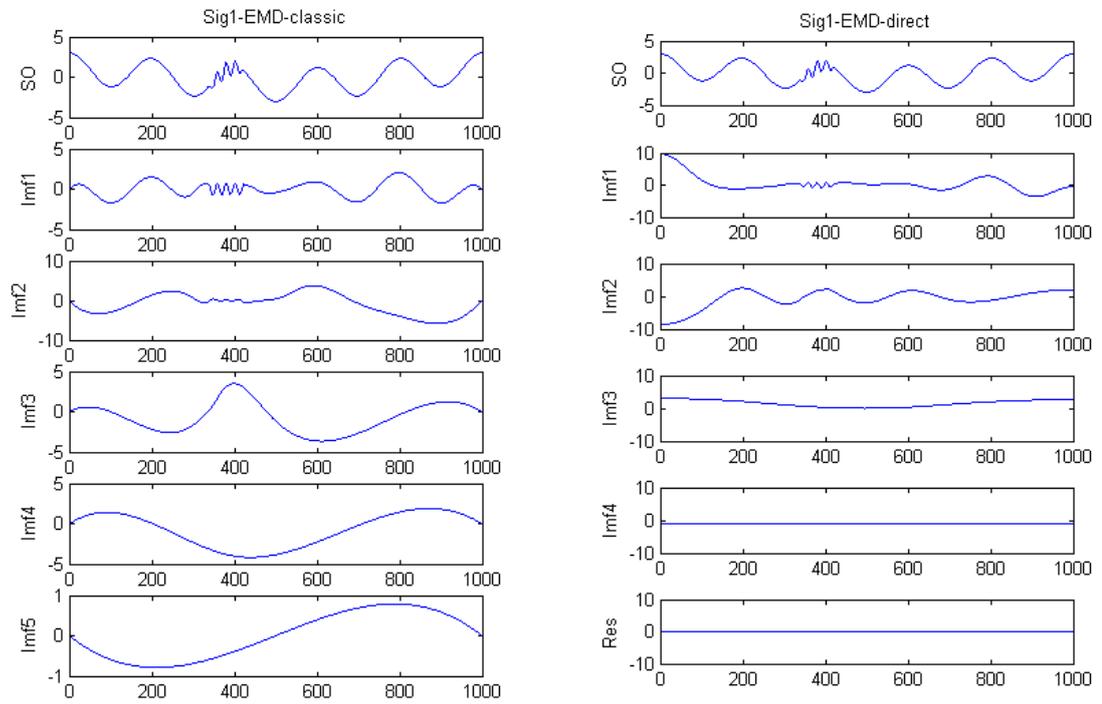
Ainsi, selon le critère d'Alembert, la série converge si $|E| < 1$; or E est une matrice de valeurs propres comprise en 0 et 1 donc la série est absolument convergente et ce qui prouve la convergence de l'algorithme *EMD sans sifting*.

4.7.4 Quelques résultats

Dans les figures 4.9 et 4.10 nous faisons une comparaison entre l'*EMD classique* et l'*EMD sans sifting*. A la figure 4.9, nous représentons un signal comportant une intermittence. Nous pouvons constater que cette intermittence est totalement récupérée dès le premier mode avec la méthode *EMD sans sifting* en **(b)** contrairement à la méthode *EMD classique* qui permet de récupérer cette intermittence qu'en partie au premier mode en **(a)**. En **(c)** et **(d)** nous faisons une comparaison entre la méthode *EMD classique* et la méthode *EMD sans sifting* pour un signal composé de deux éléments de fréquence. Nous voyons que la méthode *EMD sans sifting* permet de séparer assez nettement les deux composantes du signal. Dans la figure 4.10, nous avons en **(a)** et **(b)** un signal

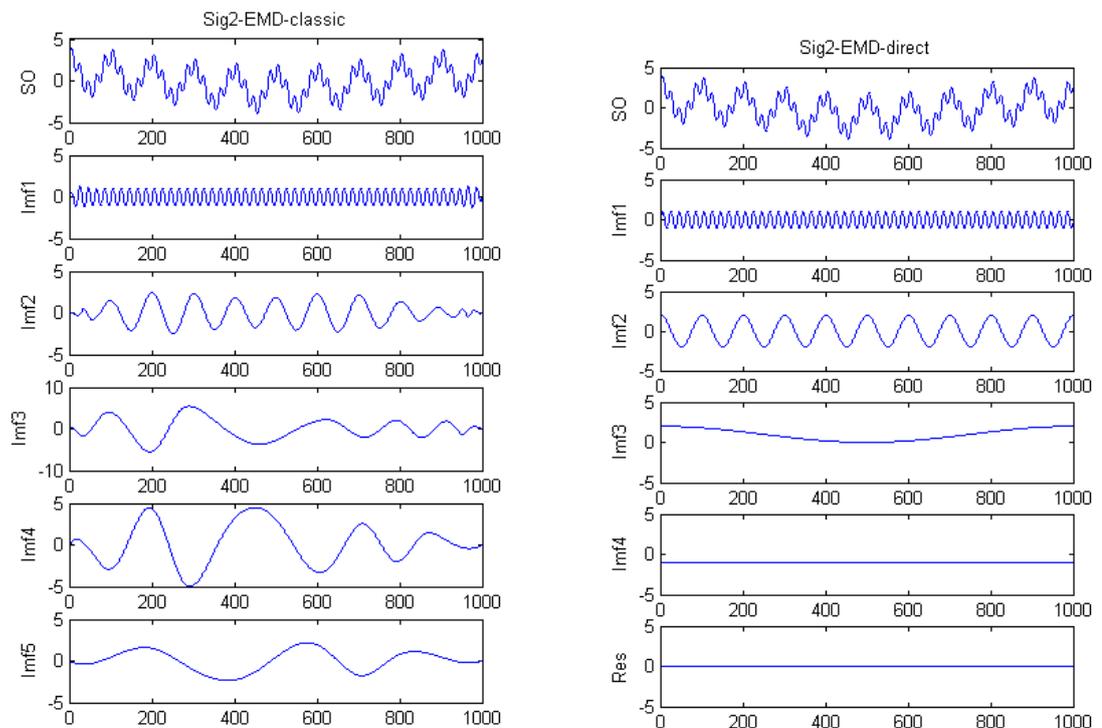
composé de deux éléments de fréquences et d'amplitudes différentes et en (c) et (d), un signal composé de trois éléments de fréquences et d'amplitudes différentes. Dans tous ces exemples, nous avons toujours une meilleure séparation des composantes élémentaires avec la méthode *EMD sans sifting* que la méthode *EMD classique*.

Aussi, la méthode *EMD sans sifting* garde l'avantage de pouvoir obtenir un *IMF* en une seule itération alors qu'avec l'*EMD classique* il en faut parfois des centaines.



(a)

(b)



(c)

(d)

FIGURE 4.9 — $signal_1$ décomposé avec la méthode EMD classique en (a), $signal_1$ décomposé avec la méthode EMD sans sifting en (b), $signal_2$ décomposé avec la méthode EMD classique en (c), $signal_2$ décomposé avec la méthode EMD sans sifting en (d).

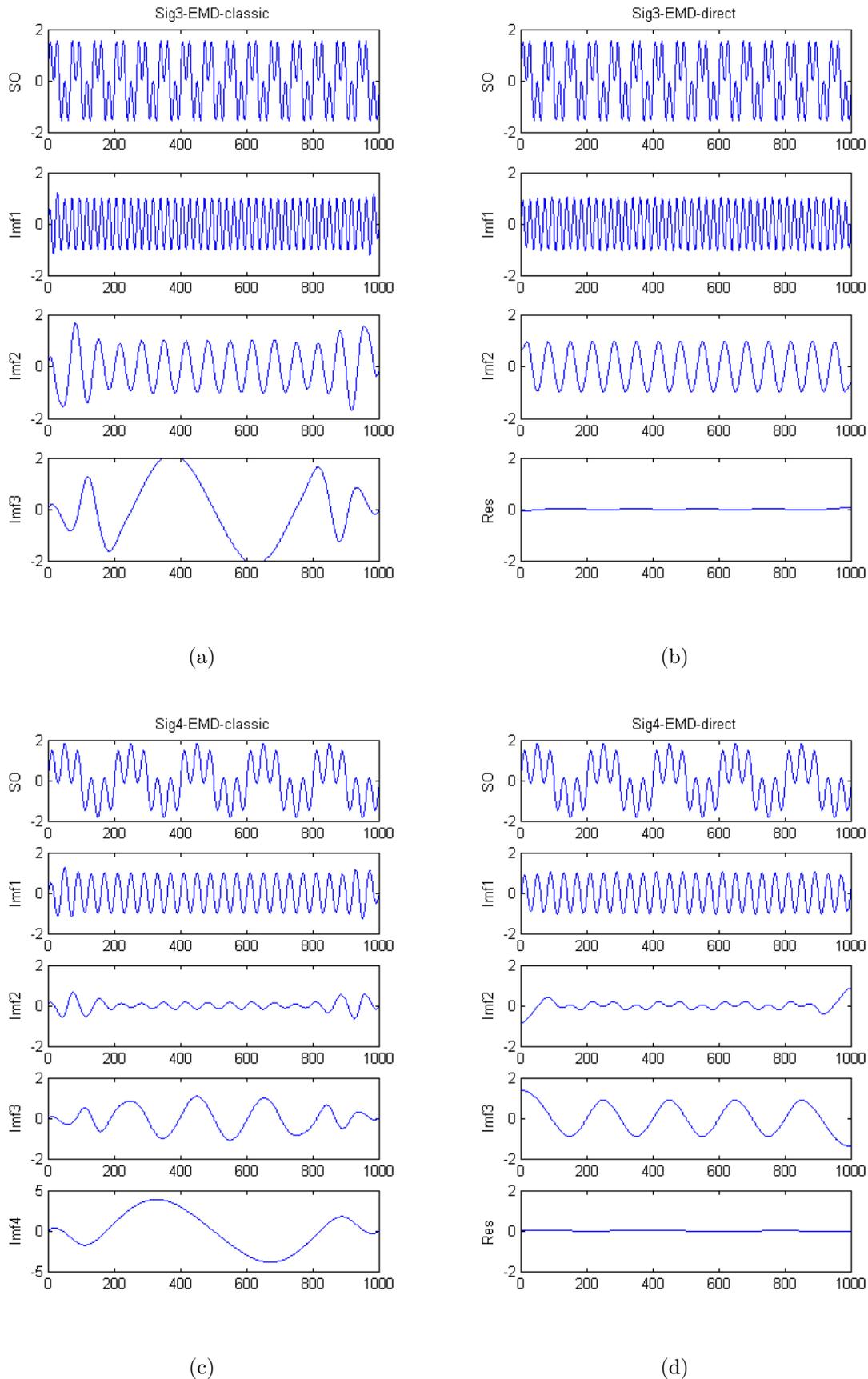


FIGURE 4.10 – $signal_3$ décomposé avec la méthode *EMD* classique en (a), $signal_3$ décomposé avec la méthode *EMD* sans *sifting* en (b), $signal_4$ décomposé avec la méthode *EMD* classique en (c), $signal_4$ décomposé avec la méthode *EMD* sans *sifting* en (d).

	EMD classique	EMD directe
Signal1 (sinus modulé avec une intermittence)	427 itérations 5 IMF + résidu	1 itération (Degré polynôme 50) 4 IMF + res
Signal2 (somme de 3 fréquences avec modulation en amplitude)	599 itérations 7 IMF + résidu	1 itération (Degré polynôme 50) 3 IMF + res
Signal3 (somme de 2 fréquences)	273 itérations 11 IMF + résidu	1 itération (Degré polynôme 50) 2 IMF + res
Signal4 (somme de 3 fréquences)	225 itérations 11 IMF + résidu	1 itération (Degré polynôme 50) 3 IMF + res

FIGURE 4.11 – Tableau comparatif entre la méthode *EMD classique* et la méthode *EMD sans sifting*.

4.7.5 Forme analytique

$$(I - E)^N = I + \sum_{k=1}^N C_N^k (-E)^k = I + \sum_{k=1}^N (-1)^k C_N^k E^k$$

avec

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} IMF_1 &= s_0^\top + \sum_{k=1}^N (-1)^k C_N^k E_1^k * s_0^\top \\ &= \sum_{k=0}^N (-1)^k C_N^k E_1^k * s_0^\top, \end{aligned}$$

$$IMF_2 = \left[\sum_{k=0}^N (-1)^k C_N^k E_2^k \right] \left[\sum_{k=1}^N (-1)^k C_N^k E_1^k \right] * s_0^\top,$$

$$IMF_3 = \left[\sum_{k=0}^N (-1)^k C_N^k E_3^k \right] \left[\sum_{k=1}^N (-1)^k C_N^k E_2^k \right] \left[\sum_{k=1}^N (-1)^k C_N^k E_1^k \right] * s_0^\top$$

d'où on peut écrire le signal d'entrée s_0 sous la forme :

$$s_0^\top = (I - E_1)^N * s_0^\top + \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} C_N^k E_1^k * s_0^\top$$

4.7.6 Quelques exemples

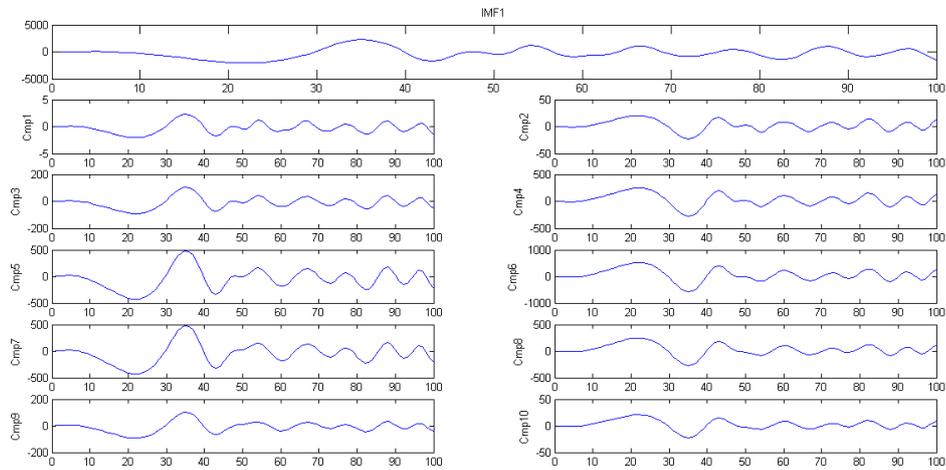


FIGURE 4.12 – En haut, le premier *IMF* ; En suite les 10 premières composantes ; Soit la colonne de gauche pour les composantes négatives et la colonne de droite pour les composantes positives.

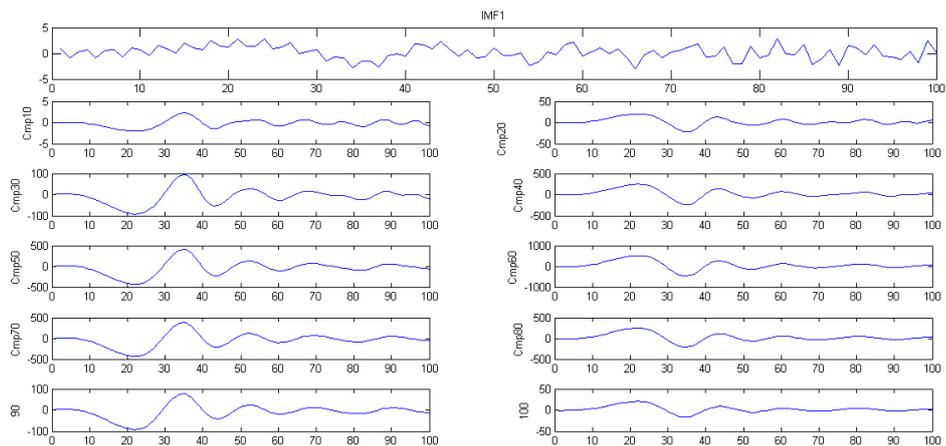


FIGURE 4.13 – En haut, le premier *IMF* ; Ensuite les 100 premières composantes avec une décimation de 10 ; Soit la colonne de gauche pour les composantes négatives et la colonne de droite pour les composantes positives.

4.8 Conclusion

Nous avons dans ce chapitre fait une étude de la décomposition modale empirique dans ses différentes approches. Ces dernières années, différentes variantes de l'*EMD* ont vu le jour, avec le plus souvent une tentative de définir un cadre mathématique qui permet de donner une légitimité et une meilleure compréhension de la méthode *EMD*. Une analyse de l'orthogonalité de l'*EMD* est établie dans [NGT⁺11], d'une part à partir de l'approche spectrale et d'autre part à partir d'une analogie avec une suite de projections orthogonales en cascade, ainsi que la construction d'un dictionnaire issu de l'*EMD* à partir des enveloppes moyennes passant par les points caractéristiques. À partir du nouvel opérateur basé sur les équations aux dérivées partielles que nous avons récemment proposé dans [NTD⁺13], nous avons pu construire une suite d'opérateurs qui converge à partir d'un certain rang N et permet de récupérer un *IMF* en une seule itération. On parle alors de la décomposition modale empirique sans le *sifting process*.