Chapitre 3

Existence de la solution forte et continuité par rapport aux paramètres

3.1 Existence de la solution forte

Commençons par introduire la structure Hilbertienne suivante :

$H^{1,1}(D;H) :=$ l'espace de Hilbert obtenu en complétant $\mathscr{C}^{\infty}(\overline{D};H)$ par rapport à la norme

$$\| u \|_{1,1}^{2} = \int_{D} \left\{ \left| \frac{\partial^{2} u}{\partial t_{1} \partial t_{2}} \right|^{2} + \left| \frac{\partial u}{\partial t_{1}} \right|^{2} + \left| \frac{\partial u}{\partial t_{2}} \right|^{2} + | u |^{2} \right\} dt.$$

$H^{1}\left([0,\, T_{2}]\,; H\right) :=$ l'espace de Hilbert obtenu en complétant $\mathscr{C}^{\infty}\left([0,\, T_{2}]\,; H\right)$ par rapport à la norme

$$\|\varphi\|_{1}^{2} = \|\varphi\|^{2} + \|\varphi'\|^{2},$$

où $\|.\|$ est la norme dans $L_{2}(D;H)$.

De manière analogue on construit l'espace $H^{1}\left([0,\, T_{1}]\,; H\right)$.

Notons par E_{0} l'espace de Hilbert

$$L_{2}(D;H) \times \widetilde{H^{1}}\left([0,\, T_{2}]\,; H\right) \times \widetilde{H^{1}}\left([0,\, T_{1}]\,; H\right)$$

composé des éléments $F = (f,\, \varphi,\, \psi)$ telle que

$$|||F|||^{2} = \|f\|^{2} + \|\varphi\|_{1}^{2} + \|\psi\|_{1}^{2} \text{ est finie.}$$

$\widetilde{H^{1}}\left([0,\, T_{2}]\,; H\right) \times \widetilde{H^{1}}\left([0,\, T_{1}]\,; H\right)$ est le sous-espace fermé de

$$H^{1}\left([0,\, T_{2}]\,; H\right) \times H^{1}\left([0,\, T_{1}]\,; H\right)$$

composé des éléments $(\varphi,\, \psi)$ tels que $\overline{\mu_2}\psi(0) - \overline{\mu_1}\psi(T_1) = \overline{\mu_2}\varphi(0) - \overline{\mu_1}\varphi(T_2)$.

$H_0^{1,1}(D; W^1) :=$ le sous-espace fermé de $H^{1,1}(D; H)$ défini par

$$H_0^{1,1}\left(D; W^1\right) = \left\{u \in H^{1,1}\left(D; W^1\right) \,:\, \mu_1 u\,|_{t_1=0} - \mu_2 u\,|_{t_1=T_1} = \mu_1 u\,|_{t_2=0} - \mu_2\, u\,|_{t_2=T_2}\right\},$$

$\overset{0}{H}{}^{1,1}(D; H) :=$ le sous-espace fermé de $H^{1,1}(D; H)$ défini par

$$\left\{u \in H^{1,1}(D; H) : \overline{\mu_2}\,\varphi(0) - \overline{\mu_1}\,\varphi(T_2) = \overline{\mu_2}\,\psi(0) - \overline{\mu_1}\,\psi(T_1)\right\},$$

où $\overline{\mu_i}$ est le conjugué de μ_i.

Opérateurs de régularisation (Approximation de Yosida) (Brezis [13], proposition VII.2, p. 102).

On définit $A_\varepsilon = I + \varepsilon A$. L'opérateur A_ε possède les propriétés suivantes :

$\mathscr{P}_\varepsilon 1$: A_ε est auto-adjoint;

$\mathscr{P}_\varepsilon 2$: A_ε est uniformément positif : $(A_\varepsilon u, u) \geq (1 + \varepsilon c_0)\,|u|^2$, $\forall u \in \mathcal{D}(A), \quad \forall t \in \overline{D}$;

$\mathscr{P}_\varepsilon 3$: A_ε admet un inverse borné et on a $\|A_\varepsilon^{-1}\| \leq \dfrac{1}{(1+\varepsilon c_0)} \leq 1$;

$\mathscr{P}_\varepsilon 4$: $\|\varepsilon\, A A_\varepsilon^{-1} v\| = \|(I - A_\varepsilon^{-1})\, v\| \longrightarrow 0,\;\; \varepsilon \longrightarrow 0, \quad \forall v \in H$;

$\mathscr{P}_\varepsilon 5$: A_ε^{-1} est auto-adjoint et commute ave A $(AA_\varepsilon^{-1} = A_\varepsilon^{-1} A)$.

Etablissons maintenant la densité de l'ensemble $\mathcal{R}(L_{\lambda,\,\mu})$ dans E. Dans ce but introduisons la condition suivante :

$(\mathscr{H}_2)$ La fonction $D \ni t \longmapsto A(t) \in \mathscr{L}(W^1,\, H)$ admet des dérivées mixtes

$$A''_{t_1 t_2}(t) = \frac{\partial^2(A(t))}{\partial t_1 \partial t_2}, \quad A''_{t_2 t_1}(t) = \frac{\partial^2(A(t))}{\partial t_2 \partial t_1}$$

par rapport à la topologie de la convergence simple dans $\mathscr{L}(W^1,\, H)$, et telles que

$$A''_{t_1 t_2}(t) A^{-1}(t), \quad A''_{t_2 t_1}(t) A^{-1}(t) \in L_2(D; \mathscr{L}(H)).$$

On peut maintenant énoncer le résultat suivant :

Théorème 3.1.1 *Sous les conditions du théorème 2.3.1 et la condition* $(\mathscr{H}_2)$*, l'ensemble* $\mathcal{R}(L_{\lambda,\,\mu})$ *est dense dans* E.

Démonstration. Nous décomposons la démonstration en deux étapes :

$\boxed{\textbf{1}^{\textbf{ère}}\textbf{ étape}}$ Nous commençons par le cas $\lambda = 0$.

Soit alors $\mathcal{L}_0 = \dfrac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + A$ l'opérateur correspondant à la valeur $\lambda = 0$.

Soit $V = (v,\, v_1,\, v_2)$ un élément orthogonal à $R(L_{0,\mu})$, alors pour tout $u \in H^{1,1}(D; W^1)$ on a

$$\langle L_{0,\mu}\, u,\, V\rangle_E = \langle \mathcal{L}_0\, u,\, v\rangle + \langle l_{1\mu} u,\, v_1\rangle + \langle l_{2\mu} u,\, v_2\rangle = 0. \tag{54$_a$}$$

Démontrons que $V = (0,\, 0,\, 0)$.

Comme $l_{1\mu}$ et $l_{2\mu}$ sont indépendants et les images des opérateurs $l_{1\mu}$ et $l_{2\mu}$ sont partout denses dans les espaces correspondants, alors pour démontrer que $V = (0,\, 0,\, 0)$, il suffit de démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.1.1 *Si pour tout $v \in L_2(D; H)$, on a*

$$\langle \mathcal{L}_0 u,\, v\rangle = 0, \quad \forall u \in H_0^{1,1}(D; W^1) = \left\{u \in H^{1,1}(D; W^1) : l_{1\mu} u = 0,\ l_{2\mu} u = 0\right\}.$$

Alors $v = 0$.

Preuve. On a

$$\langle \mathcal{L}_0 u,\, v\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + Au,\, v\right\rangle = 0, \quad \forall u \in H_0^{1,1}(D; W^1). \tag{54$_b$}$$

A partir de l'équation $(54)_b$, on a

$$\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2},\, v\right\rangle = -\langle Au,\, v\rangle. \tag{55}$$

Posons

$$w = A_\varepsilon^{-1} v \text{ et } h = A_\varepsilon u, \tag{56}$$

$$B_{1\varepsilon}^* = \varepsilon A'_{t_2} A_\varepsilon^{-1}, \quad B_{2\varepsilon}^* = \varepsilon A'_{t_1} A_\varepsilon^{-1}, \quad B_{0\varepsilon}^* = \varepsilon A''_{t_2 t_1} A_\varepsilon^{-1}, \quad C_{0\varepsilon}^* = \varepsilon A''_{t_1 t_2} A_\varepsilon^{-1}, \tag{57}$$

"$*$" désigne le symbole de l'adjoint. Ici h peut être considérée comme une fonction arbitraire de $H_0^{1,1}(D; H)$.

D'après les relations :

$$(i) \quad \frac{\partial^2 (A_\varepsilon u)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\varepsilon A'_{t_2} u + A_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t_2}\right) = \varepsilon A''_{t_1 t_2} u + \varepsilon A'_{t_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} + \varepsilon A'_{t_1} \frac{\partial u}{\partial t_2} + A_\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2},$$

$$(ii) \quad \frac{\partial (\varepsilon A'_{t_2} u)}{\partial t_1} = \varepsilon A''_{t_1 t_2} u + \varepsilon A'_2 \frac{\partial u}{\partial t_1},$$

$$(iii) \quad \frac{\partial (\varepsilon A'_{t_1} u)}{\partial t_2} = \varepsilon A''_{t_2 t_1} u + \varepsilon A'_{t_1} \frac{\partial u}{\partial t_2},$$

on a

$$A_\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial^2 (A_\varepsilon u)}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial(\varepsilon A'_{t_2} u)}{\partial t_1} - \frac{\partial(\varepsilon A'_{t_1} u)}{\partial t_2} + \varepsilon A''_{t_2 t_1} u. \tag{58}$$

En remplaçant u par $A_\varepsilon^{-1} h$ dans (58), on obtient

$$A_\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial(B^*_{1\varepsilon} h)}{\partial t_1} - \frac{\partial(B^*_{2\varepsilon} h)}{\partial t_2} + B^*_{0\varepsilon} h. \tag{59}$$

L'équation (55) s'écrit alors

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, v \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, A_\varepsilon A_\varepsilon^{-1} v \right\rangle = \left\langle A_\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, A_\varepsilon^{-1} v \right\rangle \\ &= \left\langle A_\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, w \right\rangle = \left\langle A_\varepsilon u, -A A_\varepsilon^{-1} v \right\rangle = \left\langle h, -A A_\varepsilon^{-1} v \right\rangle. \end{aligned} \tag{60}$$

En remplaçant $A_\varepsilon \dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}$ par l'expression (59) dans (60), on obtient

$$\left\langle \frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial}{\partial t_1} (B^*_{1\varepsilon} h) - \frac{\partial}{\partial t_2} (B^*_{2\varepsilon} h) + B^*_{0\varepsilon} h, w \right\rangle = \left\langle h, -A A_\varepsilon^{-1} v \right\rangle, \tag{61}$$

d'où on déduit

$$\left\langle \frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial}{\partial t_1} (B^*_{1\varepsilon} h) - \frac{\partial}{\partial t_2} (B^*_{2\varepsilon} h), w \right\rangle = \left\langle h, -\left(A A_\varepsilon^{-1} + B_{0\varepsilon} A_\varepsilon^{-1} \right) v \right\rangle. \tag{62}$$

Puisque l'équation (62) est vraie pour toute fonction $h \in H_0^{1,1}(D; H)$, elle reste vraie pour $h \in C_0^\infty(D; H)$. Ce qui donne en language distributionnel

$$\begin{aligned} &\left\langle h, \frac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{1\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial t_2} \right\rangle_{\mathscr{D}'} \\ &= \left\langle h, -\left(A A_\varepsilon^{-1} + B_{0\varepsilon} A_\varepsilon^{-1} \right) v \right\rangle, \quad \forall h \in C_0^\infty(D; H). \end{aligned} \tag{63}$$

Considérons les opérateurs $\widetilde{\mathcal{L}}$ et $\widetilde{\mathcal{L}}'$ définis par

$$\begin{cases} \mathcal{D}\left(\widetilde{\mathcal{L}}\right) = \overset{0}{H}{}^{1,1}(D; H) \subset L_2(D; H) \\ \widetilde{\mathcal{L}} u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{1\varepsilon} \dfrac{\partial u}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon} \dfrac{\partial u}{\partial t_2}, \end{cases} \tag{64}$$

$$\begin{cases} \mathcal{D}\left(\widetilde{\mathcal{L}}'\right) = H_0^{1,1}(D; H) \subset L_2(D; H) \\ \widetilde{\mathcal{L}}' u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} - \dfrac{\partial}{\partial t_1} (B^*_{1\varepsilon} u) - \dfrac{\partial}{\partial t_2} (B^*_{2\varepsilon} u). \end{cases} \tag{65}$$

Montrons que $\widetilde{\mathcal{L}}'$ est l'adjoint de $\widetilde{\mathcal{L}}$.

En effet, d'après les relations :

- $$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t_1 \partial t_2},\, u\right) = \left(v,\, \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right) + \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial v}{\partial t_2},\, u\right) - \frac{\partial}{\partial t_2}\left(v,\, \frac{\partial u}{\partial t_1}\right),$$
- $$-\left(\frac{\partial}{\partial t_1}(B_{1\varepsilon}^* v),\, u\right) = \left(v,\, B_{1\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right) - \frac{\partial}{\partial t_1}\left(B_{1\varepsilon}^* v,\, u\right),$$
- $$-\left(\frac{\partial}{\partial t_2}(B_{2\varepsilon}^* v),\, u\right) = \left(v,\, B_{2\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right) - \frac{\partial}{\partial t_2}\left(B_{2\varepsilon}^* v,\, u\right),$$

pour tout $v \in H_0^{1,1}(D;H)$ et $u \in \overset{0}{H}{}^{1,1}(D;H)$, on a

$$\left\langle \widetilde{\mathcal{L}}' v,\, u \right\rangle = \int_0^{T_2}\int_0^{T_1} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial}{\partial t_1}\left(B_{1\varepsilon}^* v\right) - \frac{\partial}{\partial t_2}\left(B_{2\varepsilon}^* v\right),\, u\right) dt =$$

$$\left\langle v,\, \widetilde{\mathcal{L}} u \right\rangle + \int_0^{T_2} \left(\frac{\partial v}{\partial t_2} - B_{1\varepsilon}^* v,\, u\right) \Big|_{t_1=0}^{t_1=T_1} dt_2 - \int_0^{T_1} \left(v,\, \frac{\partial u}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon} u\right) \Big|_{t_2=0}^{t_2=T_2} dt_1. \tag{66}$$

D'après la définition de $H_0^{1,1}(D;H)$ et $\overset{0}{H}{}^{1,1}(D;H)$, on a

$$\mu_1 v\,|_{t_1=0} = \mu_2 v\,|_{t_1=T_1}, \quad \mu_1 v\,|_{t_2=0} = \mu_2 v\,|_{t_2=T_2}, \quad \mu_1 \frac{\partial v}{\partial t_2}\,|_{t_1=0} = \mu_2 \frac{\partial v}{\partial t_2}\,|_{t_1=T_1},$$

$$\overline{\mu_2} u\,|_{t_1=0} = \overline{\mu_1} u\,|_{t_1=T_1}, \quad \overline{\mu_2} u\,|_{t_2=0} = \overline{\mu_1}\,|_{t_2=T_2}, \quad \overline{\mu_2} \frac{\partial u}{\partial t_2}\,|_{t_2=0} = \overline{\mu_1} \frac{\partial u}{\partial t_2}\,|_{t_2=T_2}\,. \tag{67}$$

En injectant les expressions (67) dans les intégrales se trouvant dans (66), on trouve

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t_2} - B_{1\varepsilon}^* v,\, u\right)_{t_1=0}^{t_1=T_1} = 0, \qquad \left(v,\, \frac{\partial u}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon} u\right)_{t_2=0}^{t_2=T_2} = 0.$$

On obtient alors

$$\left(\widetilde{\mathcal{L}}' v,\, u\right) = \left(v,\, \widetilde{\mathcal{L}} u\right), \quad \forall v \in H_0^{1,1}(D;H), \quad \forall u \in \overset{0}{H}{}^{1,1}(D;H). \tag{68}$$

Revenons à l'équation (62). D'après la relation (68), l'équation (62) signifie que pour tout $\varepsilon \neq 0$, w est la solution faible du problème

$$(\mathscr{P}) \quad \begin{cases} \widetilde{\mathcal{L}} w = \dfrac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{1\varepsilon}\dfrac{\partial w}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon}\dfrac{\partial w}{\partial t_2} = -(B_{0\varepsilon}A_\varepsilon^{-1} + AA_\varepsilon^{-1}v), \\ \widetilde{l_{1\mu}} w = \overline{\mu_2} w\,|_{t_1=0} - \overline{\mu_1} w\,|_{t_1=T_1} = 0, \\ \widetilde{l_{2\mu}} w = \overline{\mu_2} w\,|_{t_2=0} - \overline{\mu_1} w\,|_{t_2=T_2} = 0, \end{cases} \tag{69}$$

avec $v \in L_2(D;H)$, $\quad B_{j\varepsilon} \in \mathscr{L}(H) \quad (j = 0,1,2)$.

Considérons l'opérateur $\widetilde{L} = (\widetilde{\mathcal{L}},\, \widetilde{l_{1\mu}},\, \widetilde{l_{2\mu}})$ agissant de $H^{1,1}(D;H)$ dans E_0.

Etudions les propriétés de cet opérateur.

Proposition 3.1.2 *L'opérateur* $\widetilde{L}$ *est un isomorphisme de* $H^{1,1}(D;H)$ *dans* E_0 *pour tout* $\mu \in \mathscr{M}$.

Preuve. Il faut démontrer que

$$(a) \quad \left|\left|\left|\widetilde{L}u\right|\right|\right|^2 \leq K_1 \left\|u\right\|_{1,1}^2, \quad \forall u \in H^{1,1}(D;H),$$

$$(b) \quad \left\|u\right\|_{1,1}^2 \leq K_2 \left|\left|\left|\widetilde{L}u\right|\right|\right|^2, \quad \forall u \in H^{1,1}(D;H),$$

$$(c) \quad R(\widetilde{L}) = E_0,$$

où K_1 et K_2 sont deux constantes positives indépendantes de u.

(a) D'après les estimations du lemme 2.2.1 et compte tenu du fait que

$$B_{j\varepsilon} \in \mathscr{L}(H), \quad \left\|1 - A_\varepsilon^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq 2,$$

on obtient

$$\left\|B_{j\varepsilon}\right\|_{\mathscr{L}(H)} = \left\|B_{j\varepsilon}^*\right\|_{\mathscr{L}(H)} = \left\|\varepsilon A_{t_j}' A_\varepsilon^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(H)} = \left\|A_{t_j}' A^{-1}(I - A_\varepsilon^{-1})\right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq$$

$$\left\|A_{t_j}' A^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(H)} \left\|(I - A_\varepsilon^{-1})\right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq C, \quad (j = 1,\, 2).$$

Une estimation de $\left|\widetilde{\mathcal{L}}u\right|$ donne

$$\left|\widetilde{\mathcal{L}}u\right|^2 = \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{1\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 \leq \left\{\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right| + \left|B_{1\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right| + \left|B_{2\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|\right\}^2$$

$$\leq \left\{\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right| + \left\|B_{1\varepsilon}\right\|_{\mathscr{L}(H)}\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right| + \left\|B_{2\varepsilon}\right\|_{\mathscr{L}(H)}\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|\right\}^2$$

$$\leq 4(1 + C)\left\{\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 + |u|^2\right\},$$

d'où on déduit

$$\left\|\widetilde{\mathcal{L}}u\right\|^2 \leq 4(1 + C)\left\|u\right\|_{1,1}^2, \quad \forall u \in H^{1,1}(D;H). \tag{70}$$

En vertu de la continuité des opérateurs $\widetilde{l_{1\mu}}$, $\widetilde{l_{2\mu}}$ de $H^{1,1}(D;H)$ dans les espaces $H^1([0,\, T_2]\,;H)$, $H^1([0,\, T_1]\,;H)$ respectivement et l'inégalité (70), on obtient

$$\left|\left|\left|\widetilde{L}u\right|\right|\right|^2 \leq K_1 \left\|u\right\|_{1,1}^2, \quad \forall u \in H^{1,1}(D;H). \tag{71}$$

Par des techniques similaires à celles utilisées pour établir l'estimation (19), on démontre

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right\|^2+\left\|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right\|^2\leq K_3\left|\left|\left|\widetilde{L}u\right|\right|\right|^2, \tag{72}$$

où $K_3=\dfrac{64(T_1+T_2+1)^2}{\sigma_i(\mu)}\exp\left(32C\left(\exp(C(T_1+T_2))\left(T_1+T_2\right)\right),\quad (i=1,2)\right.$.
D'autre part, de l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left|u\right|^2+\frac{\partial}{\partial t_2}\left|u\right|^2=2Re\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2},\,u\right),$$

découle l'inégalité

$$\left\|u\right\|^2\leq K_4\left\{\left\|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right\|^2+\left\|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right\|^2+\left\|\widetilde{l_{1\mu}}u\right\|^2+\left\|\widetilde{l_{2\mu}}u\right\|^2\right\}, \tag{73}$$

où $K_4=\dfrac{2(T_1+T_2)^2\left(1+\left|\mu_{3-i}\mu_i^{-1}\right|^2\right)^2\left(1+\left|\mu_i^{-1}\right|^2\right)}{\left(1-\left|\mu_{3-i}\mu_i^{-1}\right|^2\right)^2}$.
Sachant que

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\right\|^2\leq 2\left\|\widetilde{\mathcal{L}}u\right\|^2+4C^2\left\{\left\|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right\|^2+\left\|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right\|^2\right\}, \tag{74}$$

et en combinant les inégalités (72)-(74), on otient

$$\left\|u\right\|_{1,1}^2\leq K_2\left|\left|\left|\widetilde{L}u\right|\right|\right|^2,\quad \forall u\in H^{1,1}(D;H), \tag{75}$$

où $K_2=2(2+C^2)(1+K_3)(1+K_4)$.
De la continuité de l'opérateur $\widetilde{L}$ et l'inégalité (75), on conclut que l'opérateur $\widetilde{L}$ est un isomorphisme de $H^{1,1}(D;H)$ sur le sous-espace fermé $\mathcal{R}(\widetilde{L})=\widetilde{L}\left(H^{1,1}(D;H)\right)$. Il reste à vérifie que $R(\widetilde{L})=E_0$.
Pour cela introduisons la famille d'opérateurs $\left\{\widetilde{L_s}\right\}_{s\in[0,\,1]}$, définie par

$$\begin{cases}\widetilde{L_s}=(\widetilde{\mathcal{L}_s},\,\widetilde{l_{1\mu}},\,\widetilde{l_{2\mu}}),\quad s\in[0,\,1]\,,\\[2mm] \widetilde{\mathcal{L}_s}u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}+sBu,\quad Bu=B_{1\varepsilon}\dfrac{\partial u}{\partial t_1}+B_{2\varepsilon}\dfrac{\partial u}{\partial t_2},\\[2mm] D(\widetilde{L_s})=H^{1,1}(D,\,H).\end{cases} \tag{76}$$

On va procéder ici par la méthode de prolongement par rapport au paramètre s.

Par une procédure d'intégration simple, on montre que la solution de l'équation opérationnelle $\widetilde{L_0}u = F, \quad F = (f,\, v,\, w) \in E_0$ est donnée par l'expression

$$\int_0^{t_2}\int_0^{t_1} f(\tau)d\tau + \frac{1}{(\overline{\mu_2} - \overline{\mu_1})}\left\{v(t_2) + w(t_1) - \overline{\mu_2}w(0) + \overline{\mu_1}w(T_1)\right\}$$

$$+\frac{\overline{\mu_1}}{(\overline{\mu_2} - \overline{\mu_1})}\left\{\int_0^{t_2}\int_0^{T_1} f(\tau)d\tau + \int_0^{T_2}\int_0^{t_1} f(\tau)d\tau + \frac{\overline{\mu_1}}{(\overline{\mu_2} - \overline{\mu_1})}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1} f(\tau)d\tau\right\}. \tag{77}$$

Ce qui prouve que $\mathcal{R}(\widetilde{L_0}) = E_0$. Puisque les inégalités (71) et (75) sont vraies pour l'opérateur $\widetilde{L_0}$, on déduit que l'opérateur $\widetilde{L_0}$ est un isomorphisme de $H^{1,1}(D;H)$ sur E_0.

Pour tout $s_0,\, s \in [0,\, 1]$, on peut écrire

$$\widetilde{L_s} = \widetilde{L_{s_0}} + (s - s_0)(\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0}) \text{ avec } (\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0}) = (B,\, \widetilde{l_{1\mu}},\, \widetilde{l_{2\mu}}).$$

En appliquant des estimations élémentaires sur Bu, on obtient

$$\|Bu\|^2 \le 2C^2\,\|u\|_{1,1}^2\,, \quad \forall u \in H^{1,1}(D;H). \tag{78}$$

A partir de cette inégalité et la continuité des opérateurs $\widetilde{l_{1\mu}},\, \widetilde{l_{2\mu}}$ de $H^{1,1}(D;H)$ dans les espaces $H^1([0,\, T_2]\,;H)$, $H^1([0,\, T_1]\,;H)$ respectivement, on obtient

$$\left|\left|\left|(\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0})u\right|\right|\right|^2 \le K_5\,\|u\|_{1,1}^2\,, \quad \forall u \in H^{1,1}(D;H). \tag{79}$$

Montrons maintenant que

$$\|u\|_{1,1} \le K_6\left|\left|\left|\widetilde{L_s}u\right|\right|\right|, \quad \forall u \in H^{1,1}(D;H), \tag{80}$$

où K_6 est une constante positive indépendante de u.

En effet, d'après l'inégalité (75) on a

$$\forall s \in [0,\, 1]\,, \quad \exists C(s) > 0 \quad \text{telle que} \quad \|u\|_{1,1}^2 \le C(s)\left|\left|\left|\widetilde{L_s}u\right|\right|\right|^2, \quad \forall u \in H^{1,1}(D;H).$$

Posons $h(s) = \inf\limits_{u \in H^{1,1}(D;H)} \dfrac{\left|\left|\left|\widetilde{L_s}u\right|\right|\right|}{\|u\|_{1,1}}$, et montrons que h est continue sur $[0,\, 1]$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{K_5}}$, alors pour tout $s_0,\, s \in [0,\, 1]$ et tel que $|s_0 - s| < \delta$, on a

$$\left|\left|\left|\left|\widetilde{L_s}u\right|\right|\right| - \left|\left|\left|\widetilde{L_{s_0}}u\right|\right|\right|\right| \le \left|\left|\left|\widetilde{L_s}u - \widetilde{L_{s_0}}u\right|\right|\right| = |s_0 - s|\left|\left|\left|\widetilde{L_1}u - \widetilde{L_0}u\right|\right|\right| \le$$

$$\delta \left|\left|\left| \widetilde{L_1} u - \widetilde{L_0} u \right|\right|\right| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{K_5}} \sqrt{K_5} \left\| u \right\|_{1,1}^2 = \varepsilon \left\| u \right\|_{1,1}^2 . \tag{81}$$

A partir de l'inégalié (81), on a

$$\frac{\left|\left|\left| \widetilde{L_{s_0}} u \right|\right|\right|}{\|u\|_{1,1}} - \varepsilon \leq \frac{\left|\left|\left| \widetilde{L_s} u \right|\right|\right|}{\|u\|_{1,1}} \leq \frac{\left|\left|\left| \widetilde{L_{s_0}} u \right|\right|\right|}{\|u\|_{1,1}} + \varepsilon,$$

passons à l'infinimum sur $H^{1,1}(D; H)$, on obtient $|h(s) - h(s_0)| \leq \varepsilon$. Ce qui prouve la continuité de h sur [0, 1]. Donc la fonction h admet une borne *inf*, désignons cette borne *inf* par $\frac{1}{K_6}$ on trouve alors l'inégalité (80).

Revenons maintenant à l'équation $\widetilde{L_s} u = F$, cette équation s'écrit sous la forme

$$\widetilde{L_s} u = \widetilde{L_{s_0}} u + (s - s_0)(\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0}) u = F. \tag{82}$$

Supposons qu'on a démontré que $\mathcal{R}(\widetilde{L_{s_0}}) = E_0$ (le cas $s_0 = 0$), on va montrer que $R(\widetilde{L_s}) = E_0$ pour certains s au voisinage de s_0.

L'équation (82) est équivalente à

$$u + (s - s_0) \left(\widetilde{L_{s_0}} \right)^{-1} (\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0}) u = \left(\widetilde{L_{s_0}} \right)^{-1} F. \tag{83}$$

A partir des inégalités (79) et (80), on a

$$\left\| \left(\widetilde{L_{s_0}} \right)^{-1} F \right\|_{1,1} \leq K_6 \left|\left|\left| F \right|\right|\right| ,$$

$$\left\| \left(\widetilde{L_{s_0}} \right)^{-1} (\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0}) u \right\|_{1,1} \leq K_6 \left|\left|\left| (\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0}) u \right|\right|\right| \leq K_6 \sqrt{K_5} \left\| u \right\|_{1,1} = K_7 \left\| u \right\|_{1,1} . \tag{84}$$

Soit $s \in [0,\, 1]$ tel que $|s_0 - s| \leq \rho < \frac{1}{K_7}$, et notons par

$$\Lambda = (s - s_0) \left(\widetilde{L_{s_0}} \right)^{-1} (\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0}), \quad g = \left(\widetilde{L_{s_0}} \right)^{-1} F.$$

L'équation (83) devient

$$u + \Lambda u = g. \tag{84}$$

Calculons la norme de Λ,

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|u\|_{1,1} \leq 1} \|\Lambda u\|_{1,1} = |s - s_0| \left\| \left(\widetilde{L_{s_0}} \right)^{-1} (\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0}) u \right\|_{1,1} \leq |s - s_0| \, K_7 < 1,$$

dans ce cas l'opérateur $(I+\Lambda)$ avec $\|\Lambda\|<1$ est inversible, et la solution de l'équation (84) est donnée par la série de Neumman

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Lambda^n g, \tag{85}$$

ce qui prouve que $\mathcal{R}(\widetilde{L_s})=E_0, \quad \forall s:|s_0-s|\leq\rho<\dfrac{1}{K_7}$.
Comme on a démontré que $\mathcal{R}(\widetilde{L_0})=E_0$, on aura donc $R(\widetilde{L_s})=E_0, \quad \forall s:0<s\leq\rho$.
En suite on pose $s_0=\rho$ et on procède de la même manière, on obtient $\mathcal{R}(\widetilde{L_s})=E_0$ pout tout s tel que $0<s\leq 2\rho$. On continue ce procédé pas à pas, on obtient $\mathcal{R}(\widetilde{L_s})=E_0, \quad \forall s\in[0,\,1]$.
Pour le cas $s=1$, on trouve $\mathcal{R}(\widetilde{L_1})=R(\widetilde{L})=E_0$, d'où le résultat recherché. Ce qui achève la démonstration de la proposition 3.1.2

Proposition 3.1.3 *L'opérateur $\widetilde{L}=\widetilde{\mathcal{L}}$ donné par l'expression (64) est fermé dans la topologie de $L_2(D;H)$.*

Preuve. Soit $(u_n)\subset\mathcal{D}(\widetilde{L})=\overset{0}{H}{}^{1,1}(D;H)$ telle que

$$u_n\longrightarrow u \text{ dans } L_2(D;H), \quad \widetilde{L}u_n\longrightarrow f \text{ dans } L_2(D;H), \quad n\longrightarrow\infty.$$

Montrons que $u\in\mathcal{D}(\widetilde{L})$ et $\widetilde{L}u=f$. D'après l'inégalité (75) la suite (u_n) est une suite de Cauchy dans $H^{1,1}(D;H)$, d'où $u_n\longrightarrow v$ dans $H^{1,1}(D;H)$. Comme $\overset{0}{H}{}^{1,1}(D;H)$ est un sous-espace fermé dans $H^{1,1}(D;H)$, donc $v\in\overset{0}{H}{}^{1,1}(D;H)$. La convergence $u_n\longrightarrow v$ dans $H^{1,1}(D;H)$ entraîne la convergence $u_n\longrightarrow v$ dans $L_2(D;H)$, mais comme par hypothèse $u_n\longrightarrow u$ dans $L_2(D;H)$ et $\widetilde{L}$ est borné, on a alors $\widetilde{L}u=f$.
Ce qui achève la démonstration de la proposition 3.1.3. □
Etudions maintenant quelques propriétés de l'opérateur

$$\widetilde{L}'=\widetilde{\mathcal{L}}':H_0^{1,1}(D;H)\subset L_2(D;H)\longrightarrow L_2(D;H).$$

On a

$$\widetilde{L}'u=\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}-\frac{\partial}{\partial t_1}\left(B_{1\varepsilon}^*u\right)-\frac{\partial}{\partial t_2}\left(B_{2\varepsilon}^*u\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}-B_{1\varepsilon}^*\frac{\partial u}{\partial t_1}-B_{2\varepsilon}^*\frac{\partial u}{\partial t_2}-\left(\varepsilon A''_{t_1t_2}A_\varepsilon^{-1}+\varepsilon A''_{t_2t_1}A_\varepsilon^{-1}-B_{1\varepsilon}^*B_{2\varepsilon}^*-B_{2\varepsilon}^*B_{1\varepsilon}^*\right)u.$$

Une estimation en norme de $L_2(D;H)$ donne

$$\left\|\widetilde{\mathcal{L}}'u\right\|^2 \leq 64\max\left\{1,\, C^4,\, \int\limits_D \left\|A''_{t_1t_2}A^{-1}\right\|^2_{\mathscr{L}(H)} dt,\, \int\limits_D \left\|A''_{t_2t_1}A^{-1}\right\|^2_{\mathscr{L}(H)} dt\right\} \|u\|^2_{1,1}\,, \tag{86}$$

d'où la continuité de $\widetilde{L}'$ de $H_0^{1,1}(D;H)$ dans $L_2(D;H)$.

D'après les proposition 3.1.2, 3.1.3 et l'inégalité (86) il résulte que l'opérateur $\widetilde{L}'$ est un isomorphisme de $H_0^{1,1}(D;H)$ dans $L_2(D;H)$. Cette assertion découle du théorème des opérateurs à image fermée :

$$\begin{aligned}
&\widetilde{L} \text{ est fermé},\\
&\mathcal{R}(\widetilde{L}) = L_2(D;H),\\
&\mathcal{N}(\widetilde{L}') = \mathcal{R}(\widetilde{L})^{\perp} = \{0\}\,,\\
&\mathcal{R}(\widetilde{L}') = \overline{\mathcal{R}(\widetilde{L}')} = \mathcal{N}(\widetilde{L})^{\perp} = \{0\}^{\perp} = L_2(D;H).
\end{aligned}$$

Remarque. L'opérateur $\widetilde{L}\,'$ est fermé dans la topologie de $L_2(D;H)$.

Définition 3.1.1 On note par $\hat{\mathcal{L}}$ le prolongement faible de l'opérteur $\widetilde{\mathcal{L}}$ défini par

$$\left\langle \widetilde{\mathcal{L}}'u,\, v\right\rangle = \left\langle u,\, \hat{\mathcal{L}}v\right\rangle = \langle u,\, f\rangle\,, \quad \forall u \in\, H_0^{1,1}(D,H) \text{ et } \hat{\mathcal{L}}v = f \in\, L_2\,(D;H)\,. \tag{87}$$

Proposition 3.1.4 *Le prolongement faible $\hat{\mathcal{L}}$ coincide avec le prolongement fort, i.e.,*

$$\left(\hat{\mathcal{L}}\right)' = \widetilde{\mathcal{L}}'.$$

Preuve. Il est clair que $\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{L}}) \subset \mathcal{D}(\hat{\mathcal{L}})$. Montrons que

$$\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{L}}) = \mathcal{D}(\hat{\mathcal{L}}) \text{ et } \widetilde{\mathcal{L}}u = \hat{\mathcal{L}}u, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\hat{\mathcal{L}}).$$

D'après ce qui précède l'opérateur $\widetilde{\mathcal{L}}'$ est fermé et $\mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{L}}') = L_2\,(D;H)$, alors d'après le théorème de Banach sur les opérateurs à image fermée, l'opérateur $\left(\hat{\mathcal{L}}\right)^{-1}$ est défini sur le sous-espace fermé $\mathcal{R}(\hat{\mathcal{L}}) = \mathcal{N}(\widetilde{\mathcal{L}}')^{\perp}$ et est continu. On a

$$(i) \quad \mathcal{N}(\hat{\mathcal{L}}) = \mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{L}}')^{\perp} = \{0\}\,, \quad (ii) \quad \mathcal{N}(\widetilde{\mathcal{L}}') = \{0\}\,, \text{ d'où } \mathcal{R}(\hat{\mathcal{L}}) = L_2\,(D;H)\,,$$

d'après (ii) $\forall f \in\, L_2\,(D,H)$, il existe une solution de l'équation $\hat{\mathcal{L}}u = f$. Fixons f et soit v la solution de l'équation $\widetilde{\mathcal{L}}u = f$. Montrons que $u = v$.

En effet, d'après les relations (68) et (87), on a

$$\begin{aligned}
\left\langle z,\, \hat{\mathcal{L}}u\right\rangle &= \left\langle \widetilde{\mathcal{L}}'z,\, u\right\rangle = \langle z, f\rangle\,, \quad \forall z \in H_0^{1,1}(D;H),\\
\langle z,\, \mathcal{L}v\rangle &= \left\langle \widetilde{\mathcal{L}}'z,\, v\right\rangle = \langle z,\, f\rangle\,, \quad \forall z \in H_0^{1,1}(D;H).
\end{aligned}$$

A partir de là on obtient $\left\langle \widetilde{\mathcal{L}}' z,\, v-u \right\rangle = 0, \quad \forall z \in H_0^{1,1}(D;H)$, ce qui signifie que $w = v-u$ est la solution faible de l'équation homogène $\widetilde{L}u = 0$. Mais d'après l'unicité de la solution faible, on obtient $u = v$. D'où $u = v \in H_0^{1,1}(D;H)$ et $\widetilde{\mathcal{L}}u = \hat{\mathcal{L}}u = f$.

Ce qui achève la démonstration de la proposition 3.1.4. □

La proposition 3.1.4 affirme que la solution du problème $(\mathscr{P})$ coïncide avec la solution forte. D'où $w \in H^{1,1}(D;H) \cap L_2(D;W^1)$ et vérifie (69) au sens fort, i.e.,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{1\varepsilon}\dfrac{\partial w}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon}\dfrac{\partial w}{\partial t_2} + B_{0\varepsilon}w + Aw = 0, \\ \overline{\mu_2} w \mid_{t_1=0} = \overline{\mu_1} w \mid_{t_1=T_1}, \\ \overline{\mu_2} w \mid_{t_2=0} = \overline{\mu_1} w \mid_{t_2=T_2} = 0. \end{cases} \tag{88}$$

Le problème (88) est équivalent à l'équation opérationnelle :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{L}) = \overset{0}{H}{}^{1,1}(D;H), \\ \mathcal{L}u = \dfrac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{1\varepsilon}\dfrac{\partial w}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon}\dfrac{\partial w}{\partial t_2} + Aw = -B_{0\varepsilon}w = f. \end{cases} \tag{89}$$

Proposition 3.1.5 *Sous les conditions du théorème 2.3.1, on a l'estimation*

$$\left\| A^{\frac{1}{2}} w \right\|^2 \le K_8 \left\| \mathcal{L}w \right\|^2, \ \forall w \in \overset{0}{H}{}^{1,1}(D;H). \tag{90}$$

où $K_8 = K_8(\alpha_1,\, T_1,\, T_2)$.

Preuve. On procède par la même méthodologie que celle utilisée pour établir le théorème 2.3.1, on démontre l'estimation (90). □

A partir de l'inégalié (90), en tenant compte des conditions $(\mathscr{H}_2)$ et $(\mathscr{A}_1)$, on a la majoration

$$\| w \|^2 \le \frac{1}{c_0} \left\| A^{\frac{1}{2}} w \right\|^2 \le \frac{K_8}{c_0} \left\| B_{0\varepsilon} w \right\|^2. \tag{91}$$

En remplaçant w par $A_\varepsilon^{-1}v$ dans (91), il vient

$$\left\| A_\varepsilon^{-1} v \right\|^2 \le \frac{K_8}{c_0} \left\| B_{0\varepsilon} A_\varepsilon^{-1} v \right\|^2 \tag{92}$$

D'après $\mathscr{P}_\varepsilon 4$ on a $\|A_\varepsilon^{-1}v\|^2 \longrightarrow \|v\|^2$, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. Montrons que $\|B_{0\varepsilon}A_\varepsilon^{-1}v\|^2 \longrightarrow 0$, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

En effet, on a

$$B_{0\varepsilon}A_\varepsilon^{-1}v = \left(\varepsilon A''_{t_2t_1}A_\varepsilon^{-1}\right)^* A_\varepsilon^{-1}v = \left(\varepsilon A''_{t_2t_1}A^{-1}AA_\varepsilon^{-1}\right)^* A_\varepsilon^{-1}v$$
$$= \left(\varepsilon AA_\varepsilon^{-1}\right)^* \left(A''_{t_2t_1}A^{-1}\right)^* A_\varepsilon^{-1}v = \left(I - A_\varepsilon^{-1}\right)\left(A''_{t_2t_1}A^{-1}\right)^* A_\varepsilon^{-1}v,$$

d'où

$$\left\|B_{0\varepsilon}A_\varepsilon^{-1}v\right\| \leq \left\|\left(I - A_\varepsilon^{-1}\right)\left(A''_{t_2t_1}A^{-1}\right)^*\left(A_\varepsilon^{-1}v - v + v\right)\right\| \leq$$
$$\left\|\left(I - A_\varepsilon^{-1}\right)\left(A''_{t_2t_1}A^{-1}\right)^*\left(A_\varepsilon^{-1}v - v\right)\right\| + \left\|\left(I - A_\varepsilon^{-1}\right)\left(A''_{t_2t_1}A^{-1}\right)^* v\right\|,$$

or

$$\left\|\left(I - A_\varepsilon^{-1}\right)\left(A''_{t_2t_1}A^{-1}\right)^*\left(A_\varepsilon^{-1}v - v\right)\right\| \leq$$
$$2\left\|A''_{t_2t_1}A^{-1}\right\|_{L_2(D,\mathscr{L}(H))}\left\|\left(A_\varepsilon^{-1}v - v\right)\right\| \longrightarrow 0,\ \text{quand } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

et

$$\left\|\left(I - A_\varepsilon^{-1}\right)\left(A''_{t_2t_1}A^{-1}\right)^* v\right\| \longrightarrow 0,\ \text{quand } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

En passant dans (92) à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, on obtient $v = 0$.

Ce qui achève la démonstration de la proposition 3.1.1. □

Donc on a établit $\overline{\mathcal{R}\ (L_{\lambda,\mu})} = E$ dans le cas $\lambda = 0$.

2ème étape Considérons maintenant le cas $\lambda \neq 0$.

Par la méthode de prolongement par rapport au paramètre λ, on démontre que $\mathcal{R}(\overline{L_{\lambda,\mu}}) = \overline{\mathcal{R}(L_{\lambda,\mu})} = E$. En effet, écrivons l'opérateur $L_{\lambda,\mu} = (\mathcal{L}_\lambda,\ l_{1_\mu},\ l_{2_\mu})$ sous la forme

$$\begin{aligned} &L_{\lambda,\mu} = L_{\lambda_0,\mu} + (\lambda - \lambda_0)(L_{1,\mu} - L_{0,\mu}), \\ &\text{avec } (L_{1,\mu} - L_{0,\mu}) = (B,\ l_{1\mu},\ l_{2\mu}), \quad B \equiv A\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}. \end{aligned} \tag{93}$$

On remarque que l'opérateur $A\dfrac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}$ est continu de $\mathcal{D}(L_{\lambda,\mu})$ dans $L_2(D;H)$ (ceci découle de (4) et la définition de $|||.|||_1$).

A partir de cette remarque et la continuité des opérateurs $l_{1\mu},\ l_{2\mu}$ de $\mathcal{D}(L_{\lambda,\mu})$ dans $H^1([0,\ T_2]\,;H)$, $H^1([0,\ T_1]\,;H)$ respectivement, on obtient

$$|||(L_{1,\mu} - L_{0,\mu})u||| \leq K_9\ |||u|||_{1,1}\,, \quad \forall u \in \mathcal{D}(L_{\lambda,\mu}). \tag{94}$$

L'équation $\overline{L_{\lambda,\,\mu}}u = F$ s'écrit sous la forme

$$\overline{L_{\lambda,\,\mu}}u = \overline{L_{\lambda_0,\,\mu}}u + (\lambda - \lambda_0)\overline{(L_{1,\,\mu} - L_{0,\,\mu})}u = F. \tag{95}$$

Supposons qu'on a démontré que $\mathcal{R}(\overline{L_{\lambda,\,\mu}}) = E$ (le cas $\lambda_0 = 0$). On va démontrer que $\mathcal{R}(\overline{L_{\lambda,\,\mu}}) = E$ pour les λ au voisinage de λ_0.

L'équation (95) est équivalente à

$$u + (\lambda - \lambda_0)\left(\overline{L_{\lambda_0,\,\mu}}\right)^{-1}\overline{(L_{1,\,\mu} - L_{0,\,\mu})}u = \left(\overline{L_{\lambda_0,\,\mu}}\right)^{-1}F. \tag{96}$$

D'après l'estimation (53) et l'inégalité (94), on a

$$\left|\left|\left|\left(\overline{L_{\lambda_0,\,\mu}}\right)^{-1}F\right|\right|\right|_1 \leq \sqrt{S}\,|||F|||\,,$$

et

$$\begin{aligned}\left|\left|\left|\left(\overline{L_{\lambda_0,\,\mu}}\right)^{-1}\overline{(L_{1,\,\mu} - L_{0,\,\mu})}u\right|\right|\right|_1 &\leq \sqrt{S}\left|\left|\left|\overline{(L_{1,\,\mu} - L_{0,\,\mu})}u\right|\right|\right| \\ &\leq \sqrt{S}K_9\,|||u|||_1 = K_{10}\,|||u|||_1\,. \end{aligned} \tag{97}$$

Soit λ : $|\lambda - \lambda_0| \leq \rho < \dfrac{1}{K_{10}}$. Notons par $\Lambda = (\lambda - \lambda_0)\left(\overline{L_{\lambda_0,\,\mu}}\right)^{-1}\overline{(L_{1,\,\mu} - L_{0,\,\mu})}$ et $g = \left(\overline{L_{\lambda_0,\,\mu}}\right)^{-1}F$. L'équation (96) devient

$$u + \Lambda u = g. \tag{98}$$

On a $||\Lambda|| = \sup\limits_{D\left(\overline{L_{\lambda,\mu}}\right)} \dfrac{||\Lambda u||_1}{||u||_1} < 1$, d'où l'opérateur $(I + \Lambda)$ est inversible, et la solution de l'équation (98) est donnée par la série de Neumman $u = \sum_{n=0}^{\infty}(-\Lambda)^n g$. Ce qui prouve que $\mathcal{R}(\overline{L_{\lambda,\mu}}) = E$, $\forall\lambda : |\lambda - \lambda_0| \leq \rho < \dfrac{1}{K_{10}}$.

En suite on pose $\lambda = \rho$ et on procède de la même manière, on obtient $\mathcal{R}(\overline{L_{\lambda,\,\mu}}) = E$, $\forall\lambda : 0 < \lambda \leq 2\rho$. En procédant de la même manière pas à pas, on obtient $\mathcal{R}(\overline{L_{\lambda,\,\mu}}) = E$ pour tout $\lambda \geq 0$. Ce qui achève la démonstration du théorème 3.1.1. □

D'où le théorème suivant :

Théorème 3.1.2 *Pour tout élément $F = (f,\, \varphi,\, \psi) \in E$ il existe une et une seule solution forte généralisée $u = \left(\overline{L}_{\lambda,\,\mu}\right)^{-1}F = \overline{\left(L_{\lambda,\,\mu}^{-1}\right)}F$ du problème (1)-(2) et on a*

$$|||u|||_1^2 \leq S\,|||F|||^2\,,$$

où S est une constante positive indépendante de μ, λ, u et F.