Permutations, partitions et représentations du groupe symétrique

Dans ce qui suit, n est un entier positif ou nul, et $[\![1,n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre 1 et n. Ce premier chapitre est consacré à l'étude des **permutations** de $[\![1,n]\!]$, c'est-à-dire les applications bijectives $\sigma : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$.

1.1 Groupe symétrique et classes de conjugaison

Le **groupe symétrique** d'ordre n est le groupe des permutations de $[\![1,n]\!]$, la loi de groupe étant la composition des applications. Ce groupe fini sera noté $\mathfrak{S}_n$, et il contient

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

éléments. Une permutation peut être donnée par son **mot** — c'est-à-dire la suite de ses valeurs — ou par sa décomposition en **cycles à supports disjoints**. Ainsi, la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_8$ dont le mot est 38254761 admet pour décomposition en cycles

$$\sigma = (1,3,2,8)(4,5)(6,7)\,,$$

et cette décomposition est unique à permutation des cycles près. Le **type** d'une permutation est la suite ordonnée des tailles des orbites de la permutation ; ainsi, $\sigma = 38254761$ a pour type $t(\sigma) = (4,2,2)$. D'autre part, deux permutations σ_1 et σ_2 de même taille n sont dites **conjuguées** s'il existe une permutation $\tau \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma_2 = \tau \circ \sigma_1 \circ \tau^{-1}$.

Proposition 1.1 (Classes de conjugaison du groupe symétrique). *Deux permutations de $\mathfrak{S}_n$ sont conjuguées si et seulement si elles ont même type. Ainsi, les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ sont paramétrées par les partitions de taille n, c'est-à-dire les suites décroissantes d'entiers positifs $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r)$ telles que $|\lambda| = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$.*

En effet, si τ est une permutation et si $c = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ est un cycle, alors le conjugué $\tau c \tau^{-1}$ est le cycle

$$c^{\tau} = (\tau(a_1), \tau(a_2), \ldots, \tau(a_m))\,.$$

De plus, tout cycle de longueur m est obtenu de la sorte en choisissant convenablement τ. D'autre part, la conjugaison par τ est un morphisme de groupes $\mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n$. Par suite, si σ est le produit de cycles disjoints de longueurs respectives $l_1, \ldots, l_r$, alors les conjugués de σ sont toutes les permutations qui sont des produits de cycles disjoints de longueurs $l_1, \ldots, l_r$. Et à réindexation des cycles près, on peut supposer $l_1 \geqslant l_2 \geqslant \cdots \geqslant l_r$, donc les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ sont bien indexées par les partitions de taille n.

1.2 Partitions et fonctions symétriques

Nous noterons $\mathscr{Y}_n$ l'ensemble des **partitions** de l'entier n, et $\mathscr{Y} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{Y}_n$ l'ensemble de toutes les partitions. La **longueur** d'une partition est son nombre de parts $\ell(\lambda)$; son **poids** ou sa **taille** est la somme de ses parts $|\lambda|$. Nous aurons également besoin de la quantité

$$b(\lambda) = \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} (i-1)\,\lambda_i\,,$$

qui intervient dans de nombreuses formules pour les algèbres d'Hecke et les groupes linéaires finis. Par exemple, si $\lambda = (5,4,2)$, alors $|\lambda| = 11$, $\ell(\lambda) = 3$ et $b(\lambda) = 8$. Une partition sera souvent représentée par son **diagramme de Young** (on parle aussi de diagramme de Ferrers) : c'est le tableau à r lignes avec λ_1 cases sur la première ligne, λ_2 cases sur la seconde ligne, etc. Par exemple, le diagramme de la partition $(5,4,2)$ est :

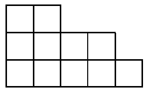


FIGURE 1.1 – Diagramme de Young de la partition $(5,4,2)$ (dessiné à la française, c'est-à-dire du bas vers le haut).

La **partition conjuguée** de λ est la partition de même taille λ' obtenue en échangeant les lignes et les colonnes du diagramme ; par exemple, $(5,4,2)' = (3,3,2,2,1)$. D'autre part, le **contenu** d'une case (x,y) du diagramme est la différence $c(x,y) = x - y$, et le contenu d'un diagramme est la somme $c(\lambda)$ des contenus des cases. On voit aisément que $c(\lambda) = b(\lambda') - b(\lambda)$ pour tout diagramme :

$$c(5,4,2) = \begin{array}{|c|c|ccc} \hline -2 & -1 & & & \\ \hline -1 & 0 & 1 & \multicolumn{1}{c|}{2} & \\ \hline 0 & 1 & 2 & \multicolumn{1}{c|}{3} & \multicolumn{1}{c|}{4} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|ccc} \hline & 1 & & & \\ \hline & 1 & 2 & \multicolumn{1}{c|}{3} & \\ \hline & 1 & 2 & \multicolumn{1}{c|}{3} & \multicolumn{1}{c|}{4} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|ccc} \hline 2 & 2 & & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & \multicolumn{1}{c|}{1} & \\ \hline & & & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \end{array}$$

$$= b(5,4,2)' - b(5,4,2)$$

Enfin, une partition λ pourra être écrite multiplicativement sous la forme

$$\lambda = 1^{m_1}\, 2^{m_2}\, \cdots\, s^{m_s},$$

où $m_k = m_k(\lambda)$ est le nombre de parts égale à k dans λ. Cette écriture permet de déterminer la taille de la classe de conjugaison associée à λ dans $\mathfrak{S}_n$: en effet, le centralisateur d'une permutation de type λ a pour cardinal

$$z_\lambda = \prod_{k\geqslant 1} m_k!\; k^{m_k},$$

et la classe de conjugaison C_λ a donc pour cardinal $c_\lambda = n!/z_\lambda$.

En dehors du contexte précédemment évoqué, la classe combinatoire des partitions d'entiers intervient classiquement dans la théorie des fonctions symétriques. Rappelons qu'un polynôme en m variables $p(x_1,\ldots,x_m)$ est dit **symétrique** si

$$p(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(m)}) = p(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_m$. L'ensemble $\Lambda_R(m)$ des polynômes symétriques en m variables et à coefficients dans un anneau commutatif R est un anneau gradué par le degré. De plus, la spécialisation $x_{m+1} = 0$ fournit un morphisme d'anneaux gradués surjectif $\Lambda_R(m+1) \to \Lambda_R(m)$, d'où une famille dirigée d'anneaux gradués $(\Lambda_R(m))_{m \in \mathbb{N}}$. On appelle **fonction symétrique** un élément de la limite projective (dans la catégorie des anneaux gradués) :

$$\Lambda_R = \varprojlim_{m \to \infty} \Lambda_R(m)\,.$$

Un tel objet peut être spécialisé en n'importe quel alphabet fini $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, et aussi en des alphabets infinis dénombrables. En faisant agir le groupe symétrique $\mathfrak{S}_m$ sur les monômes, on voit que les polynômes

$$m_\lambda(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_r} (x_{i_1})^{\lambda_1} (x_{i_2})^{\lambda_2} \cdots (x_{i_r})^{\lambda_r}$$

avec λ partition de longueur inférieure à m forment une R-base de $\Lambda_R(m)$. La limite projective ôte la restriction $\ell(\lambda) \leqslant m$, donc Λ_R admet une base $(m_\lambda)_{\lambda \in \mathscr{Y}}$ indexée par les partitions — on dit que les $m_\lambda(x)$ sont les **fonctions monomiales**. Ce résultat implique en particulier l'identité $\Lambda_R = \Lambda_\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} R$ pour tout anneau commutatif R ; la plupart des raisonnements de fonctions symétriques pourront donc être effectués dans $\Lambda = \Lambda_\mathbb{Z}$.

Depuis Newton, on connaît des bases algébriques de l'algèbre Λ (ou $\Lambda_\mathbb{Q}$), à savoir, les **fonctions élémentaires**, les **fonctions homogènes** et les **fonctions sommes de puissances** :

$$e_n(x) = m_{1^n}(x) = \sum_{i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} \quad ; \quad h_n(x) = \sum_{\lambda \in \mathscr{Y}_n} m_\lambda(x) \quad ; \quad p_n(x) = \sum_i (x_i)^n\,.$$

Exemple. Développées sur l'alphabet $X = \{a, b, c\}$, les fonctions symétriques e_3, h_3 et p_3 s'écrivent :

$$\begin{aligned} &e_3(X) = abc \qquad ; \qquad p_3(X) = a^3 + b^3 + c^3 \qquad ; \\ &h_3(X) = a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b + abc\,. \end{aligned}$$

On renvoie à [Mac95, §1.2] pour une démonstration complète de la proposition suivante :

Proposition 1.2 (Bases algébriques des fonctions symétriques)**.** *L'anneau des fonctions symétriques est librement engendré par les fonctions élémentaires ou les fonctions homogènes :*

$$\Lambda = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots] = \mathbb{Z}[h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots]\,.$$

Il en va de même pour les sommes de puissances si l'on étend l'anneau de base au corps des nombres rationnels : $\Lambda_\mathbb{Q} = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots]$.

Une preuve agréable consiste à introduire les séries génératrices :

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(x)\, t^n \quad ; \quad H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)\, t^n \quad ; \quad P(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x)\, \frac{t^n}{n}\,.$$

En effet, $H(t) = E(-t)^{-1}$ et $P(t) = \log H(t)$.

Dans ce qui suit, si $\lambda \in \mathscr{Y}$, on notera $e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots e_{\lambda_r}$, et de même pour h_λ et p_λ. Les familles $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathscr{Y}}$, $(h_\lambda)_{\lambda \in \mathscr{Y}}$ et $(p_\lambda)_{\lambda \in \mathscr{Y}}$ forment des bases linéaires de $\Lambda_{\mathbb{Q}}$, et toutes ces bases sont homogènes :

$$\forall \lambda,\ \deg m_\lambda = \deg e_\lambda = \deg h_\lambda = \deg p_\lambda = |\lambda|\,.$$

Un produit scalaire sur l'anneau Λ est défini par $\langle p_\lambda \mid p_\mu \rangle = z_\lambda\, \delta_{\lambda\mu}$ — c'est le **produit de Hall**. D'autre part, on peut définir un coproduit m^* en posant

$$m^*(p_n) = p_n \otimes 1 + 1 \otimes p_n\,,$$

et en imposant que $m^* : \Lambda \to \Lambda \otimes \Lambda$ soit un morphisme d'anneaux. Alors, on peut montrer que $(\Lambda, m, m^*, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ est une **algèbre de Hopf** [1] ; l'unité est le plongement $\varepsilon : \mathbb{Z} \to \Lambda$, la counité est l'application

$$\varepsilon^* : f \in \Lambda \mapsto f(0, 0, \ldots, 0, \ldots) \in \mathbb{Z}\,,$$

et l'antipode est définie par $S(e_\lambda) = h_\lambda$ et $S(h_\lambda) = e_\lambda$. De plus, l'algèbre de Hopf Λ est **autoadjointe**, c'est-à-dire que vis-à-vis du produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, le coproduit est l'application duale du produit, la counité est l'application duale de l'unité, et l'antipode est autoadjointe. Cette structure additionnelle jouera un rôle important dans l'isomorphisme de Frobenius-Schur, *cf.* le paragraphe §1.4 — on renvoie d'autre part à [Car06] pour un exposé général de la théorie des algèbres de Hopf.

1.3 Tableaux et représentations des groupes symétriques

Si G est un groupe (fini), on rappelle qu'une **représentation** (linéaire, complexe, de dimension finie) de G est la donnée d'un morphisme de groupes $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, où V est un espace vectoriel complexe (de dimension finie). Alternativement, une représentation de G est la donnée d'un $\mathbb{C}G$**-module** V, où $\mathbb{C}G$ désigne l'algèbre du groupe G, c'est-à-dire l'espace des combinaisons linéaires formelles

$$f = \sum_{g \in G} f(g)\, g$$

d'éléments du groupe. On peut aussi voir $\mathbb{C}G$ comme l'algèbre des fonctions complexes sur le groupe, avec pour multiplication le produit de convolution des fonctions :

$$f_1 * f_2(g) = \sum_{hk = g} f_1(h)\, f_2(k) = \sum_{h \in G} f_1(h)\, f_2(h^{-1} g)\,.$$

Toute représentation d'un groupe fini G se scinde de manière unique en somme directe de **représentations irréductibles** (c'est-à-dire des $\mathbb{C}G$-modules **simples**), et les classes d'isomorphismes de $\mathbb{C}G$-modules simples forment un ensemble $\widehat{G}$ fini. D'autre part, une représentation (ρ, V) d'un groupe fini G est déterminée à isomorphisme près par son caractère $\varsigma^V : g \mapsto \operatorname{tr} \rho(g)$, et les caractères irréductibles forment une base orthonormale de la sous-algèbre $(\mathbb{C}G)^G$ de $\mathbb{C}G$ constituée des **fonctions centrales**

$$(\mathbb{C}G)^G = \{f \mid \forall g, h,\ f(gh) = f(hg)\} = \{f \mid \forall g, h,\ f(hgh^{-1}) = f(g)\},$$

1. Les sommes de puissances ne forment pas une $\mathbb{Z}$-base de Λ, mais en utilisant les relations de Newton, on peut montrer que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ et m^* sont correctement définis sur $\mathbb{Z}$ (et pas seulement sur $\mathbb{Q}$). En particulier, la base duale de $(h_\lambda)_{\lambda \in \mathscr{Y}}$ est $(m_\lambda)_{\lambda \in \mathscr{Y}}$, et $m^*(h_n) = \sum_{p+q=n} h_p \otimes h_q$.

le produit scalaire sur $\mathbb{C}G$ étant défini par

$$\langle f_1 \mid f_2 \rangle = \frac{1}{\mathrm{card}\, G} \sum_{g \in G} \overline{f_1(g)}\, f_2(g)\,.$$

Notons qu'alternativement, on peut voir $(\mathbb{C}G)^G$ comme le centre de l'algèbre $\mathbb{C}G$. Tous ces points sont exposés en détail dans [JL93] ou [Ser77]. Nous aurons essentiellement besoin de l'orthonormalité de la base des caractères irréductibles, qui implique en particulier le point suivant : le nombre de caractères irréductibles d'un groupe fini G est toujours égal au nombre de classes de conjugaison de G. Un autre fait qui mérite d'être précisé ici est la décomposition de la **représentation régulière** (gauche) en somme de modules irréductibles. Ainsi, pour tout groupe fini G, chaque $\mathbb{C}G$-module irréductible V intervient $\dim V$ fois dans $\mathbb{C}G$:

$$\mathbb{C}G \simeq_{\mathbb{C}G} \bigoplus_{(\rho,V)\in\widehat{G}} (\dim V)\, V\,.$$

Ce résultat peut être vu comme une conséquence du théorème de Wedderburn : en tant qu'algèbre semi-simple sur un corps algébriquement clos, $\mathbb{C}G$ est une somme directe d'algèbres de matrices, et la décomposition en blocs de $\mathbb{C}G$ est

$$\mathbb{C}G \simeq \bigoplus_{(\rho,V)\in\widehat{G}} \mathrm{End}(V)\,.$$

Un isomorphisme est donné par la **transformée de Fourier abstraite**, qui à $f = \sum_{g\in G} f(g)\, g$ associe

$$\widehat{f} = \bigoplus_{(\rho,V)\in\widehat{G}} \left(\sum_{g\in G} f(g)\, \rho(g) \right).$$

Cette transformée est même une isométrie d'espaces L^2 non commutatifs, voir la section 3.2. Ceci motivera l'introduction de la mesure de Plancherel d'un groupe fini, qui est la duale de la mesure de Haar.

Détaillons maintenant cette théorie générale dans le cas particulier où G est le groupe symétrique d'ordre n. D'après ce qui précède, les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ sont en même nombre que les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$, et il existe donc une indexation de ces représentations par les partitions $\lambda \in \mathscr{Y}_n$. Une description explicite des modules simples V^λ est due à A. Young, et elle repose sur la combinatoire des **tableaux**. Si λ est une partition de taille n, on appelle **tableau standard** de forme λ une numérotation des cases du diagramme λ par les entiers de $[\![1, n]\!]$, les entrées étant strictement croissantes selon les lignes et selon les colonnes. Par exemple,

2	5	
1	3	4

est un tableau standard de forme $(3,2)$. D'autre part, pour toute partition λ, notons $\Delta_\lambda(x)$ le polynôme en n variables défini par :

$$\Delta_\lambda(x) = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \Delta(x_{\lambda_1+\cdots+\lambda_{i-1}+1}, \ldots, x_{\lambda_1+\cdots+\lambda_i}) = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \left(\prod_{\lambda_1+\cdots+\lambda_{i-1}+1 \leqslant j < k \leqslant \lambda_1+\cdots+\lambda_i} (x_j - x_k) \right).$$

Par exemple, $\Delta_{(3,2)}(x) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_4 - x_5)$. Plus généralement, si T est un tableau standard de type λ, nous noterons $\Delta_T(x)$ le polynôme produit des différences de deux cases prises sur la même ligne ; par exemple, le polynôme associé au tableau de la page précédente est $\Delta_T(x) = (x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_3 - x_4)(x_2 - x_5)$.

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit sur $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ par permutation des variables, et on appelle **module de Specht** de type λ le $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$-module V^λ engendré par le polynôme $\Delta_\lambda(x)$. On renvoie à [JK81] ou à [Ful97, chapitre 7] pour une preuve du résultat fondamental suivant [2] :

Proposition 1.3 (Représentations irréductibles du groupe symétrique)**.** *Les modules V^λ sont deux à deux non isomorphes, et ils forment un système complet de représentations irréductibles du groupe $\mathfrak{S}_n$. De plus, pour toute partition λ, le module V^λ admet pour base les polynômes $\Delta_T(x)$, où T parcourt l'ensemble* $\mathrm{Std}(\lambda)$ *des tableaux standards de forme λ.*

En particulier, la dimension de V^λ est le nombre de tableaux standards de forme λ, et compte tenu de la décomposition de la représentation régulière

$$\mathbb{C}\mathfrak{S}_n = \sum_{\lambda \in \mathscr{Y}_n} (\dim \lambda)\, V^\lambda,$$

$n!$ est égal à la somme des carrés des cardinaux $|\mathrm{Std}(\lambda)|$. Nous donnerons plus loin une preuve combinatoire de cette **identité des carrés**. Dans ce qui suit, nous adopterons l'indexation de Specht des modules irréductibles de $\mathfrak{S}_n$, à ceci près qu'on conjuguera les diagrammes, c'est-à-dire que $V^\lambda = \mathbb{C}\mathfrak{S}_n[\Delta_{\lambda'}(x)]$. Ceci revient à lire les tableaux standards selon les colonnes, ce qui assurément ne change pas grand chose à la théorie jusqu'ici exposée.

1.4 Isomorphisme de Frobenius-Schur et combinatoire des caractères

La description précédente des modules simples de l'algèbre $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ ne permet pas un calcul direct des caractères irréductibles, et elle ne rend pas compte des **règles de branchement** qui régissent l'induction ou la restriction de caractères irréductibles entre $\mathfrak{S}_n$ et un sous-groupe de Young

$$\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \mathfrak{S}_{\lambda_2} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_r}$$

avec $\lambda \in \mathscr{Y}_n$. Rappelons que si $H \subset G$ sont deux groupes finis, la représentation **induite** à partir d'un $\mathbb{C}H$-module V est le $\mathbb{C}G$-module gauche

$$\mathrm{Ind}_H^G(V) = \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} V,$$

et la représentation **restreinte** $\mathrm{Res}_H^G(W)$ à partir d'un $\mathbb{C}G$-module gauche W est le même espace vectoriel W, mais avec la loi extérieure restreinte à $\mathbb{C}H$. Les foncteurs d'induction et de restriction commutent aux sommes directes, et ils sont adjoints :

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G(V), W) = \mathrm{Hom}_H(V, \mathrm{Res}_H^G(W))\,.$$

2. La description des modules de Specht proposée dans les ouvrages précités met aussi en jeu les notions combinatoires de tabloïde, de sous-groupe de Young et d'idempotent de Young ; la description polynomiale évoquée ici est parfaitement équivalente, *cf.* [You77, théorème IV].

En revanche, l'induit d'un $\mathbb{C}H$-module irréductible n'est plus forcément irréductible, et de même pour la restriction d'un $\mathbb{C}G$-module irréductible.

Examinons en particulier le cas où $G = \mathfrak{S}_{n+1}$ et $H = \mathfrak{S}_n$. Si $\lambda \in \mathscr{Y}_n$ et $\Lambda \in \mathscr{Y}_{n+1}$, on note $\lambda \nearrow \Lambda$ si le diagramme de Λ est obtenu en rajoutant une case dans un coin du bord du diagramme de λ. Par exemple, les partitions Λ de taille 8 telles que $(3,2,2) \nearrow \Lambda$ sont

$$(4,2,2)\,,\ (3,3,2) \text{ et } (3,2,2,1).$$

Si T est un tableau standard de taille $n+1$ et de forme Λ, notons $\lambda(T)$ le diagramme obtenu à partir de Λ en ôtant la case numérotée $n+1$. Alors, on peut montrer que le $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$-module engendré par $\Delta_T(x)$ est isomorphe à $V^{\lambda(T)}$, de sorte que :

Proposition 1.4 (Branchement des représentations des groupes symétriques)**.** *Si Λ est une partition de taille $n+1$, alors*

$$\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(V^{\Lambda}) \simeq_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \bigoplus V^{\lambda},$$

où la somme directe porte sur les partitions de taille n telles que $\lambda \nearrow \Lambda$. Par propriété d'adjonction, si λ est une partition de taille n, alors

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(V^{\lambda}) \simeq_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_{n+1}} \bigoplus V^{\Lambda},$$

la somme portant cette fois sur les partitions de taille $n+1$ telles que $\lambda \nearrow \Lambda$.

On retrouve par récurrence sur n l'identité $\dim V^{\lambda} = \mathrm{card}\,\mathrm{Std}(\lambda)$, car un tableau standard de forme λ est équivalent à la donnée d'une suite de diagrammes

$$\varnothing = \lambda^{(0)} \nearrow \lambda^{(1)} \nearrow \cdots \nearrow \lambda^{(n)} = \lambda,$$

c'est-à-dire un chemin reliant l'origine à λ dans le **graphe de Young**, voir la figure 1.2. En

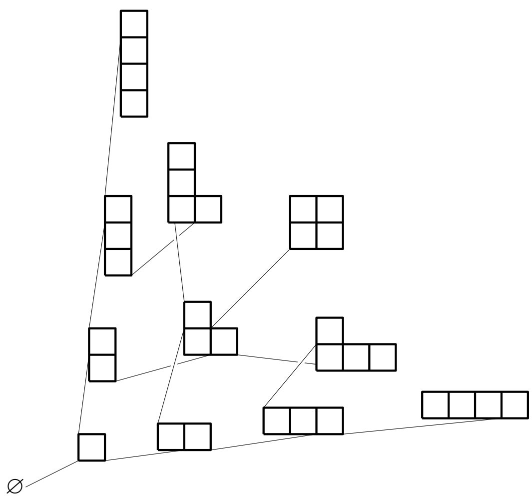


FIGURE 1.2 – Les quatre premiers niveaux du graphe de Young $\mathscr{Y} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{Y}_n$.

d'autres termes, le graphe de Young est le **diagramme de Bratteli** de la famille inductive d'algèbres complexes $(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, voir [Bra72] pour des précisions sur cette terminologie.

L'objet pertinent en vue d'une généralisation de ces règles de branchement est le **groupe de Grothendieck** de la catégorie des représentations des groupes symétriques. Si G est un groupe fini, notons $K(G)$ le $\mathbb{Z}$-module libre de base les classes d'isomorphisme de G-modules simples. Les éléments de $K(G)$ sont appelés **G-modules virtuels**, et tout module virtuel s'écrit comme différence $V \ominus W$ de deux G-modules, étant entendu que $V \ominus W = V' \ominus W'$ dans $K(G)$ si les deux G-modules $V \oplus W'$ et $V' \oplus W$ sont isomorphes. Plus loin, nous aurons également besoin des produits tensoriels $K_R(G) = R \otimes_{\mathbb{Z}} G$ pour R anneau commutatif. Notons $K(\mathfrak{S})$ la somme directe $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} K(\mathfrak{S}_n)$, et $K_R(\mathfrak{S})$ les versions tensorisées. Si V et W sont des représentations de $\mathfrak{S}_p$ et $\mathfrak{S}_q$, alors on peut construire une représentation de $\mathfrak{S}_{p+q}$ en considérant

$$m(V, W) = V \boxtimes W = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q}^{\mathfrak{S}_{p+q}} (V \otimes W)\,.$$

Le produit m est distributif par rapport aux sommes directes et est compatible aux isomorphismes, donc peut être étendu au groupe $K(\mathfrak{S})$: on obtient ainsi une structure d'anneau gradué sur $K(\mathfrak{S})$ et les versions tensorisées $K_R(\mathfrak{S})$.

Les caractères déterminant à isomorphisme près les représentations irréductibles, pour tout groupe fini G, le groupe de Grothendieck complexifié $K_{\mathbb{C}}(G)$ s'identifie au centre $(\mathbb{C}G)^G$ de l'algèbre du groupe. En particulier, $K_{\mathbb{C}}(G)$ est muni du produit scalaire des caractères, et ce produit scalaire est l'extension sesquilinéaire de la règle

$$\langle V \mid W \rangle = \dim \mathrm{Hom}_G(V, W)\,.$$

On munit $K_{\mathbb{C}}(\mathfrak{S}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} K_{\mathbb{C}}(\mathfrak{S}_n)$ du produit scalaire obtenu à partir des produits scalaires des $K_{\mathbb{C}}(\mathfrak{S}_n)$ en imposant que la somme directe soit une somme orthogonale ; ainsi, $\left\langle V^\lambda \mid V^\mu \right\rangle = \delta_{\lambda\mu}$ pour toutes partitions λ et μ. Finalement, en considérant l'adjoint de m par rapport au produit scalaire, on définit un coproduit gradué

$$\begin{aligned} m^* : K_{\mathbb{C}}(\mathfrak{S}_n) &\to \bigoplus_{p+q=n} K_{\mathbb{C}}(\mathfrak{S}_p) \otimes K_{\mathbb{C}}(\mathfrak{S}_q) \\ V &\mapsto \sum_{p+q=n} \mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q}^{\mathfrak{S}_n} (V) \end{aligned}$$

sur l'algèbre $K_{\mathbb{C}}(\mathfrak{S})$. Muni de ces opérations, $K_{\mathbb{C}}(\mathfrak{S})$ a une structure d'algèbre de Hopf[3] autoadjointe et graduée, l'unité et la counité se déduisant de l'identification naturelle entre $\mathbb{Z}$ et $K(\mathfrak{S}_0)$, et l'antipode étant l'extension linéaire de la tensorisation par la représentation signature.

Théorème 1.5 (Isomorphisme de Frobenius-Schur, [Fro00]). *Il existe une isométrie d'algèbres de Hopf autoadjointes graduées entre $K_{\mathbb{C}}(\mathfrak{S})$ et $\Lambda_{\mathbb{C}}$, et si l'on impose une condition de positivité vis-à-vis des produits scalaires, alors celle-ci est unique à composition par l'antipode près. Si C_μ désigne la somme des permutations de type μ dans $Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n) \simeq K_{\mathbb{C}}(\mathfrak{S}_n)$, alors l'un des deux isomorphismes est obtenu par extension linéaire de la règle $C_\mu \mapsto p_\mu / z_\mu$.*

3. La vérification de la structure d'algèbre de Hopf est tout à fait non triviale, et met en jeu le théorème de Mackey (voir [Mac51]) ; on renvoie à [Zel81] pour une preuve détaillée.

L'isométrie donnée par le théorème 1.5 est appelée **application caractéristique**, et est notée ch ; l'image par ch d'un module de Specht V^λ est la **fonction de Schur** s_λ. Ces fonctions sont étudiées en détail dans [Mac95, §1.3] ; la spécialisation de s_λ en un alphabet fini $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est le quotient de fonctions antisymétriques

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{a_{\delta+\lambda}(x_1, \ldots, x_n)}{a_\delta(x_1, \ldots, x_n)}$$

avec $a_\mu(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, \sigma(x^\mu) = \det((x_i^{\mu_j})_{i,j})$ et $\delta = (n-1, n-2, \ldots, 0)$, l'addition de partitions s'entendant ici terme à terme. Compte tenu de la propriété d'isométrie, les fonctions de Schur forment une base orthonormée de $\Lambda_\mathbb{C}$, et si $\varsigma^\lambda(\mu)$ désigne la valeur du caractère du module de Specht V^λ en une permutation de type μ, alors

$$\varsigma^\lambda(\mu) = z_\mu \left\langle \varsigma^\lambda \,\middle|\, C_\mu \right\rangle_{K(\mathfrak{S})} = \langle s_\lambda \mid p_\mu \rangle_\Lambda .$$

Ce résultat constitue la **formule de Frobenius** ; nous en donnerons plus loin des analogues pour les algèbres d'Hecke et les groupes linéaires finis. Une conséquence directe de la formule de Frobenius est la **formule des équerres** pour la dimension d'un module V^λ :

$$\dim \lambda = \langle s_\lambda \mid p_{1^n} \rangle = \frac{n!}{\prod_{(i,j)\in\lambda} h(i,j)} ,$$

où $h(i,j)$ est la longueur de la plus grande équerre contenue dans le diagramme λ et de coin la case (i,j). On renvoie à [Mac95, §1.7] pour la preuve de cette identité ; le lecteur pourra également consulter la section 9.4 de ce mémoire pour une preuve (indirecte) de la formule de Frobenius.

Exemple. La dimension de la représentation irréductible indexée par la partition $(3,2)$ est $5!/(4 \times 3 \times 1 \times 2 \times 1) = 5$.

La formule de Frobenius ramène la combinatoire des caractères irréductibles des groupes symétriques à celle des fonctions de Schur, et permet *in fine* un calcul explicite de ces caractères ; nous concluons cette section en expliquant en quelques mots ces calculs. Voyons d'abord comment développer une fonction de Schur dans l'une des autres bases de l'algèbre des fonctions symétriques. Comme les fonctions sommes de puissances forment une base orthogonale, la formule de Frobenius peut être inversée, et on peut exprimer s_λ en fonction des p_μ :

$$\forall \lambda \in \mathscr{Y}_n,\;\; s_\lambda(x) = \sum_{\mu \in \mathscr{Y}_n} \varsigma^\lambda(\mu)\, (z_\mu)^{-1}\, p_\mu(x) .$$

D'autre part, en interprétant les fonctions antisymétrisées $a_\mu(x)$ comme des déterminants, on peut exprimer les fonctions de Schur dans les bases $(h_\lambda)_{\lambda \in \mathscr{Y}}$ et $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathscr{Y}}$, voir [Mac95, §1.3, p. 41-42]. Ainsi, on dispose des formules de Jacobi-Trudi :

$$s_\lambda = \det((h_{\lambda_i - i + j})_{i,j}) \qquad ; \qquad s_{\lambda'} = \det((e_{\lambda_i - i + j})_{i,j}) .$$

Exemple. $s_{2,1,1} = (1/8)p_{1,1,1,1} - (1/4)p_{2,1,1} - (1/8)p_{2,2} + (1/4)p_4$
$= e_{3,1} - e_4 = h_{2,1,1} - h_{2,2} - h_{3,1} + h_4$.

Dans ce qui suit, nous autorisons des **diagrammes gauches**, c'est-à-dire des diagrammes $\lambda \setminus \mu$ avec $\mu \subset \lambda$. Par exemple :

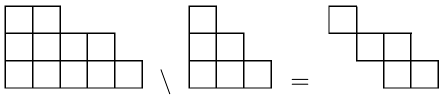


Figure 1.3 – Diagramme de Young de la partition gauche $(5,4,2) \setminus (3,2,1)$.

Un diagramme gauche est appelé **bande horizontale** si toute colonne contient au plus une case, et **bande verticale** si toute ligne contient au plus une case. Une **bande frontière**, ou **ruban** est un diagramme gauche qui ne contient pas de blocs de 2×2 cases ; ainsi, les colonnes et les lignes successives se chevauchent en au plus une case. Le diagramme gauche précédent est un ruban, et ce ruban a deux composantes connexes ; les rubans connexes sont ceux dont les colonnes et les lignes successives se chevauchent en exactement une case.

En développant les déterminants de Jacobi-Trudi suivant une ligne ou une colonne, on peut démontrer les **règles de Pieri** : pour toute partition λ, le produit $s_\lambda\, h_r$ (respectivement, le produit $s_\lambda\, e_r$) est égal à la somme $\sum s_\mu$ des fonctions de Schur indexées par des partitions μ telles que $\lambda \setminus \mu$ soit une bande horizontale de poids r (resp., une bande verticale de poids r). On retrouve en particulier le théorème de branchement 1.4 en prenant $r = 1$, et on peut déduire des règles de Pieri et de la formule de Frobenius le résultat plus avancé suivant (voir [Mac95, §1.7, exemple 5], et [Gre92] pour une preuve alternative) :

Théorème 1.6 (Formule de Murnaghan-Nakayama, [Mur40, Nak40a, Nak40b]).
Si $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ et λ sont deux partitions de poids n, alors

$$\varsigma^\lambda(\mu) = \sum_S (-1)^{\mathrm{ht}(S)},$$

la somme étant effectuée sur les suites de partitions $S = (\varnothing = \lambda_0 \subset \lambda_1 \subset \cdots \subset \lambda_m = \lambda)$ telles que chaque $\lambda_i \setminus \lambda_{i-1}$ soit un ruban connexe de poids μ_i. Ici, $\mathrm{ht}(S)$ désigne la somme des hauteurs $\mathrm{ht}(\lambda_i \setminus \lambda_{i-1})$, la hauteur d'un ruban connexe étant son nombre de lignes moins 1.

Ainsi, on dispose d'une formule récursive pour les caractères du groupe symétrique, ce qui permet par exemple de calculer $\varsigma^{5,4,2}(3,3,1,1,1,1,1) = 6$.

1.5 Théorème de Farahat-Higman et éléments de Jucys-Murphy

Pour conclure cette présentation succinte de la théorie des représentations du groupe symétrique, étudions plus en détail les centres $Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n)$ des algèbres des groupes symétriques. Nous en connaissons déjà deux bases : la base des classes de conjugaison et la base des caractères irréductibles. Si μ est une partition telle que $|\mu| + \ell(\mu) \leqslant n$, nous noterons $\mu \to n$ la **partition complétée** obtenue en ajoutant 1 aux $n - |\mu|$ premières parts de μ (y compris éventuellement les parts nulles). Par exemple, $(5,4,2) \to 20 = (6,5,3,1,1,1,1,1,1)$. L'opération de complétion permet d'indexer les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ par l'ensemble de partitions

$$\{\mu \in \mathscr{Y} \mid |\mu| + \ell(\mu) \leqslant n\},$$

et cette indexation est plus naturelle pour les classes de permutations qui ont beaucoup de points fixes : par exemple, $C_{(2)\to n}$ est la classe des 3-cycles dans $\mathfrak{S}_n$.

Théorème 1.7 (Farahat-Higman, [FH59]). *L'algèbre $Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n)$ est graduée par le degré $\deg C_{\mu\to n} = |\mu|$, c'est-à-dire que pour toutes partitions λ et μ,*

$$C_{\lambda\to n} * C_{\mu\to n} = \sum a^{\tau}_{\lambda\mu}(n)\, C_{\tau\to n}\,,$$

la somme étant restreinte aux partitions τ telles que $|\tau| \leqslant |\lambda| + |\mu|$. De plus, les coefficients $a^{\tau}_{\lambda\mu}(n)$ sont des polynômes en n à valeurs entières.

Le caractère gradué découle de la remarque suivante : si σ est une permutation de $C_{\mu\to n}$, alors une factorisation minimale de σ en produit de transpositions admet $|\mu|$ termes, donc le produit π d'une permutation de $C_{\lambda\to n}$ par une permutation de $C_{\mu\to n}$ admet une factorisation en produit de $|\lambda| + |\mu|$ transpositions. Ceci implique $t(\pi) = \tau \to n$ avec $|\tau| \leqslant |\lambda| + |\mu|$. Pour le caractère polynomial des constantes de structure, nous renvoyons à la section 12.1, qui expose une preuve due à Ivanov et Kerov (*cf.* [IK99]) et reposant sur les permutations partielles ; la généralisation de cette méthode est l'objet principal de la dernière partie du mémoire. Dans [FH59], Farahat et Higman montrent également que si $|\tau| = |\lambda| + |\mu|$, alors le coefficient

$$a^{\tau}_{\lambda\mu}(n) = a^{\tau}_{\lambda\mu}$$

ne dépend pas de n. Ceci permet de construire une algèbre graduée de base indexée par toutes les partitions $\lambda \in \mathscr{Y}$, et de constantes de structure les coefficients $a^{\tau}_{\lambda\mu}$ pour $|\tau| = |\lambda| + |\mu|$:

$$FH(\mathfrak{S}) = \left\langle x_\lambda,\ \lambda \in \mathscr{Y} \;\middle|\; \forall \lambda, \mu,\ x_\lambda * x_\mu = \sum_{|\tau| = |\lambda| + |\mu|} a^{\tau}_{\lambda\mu}\, x_\tau \right\rangle.$$

Cette **algèbre de Farahat-Higman** peut être considérée intuitivement comme une limite projective des anneaux gradués $Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n)$; nous détaillerons plus loin une construction alternative de limite projective. Certains des coefficients de structure de l'algèbre de Farahat-Higman sont calculés dans [GJ92, GJ94].

Les **éléments de Jucys-Murphy** ([Juc74, Mur81]) constituent un autre outil essentiel de l'étude des centres $Z(n) = Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n)$; ils permettent en fait de retrouver toute la théorie des représentations des groupes symétriques, voir [OV04]. Si k est un entier inférieur à n, on note

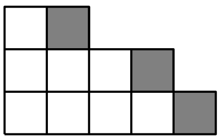
$$J_k = \sum_{j<k} (j,k) = (1,k) + (2,k) + \cdots + (k-1,k)$$

la somme des transpositions $(j < k)$ dans l'algèbre du groupe symétrique d'ordre n. Ainsi, $J_1 = 0$, $J_2 = (1,2)$, $J_3 = (1,3) + (2,3)$, etc. Si $Z(n, n-1)$ désigne le centralisateur de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_{n-1}$ dans $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$, alors il n'est pas difficile de voir que $J_n \in Z(n, n-1)$ pour tout entier n ; par conséquent, les éléments $J_1, \ldots, J_n$ commutent et engendrent une sous-algèbre abélienne de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$. Cette algèbre est appelée **algèbre de Gelfand-Tsetlin**, et est notée $GZ(n)$. Des manipulations combinatoires sur les transpositions permettent d'établir les faits suivants :

1. Pour tout n, le centralisateur $Z(n, n-1)$ est l'algèbre engendrée par $Z(n-1)$ et J_n ; l'algèbre de Gelfand-Tsetlin est donc également l'algèbre engendrée par les centres $Z(1), Z(2), \ldots, Z(n)$. Elle est abélienne maximale, et joue un rôle analogue à celui d'une sous-algèbre de Cartan dans une algèbre de Lie semi-simple.

2. Plus précisément, dans
$$\mathbb{C}\mathfrak{S}_n \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathscr{Y}_n} \mathrm{End}(V^\lambda)\,,$$
l'algèbre de Gelfand-Tsetlin consiste en les opérateurs qui, pour tout module irréductible V^λ, agissent diagonalement sur la base de Young indexée par les tableaux standards de forme λ (voir la section 13.3 pour des précisions). En particulier,
$$\dim GZ(n) = \sum_{\lambda \in \mathscr{Y}_n} \dim \lambda\,.$$

3. Plus précisément, les valeurs propres de l'action de J_n sur un module V^λ sont les contenus des coins (λ_i, i) du diagramme (voir l'exemple de la figure 1.4), et la décomposition spectrale induite par J_n réalise le foncteur de réduction $\mathrm{Red}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-1}}$:
$$V^\lambda = \bigoplus_{(\lambda_i,i) \text{ coin de } \lambda} \left[\ker(J_n - c(\lambda_i, i)) \simeq_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_{n-1}} V^{\lambda \setminus (\lambda_i,i)}\right].$$
Les éléments de Jucys-Murphy d'ordre inférieur ont donc également pour valeurs propres les contenus des cases du diagramme. Ainsi, les éléments $J_1, \ldots, J_n$ jouent un rôle analogue aux racines simples d'une algèbre de Lie semi-simple, et les contenus jouent un rôle analogue aux poids.



$$\begin{aligned} V^{5,4,2} &= \ker(J_{11}+1) \oplus \ker(J_{11}-2) \oplus \ker(J_{11}-4) \\ &= \quad V^{5,4,1} \quad \oplus \quad V^{5,3,2} \quad \oplus \quad V^{4,4,2} \end{aligned}$$

Figure 1.4 – L'action de J_n sur V^λ est diagonale, et elle a pour valeurs propres les contenus des coins du diagramme.

On renvoie à l'article [OV04] pour une preuve de toutes ces assertions. Un argument crucial de la preuve est l'utilisation du critère de Gelfand : comme $Z(n, n-1)$ est une algèbre commutative, la paire $(\mathfrak{S}_{n-1} \subset \mathfrak{S}_n)$ est une **paire de Gelfand** forte, c'est-à-dire que la restriction d'une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$ à $\mathfrak{S}_{n-1}$ est sans multiplicité (autrement dit, le diagramme de Bratteli des groupes symétriques est un graphe sans arête multiple).

En utilisant les décompositions spectrales successives de V^λ par rapport aux éléments de Jucys-Murphy, on obtient une décomposition de V^λ en somme directe de droites vectorielles indexées par les chemins $\emptyset = \lambda^{(0)} \nearrow \cdots \nearrow \lambda^{(n)} = \lambda$ reliant l'origine à λ dans le graphe de Young, c'est-à-dire par les tableaux standards de forme λ. Une base $(v_T)_{T \in \mathrm{Std}(\lambda)}$ associée à cette décomposition en somme directe est caractérisée par la propriété
$$\mathbb{C}\mathfrak{S}_i[v_T] = V^{\lambda^{(i)}}$$
pour tout entier i. On retrouve ainsi toutes les propriétés évoquées dans la section 1.3, *cf.* l'article [OV04]. La combinatoire des éléments de Jucys-Murphy régit donc la théorie des représentations de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$, et de plus, ces éléments sont particulièrement utiles pour l'analyse asymptotique, voir en particulier les sections 2.4 et 5.3 — c'est en vue de ces deux sections que nous avons introduit ici les éléments de Jucys-Murphy. Finalement, les éléments de Jucys-Murphy fournissent une nouvelle description des centres $Z(n)$ des algèbres des groupes. Ainsi :

Proposition 1.8 (Jucys-Murphy, [Juc74, Mur81]). *Le centre $Z(n)$ est exactement l'ensemble des fonctions symétriques en les éléments de Jucys-Murphy $J_1, \ldots, J_n$.*

En effet, étant données n inconnues $z_1, \ldots, z_n$, on montre aisément par récurrence sur n l'identité formelle

$$\prod_{i=1}^{n}(z_i + J_i) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\prod_{c \text{ cycle de } \sigma} z_{\min c} \right) \sigma$$

dans $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n, z_1, \ldots, z_n]$. En particulier, pour $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$,

$$\sum_{r=0}^{n} e_r(J_1, \ldots, J_n)\, z^{n-r} = \prod_{i=1}^{n}(z + J_i) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} z^{\ell(t(\sigma))}\, \sigma = \sum_{r=0}^{n} \left(\sum_{|\mu|=r} C_{\mu\to n} \right) z^{n-r},$$

d'où l'identité $e_r(J_1, \ldots, J_n) = \sum_{|\mu|=r} C_{\mu\to n}$. Des manipulations combinatoires permettent ensuite d'exprimer toute classe de cycles $C_{(r)\to n}$ comme fonction symétrique en les éléments de Jucys-Murphy, et finalement toute classe de conjugaison $C_{\mu\to n}$, voir [Juc74]. Notons néanmoins que la fonction symétrique f_μ telle que $C_{\mu\to n} = f_\mu(J_1, \ldots, J_n)$ dépend en général de n. D'ailleurs, il y a pour chaque n et chaque μ une infinité de fonctions symétriques telles que $C_{\mu\to n} = f(J_1, \ldots, J_n)$, puisque $Z(n)$ est de dimension finie et Λ est de dimension infinie. On renvoie à [Juc74, Mur81, LT01] pour une étude plus approfondie des éléments de Jucys-Murphy et de leurs fonctions symétriques.