La Décomposion Spectrale Intrinsèque

Sommaire

7.1 Introduction

La décomposition spectrale intrinsèque (*SID*) est une nouvelle méthode auto-adaptative pour la représentation des signaux non linéaires [NTDL12]. Cette approche est basée sur la décomposition spectrale de l'opérateur basé sur une équation aux dérivées partielles qui permet d'interpoler les points caractéristiques d'un signal. Les composantes du *SID* qui sont les vecteurs propres de cet opérateur *interpolateur PDE* sont à la base de la nouvelle méthode de *décomposition-reconstruction* du signal. L'utilité et l'efficacité de cette méthode sont illustrées, dans la reconstruction ou le débruitage du signal, dans certains exemples utilisant des signaux artificiels et pathologiques.

7.2 Principe de la Décomposition Spectrale Intrinsèque

La Décomposition Spectrale Intrinsèque ou *Spectral Intrinsic Decomposition* (*SID*) [NTDL12] est une méthode auto-adaptative de représentation du signal, qui est inspirée de l'approche spectrale du *sifting process* pour la décomposition modale empirique [NDL10]. La décomposition se fait à partir d'un dictionnaire composé de vecteurs propres de l'opérateur enveloppe supérieure ou inférieure du signal s_0 à décomposer. Cet opérateur renferme des informations sur la position des points caractéristiques et sur le signal dans sa globalité. Cela est dû au fait que la fonction de diffusivité qui reste un élément essentiel de cet opérateur, est construite à partir de ces points caractéristiques, mais dépend aussi des dérivées première, seconde et troisième du signal à décomposer selon le modèle de diffusion choisi. Ce qui explique d'ailleurs le caractère intrinsèque et auto-adaptatif de la méthode *SID*. Cette enveloppe supérieure S_+ ou inférieure S_- n'est rien d'autre que la solution asymptotique d'un système d'équations aux dérivées partielles couplées définie dans la section 6.2. Ces vecteurs propres sont appelés *Fonction Mode Propre Spectrale* ou *Spectral Proper Mode Function* (*SPMF*). Notre objectif est de pouvoir donner une représentation du signal s_0 comme une combinaison linéaire de ces *SPMF*.

7.3 Présentation de l'algorithme de la Décomposition Spectrale Intrinsèque

La procédure de la Décomposition Spectrale Intrinsèque (*SID*) est définie comme le calcul des *SPMFs* pour un signal donné. Prenons les mêmes notations que dans le chapitre 6 et considérons l'opérateur enveloppe supérieure $E = L^{-1}$ (cf. (6.21)). La même procédure peut être effectuée pour l'enveloppe inférieure. La décomposition en valeurs propres de E donne :

$$[V_E, L_E] = eig(E),$$

où

$$V_E = \left[V_1, ..., V_{SIZEOF(s_0)}\right] \quad et \quad L_E = \left[L_1, ..., L_{SIZEOF(s_0)}\right],$$

(avec possibilité de compléter par des zéros pour atteindre la taille du vecteur) sont respectivement l'ensemble des vecteurs propres et l'ensemble des valeurs propres de E. Les coefficients de reconstruction s_0 sont donnés par :

$$C = L_E V_E^{-1} s_0^{\top} \tag{7.1}$$

avec $s_0^{\top}$ la transposée de s_0. D'où le signal s_0 est calculé par la formule $s_0 = VC$.

La Décomposition Spectrale Intrinsèque de s_0 décrit dans Algorithme 5, est donnée comme suit :

$$s_0 = \sum_{k=1}^{N} V_k C_k \tag{7.2}$$

Cette décomposition est intrinsèque et ne dépend que de la position des points caractéristiques du signal d'entrée de s_0 qui définissent la diffusivité en fonction de l'opérateur d'interpolation. Nous remarquons que le *SID* fournit les mêmes capacités de reconstruction aussi bien avec l'enveloppe supérieure qu'avec l'enveloppe inférieure. La raison en est que l'opérateur *INTERPOLATEUR EDP* utilise toutes les données du signal s_0 et les *SPMFs* issus de cette décomposition génèrent le même espace fonctionnel. Tous les *SPMFs* participent localement à la reconstruction du signal s_0. Par conséquent, au sens du principe de superposition, le *SID* est plus général que l'*EMD* classique.

Algorithm 5 : SPECTRAL INTRINSIC DECOMPOSITION ALGORITHM

1: **compute** diffusivity function $g^{\pm}$ from s_0, using for example *MCP* (6.8)
2: **compute** matrix operator $L^{-1} = E$ (6.18)
3: **perform** eigendecomposition of **E**, $[V_E, L_E] = eig(E)$
4: **perform** reconstruction coefficients of s_0, $C = L_E V_E^{-1}\ s_0^{\top}$
5: **set** $[V_k]$, and $[L_k]$ for $k = 1...N$,
▷ *Results*
and $s_0 \leftarrow \sum_{k=1}^{N} V_k * C_k$

7.4 Propriétés des *SPMFs*

Les *SPMFs* calculés à partir de l'opérateur E sont adaptatifs et bien localisés autour des points caractéristiques du signal. Dans la figure 7.1, nous montrons le signal original à la figure 7.1(a), et des vecteurs propres - *SPMFs* Vp_{920}, Vp_{940}, Vp_{960}, Vp_{980}, Vp_{100} - associés aux plus basses valeurs propres pour l'enveloppe supérieure de la figure 7.1(b). La figure 7.1(c) présente les *SPMFs* Vp_{20}, Vp_{40}, Vp_{60}, Vp_{80} et Vp_{100}. Autour de l'intermittence à la coordonnée 400, les dernièrs *SPMFs* correspondants aux plus petites valeurs propres présentent une non-stationnarité mais partout ailleurs contribuent à la composition du signal, avec une composante fixe et centrée, modulées en amplitude et en fréquence (*AM-FM*). Il est intéressant de noter que le *sifting process* de l'*EMD* [HSLa98] permet de traquer ces composantes *AM-FM* en recherchant de manière itérative autour des points caractéristiques, les extrema par exemple.

7.4.1 Qualité d'atomes temps-fréquences

Avant même de considérer une analyse temps-fréquence en terme énergétique, une approche intuitive est de décomposer linéairement un signal sur un ensemble de briques de base auxquelles on est en droit d'imposer de bonnes propriétés de localisation, en temps comme en fréquence. Lorsque le principe de l'*EMD* classique conduit à un niveau de décomposition locale à deux composantes - *une composante fortement oscillée et une tendance locale* -, la décomposition *SID* donne une séquence de composantes vraiment localisées dont le nombre est suppérieur au nombre de points caractéristiques selon la formule suivante :

$$S_0 = \sum_{k \in \{j/\lambda_j=1\}} V_k * C_k + \sum_{k \notin \{j/\lambda_j=1\}} V_k * C_k. \tag{7.3}$$

où V_k représente un vecteur propre de E (*SPMF*) et C_k le coefficient de décomposition qui dépend du signal d'entrée s_0. Le premier terme de (7.3) correspond à l'enveloppe du signal s_0. Ensuite, il apparaît que le *SID* fournit une généralisation du principe de l'*EMD* classique parce que dans (7.3), nous avons un nombre de composantes plus grand que le nombre de maxima ou de minima. Les *SPMFs* participent tous à la dynamique du signal avec une forte localisation autour des points qui ont généré les vecteurs propres. Dans la figure 7.2 nous avons représenté quelques *SPMFs* avec leur représentation dans le plan temps-fréquence pour montrer que les atomes issus de la décomposition *SID* sont bien adaptés à une analyse de type temps-fréquence.

7.4.2 Construction d'un dictionnaire temps-fréquences

Dans la plupart des cas, un *SPMF* peut être considéré comme une ondelette non linéaire à bande étroite avec une modulation d'amplitude par un signal de basse fréquence $a[n]$:

$$SPMF_k[n] = a_k[n]\,\varphi_k[n]. \tag{7.4}$$

Nous pouvons alors construire un dictionnaire $\mathcal{D}$ définit par :

$$\mathcal{D} = \left\{ (\psi_p)_{p=1,..,N} \right\}, \tag{7.5}$$

N étant le nombre de *SPMFs*.

Le choix du dictionnaire $\mathcal{D}$ a une très grande influence sur la qualité de la décomposition du signal. En effet, si le dictionnaire ne contient pas du tout ou très peu d'atomes adaptés aux structures présentes dans le signal, la décomposition sera, quelle que soit la méthode choisie, mauvaise. L'avantage que nous avons avec le *SID* est son caractère intrinsèque et auto-adaptatif. Ce qui fait que les atomes du dictionnaire construit à partir des *SMPFs* représentent bien les différentes caractéristiques du signal à décomposer. Cependant, chaque signal peut être écrit sous forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de ce dictionnaire. La redondance et l'orthogonalité du dictionnaire dépendent des propriétés de l'opérateur E. Si E est symétrique, on peut avoir l'orthogonalité et des *SPMFs* qui sont très similaires aux ondelettes comme le montre l'exemple de la figure 7.1.

7.4.3 Relation entre *SPMFs* et fréquences locales

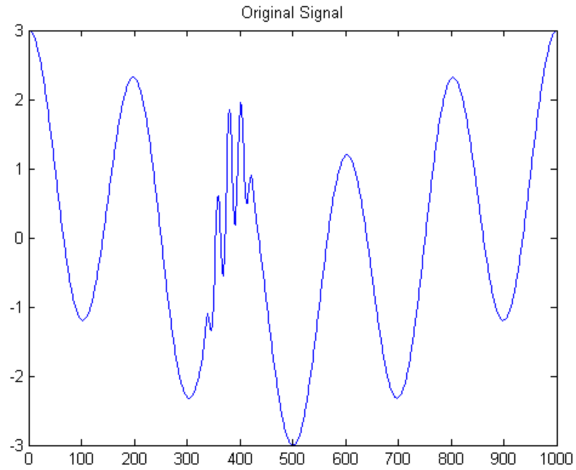
Les points caractéristiques contribuent à l'apparition de non-stationnarités au niveau des *SPMFs* pour le *SID*. Ainsi, les *SPMFs* contiennent des fréquences locales du signal. Aussi localement, la décomposition en *SPMFs* (*SID*) fonctionne comme le principe de base de l'*EMD* qui considère un signal comme une superposition de composantes basses fréquences et des composantes de fréquences plus élevées. Seulement, avec le *SID*, nous avons un plus grand nombre de composantes, ce qui permet une contribution en fréquence locale de chaque *SMPF* en chaque point du signal.
Dans la figure 7.3 nous avons calculé l'énergie de chaque *SPMF* en chaque point du signal que nous avons représenté dans un plan de type temps-fréquence. En nous référant au signal original tracé en haut de la figure, nous pouvons voir la contribution en fréquence locale de chaque *SMPF* et plus clairement aux alentours de l'intermittence.

7.4.4 Interprétation de la décomposition *SID*

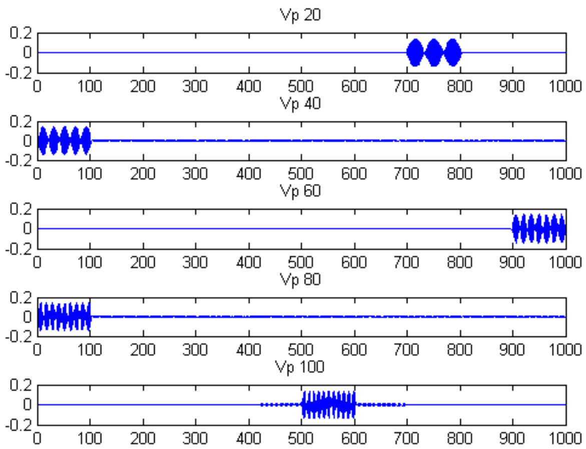
On peut également interpréter cette décomposition dans le cas de l'étude de données multicomposantes. Les principaux vecteurs propres - *autrement dit les SPMFs* - représentent les différentes composantes atomiques qui interviennent dans la composition globale du signal. Les différentes valeurs propres λ_n, $1 \leq n \leq N$, N étant la taille du signal, sont alors analogues à l'énergie ou la représentativité qui va pondérer ces comportements. On peut considérer, par exemple dans l'optique du data mining, que les informations importantes de l'ensemble sont celles qui présentent une structure plus marquée. Alors, en annulant les valeurs propres λ_n au-delà d'un certain indice, puis en passant à la reconstruction, on obtient une version filtrée du signal de départ, représentant l'information dominante. De façon équivalente, on peut supprimer des données d'énergie inférieure à un certain seuil. Ces principes pourront bien justifier les applications de la Décomposition Spectrale Intrinsèque au débruitage, à la compression de même qu'à la classification et à la reconnaissance de formes. Ainsi, la *SID* permet de construire un modèle empirique, sans théorie sous-jacente, d'autant plus précis qu'on y injecte des termes. Il est par ailleurs possible de reconstruire le signal, en utilisant une base de *SPMFs* plus ou moins complète afin d'obtenir un résultat plus ou moins précis.

7.5 Conclusion

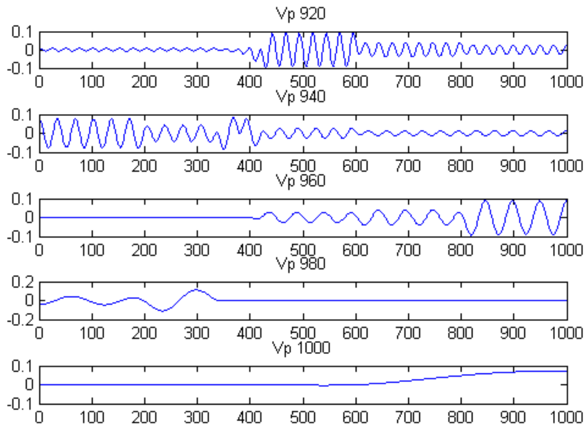
Nous avons introduit dans ce chapitre une nouvelle méthode de décomposition basée sur une décomposition spectrale d'un opérateur d'interpolation intrinsèque d'un signal. La nouvelle méthode appelée *Décomposition Spectrale Intrinsèque*, *- en anglais Spectral Intrinsic Decomposition (SID)* - est auto-adaptative et est plus générale dans un certain sens que le principe de base de la Décomposition Modale Empirique. La méthode SID permet de produire un dictionnaire de *Fonctions Modes Spectrales Propres*, en anglais *Spectral Proper Mode Function (SPMF)* qui sont semblables à des atomes dans les représentations parcimonieuses. Les résultats des tests montrent que le *SID* peut être utilisé dans le débruitage du signal dans la même mesure que la méthode des ondelettes, avec l'avantage de l'auto-adaptabilité. Le *SID* est également adapté pour la compression du signal, ainsi que pour d'autres applications.



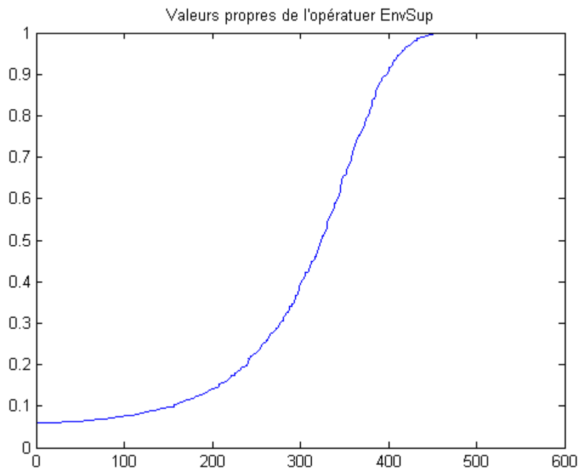
(a)



(b)

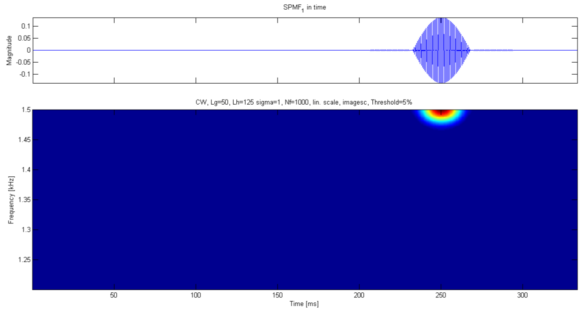


(c)

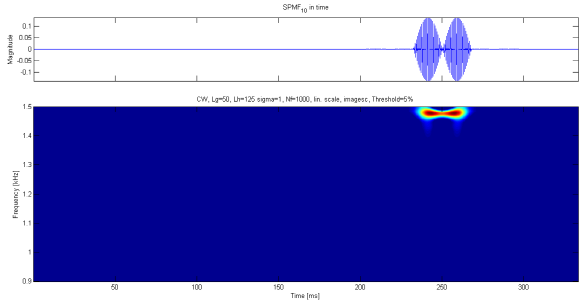


(d)

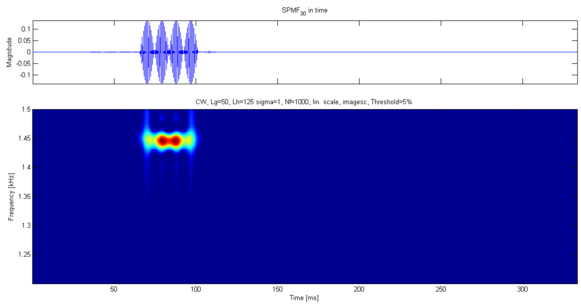
Figure 7.1 – Signal d'entrée en **(a)**, des vecteurs propres en **(b)** et **(c)**. Un résultat semblable est obtenu avec l'opérateur enveloppe inférieure. En **(d)** Les valeurs propres toutes contenues dans le segment $]0,1]$ et supérieures à $1/17$.



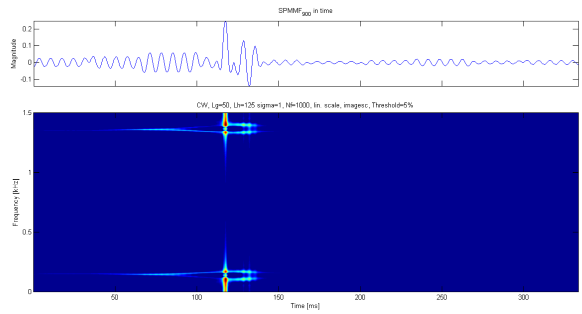
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 7.2 – Les *SPMFs* 1 en **(a)**, 10 en **(b)**, 30 en **(c)** et 40 en **(d)** avec leurs représentations dans le plan temps-fréquence. Nous avons une bonne localisation fréquentielle des *SPMFs*, ce qui justifie de la qualité d'atomes temps-fréquence de la méthode *SID*.

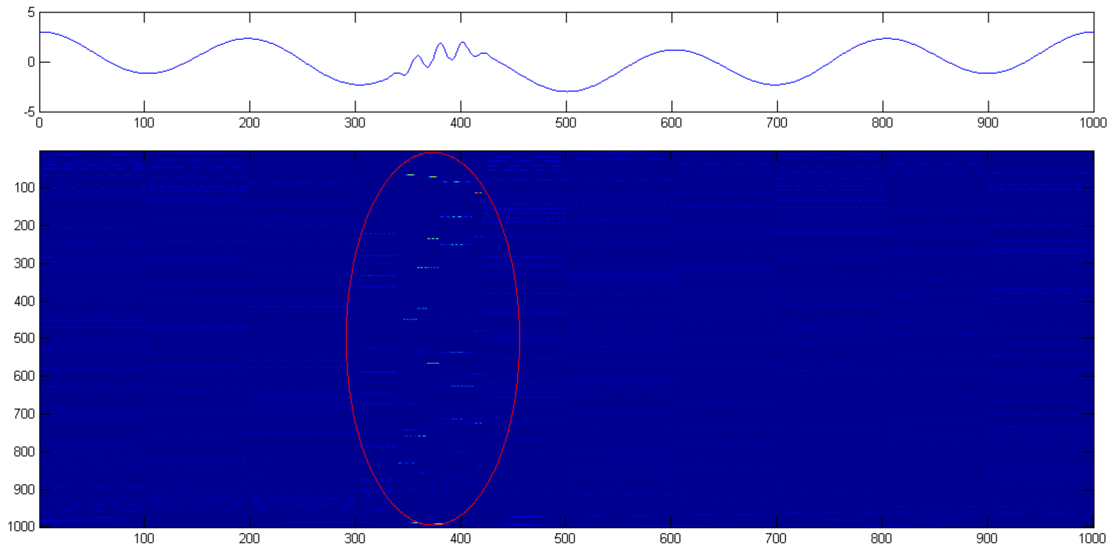


FIGURE 7.3 – Représentation de l'énergie de chaque *SPMF* en chaque point du signal dans un plan de type temps-fréquence.