ANNEXES

ANNEXES A : Existence et unicité

A. Existence et unicité de la solution du problème à l'échelle microscopique

Nous utilisons un théorème classique d'algèbre, que nous adaptons au cas complexe.

Théorème Brezzi. Considérons le problème variationnel mixte suivant :

Trouver (u,λ) dans $H \times M$ tels que :

$$\begin{cases} a(u,v)+\overline{b(v,\lambda)}=\langle f,v\rangle & \forall v\in H \\ \qquad\quad b(u,\mu)=\langle g,\mu\rangle & \forall \mu\in M \end{cases} \tag{A.1}$$

Si les conditions i) et ii) sont vérifiées

i) $\exists\alpha>0$ tel que $\Re\left(a(v,v)\right)\geq\alpha\|v\|^2$, $\forall v\in V$ (A.2)

ii) La forme sesquilinéaire b satisfait à la condition $Inf-sup$ suivante : il existe $\beta>0$ tel que

$$\inf_{\substack{v\in X\\ v\neq 0}}\sup_{\substack{\mu\in M\\ \mu\neq 0}}\frac{\left|b(v,\mu)\right|}{\|v\|_X\,\|\mu\|_M}\geq\beta\geq 0 \tag{A.3}$$

Alors $(f,g)\in H'\times M'$, le problème précédent possède une unique solution $(u,\lambda)\in H\times M$.

Théorème Lax-Milgram

Soient H un espace de Hilbert complexe, $a(u,v)$ une forme sesquilinéaire continue sur $H \times H$, et L une forme linéaire continue sur H . Nous supposons de plus qu'il existe $\alpha>0$ tel que

$$\left|a(v,v)\right|\geq\alpha\|v\|_V^2,\ \forall v\in H \tag{A.4}$$

ou tel que

$$\Re\left(a(v,v)\right)\geq\alpha\|v\|^2,\ \forall v\in H \tag{A.5}$$

Alors le problème suivant

Trouver u tel que $\forall v\in H$, $a\left(\tau^0,\overline{w}\right)=L\left(\overline{w}\right)$ admet une unique solution.

A.1. Le problème fluide en déplacement

Trouver $u^0 \in$ E telle que :

$$\underbrace{\rho_0\omega^2\int_{\Omega_f} u^0\overline{w}d\Omega - i\omega\eta_2\int_{\Omega_f}\nabla_y u^0\nabla_y\overline{w}d\Omega}_{a(u^0,\overline{w})} = \underbrace{\int_{\Omega_f}\left[\nabla_x p^0 - \rho_0\omega^2 u_s^0\right]\overline{w}d\Omega}_{L(\overline{w})} \qquad \text{(A.6)}$$

Démonstration :

Pour tout $\overline{w} \in H$, nous avons :

$$a(u,v) = \int_{\Omega_f}\frac{\partial u_i}{\partial y_j}\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial y_j}d\Omega + i\omega\rho_0\int_{\Omega_f} u_i\overline{v}_i d\Omega \qquad \text{(A.7)}$$

où $a(\bullet,\bullet)$ une forme sesquilinéaire.

Vérifions si $a(\bullet,\bullet)$ est continue c'est-à-dire :

$$\left|a\left(u^0,\overline{w}\right)\right| \leq \alpha\left\|u^0\right\|_{H^1(\Omega)}\left\|\overline{w}\right\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\left|a\left(u^0,\overline{w}\right)\right| \leq \eta_2\left|\int_{\Omega_f}\frac{\partial u_i^0}{\partial y_j}\frac{\partial \overline{w}_i}{\partial y_j}d\Omega\right| + \rho_0\omega\left|\int_{\Omega_f} u_i^0\overline{w}_i d\Omega\right|$$

$$\leq \sup(\eta_2,\rho_0\omega)\left[\left|\int_{\Omega_f}\frac{\partial u_i^0}{\partial y_j}\frac{\partial \overline{w}_i}{\partial y_j}d\Omega\right| + \left|\int_{\Omega_f} u_i^0\overline{w}_i d\Omega\right|\right]$$

or $\left|\int_{\Omega_f}\frac{\partial u_i^0}{\partial y_j}\frac{\partial \overline{w}_i}{\partial y_j}d\Omega\right| \leq \left\|u_i^0\right\|_{H^1(\Omega)}\left\|\overline{w}_i\right\|_{H^1(\Omega)}$

$$\left|\int_{\Omega_f} u_i^0\overline{w}_i d\Omega\right| \leq \left\|u_i^0\right\|_{H^1(\Omega)}\left\|\overline{w}_i\right\|_{H^1(\Omega)}$$

D'où

$$\left|a\left(u^0,\overline{w}\right)\right| \leq 2\sup(\eta_2,\rho_0\omega)\left\|u_i^0\right\|_{H^1(\Omega)}\left\|\overline{w}_i\right\|_{H^1(\Omega)}$$

Elle est donc continue

Voyons si $a(\bullet,\bullet)$ est coercive : il faut montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}_+$ tel que

$a(u,u) \geq \beta\|u\|H_{1(\Omega)}$, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$.

$$\left|a\left(u^0,u^0\right)\right| = \eta_2\left|\int_{\Omega_f}\sum_{i,j}\left|\frac{\partial u_i^0}{\partial y_j}\right|^2 d\Omega\right| + \rho_0\omega\left|\int_{\Omega_f}\sum_{i,j}\left|u_i^0\right|^2 d\Omega\right|$$

$$\left|a\left(u^0,u^0\right)\right| = \eta_2\left\|\nabla u_i^0\right\|_{\left[L^2(\Omega)\right]^3} + \rho_0\omega\left\|u_i^0\right\|_{\left[L^2(\Omega)\right]^3}$$

D'où nous obtenons que :

$$\left|a\left(u^0,u^0\right)\right| \geq \eta_2 \left\|\nabla u_i^0\right\|_{\left[L^2(\Omega)\right]^3}$$

$\left\|\nabla u_i^0\right\|_{\left[L^2(\Omega)\right]^3}$ est équivalente à $\left\|\nabla u_i^0\right\|_{\left[H^1(\Omega)\right]^3}$ dans E

Ainsi

$$\left|a\left(u^0,u^0\right)\right| \geq \eta_2 \left\|\nabla u_i^0\right\|_E$$

Ce qui démontre la coercivité de $a(\bullet,\bullet)$. Nous avons donc bien existence et unicité de la solution du problème.

A.2. Le problème fluide en température

Trouver $\tau^0 \in H$ telle que :

$$\rho_0 i\omega C_p \int_{\Omega_f} \tau^0 \overline{w} d\Omega + K_d \int_{\Omega_f} \nabla_y \tau^0 \nabla_y \overline{w} d\Omega = i\omega \int_{\Omega_f} p^0 \overline{w} d\Omega \qquad \text{(A.8)}$$

Démonstration :

Posons

$$a\left(\tau^0,\overline{w}\right) = \rho_0 i\omega C_p \int_{\Omega_f} \tau^0 \overline{w} d\Omega + K_d \int_{\Omega_f} \nabla_y \tau^0 \nabla_y \overline{w} d\Omega,\ \forall \tau^0, \overline{w} \in H_0^1\left(\Omega_f\right)$$

et

$$L(\varphi) = i\omega \int_{\Omega_f} p^0 \overline{w} d\Omega\ ,\ \forall \overline{w} \in H_0^1\left(\Omega_f\right)$$

On munit $H^1\left(\Omega_f\right)$ du produit scalaire

$$\left(\tau^0,\overline{w}\right) = \int_{\Omega_f} \nabla_y \tau^0 \nabla_y \overline{w} d\Omega$$

Alors a est une forme sesquilinéaire continue définie sur $H^1\left(\Omega_f\right) \times H^1\left(\Omega_f\right)$ et L est une forme linéaire continue de $H_{Dir}^1\left(\Omega_f\right)$. De plus

$$\Re\left(a\left(\theta_\varepsilon,\theta_\varepsilon\right)\right) = \left\|\theta_\varepsilon\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

Le théorème de Lax-Milgram donne la coercivité de a .

A.3. Problème solide

Le problème variationnel donnant u_s^1 s'écrit alors :

Trouver $u_s \in H_0^1(\Omega)^N$ tel que

$$\int_{\Omega_s} \lambda^* \nabla \cdot u_s \ \nabla \cdot v \ d\Omega + \int_{\Omega_s} 2\mu^* e(u_s) e(v) d\Omega = \int_{\Omega_s} f \ v d\Omega \tag{A.9}$$

Pour pouvoir appliquer le Théorème de Lax-Milgram à la formulation variationnelle (A.10), la seule hypothèse délicate à vérifier est la coercivité de la forme bilinéaire. Nous procédons en trois étapes.

Premièrement, montrons que

$$\int_{\Omega} 2\mu^* |\varepsilon(v)|^2 \, d\Omega + \int_{\Omega} \lambda^* |\nabla \cdot v|^2 \, d\Omega \geq \nu \int_{\Omega} |\varepsilon(v)|^2 \, d\Omega$$

avec $\nu = \ min\left(2\mu^*, \left(2\mu^* + N\lambda^*\right)\right) > 0$. Pour cela, nous utilisons une inégalité algébrique : si on note $A \bullet B = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} b_{ij}$ le produit scalaire usuel des matrices symétriques, nous pouvons décomposer toute matrice réelle symétrique A sous la forme

$$A = A^d + A^h \ \text{ avec } \ A^d = A - \frac{1}{N} {}^{tr}AId \ \text{ et } A^h = \frac{1}{N} \ {}^{tr}AId \ ;$$

de telle manière que $A^d \bullet A^h = 0$ et $|A|^2 = \left|A^d\right|^2 + \left|A^h\right|^2$. On a alors

$$2\mu^* |A|^2 + \lambda^* |trA|^2 = 2\mu^* \left|A^d\right|^2 + \left(2\mu^* + N\lambda^*\right) \left|A^h\right|^2 \geq \nu |A|^2$$

avec $\nu = min\left(2\mu^*, \left(2\mu^* + N\lambda^*\right)\right)$, ce qui donne le résultat pour $A = e(u)$. Le fait que $\nu > 0$ n'est pas un hasard : les arguments mécaniques et thermodynamiques qui conduisent aux inégalités $\nu > 0$ et $\left(2\mu^* + N\lambda^*\right) > 0$ sont précisément les mêmes.

Deuxièmement, nous utilisons l'inégalité de Korn qui donne une constante $C > 0$ telle que

$$\int_{\Omega} |\varepsilon(v)|^2 \, d\Omega \geq C \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, d\Omega$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)^N$. Troisièmement, nous utilisons l'inégalité de Poincaré qui donne une constante $C > 0$ telle que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)^N$,

$$\int_{\Omega} |v|^2 \, d\Omega \leq C \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, d\Omega$$

Au total, ces trois inégalités conduisent à la coercivité

$$\int_{\Omega} 2\mu^* \left|\varepsilon(v)\right|^2 d\Omega + \int_{\Omega} \lambda^* \left|\nabla \cdot v\right|^2 d\Omega \geq C \|v\|^2_{H^1(\Omega)}$$

Le Théorème de Lax-Milgram donne donc l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle (A.9).

A.4. Etude du problème couplé

Trouver $\left(u_s^0, p^0\right) \in \left[H^1(\Omega)\right]^3 \times L^2\left(\Omega_f\right)$ tels que $\forall (v,\ q) \in \left[H^1(\Omega)\right]^3 \times L^2(\Omega)$ nous avions

$$\begin{cases} \int_{\partial\Omega} \left\langle \tilde{\sigma}_s^0 \right\rangle \cdot \vec{n} \varphi d\Gamma + \int_{\partial\Omega} \alpha p^0 \cdot \vec{n} \varphi d\Gamma = \langle \rho \rangle \omega^2 \int_{\Omega} u_s^0 \varphi d\Omega + \rho_f \omega^2 \int_{\Omega} \left\langle u^0 \right\rangle \varphi d\Omega \\ \qquad + \int_{\Omega} \left\langle \tilde{\sigma}_s^0 \right\rangle \nabla_x \varphi d\Omega + \int_{\Omega} \alpha p^0 \nabla_x \varphi d\Omega \\ \int_{\partial\Omega} \left\langle u^0 \right\rangle \cdot \vec{n} \psi d\Gamma = \int_{\Omega} \left\langle u^0 \right\rangle \nabla_x \psi d\Omega + \beta \int_{\Omega} p^0 \psi d\Omega \\ \qquad - \int_{\Omega} {}^{tr}\left[\alpha : \left\{\lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* e_x\left(u_s^0\right)\right\}\right] \psi d\Omega \end{cases} \tag{A.10}$$

Nous se plaçons dans l'espace H_f défini par :

$$H_f = \left\{ u \in \left[H^1(\Omega)\right]^3, \nabla \cdot u = 0 \quad sur\ \Omega_f \right\}$$

La pression est alors le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'être dans H_f. La démonstration se fait en deux étapes, nous commençons par montrer l'existence et l'unicité d'un déplacement $u \in H_f$ solution de (A.10), puis nous revenons à l'étude de (A.10) sur $\left[H^1(\Omega)\right]^3$ afin d'obtenir la pression p^0(voir démonstration Adeline Augier [13]).

ANNEXES B : Techniques numériques

Cette annexe rassemble les détails des dérivations liées à l'implémentation numérique du problème acoustique homogénéisés qui a été réalisé au cours de cette thèse.

B. Problème microscopique équation fluide

B.1. Problème microscopique fluide en déplacement

Trouver $u_h \in [X_h]^3$ et $p_h \in M_h$ tels que :

$$\begin{cases} -i\omega' \int_{\Omega_f} \nabla u_h : \nabla v_h + \omega'^2 \rho_0 \int_{\Omega_f} u_h v_h + \int_{\Omega_f} p_h \nabla \cdot v_h = \int_{\Omega_f} g \cdot v_h \\ \int_{\Omega_f} q_h \nabla \cdot u_h = 0 \end{cases} \tag{B.1}$$

Ecriture sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} A & 0 & B_1 \\ 0 & A & B_2 \\ {}^tB_1 & {}^tB_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{B.2}$$

Définition des coefficients intervenant (B.2) :

$$A = -i\omega' \iint_{\hat{k}} \left[E_1 \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_1} - E_2 \left(\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_1} \right) + E_3 \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_2} \right] \frac{d\lambda_1 d\lambda_2}{J_K}$$
$$+ \omega'^2 \left|\det J_k\right| \int_{\hat{k}} \hat{\varphi}_i \hat{\varphi}_j d\lambda_1 d\lambda_2$$

$$\begin{cases} E_1 = (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 \\ E_2 = (x_j - x_i)(x_k - x_i) + (y_j - y_i)(y_k - y_i) \\ E_3 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \\ E_4 = (y_k - y_i) - (x_k - x_i) \\ E_5 = (x_j - x_i) - (y_j - y_i) \end{cases},$$

$$\begin{cases} B_1 = \left|\det J_k\right| \iint_{\hat{k}} E_4 \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_1} \psi_j d\lambda_1 d\lambda_2 \\ B_2 = \left|\det J_k\right| \iint_{\hat{k}} E_5 \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_2} \psi_j d\lambda_1 d\lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1 = \left|\det J_k\right| e_1 \int_{\hat{k}} \hat{\varphi}_i d\lambda_1 d\lambda_2 \\ F_2 = \left|\det J_k\right| e_2 \int_{\hat{k}} \hat{\varphi}_i d\lambda_1 d\lambda_2 \end{cases}$$

et $\det J_K = (x_j - x_i)(y_k - y_i) - (y_j - y_i)(x_k - x_i)$

B.2. Problème microscopique équation thermique

Trouver $\tau_h \in [X_h]^3$ tels que :

$$-K_d \int_{\Omega_f} \nabla \tau_h \nabla v_h + \rho_0 j\omega \int_{\Omega_f} \tau_h \tau_h = i\omega p^0 \int_{\Omega_f} \tau_h \qquad \forall \tau_h \in \left[H^1(\Omega_f)\right]^3 \tag{B.4}$$

Ecriture sous forme matricielle

$$AT = G \tag{B.5}$$

avec

$$A = -K_d \iint_{\hat{k}} \left[E_1 \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_1} - E_2 \left(\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_1} \right) + E_3 \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_2} \right] \frac{d\lambda_1 d\lambda_2}{J_K}$$
$$+ \rho_0 j\omega \left|\det J_k\right| \int_{\hat{k}} \hat{\varphi}_i \hat{\varphi}_j d\lambda_1 d\lambda_2$$

et $G = \left|\det J_k\right| \int_{\hat{k}} \hat{\varphi}_i d\lambda_1 d\lambda_2$

B.3. Problème microscopique équation solide

B.3.1. Formulation variationnelle cherchant l'inconnue κ pour $(p^0 = 1)$

Trouver $\kappa_h \in [P_2]^3$ tel que :

$$\int_{\Omega_s} \left(\lambda^* \nabla_y \cdot \kappa_h + 2\mu^* \varepsilon_y(\kappa_h) \right) \nabla_y w_h d\Omega = \int_{\Omega_s} \nabla_y w_h d\Omega \quad \forall v_h \in [P_2]^3 \tag{B.6}$$

Ecriture sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \mu^* A + (\lambda^* + \mu^*) B_{11} & \mu^* B_{12} + \lambda^* B_{21} \\ \mu^* B_{21} + \lambda^* B_{12} & \mu^* A + (\lambda^* + \mu^*) B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} \tag{B.7}$$

avec

$$A = \iint_{\hat{k}} \left[E_1 \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_1} - E_2 \left(\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_1} \right) + E_3 \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_2} \right] \frac{d\lambda_1 d\lambda_2}{J_K}$$

$$B_{11}^{ij} = \frac{1}{J_K} \iint_{\hat{k}} \left[E_1' \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_1} - E_2' \left(\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_1} \right) + E_3' \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_2} \right] d\lambda_1 d\lambda_2$$

$$B_{12}^{ij} = \frac{1}{J_K} \iint_{\hat{k}} \left[E_1''' \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_1} - E_{2a}''' \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_2} - E_{2b}''' \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_1} + E_3''' \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_2} \right] d\lambda_1 d\lambda_2$$

$$B_{22}^{ij} = \frac{1}{J_K} \iint_{\hat{k}} \left[E_1'' \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_1} - E_2'' \left(\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_1} \right) + E_3'' \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_2} \right] d\lambda_1 d\lambda_2$$

$$B_{21}^{ij} = \frac{1}{J_K} \iint_{\hat{k}} \left[E_1''' \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_2} - E_{2a}'' \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_1} - E_{2b}'' \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_2} + E_3''' \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_1} \right] d\lambda_1 d\lambda_2$$

$$\begin{cases} G_1 = \left|\det J_k\right| \iint_{\hat{k}} E_4' \dfrac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 d\lambda_2 \\ G_2 = \left|\det J_k\right| \iint_{\hat{k}} E_5' \dfrac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_2} d\lambda_1 d\lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_1' = \left(y_k - y_i\right)^2 \\ E_2' = \left(y_k - y_i\right)\left(y_j - y_i\right) \\ E_3' = \left(y_j - y_i\right)^2 \end{cases}, \begin{cases} E_1''' = \left(y_k - y_i\right)\left(x_k - x_i\right) \\ E_{2a}'' = \left(y_k - y_i\right)\left(x_j - x_i\right) \\ E_3''' = \left(y_j - y_i\right)\left(x_j - x_i\right) \\ E_{2b}'' = \left(y_j - y_i\right)\left(x_k - x_i\right) \end{cases}, \begin{cases} E_1'' = \left(x_k - x_i\right)^2 \\ E_2'' = \left(x_k - x_i\right)\left(x_j - x_i\right) \\ E_3'' = \left(x_j - x_i\right)^2 \end{cases}$$

et $\begin{cases} E_4' = \left(y_k - y_i\right) - \left(x_k - x_i\right) \\ E_5' = \left(y_j - y_i\right) - \left(x_j - x_i\right) \end{cases}$

B.3.2. Formulation variationnelle cherchant l'inconnue ζ pour $\left(\lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_x \left(u_s^0\right) \neq 0\right)$

Trouver $\zeta_h \in \left[P_2\right]^3$ tel que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s} \left[\lambda^* \nabla_y \cdot \zeta_h + 2\mu^* \varepsilon_y \left(\zeta_h\right)\right] \nabla_y w_h d\Omega = \\ - \int_{\Omega_s} \left[\lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_x \left(u_s^0\right)\right] \nabla_y w_h d\Omega \end{aligned} \tag{B.8}$$

L'écriture sous forme matricielle de (B.8) est la même que (B.7) avec la seule différence le second membre G.

$$\begin{cases} G_1 = \left|\det J_k\right| e_1' \iint_{\hat{k}} E_4' \dfrac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 d\lambda_2 \\ G_2 = \left|\det J_k\right| e_2' \iint_{\hat{k}} E_5' \dfrac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_2} d\lambda_1 d\lambda_2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} e_1' = \left[\lambda^* \nabla \cdot u_s^0 + 2\mu^* \varepsilon\left(u_s^0\right)\right] \overrightarrow{e_x} \\ e_2' = \left[\lambda^* \nabla \cdot u_s^0 + 2\mu^* \varepsilon\left(u_s^0\right)\right] \overrightarrow{e_y} \end{cases}$$

B.4. Problème macroscopique

L'écriture sous forme matricielle du problème macroscopique est obtenue en combinant les résultats issus de la forme matricielle du problème fluide et solide en tenant compte des paramètres effectifs.

ANNEXES C : Rappel méthodes des éléments finis

C.1. Présentation de la méthode des éléments finis

La discrétisation par élément finis consiste, d'une part à définir la géométrie d'un sous-domaine élément et de faire un recouvrement du domaine total par le type (ou les types) de l'élément géométrique choisi : $\cup e_i = \Omega \quad e_i \cap e_j = \varnothing \quad \forall i \neq j \quad i = 1, N$ et d'autre part de choisir les fonctions d'interpolation [22]. Ces fonctions d'interpolation doivent bien satisfaire les conditions de continuités entre les différents éléments à l'intérieur même. Ces conditions dépendent de la forme variationnelle.

$$\int_{\Omega} [\;\;] d\Omega = \sum_{e_i} \int_{e_i} [\;\;] d\Omega \tag{C.1}$$

Sur chaque élément e_i nous avons donc à évaluer :

$$\int_{e_i} [\;\;] d\Omega$$

Formulation variationnelle du problème fluide en température :

$$-K_d \int_{\Omega_f} \nabla \tau_h \nabla \tau_h d\Omega + \rho_0 i\omega C_p \int_{\Omega_f} \tau_h \tau_h d\Omega = i\omega p^0 \int_{\Omega_f} \tau_h d\Omega \tag{C.2}$$

L'approximation sur chaque élément e_i des fonctions donne la forme matricielle suivante :

$$\tau_{j,h}(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \tau_{j,i} \varphi_i(x,y)$$

$$\sum_{e=1}^{nelt} \begin{bmatrix} A_{ii} A_{ij} \\ A_{ji} A_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix} = \rho_0 i\omega C_p \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-\lambda_1} J_K \hat{\varphi}_i \hat{\varphi}_j d\lambda_2 \right\} d\lambda_1$$

$$+ K_d \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-\lambda_1} \frac{1}{J_K} \left[E_1 \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_1} - E_2 \left(\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_1} \right) + E_3 \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \lambda_2} \right] d\lambda_2 \right\} d\lambda_1$$

$$\text{et} \quad \int_0^1 \left[\int_0^{1-\lambda_1} J_k \hat{\varphi}_i d\lambda_2 \right] d\lambda_1 = \sum_{e=1}^{n_{elt}} \left[F^e \right] \tag{C.3}$$

où les $i=1, NN_e$ (NN_e = le nombre de nœuds sur l'élément).

Phase d'assemblage

La phase d'assemblage consiste à « assembler » :

- toutes les matrices élémentaires en une seule matrice globale $[K]$
- tous les vecteurs élémentaires en un seul vecteur global $\{F\}$

tels que :

$$W = \sum_{ei} \left\{ \langle \varphi_i \rangle \underbrace{[K]}_{ei} \{T_i\} + \langle \varphi_i \rangle \left\{ \underbrace{F}_{ei} \right\} \right\} \tag{C.4}$$

Techniques d'assemblage

La technique d'assemblage que nous avons utilisé est l'assemblage par extension (peu utilisé) qui a pour principe d'augmenter les dimensions des matrices et vecteurs élémentaires aux dimensions de la matrice global et du vecteur global.

Assemblage des matrices pour chaque operateur :

C'est l'opération de sommation de la forme intégrale élémentaire sous une présentation matricielle globale :

$$\begin{bmatrix} A_{ii} & A_{ij} \\ A_{ji} & A_{jj} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & A_{ii} & A_{ij} & \dots & \\ \dots & \dots & A_{ji} & A_{jj} & A_{jn} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \tag{C.5}$$

Cette opération d'assemblage d'une matrice élémentaire ou d'un vecteur élémentaire se fait en utilisant la table de connectivite.

Assemblage des vecteurs pour chaque operateur :

Cette étape concerne généralement les sources d'excitation dans l'équation du bilan ou forme intégrale.

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} .. \\ .. \\ F_i \\ F_j \\ .. \\ .. \end{Bmatrix} \tag{C.6}$$

Assemblage global final :

- **Assemblage de la matrice globale**

Pour résoudre globalement les systèmes élémentaires :

Nous assemblons les contributions de chacun de ces systèmes dans une matrice globale en tenant compte de la connectivité entre chaque élément.

$$[A]+[B]\Rightarrow[C] \text{ et } \{F_1\}+\{F_2\}\Rightarrow\{F\} \tag{C.7}$$

- **Introduction des conditions aux limites**

Deux types de conditions peuvent être considérés :

- **Condition de Neumann** (Le flux est connu sur le bord) : Cette condition est prise en compte au niveau de la formulation intégrale faible et l'operateur associe dans le cas général est une intégrale à calculer et à assembler.
- **Condition de Dirichlet** (La variable est connue sur le bord)

$$T_i=\overline{T}_i \tag{C.8}$$

Pour tenir compte d'une telle condition on utilise la méthode du terme unité sur la diagonale. Elle consiste à modifier pour chaque donnée $U_i=\overline{U}_i$ le vecteur $\{F\}$ puis la matrice de la manière suivante :

$$\begin{cases} F_j=F_j-K_{ij}\overline{U}_i \quad j=1,...,N \ et \ j\neq i \\ F_i=\overline{U}_{ji} \\ K_{ij}=K_{ji}=0 \quad j=1,...,N \ et \ j\neq i \\ K_{ii}=0 \end{cases} \tag{C.9}$$

La condition de Ω-périodicité est satisfaite en prenant la moyenne des valeurs obtenues sur les deux nœuds correspondants.

- **Résolution**

Apres assemblage et introduction des conditions aux limites, nous arrivons à système algébrique linéaire ou non d'ailleurs qu'il faut résoudre. Il est de la forme :

$$[K]\{U_i\}=\{F_i\} \tag{C.10}$$

La résolution de ce système nous donne les valeurs cherchées aux nœuds du maillage.