

2.4 Cadre fonctionnel

L'équation (2.5) fait intervenir des opérateurs, dont les domaines de définition sont étroitement liés aux conditions aux limites (1.2) : les conditions de périodicité.

Fixons d'abord quelques notations.

2.4.1 Notations et définitions

Rappelons que Ω est le rectangle $]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$, et introduisons (pour $0 \leq m < \infty$) les espaces fonctionnels

$$\mathcal{H}^m(\Omega) = \{u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \text{ localement intégrable, t.q. : } u|_{\Omega} \in H^m(\Omega) \text{ et } \int_{\Omega} u(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0\}$$

avec $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ et pour $1 \leq m < \infty$, $H^m(\Omega)$ sont les espaces de Sobolev au sens usuel sur Ω . Pour $m = 0$ on notera l'espace $\mathcal{H}^0(\Omega)$ par $\mathcal{H}$ (i.e. $\mathcal{H} = \mathcal{H}^0(\Omega)$). Soit $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$ l'espace défini par

$$\dot{H}_{per}^1(\Omega) = \{u \in \mathcal{H} \text{ et } u|_{\Omega} \in H^1(\Omega), : u(0, Y) = u(2\pi, Y) \text{ et } u(X, 0) = u(X, 2\pi)\}.$$

$\mathcal{H}$ étant muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

et de la norme induite

$$\|u\|_{\mathcal{H}} = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

On munit $H^1(\Omega)$ de la norme

$$\|u\|_{1,\Omega} = \left(\|u\|_{\mathcal{H}}^2 + |u|_{1,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.6)$$

où $|\cdot|_{1,\Omega}$ désigne la semi-norme dans $H^1(\Omega)$ définie par

$$|u|_{1,\Omega} = \left(\|\partial_X u\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\partial_Y u\|_{\mathcal{H}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.7)$$

et associée à la forme bilinéaire

$$\langle u, v \rangle_1 = \langle \partial_X u, \partial_X v \rangle + \langle \partial_Y u, \partial_Y v \rangle. \quad (2.8)$$

Pour plus de détails sur ce type d'espace de Sobolev voir [6, 17].

2.4.2 Le cadre abstrait de l'opérateur $\mathcal{L}_{\alpha,s,r}$

En prenant en considération l'invariance du problème (2.5) par rapport aux translations, et en tenant compte aussi des conditions de périodicité (1.2), on définit le domaine de l'opérateur linéaire $\mathcal{L}_{\alpha,s,r}$ sur l'espace $\mathcal{H}$ par

$$\mathcal{D} = \mathcal{H}^4(\Omega) \cap \dot{H}_{per}^1(\Omega),$$

et le domaine de Δ_{sr} par

$$D = D(\Delta_{sr}) = \mathcal{H}^2(\Omega) \cap \dot{H}_{per}^1(\Omega),$$

2.5 Propriétés de l'espace $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$

Ce paragraphe est consacré à deux propriétés importantes, concernant l'espace $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$, dont nous nous servons par la suite pour justifier la validité du cadre fonctionnel choisi pour notre problème, afin d'appliquer la réduction de Lyapunov Schmidt. Ces deux propriétés sont : l'inégalité de Poincaré (généralisée, dite inégalité Poincaré-Wirtinger), et la compacité de l'injection de $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$ dans $\mathcal{H}$. Nous présentons ici des démonstrations, qui reposent sur le développement en séries de Fourier (notation complexe) caractérisant les éléments de $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$:

$$u(X, Y) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} C_{\mathbf{k}} e^{(ik_1 X + ik_2 Y)},$$

où $C_{\mathbf{k}}$ est le coefficient de Fourier, d'indice vectoriel $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$, défini par

$$C_{\mathbf{k}} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Omega} u(\xi, \eta) e^{-i(k_1 \xi + k_2 \eta)} d\xi d\eta \quad (2.9)$$

et vérifie $\overline{C_{\mathbf{k}}} = C_{-\mathbf{k}}$ (puisque u est une fonction réelle).

L'inégalité de Poincaré

Nous allons montrer, grâce à la condition

$$\int_{\Omega} u(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0, \quad (2.10)$$

que l'inégalité de Poincaré reste valable pour les espaces du cadre fonctionnel choisi ($\dot{H}_{per}^1(\Omega)$ et $\mathcal{H}$).

Théorème 2.5.1: *Si $u \in \dot{H}_{per}^1(\Omega)$ alors*

$$\|u\|_{\mathcal{H}} \leq |u|_{1,\Omega}.$$

Preuve

On considère le développement en série de Fourier d'un élément u de $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$

$$u(X, Y) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} C_{\mathbf{k}} e^{(ik_1 X + ik_2 Y)}.$$

On a

$$\partial_X u(X, Y) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} ik_1 C_{\mathbf{k}} e^{(ik_1 X + ik_2 Y)},$$

et

$$\partial_Y u(X, Y) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} i k_2 C_{\mathbf{k}} e^{(i k_1 X + i k_2 Y)}.$$

D'après l'identité de Parseval on a

$$\|u\|_{\mathcal{H}}^2 = 4\pi^2 \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} |C_{\mathbf{k}}|^2, \quad (2.11)$$

ainsi que pour les dérivées

$$\|\partial_X u\|_{\mathcal{H}}^2 = 4\pi^2 \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} |k_1|^2 |C_{\mathbf{k}}|^2,$$

et

$$\|\partial_Y u\|_{\mathcal{H}}^2 = 4\pi^2 \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} |k_2|^2 |C_{\mathbf{k}}|^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} \|\partial_X u\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\partial_Y u\|_{\mathcal{H}}^2 &= 4\pi^2 \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} (|k_1|^2 + |k_2|^2) |C_{\mathbf{k}}|^2. \\ &= 4\pi^2 \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} |\mathbf{k}|^2 |C_{\mathbf{k}}|^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

où $|\mathbf{k}|^2 = |k_1|^2 + |k_2|^2$.

Il est clair que pour tout $\mathbf{k}$ non nul on a

$$|C_{\mathbf{k}}|^2 \leq |\mathbf{k}|^2 |C_{\mathbf{k}}|^2.$$

Or d'après (2.9) et (2.10)

$$C_0 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Omega} u(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0.$$

Ainsi (2.11) et (2.12) implique que

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} |C_{\mathbf{k}}|^2 \leq \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} |\mathbf{k}|^2 |C_{\mathbf{k}}|^2$$

et par conséquent

$$\|u\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|\partial_X u\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\partial_Y u\|_{\mathcal{H}}^2,$$

d'où le résultat du théorème.

Comme conséquence du théorème précédent, on a la proposition suivante.

Proposition 2.5.2: *L'espace $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$ muni de $\langle ., . \rangle_1$ définie par (2.8), est un espace de Hilbert. De plus, la semi-norme $|\cdot|_{1,\Omega}$ définie par (2.7) est une norme sur $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ définie par (2.6).*

Preuve

Montrons d'abord que dans $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$, la semi-norme $|\cdot|_{1,\Omega}$ est une norme équivalente à la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.

En effet, elle est une norme car dans $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$ toute fonction constante est une fonction nulle.

D'autre part, d'après le théorème précédent on a pour tout $u \in \dot{H}_{per}^1(\Omega)$

$$\|u\|_{\mathcal{H}}^2 \leq |u|_{1,\Omega}^2,$$

ce qui implique que

$$\|u\|_{\mathcal{H}}^2 + |u|_{1,\Omega}^2 \leq 2 |u|_{1,\Omega}^2.$$

Par conséquent on a

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq \sqrt{2} |u|_{1,\Omega}.$$

et puisqu'il est clair que

$$|u|_{1,\Omega} \leq \|u\|_{1,\Omega},$$

les deux normes sont ainsi équivalentes.

D'après [6] et [17, Chap.II], $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$ est un sous-espace fermé dans $H^1(\Omega)$. Ce qui entraîne grâce à l'équivalence des normes, que $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert. La démonstration de la proposition est ainsi achevée.

La compacité de l'injection de $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$ dans $\mathcal{H}$

Théorème 2.5.3: *L'inclusion $\dot{H}_{per}^1(\Omega) \subset \mathcal{H}$ est une injection compacte.*

Preuve

Ici on va reprendre la démonstration présentée dans [6, Th A.4, p.437] adaptée à notre cas ($m = 2$ et $L_1 = L_2 = 2\pi$). On considère une suite $\{u_n\}_{n \geq 1}$,

$$u_n = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} C_{\mathbf{k}}^n e^{(ik_1 X + ik_2 Y)}.$$

bornée dans $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$. Donc il existe une constante positive M telle que

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} (1 + |\mathbf{k}|^2) |C_{\mathbf{k}}^n|^2 \leq M, \quad \forall n \geq 1. \quad (2.13)$$

Ainsi, pour chaque $\mathbf{k}$, la suite des coefficients de Fourier $\{C_{\mathbf{k}}^n\}_{n \geq 1}$ est uniformément bornée par rapport à n . On peut donc extraire de $\{u_n\}_{n \geq 1}$, une sous suite $u_{n_{1j}}$ telle que la suite $C_{\mathbf{1}}^{n_{1j}}$ soit convergente. De cette suite, on prend une sous suite $u_{n_{2j}}$ telle que $C_{\mathbf{1}}^{n_{2j}}$ et $C_{\mathbf{2}}^{n_{2j}}$ sont convergentes.

En continuant selon ce processus, on obtient une sous suite $u_{n_{ij}}$ telle que $C_{\mathbf{1}}^{n_{ij}}$, $C_{\mathbf{2}}^{n_{ij}}, \dots, C_{\mathbf{h}}^{n_{ij}}$ sont toutes des suites convergentes.

On prend maintenant la suite diagonale

$$\tilde{u}_j = u_{n_{j_j}}$$

et on note $C_{\mathbf{k}}^j$ les coefficients de Fourier du développement de $\tilde{u}_j$.

Alors, pour tout $\mathbf{k}$, $C_{\mathbf{k}}^j$ est convergente. On note sa limite par $C_{\mathbf{k}}^*$

D'après (2.13) on sait que

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} (1 + |\mathbf{k}|^2) |C_{\mathbf{k}}^*|^2 \leq M.$$

Ainsi

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} (1 + |\mathbf{k}|^2) |C_{\mathbf{k}}^j - C_{\mathbf{k}}^*|^2 \leq 2M$$

Maintenant, soit u^* l'élément de $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$ dont les coefficients de Fourier sont $C_{\mathbf{k}}^*$. On a alors

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_j - u^*\|_{\mathcal{H}}^2 &= 4\pi^2 \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} |C_{\mathbf{k}}^j - C_{\mathbf{k}}^*|^2 \\ &= 4\pi^2 \sum_{|\mathbf{k}| \leq L} |C_{\mathbf{k}}^j - C_{\mathbf{k}}^*|^2 + \frac{4\pi^2}{L^2} \sum_{|\mathbf{k}| \geq L} |C_{\mathbf{k}}^j - C_{\mathbf{k}}^*|^2 |L^2| \\ &\leq 4\pi^2 \sum_{|\mathbf{k}| \leq L} |C_{\mathbf{k}}^j - C_{\mathbf{k}}^*|^2 + 4\pi^2 \frac{2M}{L^2} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Etant donné $\epsilon > 0$, on choisit L et j suffisamment grands, de telle sorte que chaque terme dans (2.14) soit inférieur à $\frac{\epsilon}{2}$.

Ainsi $\tilde{u}_j$ converge vers u^* dans $\mathcal{H}$, ce qui achève la démonstration du théorème.

2.6 Etude de l'opérateur Δ_{sr}

Nous nous proposons dans ce paragraphe d'étudier l'opérateur Δ_{sr} . Ce qui nous permettra par la suite de dégager les propriétés de l'opérateur $\mathcal{L}_{\alpha,s,r}$. Tenant compte des conditions au bord des éléments de D , l'application de la formule de Green, aboutit à la symétrie de l'opérateur Δ_{sr} dans $\mathcal{H}$.

Nous allons maintenant montrer que l'opérateur $-\Delta_{sr}$ admet un inverse borné. En effet, cette propriété de l'opérateur $-\Delta_{sr}$, est analogue à celle du Laplacien, et on y arrive par la méthode variationnelle qui repose sur le théorème de Lax-Milgram (voir [7, Th. 2.A], ou aussi [5, Th.2.1, p.II-6]), appliquée au problème à valeurs aux limites associé à $-\Delta_{sr}$ dans l'espace de Hilbert $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$.

Soit $f \in \mathcal{H}$, posons alors le problème suivant

$$\begin{cases} U \in \dot{H}_{per}^1(\Omega) \\ -\Delta_{sr}(U) = f \end{cases} \quad (\text{P.b})$$

Montrons que les conditions du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées. Rappelons que d'après la proposition (2.5.2), $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$ muni de la norme $|\cdot|_{1,\Omega}$, est un espace de Hilbert.

Pour tout U et V appartenant à $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$ nous avons

$$|\langle -\Delta_{sr}(U), V \rangle| = |\langle s^2 \partial_X^2 U + r^2 \partial_y^2 U, V \rangle|.$$

Grâce à la formule de Green on obtient

$$|\langle -\Delta_{sr}(U), V \rangle| = |\langle s\partial_X U, s\partial_X V \rangle + \langle r\partial_Y U, r\partial_Y V \rangle|.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz entraine que

$$|\langle -\Delta_{sr}(U), V \rangle| \leq \|s\partial_X U\|_{\mathcal{H}} \|s\partial_X V\|_{\mathcal{H}} + \|r\partial_Y U\|_{\mathcal{H}} \|r\partial_Y V\|_{\mathcal{H}},$$

ainsi que

$$|\langle -\Delta_{sr}(U), V \rangle| \leq (\|s\partial_X U\|_{\mathcal{H}}^2 + \|r\partial_Y U\|_{\mathcal{H}}^2)^{\frac{1}{2}} (\|s\partial_X V\|_{\mathcal{H}}^2 + \|r\partial_Y V\|_{\mathcal{H}}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent on a

$$|\langle -\Delta_{sr}(U), V \rangle| \leq \sqrt{\max(s^2, r^2)} |U|_{1,\Omega} |V|_{1,\Omega}.$$

D'où, la continuité de la forme bilinéaire définie sur $\dot{H}_{per}^1(\Omega) \times \dot{H}_{per}^1(\Omega)$ par

$$a(U, V) = \langle -\Delta_{sr}(U), V \rangle$$

D'autre part on a

$$\langle -\Delta_{sr}(U), U \rangle = -\langle s^2 \partial_X^2 U, U \rangle - \langle r^2 \partial_Y^2 U, U \rangle$$

En appliquant la formule de Green on obtient

$$\begin{aligned}
\langle -\Delta_{sr}(U), U \rangle &= s^2 \langle \partial_X U, \partial_X U \rangle + r^2 \langle \partial_Y U, \partial_Y U \rangle \\
&= s^2 \|\partial_X U\|_{\mathcal{H}}^2 + r^2 \|\partial_Y U\|_{\mathcal{H}}^2
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\langle -\Delta_{sr}(U), U \rangle \geq \min(s^2, r^2) |U|_{1,\Omega}^2 \quad (2.15)$$

D'où la coercivité de la forme bilinéaire $a(U, V)$ définie plus haut.

Il est évident aussi, que pour tout V appartenant à $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$ (usant de l'inégalité de Cauchy-Schwartz) d'après le théorème 2.5.1, on obtient

$$|\langle f, V \rangle| \leq \|f\|_{\mathcal{H}} \cdot \|V\|_{\mathcal{H}} \leq \|f\|_{\mathcal{H}} \cdot |V|_{1,\Omega} \quad (2.16)$$

Donc la forme linéaire définie par f sur $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$, est continue.

Le théorème de Lax-Milgram garantit alors, l'existence et l'unicité d'une solution $U \in \dot{H}_{per}^1(\Omega)$ pour le problème **(P.b)**. De plus (à partir de (2.15) et (2.16)) il existe une constante c positive telle que

$$|U|_{1,\Omega} \leq c \cdot \|f\|_{\mathcal{H}}.$$

Ce qui prouve que $-\Delta_{sr}$, admet un inverse borné ($U = (-\Delta_{sr})^{-1}(f)$).

Comme conséquence des propriétés ci-dessus, on a le résultat suivant.

Proposition 2.6.1: $-\Delta_{sr}$ est un opérateur auto-adjoint dans $\mathcal{H}$.

Preuve

En effet, ayant un inverse borné, $-\Delta_{sr}$ est un opérateur fermé (proposition 1.1.3-(ii)), et admet la valeur réelle zéro dans son ensemble résolvant. De plus, étant symétrique, $-\Delta_{sr}$ est un opérateur auto-adjoint d'après la proposition 1.1.8, ce qui achève la démonstration de la proposition.

Comme conséquence immédiate des propositions (1.1.9) et (2.6.1) on a

Proposition 2.6.2: *Pour tout $\alpha > 0$, $(\Delta_{sr} + \alpha I)$ est un opérateur auto-adjoint dans $\mathcal{H}$.*

Remarque 2.6.3: *En reproduisant la démarche et l'analyse précédente concernant l'opérateur $-\Delta_{sr}$, on peut montrer que pour tout $\lambda \geq 0$, $(-\Delta_{sr} + \lambda I)$ est un opérateur auto-adjoint, et à résolvante compacte. Ceci, en étudiant le problème*

$$\begin{cases} U \in \dot{H}_{per}^1(\Omega) \\ -\Delta_{sr}(U) + \lambda U = f, \quad f \in \mathcal{H}. \end{cases}$$

Proposition 2.6.4: *Pour tout $\alpha > 0$, Δ_{sr} et $(\Delta_{sr} + \alpha I)$ sont des opérateurs de Fredholm d'indice zéro.*

Preuve

D'une part, la compacité de l'injection de $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$ dans $\mathcal{H}$ (voir le théorème 2.5.3), implique que pour tout $\lambda \geq 0$, l'opérateur $(-\Delta_{sr} + \lambda I)$ admet une résolvante compacte dans $\mathcal{H}$.

D'autre part, si $\lambda \in \mathbb{R}$ est tel que $\lambda - \alpha > 0$, alors on a

$$\begin{aligned} (\Delta_{sr} - (\lambda - \alpha)I)^{-1}(\Delta_{sr} + \alpha I) &= I + \lambda(\Delta_{sr} - (\lambda - \alpha)I)^{-1} \\ (\Delta_{sr} + \alpha I)(\Delta_{sr} - (\lambda - \alpha)I)^{-1} &= I + \lambda(\Delta_{sr} - (\lambda - \alpha)I)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

En posant

$$A_0 = (\Delta_{sr} - (\lambda - \alpha)I)^{-1},$$

et

$$K_1 = K_2 = -\lambda(\Delta_{sr} - (\lambda - \alpha)I)^{-1}.$$

Sachant que A_0 est un opérateur borné, et que K_1 ou K_2 est un opérateur compact, compte tenu de (2.17), on voit bien que les conditions de la proposition 1.2.4, pour que $(\Delta_{sr} + \alpha I)$ soit de Fredholm sont réalisées.

Par un argument analogue, on montre aussi que Δ_{sr} est un opérateur de Fredholm. Il reste à montrer que leurs indices sont nuls. Puisque Δ_{sr} et $(\Delta_{sr} + \alpha I)$ sont auto-adjoints (d'après les propositions (2.6.1) et (2.6.2)), ils admettent nécessairement des indices nuls (voir[18]).