

La comparaison stochastique sur des espaces multidimensionnels

Les méthodes de bornes stochastiques s'appliquent essentiellement aux chaînes de Markov et permettent d'apporter des solutions intéressantes pour l'évaluation des performances des systèmes. Nous nous focaliserons sur des chaînes de Markov multidimensionnelles permettant de modéliser des systèmes complexes. L'objectif de ce chapitre est d'expliquer d'abord d'une manière intuitive comment utiliser les méthodes de bornes stochastiques pour l'évaluation des systèmes complexes. Ensuite, on rentrera dans les détails théoriques en présentant différentes méthodes de comparaison stochastique. Ce chapitre est organisé comme suit :

1. Définition d'un ordre sur un espace d'états multidimensionnel.
2. La comparaison stochastique : définitions entre des variables aléatoires et des chaînes de Markov.
3. Méthodes de comparaisons stochastiques : le couplage et les ensembles croissants
4. Comparaison par fonction de projection.

1 Introduction

Un système complexe, comme vu précédemment, peut-être un système de grande taille représentant un réseau avec de multiples nœuds. Il peut être aussi un système où différents types d'événements peuvent se déclencher (arrivées/services, pannes/réparations ou signaux déclencheurs). Ainsi la prise en compte de ces événements peut, de ce fait, entraîner une augmentation du nombre de composantes nécessaires pour représenter un état du système.

Les solutions apportées par les méthodes de bornes stochastiques consistent à construire des systèmes bornants plus faciles à étudier. A partir de ces derniers, on pourra générer des mesures de performances bornantes (supérieures et inférieures) de la mesure exacte. Nous soulignons que les bornes ainsi obtenues sont valables aussi bien en **stationnaire** qu'en **transitoire**. La comparaison stochastique est basée sur la théorie des ordres stochastiques qui est compliquée lorsque l'espace d'état est multidimensionnel [39, 40, 49] car plusieurs ordres stochastiques peuvent être définis et les méthodes de comparaison sont plus difficiles à utiliser que sur un espace monodimensionnel. L'ordre le plus connu est l'ordre fort noté \preceq_{st} (dit ordre "strong"), équivalent à une comparaison des trajectoires ("sample path ordering"). Dans cette thèse, nous ne travaillons que sur cet ordre et donc, nous ne présenterons que celui-ci.

Nous supposons que le système peut être représenté par une chaîne de Markov à temps continu (CMTC), notée $\{X(t), t \geq 0\}$, et définie sur un espace d'état A (représenté en général par \mathbb{N}^n). On note par $\Pi(x, t)$ la probabilité à l'instant t que le processus soit à l'état x . Nous supposons que l'espace d'état A est muni d'un préordre¹ (exemple : l'ordre composante par composante). Nous voulons calculer la mesure de performance suivante :

$$R(t) = \sum_{x \in A} \Pi(x, t) f(x) \quad (\text{I.1})$$

où f est une fonction croissante $A \rightarrow \mathbb{R}^+$. Quand $t \rightarrow \infty$, si le processus a un comportement stationnaire, on note par $\Pi(x)$ la probabilité stationnaire d'être à l'état x . R représente alors la mesure calculée à partir de la distribution stationnaire. Si $\Pi(t)$ (ou Π) n'a pas de solution simple alors, le calcul de $R(t)$ (ou R) devient difficile quand la taille de l'espace d'état A est importante.

Nous proposons d'appliquer la comparaison stochastique. C'est-à-dire, borner $\{X(t), t \geq 0\}$ par $\{X^S(t), t \geq 0\}$ (au sens borne supérieure) et $\{X^I(t), t \geq 0\}$ (au sens borne inférieure) dans le sens de l'ordre stochastique \preceq_{st} : tel que $\{X^S(t), t \geq 0\}$ et $\{X^I(t), t \geq 0\}$ soient plus faciles à analyser car les distributions sont calculables plus facilement ou définies sur un espace d'état plus petit (voir Fourneau et al. [45]). Ainsi, on peut déduire la mesure bornante $R^S(t)$, calculée à partir de la distribution $\Pi^S(t)$ et tel que :

$$R(t) \leq R^S(t) \quad (\text{I.2})$$

1. voir la section suivante pour la définition du préordre

ou $R^I(t)$, calculée à partir de la distribution $\Pi^I(t)$ et tel que :

$$R^I(t) \leq R(t) \tag{I.3}$$

2 Les ordres sur des espaces multidimensionnels

Dans cette section, nous donnons les bases théoriques essentielles à l'utilisation des ordres stochastiques sur des espaces multidimensionnels. Dans la plupart des cas, je travaillerai sur l'espace $A = \mathbb{N}^n$ qui est discret, dénombrable, muni d'au moins un préordre \preceq (relation binaire au moins réflexive et transitive :

1. Réflexivité : $\forall x \in A, x \preceq x$
2. Transitivité : $\forall x, y, z \in A$, si $x \preceq y$ et $y \preceq z$ alors, $x \preceq z$.

Ainsi, un ordre partiel sur un ensemble A est un préordre vérifiant en plus l'antisymétrie :

- 3 Antisymétrie : $\forall x, y \in A$, si $x \preceq y$ et $y \preceq x$ alors, $x = y$.

Un ordre total est un ordre partiel qui satisfait à la propriété de comparabilité :

- 4 Comparabilité : $\forall x, y \in A, x \preceq y$ ou $y \preceq x$

Par exemple, sur $A = \mathbb{N}^n$, l'ordre lexicographique est un ordre total alors que l'ordre composante par composante (noté \leq) est partiel. Nous utilisons souvent l'ordre composante par composante, \preceq , pour la comparaison des processus multidimensionnels :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}^n, x \preceq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \forall 1 \leq i \leq n$$

Ainsi, l'ordre composante par composante permet de comparer file par file les réseaux de communication, ce qui génère des inégalités sur les mesures de performances telles que les temps de réponses, ou les probabilités de blocage d'une file. On peut remarquer que cet ordre partiel peut être plus intéressant que l'ordre total lexicographique car cela génère moins d'inégalités à vérifier pour la comparaison de chaînes de Markov et donc, une meilleure qualité des bornes. Dans la suite, nous définissons la comparaison stochastique de variables aléatoires et des processus markoviens sur un espace A muni d'au moins un préordre \preceq .

3 La comparaison stochastique

La comparaison stochastique est fondée sur les ordres stochastiques. Un ordre stochastique est une relation d'ordre qui permet de comparer des variables aléatoires, des processus stochastiques ou des distributions de probabilité. Il existe deux grandes familles d'ordres : les ordres intégraux et les ordres ensemblistes. Nous orientons le lecteur intéressé à l'article de Massey [40] pour les ordres ensemblistes et aux ouvrages de Stoyan [50] et de Shaked et al. [51] pour les ordres intégraux. La thèse de Taleb [52] propose une couverture des deux approches et regroupe les principaux résultats et définitions sur les ordres stochastiques ensemblistes et intégraux ainsi que, les liens d'équivalences qui peuvent exister entre eux. Nous présentons dans la suite les définitions de base dans le cas de l'ordre fort st .

3.1 Comparaisons stochastiques de variables aléatoires

Soit donc, un espace d'état A muni d'un préordre \preceq . Considérons deux variables aléatoires X et Y définies sur A avec des mesures de probabilités respectives p et q telles que $p[i] = Prob(X = i)$, $\forall i \in A$ (resp. $q[i] = Prob(Y = i)$, $\forall i \in A$). Leur comparaison suivant l'ordre fort \preceq_{st} , est définie comme suit [39] :

Définition .2. $X \preceq_{st} Y$ si et seulement si $E[f(X)] \leq E[f(Y)]$, $\forall f : A \rightarrow \mathbb{R}^+$, \preceq *-croissante*

Sur les espaces multidimensionnels d'autres ordres, plus faibles en termes de contraintes, peuvent être définis. Par exemple, dans [40], l'ordre "weak" (noté \preceq_{wk}) permet de comparer les queues de distribution et l'ordre "weak*" (noté \preceq_{wk*}), les fonctions de répartition. Il existe plusieurs formalismes pour définir un ordre stochastique : fonctions croissantes ou ensembles croissants. Ces deux formalismes sont équivalents car les fonctions croissantes peuvent être générées à partir des combinaisons linéaires des fonctions indicatrices des ensembles croissants. Nous proposons d'utiliser celui des ensembles croissants afin de nous ramener à des inégalités entre matrices (matrices des générateurs ou matrices des probabilités de transitions) pour la comparaison de chaînes de Markov.

Soit $\Gamma \subset A$, Γ est un ensemble croissant si et seulement s'il est équivalent à une séquence d'éléments croissants de A . On note par :

$$\Gamma \uparrow = \{y \in A \mid y \succeq x, x \in \Gamma\}$$

et donc la définition formelle d'un ensemble croissant est la suivante :

Définition .3. Γ est un ensemble croissant si et seulement si $\Gamma = \Gamma \uparrow$

Exemples :

- Soit $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, muni de l'ordre total \leq . $\Gamma_1 = \{2, 3, 4\}$ est un ensemble croissant contrairement à $\Gamma_2 = \{1, 4\}$. En effet, nous avons $1 \leq 2$ et $1 \leq 3$ or 2 et 3 ne sont pas dans Γ_2 :
- Considérons l'ensemble $A = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ pour lequel nous définissons l'ordre composante par composante \preceq . Nous remarquons que :

$$\Gamma_1 = \{(1, 0), (1, 1)\}$$

est un ensemble croissant alors que :

$$\Gamma_2 = \{(0, 0), (0, 1)\}$$

n'en est pas un. En effet, l'état $(1, 1)$ n'appartient pas à Γ_2 alors que, $(1, 1) \succeq (0, 1)$. Trois ordres stochastiques sont définis à partir des familles d'ensembles croissants [40]. Le plus fort, l'ordre \preceq_{st} , est défini à partir de la famille $\Phi_{st}(A)$ qui contient tous les ensembles croissants de A :

$$\Phi_{st}(A) = \{\Gamma \subset A \mid \Gamma = \Gamma \uparrow\}.$$

Bien entendu, il existe d'autres familles d'ensembles croissants, définies pour les ordres stochastiques faibles [40], mais elles ne sont pas présentées dans cette thèse. Donc pour la suite, même si certaines définitions que nous présentons restent valables pour une famille quelconque d'ordres croissants, nous ne travaillerons que sur l'ordre \preceq_{st} (et la famille $\Phi_{st}(A)$).

L'ordre stochastique \preceq_{st} est défini, à partir de la famille $\Phi_{st}(A)$ [53], comme suit :

Définition .4.

$$\forall \Gamma \in \Phi_{st}(A), X \preceq_{st} Y \Leftrightarrow \sum_{x \in \Gamma} p[x] \leq \sum_{x \in \Gamma} q[x] \quad (\text{I.4})$$

Exemple : Soit $A = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$, l'ensemble muni de l'ordre composante par composante \preceq .

$$Q_{st}(A) = \{\{(1, 1)\}, \{(1, 0), (1, 1)\}, \{(0, 1), (1, 1)\}, \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}, A\}$$

On suppose que :

$$p = [0.4, 0.2, 0.2, 0.2] \text{ et } q = [0.3, 0.2, 0.2, 0.3]$$

On voit bien que pour

$$\Gamma = \{(1, 1)\}, \sum_{x \in \Gamma} p[x] = 0.2 < \sum_{x \in \Gamma} q[x] = 0.3$$

$$\Gamma = \{(1, 0), (1, 1)\}, \sum_{x \in \Gamma} p[x] = 0.4 < \sum_{x \in \Gamma} q[x] = 0.5$$

En étudiant tous les ensembles croissants on vérifie la définition .4 et donc $X \preceq_{st} Y$.

Dans la suite, nous nous intéressons à la comparaison stochastique de chaînes de Markov.

3.2 Comparaisons stochastiques de chaînes de Markov

Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ (resp. $\{X^S(t), t \geq 0\}$) des CMTCs (Chaînes de Markov à Temps Continu) définies sur A . La comparaison stochastique " \preceq_{st} " des chaînes est définie comme une comparaison à chaque instant t [39] :

Définition .5.

$$\{X(t), t \geq 0\} \preceq_{st} \{X^S(t), t \geq 0\}$$

si :

$$X(0) \preceq_{st} X^S(0) \implies X(t) \preceq_{st} X^S(t), \forall t > 0$$

Supposons que la CMTC $\{X(t), t \geq 0\}$ (resp. $\{X^S(t), t \geq 0\}$) soit homogène dans le temps, de générateur Q (resp. Q^S). Si p (resp. q) est un vecteur de probabilité sur A représentant le vecteur des probabilités initiales $P(X(0))$ (resp. $P(X^S(0))$), alors le vecteur des probabilités à l'instant t est $P(X(t)) = p \exp(tQ)$ (resp. $P(X^S(t)) = q \exp(tQ^S)$). Nous avons alors la définition suivante de la comparaison stochastique des CMTCs [40] :

Définition .6.

$$\{X(t), t \geq 0\} \preceq_{st} \{X^S(t), t \geq 0\}$$

si, pour tous les vecteurs de probabilités p et q sur A , nous avons :

$$p \preceq_{st} q \implies p \exp(tQ) \preceq_{st} q \exp(tQ^S), \forall t > 0 \tag{I.5}$$

La comparaison des CMTDs (Chaînes de Markov en Temps Discret) se définit par la comparaison à l'instant n (où $n \in \mathbb{N}$) des chaînes. Ainsi, si $\{X(n), n \geq 0\}$ et $\{X^S(n), n \geq 0\}$ sont deux CMTDs de matrices de probabilités de transition P et P^S , alors nous avons la définition suivante :

Définition .7. $\{X(n), n \geq 0\} \preceq_{st} \{X^S(n), n \geq 0\}$ si, pour tous vecteurs de probabilité p et q sur A , nous avons :

$$p \preceq_{st} q \implies pP \preceq_{st} qP^S \quad (\text{I.6})$$

Lorsque les chaînes sont définies sur des espaces d'états différents, elles peuvent être comparées sur un espace commun [40, 43]. Supposons que $\{X(t), t \geq 0\}$ soit définie sur un espace A , et $\{X^S(t), t \geq 0\}$ sur F . Nous définissons une fonction de projection $g : A \rightarrow F$ afin de les comparer sur l'espace commun F , où le préordre \preceq est défini.

Définition .8.

$$\{g(X(t)), t \geq 0\} \preceq_{\Phi_{st}} \{X^S(t), t \geq 0\}$$

si :

$$g(X(0)) \preceq_{st} X^S(0) \implies g(X(t)) \preceq_{st} X^S(t), \forall t > 0 \quad (\text{I.7})$$

Cette définition peut également s'écrire en fonction des générateurs infinitésimaux [40]. Comme nous verrons plus loin, la comparaison stochastique utilise la monotonie stochastique qui est une propriété de croissance (ou de décroissance) du processus avec le temps. Dans le sens croissant, cette propriété est très utilisée pour la comparaison stochastique. Elle se définit comme suit [39] :

Définition .9. $\{X(t), t \geq 0\}$ est \preceq_{st} -monotone, si :

$$X(t) \preceq_{st} \forall \tau \geq 0, X(t+\tau), \forall t \geq 0. \quad (\text{I.8})$$

Dans le cas discret, la monotonie d'une chaîne de Markov $\{X(n), n \geq 0\}$ se définit comme une croissance en fonction de n . Si P représente la matrice des probabilités de transition, la monotonie se définit comme suit [40] :

Définition .10. $\{X(n), n \geq 0\}$ est \preceq_{st} -monotone si, pour tous les vecteurs de probabilités p et q sur A , nous avons :

$$p \preceq_{st} q \implies pP \preceq_{st} qP \quad (\text{I.9})$$

Pour les CMTCs, la monotonie s'exprime en fonction du générateur infinitésimal [40]. Dans la suite, je présenterai les deux méthodes de comparaison stochastique des chaînes de Markov multidimensionnelles : le couplage et les ensembles croissants.

4 Le couplage

Le couplage, pour la comparaison stochastique \preceq_{st} de variables aléatoires, est équivalent à une comparaison de leurs réalisations :

Théorème .11. *Pour les variables X et Y , définies sur A et de fonctions de répartition F_X et F_Y , les points suivants sont équivalents :*

1. $X \preceq_{st} Y$
2. *Il existe un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ et des variables aléatoires \widehat{X} et \widehat{Y} , de fonctions de répartition F_X et F_Y , tel que :*

$$\widehat{X}[\omega] \preceq \widehat{Y}[\omega], \forall \omega \in \Omega$$

Dans [54], le couplage est défini entre les mesures de probabilités P (resp. P') de X (resp. Y). Nous avons $P \preceq_{st} P'$ si et seulement s'il existe une mesure de probabilité couplée sur $A \times A$ à valeurs dans $K = \{(x, y) \in A \times A \mid x \preceq y\}$ et dont la première distribution marginale est P et la seconde P' . C'est un cas spécial du théorème de Strassen [39].

Le couplage des chaînes est basé sur la construction d'un couple de trajectoires dépendant des mêmes événements afin de les comparer [55]. Ce formalisme est intéressant car il est intuitif et basé sur la description des systèmes à événements discrets. Pour le couplage de $\{X(t), t \geq 0\}$ et $\{X^S(t), t \geq 0\}$, nous définissons les deux CMTCs sur A :

- $\{\widehat{X}(t), t \geq 0\}$ a le même générateur infinitesimal que $\{X(t), t \geq 0\}$
- $\{\widehat{X}^S(t), t \geq 0\}$ a le même générateur infinitesimal que $\{X^S(t), t \geq 0\}$

Le couplage des processus vise à définir un processus couplé à partir des processus à comparer et dont les composantes représentent les réalisations des processus à comparer [55] :

Théorème .12. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $\{X(t), t \geq 0\} \preceq_{st} \{X^S(t), t \geq 0\}$
2. *il existe la chaîne couplée :*

$$\{(\widehat{X}(t), \widehat{X}^S(t)), t \geq 0\}$$

tel que :

$$\widehat{X}(0)[\omega] \preceq \widehat{X}^S(0)[\omega] \Rightarrow \widehat{X}(t)[\omega] \preceq \widehat{X}^S(t)[\omega], \forall t > 0, \forall \omega \in \Omega \quad (\text{I.10})$$

3. il existe la chaîne $\{Z(t) = (\widehat{X}(t), \widehat{X^S}(t)), t \geq 0\}$ à valeurs dans

$$K = \{(x, y) \in A \times A, x \preceq y\}$$

Le couplage est, bien sûr, applicable à la comparaison des CMTD en comparant les trajectoires à chaque étape $n \in \mathbb{N}$. La monotonie stochastique peut se vérifier également par le couplage en comparant la chaîne avec elle même et en prenant des conditions initiales comparables [56].

Dans le cas où les processus ne sont pas définis sur le même espace d'états, on peut appliquer le couplage par fonctions de projections [43]. Supposons que $\{X(t), t \geq 0\}$ soit défini sur un espace A , et $\{X^S(t), t \geq 0\}$ sur F . On définit une fonction de projection $g : A \rightarrow F$ afin de les comparer.

Théorème .13. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $\{g(X(t)), t \geq 0\} \preceq_{st} \{X^S(t), t \geq 0\}$
2. Il existe la chaîne $\{(\widehat{X}(t), \widehat{X^S}(t)), t \geq 0\}$ tel que $\forall \omega \in \Omega :$

$$g(\widehat{X}(0)(\omega)) \preceq \widehat{X^S}(0)(\omega) \Rightarrow g(\widehat{X}(t)(\omega)) \preceq \widehat{X^S}(t)(\omega), \forall t > 0$$

3. Il existe la chaîne $\{Z(t) = (\widehat{X}(t), \widehat{X^S}(t)), t \geq 0\}$ à valeurs dans

$$K = \{(x, y) \in A \times F, g(x) \preceq y\}$$

Notons que ce théorème peut également être utilisé pour comparer $\{g(X(t)), t \geq 0\}$ avec un processus représentant une borne inférieure, il suffira alors d'inverser les inégalités.

Nous donnons un exemple de couplage par fonction de projection pour définir un processus bornant supérieur.

4.1 Exemple

Pour illustrer l'application du Théorème .13, prenons l'exemple d'un réseau de n files d'attente. Au niveau de chaque file $1 \leq i \leq n$, les paramètres sont les suivants :

- Arrivées de type Poisson et de taux λ_i
- Services exponentiels et de paramètres μ_i .
- Avec la probabilité $p_{i,j}$, les paquets transitent de la file i vers la file j
- Avec la probabilité d_i , ils quittent le système à partir de la file i .

Chapitre I. La comparaison stochastique sur des espaces multidimensionnels

Ce système est représenté par une CMTC $\{X(t), t \geq 0\}$, avec le générateur infinitésimal Q . Considérons la CMTC $\{X^S(t), t \geq 0\}$ avec le générateur infinitésimal Q^S , telle que $g(X(t)) \leq_{st} X^S(t)$. g est la fonction surjective de $\mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$, telle que $g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$, représente le nombre total de clients dans le système.

Définissons Q^S , tel que $(g(X(t)), X^S(t))$ reste dans l'ensemble K :

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N} \mid g(x) \leq y\}.$$

De toute évidence, nous avons deux cas où $g(x)$ peut être modifiée :

1. la première modification est une augmentation correspondant à une arrivée dans une file i .
2. et la seconde, à une diminution traduisant un départ à partir de n'importe quelle file i .

On notera, donc, qu'un transit entre deux files du système n'affecte en rien le nombre total de clients dans le système.

Etudions maintenant les sauts qui font que le processus quitte l'ensemble K défini précédemment. Et définissons les inégalités entre les taux de transition pour garantir que le processus couplé reste dans l'ensemble K .

1. Pour toute transition de la première composante de x vers x' tel que $g(x') = g(x) + 1$, nous pouvons avoir : $g(x) + 1 > y$ (si $\sum_{i=1}^n x_i = y$). Alors, la seconde composante y doit compenser en réalisant un saut de y vers $y + 1$ afin d'avoir $g(x) + 1 \leq y + 1$. Ainsi, la première composante doit augmenter moins vite que la seconde, et nous en déduisons l'inégalité suivante :

$$\sum_{g(x')=g(x)+1} Q(x, x') \leq Q^S(y, y').$$

Comme $\sum_{g(x')=g(x)+1} Q(x, x') = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, alors nous avons $Q^S(y, y') = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

2. Si y a une transition vers y' tel que nous ayons $y' = y - 1$, alors nous devons avoir une transition de x vers x' tel que $g(x') = g(x) - 1$. Par conséquent, la première composante doit diminuer plus vite que la seconde.

$$\sum_{g(x')=g(x)-1} Q(x, x') \geq Q^S(y, y').$$

Comme $\sum_{g(x')=g(x)-1} Q(x, x') = \sum_{i=1}^n \mu_i d_i 1_{x_i > 0}$, donc nous avons $Q^S(y, y') = \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i d_i$.

Ainsi avec ces taux de transition, $\{X^S(t), t \geq 0\}$ fournit une borne supérieure du processus image de $\{X(t), t \geq 0\}$, par la fonction g :

$$\{g(X(t)), t \geq 0\} \leq_{st} \{X^S(t), t \geq 0\}$$

Dans cet exemple, on notera que le système original est constitué d'un réseau de n files d'attente là où le modèle bornant ne possède qu'une file d'attente. Les taux d'arrivée et de départ ont été définis pour avoir une borne supérieure sur le nombre total de clients dans le système.

Abordons maintenant la comparaison stochastique en utilisant les ensembles croissants. L'intérêt de ce formalisme est qu'il est basé sur l'utilisation de matrices, permettant ainsi de définir des algorithmes. De plus, il permet à la fois la définition des ordres forts et faibles. Cependant comme il a été dit plus tôt, nous n'introduisons que l'ordre \preceq_{st} .

5 Méthode des ensembles croissants

Dans le cas de CMTDs homogènes, la comparaison stochastique peut être démontrée à partir d'inégalités sur les lignes des matrices de probabilités de transitions calculées à partir de familles d'ensembles croissants. Par exemple, si nous considérons l'ordre \preceq_{st} , nous avons des inégalités sur les lignes x et y comparables ($x \preceq y$) de la façon suivante [40] :

Théorème .14.

$$\{X(n), n \geq 0\} \preceq_{st} \{X^S(n), n \geq 0\}$$

si et seulement si, $\forall \Gamma \in \Phi_{st}(A), \forall x \preceq y$:

$$\sum_{z \in \Gamma} P(x, z) \leq \sum_{z \in \Gamma} P^S(y, z)$$

Exemple : Soit $A = \{0, 1, 2, 3\}$ muni de l'ordre \leq

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \quad P^S = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$$

$$Q_{st}(A) = \{\{3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, A\}$$

- On compare la ligne 0 de P avec les lignes 0, 1, 2 et 3 de P^S .
- On vérifie les inégalités sur les autres lignes en utilisant le théorème .14.

On peut déduire donc d'après le théorème .14, que : $\{X(n), n \geq 0\} \preceq_{st} \{X^S(n), n \geq 0\}$. La comparaison stochastique de chaîne de Markov peut se faire en utilisant les chaînes associées, en en utilisant donc le théorème .14. D'autres théorèmes sont basés sur la comparaison des lignes de générateurs. Il faut considérer que l'utilisation du générateur infinitésimal implique qu'il faut considérer l'élément de la diagonale comme appartenant ou non aux ensembles croissants pour éviter le problème des éléments négatifs [39, 53].

Théorème .15.

$$\{X(t), t \geq 0\} \preceq_{st} \{X^S(t), t \geq 0\}$$

si et seulement si, $\forall \Gamma \in \Phi_{st}(A), \forall x \preceq y \mid x, y \in \Gamma, x, y \notin \Gamma :$

$$\sum_{z \in \Gamma} Q(x, z) \leq \sum_{z \in \Gamma} Q^S(y, z)$$

Exemple : Soit $A = \{0, 1, 2, 3\}$ muni de l'ordre \leq

$$Q = \begin{pmatrix} -0.3 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & -0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & -0.7 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & -0.4 \end{pmatrix} \quad Q^S = \begin{pmatrix} -0.4 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & -0.6 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & -0.8 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & -0.3 \end{pmatrix}$$

- On compare la ligne 0 de Q avec la ligne 0 de Q^S .
- en utilisant le théorème .15, on compare les autres lignes des générateurs.

D'après le théorème .15 on a donc que $\{X(t), t \geq 0\} \preceq_{st} \{X^S(t), t \geq 0\}$.

Si l'un des processus à comparer est monotone, alors nous avons le théorème suivant pour la comparaison stochastique [40] :

Théorème .16. $\{X(t), t \geq 0\} \preceq_{st} \{X^S(t), t \geq 0\}$, si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $X(0) \preceq_{st} X^S(0)$
2. $\{X(t), t \geq 0\}$ ou $\{X^S(t), t \geq 0\}$ est \preceq_{st} -monotone
3. Comparaison des générateurs infinitésimaux :

$$\forall \Gamma \in \Phi_{st}(A), \forall x \in A, \sum_{z \in \Gamma} Q(x, z) \leq \sum_{z \in \Gamma} Q^S(x, z).$$

Dans le domaine des réseaux de files d'attente, la monotonie a été vérifiée dans [56] pour les réseaux de Jackson. Dans [55], elle est également vérifiée pour des réseaux avec des hypothèses similaires, et multi-serveurs. Nous pouvons remarquer que les G-Networks ne sont pas monotones à cause des départs synchronisés.

La monotonie peut se vérifier par des inégalités sur les matrices. Par exemple, pour la monotonie \preceq_{st} d'une CMTD, on utilisera le théorème .14 avec la même matrice de transition P . Nous avons le théorème suivant [39, 53] :

Théorème .17. $\{X(n), n \geq 0\}$ est \preceq_{st} -monotone si et seulement si, $\forall \Gamma \in \Phi_{st}(A), \forall x \preceq y$:

$$\sum_{z \in \Gamma} P(x, z) \leq \sum_{z \in \Gamma} P(y, z)$$

D'une manière équivalente, on peut définir la monotonie stochastique d'une CMTC en utilisant le théorème .15 avec le générateur Q .

Théorème .18. $\{X(t), t \geq 0\}$ est \preceq_{st} -monotone si et seulement si, $\forall \Gamma \in \Phi_{st}(A), \forall x \preceq y \mid x, y \in \Gamma, x, y \notin \Gamma$:

$$\sum_{z \in \Gamma} Q(x, z) \leq \sum_{z \in \Gamma} Q(y, z)$$

Lorsque les processus sont définis sur des espaces d'états différents, ils peuvent être comparés sur un espace commun.

Supposons que $\{X(t), t \geq 0\}$ soit défini sur un espace A , et $\{X^S(t), t \geq 0\}$ sur F . Définissons la fonction de projection $g : A \rightarrow F$ afin de les comparer.

Théorème .19. $\{g(X(t)), t \geq 0\} \preceq_{st} \{X^S(t), t \geq 0\}$, si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $g(X(0)) \preceq_{st} X^S(0)$
2. $\{X(t), t \geq 0\}$ ou $\{X^S(t), t \geq 0\}$ est \preceq_{st} -monotone
3. Comparaison des générateurs infinitésimaux Q et Q^S :

$$\forall \Gamma \in \Phi_{st}(F), \forall x \in A, y \in F \mid g(x) = y, \sum_{g(z) \in \Gamma} Q(x, z) \leq \sum_{z \in \Gamma} Q^S(y, z).$$

Ce théorème peut aussi s'appliquer à des chaînes de Markov à temps discret (CTMD) en remplaçant les générateurs par des matrices de probabilités de transitions.

Exemple : Soient $A = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ muni de l'ordre composante par composante \preceq , et $F = \{0, 1, 2\}$ muni de l'ordre total \leq . On définit la matrice de probabilité

Chapitre I. La comparaison stochastique sur des espaces multidimensionnels

de transition P de la chaîne $\{X(n), n \geq 0\}$, et P^S de la chaîne $\{X^S(n), n \geq 0\}$, comme suit :

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \quad P^S = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

La famille des ensembles croissants sur F est :

$$Q_{st}(F) = \{A, \{2\}, \{2, 1\}\}$$

On peut remarquer que $\{X^S(n), n \geq 0\}$ est \leq_{st} -monotone (en appliquant le théorème .17).

On peut remarquer que :

$$\forall \Gamma \in \Phi_{st}(F), \forall x \in A, y \in F \mid \sum_{g(z) \in \Gamma} P(x, z) \leq \sum_{z \in \Gamma} P^S(y, z)$$

et donc les CMTD sont comparables. Comme nous le verrons plus tard, la comparaison par fonction de projection peut-être utile dans le cas de construction de chaînes agrégées bornantes, quand g est une fonction de projection dans un espace d'état plus petit. Il peut, aussi, être utile à la comparaison de processus non markoviens [40]. Nous reviendrons sur ce point dans les perspectives.

Dans la suite de la thèse, nous présentons des exemples d'applications de la comparaison stochastique. D'une manière générale, nous avons appliqué la comparaison stochastique de différentes façons. Dans le premier cas, les systèmes à comparer existent et nous cherchons à montrer qu'un système est inférieur ou supérieur à l'autre. Dans le second cas, le système à étudier est difficilement analysable et nous cherchons à construire, à partir de celui-ci, un système bornant plus simple à analyser par ce qu'il présente une forme produit ou représente une forme agrégée.