L'enseignement des mathématiques au CP
fonctionnement, résultats et constats

1. Les programmes officiels et les contenus pédagogiques

Un socle commun de connaissances et de compétences présente les compétences à connaître et maîtriser au terme de la scolarité obligatoire. Instauré en 2005, il contient actuellement sept compétences essentielles : la maîtrise de la langue française, la pratique d'une langue vivante étrangère, les principaux éléments en mathématiques et culture scientifique et technologique, la maîtrise des techniques d'information et de communication, la culture humaniste, les compétences civiques et sociales ainsi que les capacités d'autonomie et d'initiative. La loi d'orientation et de programmation pour la refondation de l'Ecole de la République prévoit une mise à jour de ce dispositif désormais intitulé « Socle commun de connaissances, de compétences et de culture ».
A cet outil de référence pour les enseignants s'ajoute les instructions officielles de 2008 définissant les programmes scolaires. Ces objectifs d'enseignement doivent être atteints et donc intégrés à la progression suivie par l'enseignant. La manière dont ces objectifs sont atteints est laissée à la liberté pédagogique de l'enseignant qui peut recourir à des manuels ou des cahiers pédagogiques. Une réflexion est également conduite sur le contenu des instructions officielles au regard de la loi de refondation de l'Ecole et de la réforme des rythmes scolaires instaurée depuis 2014.

1.1. Les instructions officielles de 2008

Dans les années 1970 et suite aux travaux de Piaget sur le développement cognitif, les programmes avaient comme objectif principal l'appropriation des principes de la logique et de l'abstraction logico-mathématique par les élèves (à partir essentiellement des activités de sériation et de classification). On se situe alors en plein essor du constructivisme qui repose sur la nécessité d'une construction des savoirs par les élèves de manière active et non plus passive, comme cela pouvait être le cas auparavant.

Plusieurs programmes se sont ainsi succédés jusqu'aux instructions officielles de 2008, qui conservent l'idée d'une construction active des connaissances mais où l'accent est mis sur le rôle de la mémoire et de l'automatisme dans l'acquisitions des savoirs numériques.

Le programme officiel prévoit un total de 180 heures de mathématiques sur l'année, soit 1 heure 15 minutes par jour. C'est le deuxième plus gros volume d'enseignement au cycle 2 après le français, qui comptabilise 360 heures sur l'année.

Les objectifs prioritaires du CP et du CE1 sont la connaissance des nombres et le calcul. On insiste également sur la résolution de problèmes – afin de construire le sens des opérations - et sur une pratique régulière du calcul mental.

Les programmes sont divisés en quatre grands domaines :

- Nombres et calcul : dénombrer les collections, connaître la suite des nombres et les nombres décimaux, mémoriser les tables d'additions, de soustractions et de multiplications et utiliser les techniques opératoires ainsi que résoudre des problèmes.
- Géométrie : acquérir des connaissances en orientation et repérage, connaître les figures planes et les solides et utilisation des instruments géométriques.
- Grandeurs et mesures : apprendre et comparer les unités usuelles de longueur, de masse, de contenance, de temps, de monnaie et résoudre des problèmes sur ces mesures.
- Organisation et gestion des données : utilisation des tableaux et graphiques.

Chaque enseignant dispose de ces objectifs généraux et d'une liste de compétences plus précises à acquérir pour organiser librement le contenu de leur enseignement. C'est la liberté pédagogique. Il est attendu que les élèves de CP soient en mesure :

- de connaître et utiliser les nombres entiers jusqu'à 100
- de maîtriser les décompositions additives jusqu'à 20
- de comparer, ranger et encadrer les nombres
- d'écrire une suite croissante ou décroissante des nombres
- connaître les doubles inférieurs à 10 et les moitiés des nombres inférieurs à 20
- connaître la table de multiplication par 2
- calculer mentalement ou en ligne des sommes et des différences
- maîtriser la technique opératoire de l'addition, débuter celle de la soustraction
- résoudre des problèmes simples à une opération

Ce sont ces instructions officielles que l'enseignant est tenu de suivre pour construire son programme de classe. D'autres outils sont à sa disposition comme les cahiers pédagogiques qui proposent des progressions annuelles répondant aux différents objectifs du programme officiel. D'autres manuels fournissent également des exemples d'activité de classe.

1.2. Les cahiers pédagogiques

1.2.1. Le nombre au Cycle 2

Le nombre au cycle 2 (2010) est un guide didactique et pédagogique à destination des enseignants qui apporte un éclairage sur les compétences mathématiques à acquérir. Sous l'égide du Ministère de l'Education Nationale, il permet également d'apporter des pistes sur la mise en œuvre en classe.

Différents auteurs y ont rédigé des textes à visée réflexive ou pratique issus de la recherche et de l'expérience. On y insiste, tout comme dans le programme officiel, sur la résolution de problèmes et la notion de classes de problèmes, ainsi que sur la construction des automatismes (« raisonnements construits et progressivement intériorisés », *p.4*). Il est préconisé de réaliser des exercices selon un entraînement systématique et progressif.

Dans les points fondamentaux, on retrouve la pratique du calcul mental, avec des activités de pure mémorisation de nombres, de traitements de données, de transformations. Préconisées durant 10 à 15 minutes tous les jours, ces activités mobiliseront les tables d'additions, la recherche de compléments ou l'application de procédures spécifiques à notre système numérique. Au niveau de la numération, on insiste sur les situations d'échange, le groupement, l'algorithme des nombres et la lecture et l'écriture des nombres. Un accent est également mis sur les différentes représentations des nombres et leur mise en relation (essentiellement au niveau des codages symboliques et exacts).

Les trois manuels les plus utilisés par les enseignants du CP pour mettre en œuvre une progression des apprentissages mathématiques sont « Cap Math », « Picbille » et « Ermel ». Nous les décrivons ci-après brièvement en cernant la place des activités d'estimation envisagées dans ces cahiers pédagogiques.

1.2.2. « Cap Math » (Charnay, Dussuc et Madier, édition 2009)

Cette méthode propose 15 unités de travail avec, à chaque fois, 7 séances d'apprentissage, une séance bilan et des activités complémentaires. Il est très largement utilisé dans les écoles primaires.

Le principe de base de cette méthode est d'allier activités de recherche en résolution de problèmes et activités d'entraînement. Les concepteurs de « Cap Math » considèrent que les principaux éléments en mathématiques se construisent et s'entraînent par la résolution de problème du quotidien.

Le contenu est structuré sur 180 heures d'enseignement par an, soit 1 heure 30 d'activité par jour répartie en une séance de 30 minutes de calcul mental/révisions et une autre non consécutive de 45 minutes pour les nouveaux apprentissages. Une quarantaine d'heures est laissée à disposition pour les évaluations ou la réalisation d'activités supplémentaires.

La démarche pédagogique comprend toujours une phase d'apprentissage (sous forme de situations-problèmes), une phase de synthèse (pour identifier ce qui est important) et une phase d'entraînement (pour maintenir et mémoriser les connaissances). La méthode privilégie la résolution de problème, le calcul mental ainsi qu'un travail sur la compréhension.

« Cap Math » comprend un guide de l'enseignant, un livre avec le matériel à photocopier, un fichier d'entraînement et un Dico-Math. Le guide de l'enseignant contient toutes les activités détaillées pour chaque séance. Le fichier d'entraînement est un support de travail pour l'élève (Figure 4). Il contient la trace des activités réalisées durant les séances. Le dico-Math est un dictionnaire de référence sur les termes ou les méthodes utilisées en mathématiques (par ex. la valeur des chiffres, la comparaison des nombres, ..).

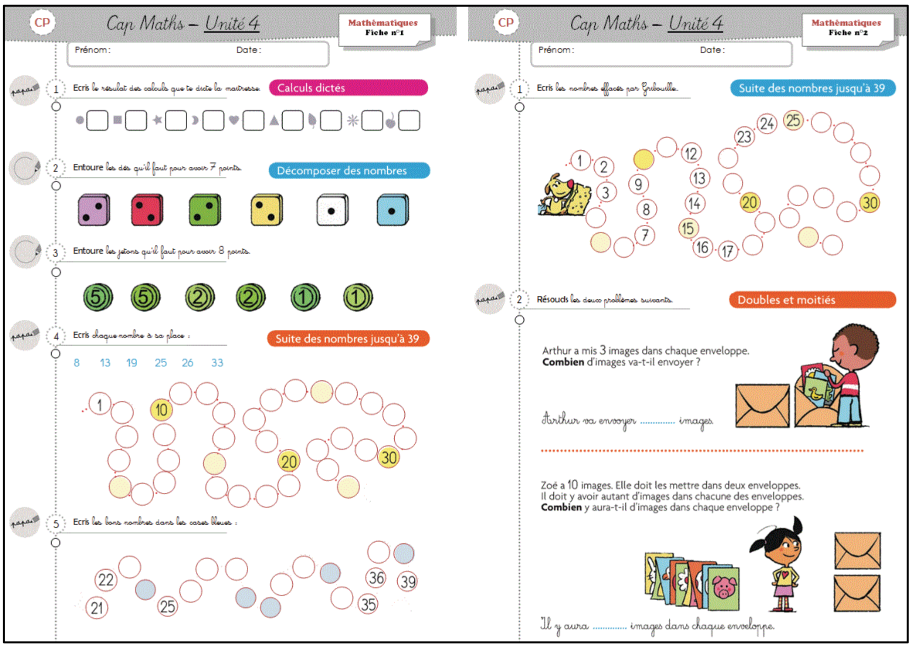

Figure 4. Exemple de fiche d'activité à destination des élèves (« Cap Math » CP, 2009)

Les activités d'estimation tiennent une place minime dans la progression « Cap Math ». En effet, on les retrouve par exemple de manière sommaire dans les premières unités d'apprentissage où il s'agit de mettre en relation une quantité avec un nombre (reconnaissance rapide et comparaison de quantités). L'estimation est ensuite principalement mobilisée dans la partie Grandeurs et Mesures pour comparer des longueurs ou des masses. Aucun travail n'est réalisé sur la mise en correspondance entre les représentations symboliques et non-symboliques ou sur la sémantique des nombres. Ainsi, dans « Cap Math », il n'y a que peu d'activités d'estimation, les activités ne portant que sur les quantités sans mise en lien avec les symboles.

1.2.3. « Picbille » (Brissiaud, Clerc, Lelièvre, Ouzoulias et Suire, 2013)

J'apprends les maths avec « Picbille » est un ouvrage pédagogique pour l'enseignement des mathématiques en classe de CP. Il s'agit d'une méthode, conçue par Rémi Brissiaud, dont l'utilisation est relativement répandue dans les classes du CP. Un des objectifs de « Picbille » est de solliciter fortement le calcul mental afin d'éviter le surcomptage.

Cette méthode est très axée sur la notion de dizaine afin d'acquérir une conscience décimale des nombres et d'aborder l'abstraction du calcul mental. Le principe est qu'on peut ranger des billes dans une boîte, 10 billes par boîte c'est à dire 10 unités (Boîte de Picbille, Figure 5). Quand une boîte est pleine on peut la fermer et on obtient ainsi une dizaine.

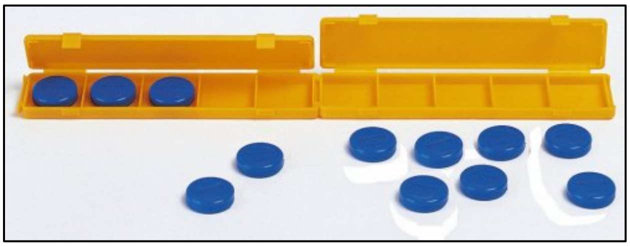

Figure 5. Boîte de Picbille

Dans la dernière édition (2013), on évolue très progressivement dans la taille des nombres pour que chaque élève accède à la décomposition. Les auteurs ont également ajouté un repère dans la boîte de Picbille à 3 unités pour aider à concevoir le nombre 5 et donc favoriser la composition/décomposition.

On dispose également d'un livret pédagogique pour l'enseignant et d'un fichier à destination des élèves qui contient les fiches propres à chaque activité (Figure 6).

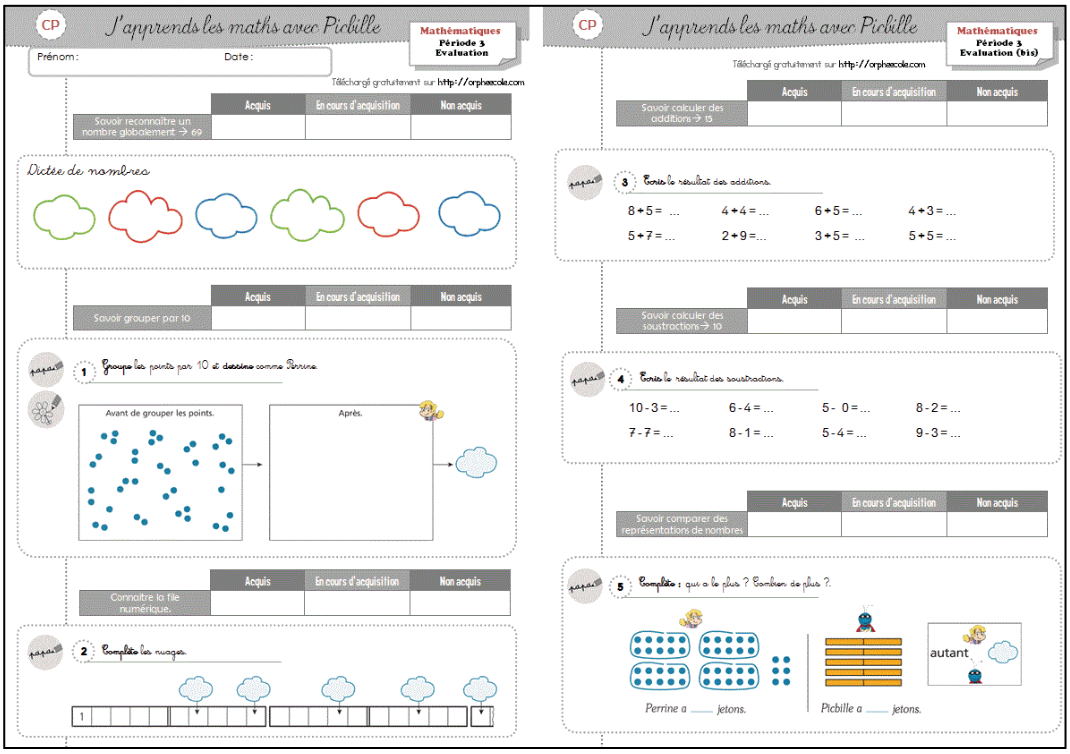

Figure 6. Exemple de fiche d'activité pour l'élève (« Picbille », 2012)

« Picbille » sollicite davantage la multi-représentations des nombres (doigts, dés, boîte de Picbille et nombre arabe) et cherche à établir des liens entre ces représentations. Toutefois, on reste dans du calcul exact, sans aucune activité d'estimation visant à développer et préciser le sens des nombres et du calcul dans tous les types de représentations.

1.2.4. « Ermel » (Guillaume, Colomb, Charnay, Douaire et Valentin, 2005)

L'ouvrage « Ermel » *Apprentissages numériques et résolution de problèmes* est issu des travaux menés par l'INRP (Institut National de Recherche Pédagogique), aujourd'hui appelé Ifé (Institut Français de l'Education). On y trouve des propositions d'enseignement qui ont toutes été expérimentées. Ses fondements sont la prise en compte des compétences initiales des enfants, l'appropriation progressive des notions à travers la résolution de problèmes et le réinvestissement réguliers des connaissances acquises.

Les activités sont détaillées selon les cinq périodes et par quinzaine en fonction de quatre types d'exercices : les nombres pour mémoriser, les nombres pour anticiper et calculer, connaître les nombres et des problèmes pour apprendre à chercher.

Outre le manuel, l'enseignant dispose d'un guide d'utilisation qui fournit les indications pertinentes pour la mise en oeuvre en classe. Il existe également un cahier de l'élève comme support d'activités (Figure 7). On y trouve les énoncés des problèmes, les exercices écrits d'entraînement, les exercices de réinvestissement et d'évaluation ainsi que des fiches de jeux.

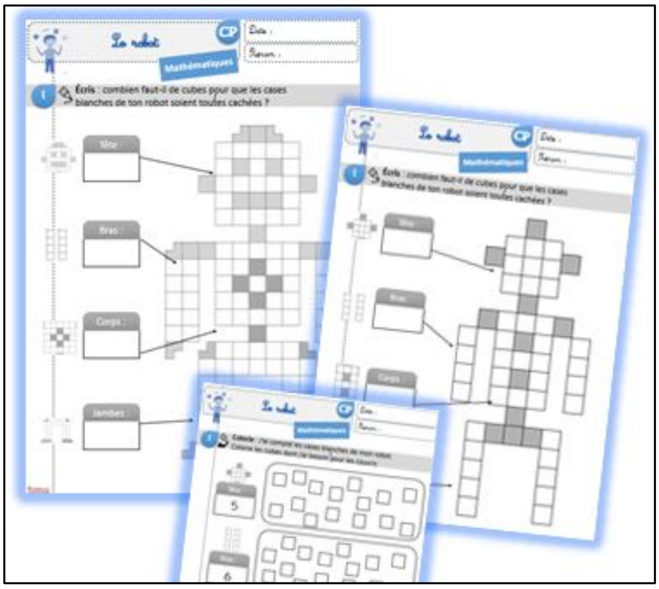

Figure 7. Exemple de fiches d'activité du cahier de l'élève (« Ermel » CP).

Les notions de cardinalité et d'ordinalité sont très présentes dans « Ermel ». Elles permettent de réfléchir quant aux comparaisons de nombres ou de quantités ou permettent de faire référence à la position des nombres les uns par rapport aux autres. Toutefois, on ne considère pas réellement l'activité d'estimation. Lorsque la référence est faite à l'estimation c'est souvent pour situer la position des nombres ou des résultats d'une opération sur une ligne numérique graduée (souvent d'unité en unité). La signalisation de cette graduation n'incite pas, bien au contraire, à l'estimation (ce qui n'enlève rien à son intérêt par ailleurs)   Par exemple, pour évaluer une quantité, l'activité d'estimation n'est pas sollicitée alors que celles du *subitizing* ou de dénombrement le sont sur une ligne graduée.

1.2.5. Conclusions sur les cahiers pédagogiques

A la fois rassurants et structurés, les cahiers pédagogiques sont une réelle référence pour les enseignants, notamment dans la discipline des mathématiques qui est une matière nettement moins investie que le français. Toutefois, il n'est toujours pas pris en compte dans ces cahiers, même dans les plus réactualisés, l'apport de l'estimation numérique et de la mise en correspondance entre représentation. Le code analogique n'est sollicité qu'en début d'année dans les activités impliquant des collections d'objets et le calcul approximatif n'est presque jamais exercé si ce n'est pour mesurer des longueurs ou sous-peser des masses.

2. Résultats des enquêtes (IVQ et PISA)

La chute des performances scolaires n'est pas surprenante, notamment au niveau des compétences en mathématiques. Les changements qui ont eu lieu depuis plusieurs décennies sur les objectifs et les exigences scolaires, la structuration des temps de classe (baisse du volume horaire), le poids pris par la lecture et l'écriture dans les apprentissages et le développement des nouvelles technologies (qui freine la pratique du calcul, notamment avec la calculatrice) ou encore le rôle que prennent les parents dans l'acquisition des connaissances scolaires de leurs enfants... sont quelques explications possibles à cette baisse de niveau. De nos jours, il est moins acceptable dans la société de ne pas savoir lire et écrire que de ne pas savoir compter. C'est l'ensemble de ces difficultés qui amènent aujourd'hui à se centrer davantage sur les difficultés d'apprentissage des mathématiques.

Depuis plusieurs décennies, des comparaisons nationales ou internationales sur les compétences académiques se sont mises en place. Les résultats montrent que le niveau de performance continue de baisser en France et que les inquiétudes grandissent.

L'enquête Information et Vie Quotidienne (IVQ, INSEE, 2011) a pour objectif de mesurer le niveau de compétences acquis par les adultes à l'oral, l'écrit et en calcul. Une première enquête a été conduite en 2004, ce qui permet à l'INSEE d'observer l'évolution de ces compétences. Cette enquête a été réalisée auprès de 14000 personnes de 16 à 65 ans résidants en France. 16% des interrogés ont des performances médiocres à moyenne en calcul (moins de 60% de réussite). Ces difficultés sont plus fréquemment rencontrées chez les femmes que chez les hommes et chez les personnes de plus de 40 ans. On observe également un lien avec le pays de scolarisation en défaveur des personnes scolarisés hors de France dans une autre langue que le français. Autre constat inquiétant : les performances se dégradent en calcul par rapport à 2004, avec une baisse (-2%) des personnes « très à l'aise » de 2004 à 2011 (Jonas, décembre 2012). Les arguments avancés pour expliquer ce résultat sont liés au vieillissement de la population et aux outils pédagogiques utilisés de nos jours (calculatrice et ordinateur notamment).

En 2013, le nouveau rapport PISA (Programme International pour le Suivi des Acquis des élèves) a relevé des résultats aussi inquiétants au niveau des performances mathématiques. Ce programme évalue les performances des élèves de 15 ans issus des pays de l'OCDE. L'évaluation de 2012 comprenait les mathématiques comme discipline majeure. Ils étaient 510 000 élèves à passer les épreuves papier-crayon d'une durée de deux heures. Certains pays ont réalisé des épreuves supplémentaires de mathématiques, de compréhension de l'écrit et de résolution de problèmes. A cela s'ajoutent différents questionnaires sur les habitudes de vie, les expériences scolaires, l'environnement d'apprentissage…

Les performances en mathématiques des élèves de 15 ans en France (495 points) sont au niveau des pays de l'OCDE (494 points). Toutefois, le score obtenu par ces élèves a diminué de 16 points comparativement au rapport PISA de 2003. A cette époque, la France avait des performances supérieures à la moyenne de l'OCDE. Le pourcentage d'élèves très performants n'a pas changé depuis 2003 (13%) mais il y a nettement plus d'élèves en difficultés (22%). Selon les critères PISA, ces élèves très en difficultés n'auraient pas atteint le niveau leur permettant « de poursuivre des études et de participer de manière efficace et productive à la vie de la société » (p.4). Ces résultats indiquent que le système éducatif s'est dégradé depuis 10 ans. En France, les élèves éprouveraient davantage de plaisir que la moyenne des pays de l'OCDE en mathématiques mais seraient par contre nettement plus anxieux, tout comme cela était le cas en 2003. Cette anxiété est plus marquée chez les filles. Les garçons devancent toujours les filles en mathématiques (+9 points). Toutefois, la baisse de performances en mathématiques depuis 2003 concerne autant les filles que les garçons.

Une forte corrélation est observée entre le milieu socio-économique et les performances mathématiques dans le rapport PISA. En effet, la corrélation est bien plus forte en France que pour les autres pays, c'est ici que les écarts sont les plus grands. L'augmentation d'une unité dans l'évaluation du statut économique et social entraîne une hausse de 57 points en mathématiques en France contre 39 points en moyenne dans l'OCDE.

En détaillant les résultats, il apparaît que les élèves français de 15 ans ont surtout des difficultés dans la compétence à « formuler des situations de manière mathématiques ». En revanche, leurs performances se situent dans la moyenne pour « interpréter les résultats » et « employer les concepts, procédures et raisonnement mathématiques ». Ce processus de formulation serait toutefois une difficulté pour la plupart des élèves de cet âge là, quel que soit le pays.

Alors, que penser des programmes scolaires enseignés aux élèves ? Donne-t-on vraiment toutes leurs chances à tous les élèves de réussir les apprentissages mathématiques ? Que fait-on des élèves les plus en difficultés, ceux n'ayant pas atteint un niveau suffisant pour la poursuite d'études supérieures? Quelques programmes de remédiations existent et s'utilisent à l'Ecole Primaire.

3. Apprentissages et remédiation en mathématiques à l'Ecole Primaire

On sait que le niveau de départ des élèves en mathématiques a d'importantes conséquences. En effet, il semblerait qu'il existe un plus grand risque de rester faible en mathématiques si le niveau d'un élève qui commence le CP est inférieur dans les compétences numériques de base (Duncan, Dowsett, Claessens, Magnuson, Huston et al., 2007). Ainsi, le niveau des élèves au début de l'enseignement primaire est prédictif de la réussite ultérieure.

Les manques et les difficultés dans l'enseignement des mathématiques ne sont pas nouveaux. Les études en psychologie et en neuropsychologie ont abouti à la création de quelques démarches pédagogiques ou de programmes de remédiation en mathématiques pour les enfants d'âge scolaire. Toutefois, nous verrons que ces démarches sont rarement utilisées dans un cadre pédagogique mais commencent à être exploitées dans un cadre rééducatif. Elles sont alors parfois difficiles à adapter au contexte de classe. De plus, les enseignants n'ont pas toujours accès à ces travaux et ne peuvent donc pas les mettre en pratique.

On peut classer ces programmes selon trois types : l'entraînement aux procédures, l'entraînement aux concepts et l'entraînement aux représentations non-symboliques (Thevenot et Masson, 2013). Ces trois catégories de programme renvoient à des fondements théoriques différents mais leur objectif est toujours de faire apprendre différemment les mathématiques aux élèves.

L'entraînement aux concepts et aux procédures sont issus de la théorie des « principes en premier» et des « principes après» que nous avons évoqués dans la première partie. Les auteurs, qui considèrent que l'enseignement doit avant tout privilégier les concepts, estiment que ce sont les connaissances conceptuelles qui permettent l'acquisition de procédures (Briars et Siegler, 1984). Pour ceux qui envisagent plutôt un enseignement basé sur les procédures avant les concepts, c'est l'application régulière de procédures qui rend possible l'extraction de régularités et de concepts en mathématiques (Briars et Siegler, 1984 ; Fuson, 1988).

Enfin, de plus en plus de chercheurs considèrent actuellement que l'acquisition des connaissances mathématiques doit passer par la l'intégration et la coordination des représentations analogiques avec les représentations symboliques conventionnelles.

3.1. L’entraînement aux procédures et aux concepts

3.1.1. L’entraînement aux procédures

Les procédures désignent l’ensemble des actions à mener pour atteindre un but. Dans le champ des mathématiques, il s’agit d’un concept central, puisque les tâches arithmétiques possèdent toutes une procédure spécifique qui permet, une fois intériorisée de gagner un temps considérable pour la résolution. C’est une manière optimale de procéder avec un moindre coût cognitif. La connaissance et l’application de procédures mathématiques correctes sont des enjeux importants pour les enseignants. Par exemple, ils feront apprendre par coeur certains calculs comme les tables d’addition ou de multiplication.

Un moyen d’entraîner aux procédures est la répétition (Ashcraft, 1992 ; Thorndike, 1921) qui permet, après plusieurs présentations, d’intérioriser la réponse et de la connaître immédiatement. Thorndike (1921) préconisait 12 répétitions dans la semaine, 24 répétitions dans les deux mois suivants puis 30 répétitions réparties par la suite pour établir une connaissance solide d’un calcul simple. La quantité de répétition est modulée en fonction des compétences de chaque enfant. Il n’y a pas eu d’autres travaux sur la quantité de répétitions nécessaires pour intégrer les savoirs.

La répétition fréquente de certaines situations mathématiques permet d’améliorer significativement la vitesse de résolution et son exactitude (Thevenot et Castel, 2012). Il s’agit donc d’une méthode d’apprentissage efficace. Toutefois, le poids des connaissances procédurales est aujourd’hui plutôt remis en question, puisqu’il semblerait que même les adultes (supposés experts) ont recourt à des calculs rapides, alors qu’ils disposent de procédures intériorisées (Barrouillet et Thevenot, 2013 ; Fayol et Thevenot, 2013).

3.1.2. L’entraînement aux concepts

Pour les auteurs concernés par ce type d’entraînement, les concepts précèderaient la construction des procédures. Les connaissances procédurales présentent l’inconvénient de se limiter à certaines situations numériques et ainsi, ne sont pas suffisantes pour optimiser les compétences en mathématiques. Les connaissances conceptuelles correspondent à « la compréhension implicite ou explicite des principes qui gouvernent un domaine » (Thevenot et Masson, 2013 ; p. 3). Ce sont donc des connaissances pratiques, flexibles et transférables.

Selon Carpenter (1986), le niveau de compétences en mathématiques s'établit justement par la capacité à lier ces deux types de connaissances. D'ailleurs, Rittle-Johnson, Siegler et Alibali (2001) ont ainsi montré que, dans l'acquisition de connaissances sur les fractions, les procédures et les concepts sont liés et évoluent en interaction, et de manière itérative. Par exemple pour les fractions, le développement des concepts liés aux décimales permet le développement de procédures qui améliorerait ensuite la maîtrise des concepts (Rittle-Johnson et al., 2001). Les élèves auraient besoin de comprendre comment procédures et concepts s'articulent entre eux. Les deux aspects seraient aux deux extrêmes d'un continuum. Les connaissances procédurales concernent les habiletés à réaliser des séquences d'actions pour résoudre un problème. Bien souvent, cela nécessite l'apprentissage des étapes de résolution pas à pas. Les connaissances conceptuelles sont quant à elles la compréhension des principes d'un domaine et des relations entre les unités d'un domaine.

Se centrer sur les concepts ne permet pas d'élaborer sur du concret et en lien avec la pratique, tandis que se centrer sur les procédures ne permet pas la généralisation. En portant à la fois sur les concepts et les procédures, l'enseignement permet la construction de connaissances adaptatives et flexibles. (Baroody et Dowker, 2003).

Un entraînement basé sur les connaissances procédures, conceptuelles ou les deux semble toutefois insuffisant, au regard des éléments dont nous disposons actuellement. Ces considérations ne prennent pas en compte le contenu des apprentissages, c'est-à-dire les représentations numériques et les liens qu'elles doivent entretenir.

3.2. L'entraînement aux représentations non-symboliques

Nous avons vu que les capacités d'estimation numérique et le rôle de la représentation sémantique des nombres ne sont pris en compte, ni dans les programmes officiels, ni dans les documents pédagogiques. En effet, la stratégie visant à estimer une valeur ou une grandeur (l'approximation) est moins stimulée à l'école élémentaire que les autres procédures de dénombrement (correspondance, comptage, *subitizing*). Elle est pourtant essentielle car elle guide le développement du sens des nombres et du calcul, et reste la plus écologique dans la vie quotidienne. Par exemple, nous n'avons jamais besoin de compter exactement le total de nos articles avant de passer en caisse pour savoir si nous avons suffisamment de monnaie. L'approximation est nécessaire également à la construction de la ligne numérique mentale puisque la représentation de la position des nombres est estimée, approximative. De plus, l'intégration entre le système numérique conventionnel et le sens des nombres permet de donner une signification aux apprentissages numériques et aux concepts mathématiques.

Ce type de considération prend petit à petit de l'ampleur dans la compréhension des apprentissages numériques. Avec les travaux de Dehaene, puis ceux de von Aster, et avec les résultats de recherches qui en découlent, la représentation analogique - et notamment le sens qu'elle véhicule - se positionne comme fondamentale dans l'apprentissage de l'arithmétique.

Parmi ces recherches, il y a celle de Park et Brannon (2013) ont mis en place un entraînement aux additions et soustractions approximatives de quantités durant 10 séances auprès d'adultes tout-venants. En pré- et post-tests, les participants doivent résoudre des problèmes additifs et soustractifs à plusieurs nombres. Les participants améliorent leurs compétences numériques approximatives au fil des séances d'entraînement et deviennent de plus en plus précis avec un ratio de plus en plus petit. Ils améliorent également leurs performances numériques symboliques après l'entraînement, ce qui indique un transfert des progrès en arithmétique non-symbolique vers les performances en arithmétique symbolique. Ces effets ne sont pas liés aux différences initiales en mathématiques ou en vocabulaire.

Comme évoqué en introduction, Hyde et ses collaborateurs (2014) ont des résultats similaires sur les performances mathématiques symboliques et exactes chez des enfants de 6-7 ans suite à un court entraînement non symbolique.

L'entraînement aux représentations non-symboliques semble pertinent et adapté auprès d'enfants, d'adolescents ou d'adultes au développement typique ou perturbé. Toutefois, très peu d'études ne s'appuient sur cette représentation dans un contexte d'apprentissage scolaire. Les premières études à en faire mention sont celles qui ont recourt aux jeux de plateaux.

3.2.1. A l'origine, les jeux de plateaux

Obersteiner, Reiss et Ufer (2013) ont réalisé auprès de 147 enfants de CP dix séances de 30 minutes d'entraînement soit au système numérique approximatif, soit au système numérique exact, soit aux deux, sur la base du jeu « The Number Race » (Wilson, Dehaene, Dubois et Fayol, 2006). Leurs résultats indiquent une amélioration des performances en arithmétique pour les deux types d'entraînement seuls, ainsi qu'une amélioration des capacités de comparaison de nombres quand l'entraînement est seulement approximatif. Les études qui s'appuient sur un entraînement analogique non-symbolique sont encore peu nombreuses car la plupart des auteurs considèrent encore souvent qu'il faut privilégier les correspondances entre les représentations symboliques.

Quelques recherches ont néanmoins étudié les effets de jeux numériques symboliques et non-symboliques comme les jeux de serpents et d'échelles (similaires au jeu de l'oie). L'avantage de ce type d'activité est qu'il permet, au cours d'une activité ludique, d'apporter à l'élève des informations sur l'arrangement des nombres et leur magnitude (Siegler et Booth, 2004). De plus, cette activité permet de créer une représentation linéaire des nombres et de matérialiser physiquement la ligne numérique mentale. Toutefois, les enfants ne sont pas tous égaux quant à l'accès à ces jeux numériques, ou même à toutes autres activités numériques. Le niveau socio-économique créé des inégalités dans l'expérience de ce type de jeux et peut ainsi, indirectement en plus d'autres facteurs, entraîner des différences dans la compréhension numérique précoce. En effet, l'expérience de ce type de jeu à la maison est corrélée positivement avec la connaissance numérique (Ramani et Siegler, 2008).

Ramani et Siegler (2008) ont créé un jeu de l'oie, « The Great Race », qui sollicite l'estimation numérique sur une ligne numérique externe. Sur le plateau de jeu, les nombres de 1 à 10 dans des cercles de couleurs sont organisés horizontalement. A chaque tour, le participant peut avancer d'une ou deux cases. Deux conditions sont possibles : la condition nombre, où le participant utilise les nombres du plateau et la condition couleurs, où le participant se réfère uniquement aux couleurs des cases. Ce jeu est utilisé par période de 15 minutes durant quatre séances auprès d'enfants de 4,6 ans en moyenne dans l'une des deux conditions. Avant et après l'entraînement, les participants ont tous réalisé un tâche de ligne numérique. Le simple entraînement à la condition nombre permettait de réduire la variabilité interindividuelle dans les compétences d'estimation numérique à la tâche de ligne numérique entre les enfants de niveau socio-économique favorisé et défavorisé. Les estimations à cette tâche suivaient davantage une courbe linéaire après les sessions de jeu. Il n'y avait pas d'effet dans la condition couleur. Ces résultats indiquent l'importance d'activités sollicitant le système analogique pour, d'une part, réduire les inégalités sociales dans les compétences numériques de base. De plus, il semblerait que ce type de jeu ait également des répercussions sur les compétences de comptage, d'identification de nombres et de comparaison relative de quantités (Ramani et Siegler, 2008).

Au final, si les activités de type jeu de l'oie génèrent des effets bénéfiques validés empiriquement, elles présentent également quelques limites à prendre en considération. Tout d'abord ce type de jeu reste d'un usage limité et sporadique au domicile familial. Ce type de jeu peut également compléter les apprentissages scolaires mais de façon restreinte. L'inconvénient en situation de classe tient aussi au fait que ce type de jeu ne peut pas vraiment se jouer à plusieurs et qu'il n'est donc pas réellement écologique. On peut enfin ajouter que la taille des valeurs numériques exercées avec ce type de jeu est limitée.

3.2.2. Les programmes informatiques de remédiation

« The Number Race » est un jeu adaptatif élaboré par Wilson, Dehaene, Pinel, Revkin, Cohen et Cohen (2006) pour améliorer le « sens du nombre ». Il s'agit d'un jeu informatisé, comme un plateau de jeu où l'enfant doit battre l'ordinateur. A chaque situation, il doit choisir l'item le plus grand des deux (quantités, nombres écrit ou oraux). Après chaque réponse, on leur présente simultanément les trois représentations. Dans des niveaux plus complexes, on peut également présenter aux enfants des additions ou des soustractions. Une étude réalisée auprès d'enfants de Maternelle dont le niveau socio-culturel de la famille est faible (Wilson, Dehaene, Dubois et Fayol, 2009). Les résultats montrent une amélioration des compétences dans les tâches de comparaison numérique non analogique (« sens du nombre »). Les auteurs concluent à une amélioration de l'accès au sens des nombres ou à la mise en correspondance entre le code analogique et les codes symbolique.

Kucian, Grond, Rotzer, Henzi, Schönmann, Plangger, Gälli, Martin et von Aster (2011) ont quant à eux mis au point un entraînement à la ligne numérique mentale, « Rescue Calcularis » pour les enfants dyscalculiques. Les enfants doivent placer des nombres, des résultats de calculs ou des quantités sur une ligne numérique allant de 0 à 100. Après un entraînement quasi-quotidien de 5 minutes par jour durant 5 semaines, les enfants deviennent plus précis dans leur représentation spatiale des nombres sur la ligne et plus performants en résolution de problèmes. Des enregistrements cérébraux ont permis de montrer également des changements d'activité dans les zones hypo-activées chez ces enfants ainsi que des arguments neuro-anatomiques en faveur d'une automatisation des processus de raisonnement mathématique après l'entraînement.

Ce type d'entraînement est similaire à celui réalisé dans notre étude avec le programme "Estimateur". Nous allons maintenant expliquer les principes de ce programme, son fonctionnement et les résultats des études qui l'ont utilisé.

3.3. L'''Estimateur"

3.3.1. Principes

L'"Estimateur" (Vilette, 2009) a été conçu avec comme objectif initial « d'apprendre aux enfants à réaliser des opérations d'additions ou de soustractions qu'ils ne parviennent pas encore à maîtriser » (Vilette, Mawart et Rusinek, 2010, p.2). Il s'agit de mettre en interaction deux systèmes de traitement du nombre et du calcul : le système symbolique verbal ou oral et le système analogique spatial. En appariant ainsi les deux types de représentations on donne du sens au système symbolique puisqu'à chaque nombre va correspondre à une grandeur. Ce type d'activités se rapproche des épreuves de *mapping* de type « *number-to-position* » (Kolkman, Kroesbergen et Leserman, 2013 ; Laski et Siegler, 2007) qui nécessite d'accéder à l'information sémantique (non symbolique) pour placer précisément un nombre symbolique.

Pour cela, on demande au sujet de situer la position d'un nombre sur une ligne de réponse bornée de 0 à 1000 au maximum, graduée ou non. Nous appelons ce type de représentation une ligne mais il ne doit pas être confondu avec la « ligne numérique mentale » où les nombres n'occupent pas le même espace (la même unité) puisqu'ils sont représentés selon leur fréquence et leur connaissance. Il ne s'agit pas non plus d'une règle graduée ou d'une bande numérique puisqu'on se situe dans l'arithmétique approximative.

Ce type de tâche d'appariement permet un apprentissage structuré sur le sens des nombres sans nécessiter de calcul exact. Il s'agit de solliciter une compétence de « bas niveau » mais qui est, comme nous l'avons vu, indispensable pour asseoir ultérieurement les apprentissages plus complexes.

Il a été programmé pour travailler différentes situations numériques : sur les collections, sur les nombres ou sur les opérations (additions, soustractions, divisions ou multiplications). Plusieurs paramètres sont à définir avant le démarrage d'une session. Cela permet entre autre d'adapter l'utilisation du logiciel au cas par cas, en fonction des caractéristiques et des possibilités de chaque sujet mais également selon sa progression individuelle. Chaque session comporte 10 items et il faut atteindre un critère de réussite de 70% de bonnes réponses pour passer à un autre niveau d'exercice.

Face à un item, le participant peut réagir de deux manières (Vilette et Schneider, 2009):

- soit il connaît précisément la réponse (calculs simples ou mémorisés) et il va alors chercher à se rapprocher le plus possible de la position du résultat sur la ligne de réponse ;

- soit il ne connaît pas la réponse et peut alors se servir de savoirs approximatifs pour le calcul (par exemple 19+23, il peut additionner 20 et 23 qui sont plus simples à calculer), ou d'approximation sur la ligne (avec le même exemple, situer à peu près 20 puis doubler la longueur sur la ligne).

L'"Estimateur" est un outil d'apprentissage scolaire qui ne peut pas se substituer aux apprentissages habituels. Il vient plutôt les compléter et les accompagner. C'est pourquoi il est indispensable d'utiliser cet outil conjointement aux activités pédagogiques qui permettent d'acquérir les connaissances mathématiques conventionnelles.

3.3.2. Fonctionnement

Le programme se présente toujours comme suit : sur un écran d'ordinateur, le programme génère aléatoirement un stimulus cible : une quantité (≤24), un calcul de quantité (addition ou soustraction), un nombre (jusqu'à 1000) ou un calcul avec des nombres écrits (addition, soustraction, multiplication ou division). Au bas de l'écran, une ligne de réponse de 0 à 1000 maximum apparaît. Cette ligne peut être graduée ou non en fonction des objectifs visés. Les participants cliquent sur la ligne à l'endroit où il pense que se positionne la quantité ou le nombre cible ce qui permet une mise en correspondance entre un nombre symbolique et sa grandeur analogique. Ils doivent répondre aussi précisément que possible. En fonction des paramètres qu'on choisit, la réponse autorisée peut s'éloigner jusqu'à +/-50 unités de la réponse attendue.

Ainsi, selon les objectifs visés, il est possible d'ajuster plusieurs paramètres :

- le type de situation problème : activité sur les quantités, sur les nombres, addition, soustraction, division ou multiplication ;
- la taille du champ numérique : 0 à 12, 0 à 24, 0 à 60, 0 à 100, 0 à 500 ou 0 à 1000 ;
- la graduation de la ligne numérique : graduée à la moitié, au quart, à la dizaine, à la centaine, ou à pas de 1 ;
- la précision attendue pour la réponse : précision à plus ou moins une, deux, trois, cinq, dix ou cinquante unité(s).

3.3.3. Résultats antérieurs

Après une étude exploratoire qui a révélé l'intérêt des enfants à utiliser l'"Estimateur", des études de remédiation ont eu lieu afin de tester les effets du programme. Une première étude, menée en 2008 sur 20 élèves de CM2 présentant d'importantes difficultés en mathématiques a montré des résultats très encourageants (Vilette, Mawart et Rusinek, 2010). Initialement, tous les élèves ont des performances mathématiques inférieures au premier quartile des normes au ZAREKI-R (score inférieur à 132). La moitié des participants a bénéficié de sept sessions d'entraînement au calcul exact par l'intermédiaire de jeux informatiques usuels et l'autre moitié a suivi sept sessions d'entraînement sur l'"Estimateur" sur les additions et les soustractions. Les résultats sont sans appel : 70% des enfants du groupe qui a utilisé l'"Estimateur" obtiennent un score supérieur à 132 au ZAREKI-R alors qu'ils ne sont que 30% dans le groupe contrôle. Ces premiers résultats justifient la pertinence d'un entraînement au calcul approximatif et à l'appariement entre représentations par rapport aux apprentissages numériques exacts classiques.

Par la suite, l'"Estimateur" a été utilisé auprès d'enfants qui présentent une dyscalculie (performances en mathématiques inférieures à deux écarts-types au ZAREKI-R avec au moins deux années d'apprentissages) associée à un trouble du langage écrit et/ou oral. L'entraînement correspond à sept séances d'environ 45 minutes dont la progression évolue en fonction des performances initiales de l'enfant, ses difficultés, ses progrès et sa motivation. On fait varier la difficulté des situations proposées en terme d'opérations (dénombrement, addition puis soustraction), de taille des nombres (0 à 12, 0 à 32, 0 à 60... jusqu'à 1000 si possible), et de nombres de repères sur la ligne (unités, dizaines, centaines, au quart, à la moitié, sans repères). L'objectif final est de réussir une situation numérique sur une taille de nombres élevée avec le moins de repères possible sur la ligne numérique. Des études de cas sont décrites par Vilette et Schneider (2011). Même si les résultats varient d'un enfant à l'autre, les performances en mathématiques s'améliorent chez tous les participants. De plus, les résultats indiquent que les troubles langagiers se répercutent sur l'appariement entre les codes et la représentation mentale des nombres. Toutefois, cela n'empêche pas la connaissance sur les grandeurs et leurs comparaisons.

Nous évoquerons dans la troisième partie, une étude où l'"Estimateur" a été utilisé auprès d'enfants et d'adolescents atteints de trisomie 21. Dans ce syndrome, les difficultés mathématiques sont très marquées tandis que les difficultés langagières sont moins importantes.

Comme nous l'avons vu précédemment, un ensemble d'études en neuropsychologie, en psychologie du développement et en neuroimagerie, ont démontré le rôle du code analogique dans la construction du nombre chez les enfants. La représentation analogique et sa mise en correspondance avec le système symbolique conventionnel sont indispensables aux apprentissages puisqu'ils permettent de donner du sens aux nombres symboliques et aux calculs. De même, il existerait un lien très fort entre les capacités des enfants à mobiliser le code analogique et leurs compétences arithmétiques ultérieures (Halberda, Mazzocco et Feigenson, 2008 ; Piazza, Facoetti, Trussardi et al., 2010).

Toutefois, ces aspects ne sont pas pris en compte dans la construction des programmes officiels d'enseignement et les compétences qui y sont rattachées ne sont pas entraînées à l'école Elémentaire. Et comme le montrent les enquêtes nationales et internationales, les enfants sont « mauvais élèves » en mathématiques et leur niveau continue de s'affaiblir. Ainsi, nous faisons l'hypothèse que les difficultés d'apprentissage proviennent d'un enseignement détaché du sens des nombres et du calcul. Il apparaît alors essentiel de structurer l'enseignement autour de l'interaction entre les systèmes symboliques et analogique. Pour cela, nous avons intégré l'utilisation de l'"Estimateur" en parallèle avec d'autres activités dans une recherche de grandeur ampleur (plusieurs académies étant impliquées) visant à tester une nouvelle progression mathématique pour le Cours Préparatoire. Nous allons maintenant présenter cette étude, ses objectifs et les résultats actuels.