1.3 Bases orthonormales et analyse de Fourier

Nous allons ici rappeler quelques notions et résultats fondamentaux sur les bases orthonormales, et l'analyse de Fourier, qu'on peut trouver dans [4, 24, 29].

Rappelons que dans ce chapitre nous considérons, un espace de Hilbert H , muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle$, et de la norme $\|.\|_H$.

Définition 1.3.1: *([24, p. 54])*

Soient x, y deux éléments de H, et N un sous ensemble de H.

(i) On dit que x et y sont orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$, ou orthonormaux si de plus $\|x\|_H = \|y\|_H = 1$.

(ii) On appelle orthogonale de N et on note $N^\perp$ l'ensemble défini par

$$N^\perp = \{x \in H : \langle x, y\rangle = 0 \text{ pour tout } y \in N\}.$$

(iii) Un sous ensemble K de H est dit orthonormale si chaque deux éléments de K sont orthonormaux.

(iv) Un ensemble K orthonormale dans H est dit complet si $K^\perp = \{0\}$.

Théorème 1.3.2: *([24, Th. 5.8])*

Soient $\{x_n\}$ une suite orthonormale dans H et $\{\alpha_n\}$ une suite de scalaires. Alors la série $\sum \alpha_n x_n$ est convergente si et seulement si $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$, *et dans ce cas on a*

$$\left\|\sum \alpha_n x_n\right\|_H = \left(\sum |\alpha_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.3.3: *([24, Th. 5.9])*

Soient K un ensemble orthonormale de H, et $x \in H$. Posons $K_x = \{y \in K : \langle x, y\rangle \neq 0\}$. Alors

(i) Pour tout $x \in H$, K_x est dénombrable.

(ii) La série $\sum\limits_{y \in K_x} \langle x, y\rangle y$ est convergente.

Définition 1.3.4: *([24, Def. 5.5])*

Un ensemble K dans H est dit une base orthonormale ou base hilbertienne de H si pour tout $x \in H$:

$$x = \sum_{y \in K_x} \langle x, y\rangle y \qquad (*)$$

Les coefficients $\langle x, y\rangle$ dans la série (*) sont appelés les coefficients de Fourier de x.

Théorème 1.3.5: *([24, Th. 5.10]) Soit K un ensemble orthonormale de H. Les affirmations suivantes sont équivalentes*

(i) K est complet au sens de la définition (1.3.1(iv)).

(ii) K est une base orthonormale de H.

(iii) Pour tout $x \in H$, $\|x\|_H^2 = \sum_{y \in K_x} |\langle x, y\rangle|^2$.

Remarque 1.3.6: *L'égalité dans (iii) du théorème (1.3.5) est appelé identité de Parseval.*

Théorème 1.3.7: *([24, Th. 5.11])*

Tout espace de Hilbert admet une base orthonormale, et toute base orthonormale d'un espace de Hilbert séparable est dénombrable.

La proposition suivante fournit un outil essentiel (pour le calcul), dans le cadre fonctionnel choisi pour notre problème, afin d'appliquer la réduction de Liapunov-Schmidt (pour plus de détails voir [4, 17, 6]).

Proposition 1.3.8: *([4, p.11])*

La suite $\left\{ \frac{1}{2\pi} e^{2\pi i \left(\frac{k_1 x}{b_1 - a_1} + \frac{k_2 y}{b_2 - a_2} \right)} \right\}_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2}$ *définit une base orthonormale dans* $L^2(]a_1,\, b_1[\times]a_2,\, b_2[)$.

2. FORMULATION OPÉRATIONNELLE DU PROBLÈME

2.1 Stabilité linéaire : paramètres critiques

Il est claire que l'équation (1.1) admet une solution stationnaire : l'état trivial $u \equiv 0$ pour toutes les valeurs du paramètre réel $\alpha > 0$. Si cette position d'équilibre est instable, en la perturbant, on déclenchera une dynamique qui fera évoluer notre problème vers d'autres états stationnaires. C'est pour cela qu'on d'éterminera d'abord, la valeur du paramètre $\alpha > 0$ pour laquelle cet état devient instable.

Proposition 2.1.1: *L'état d'équilibre trivial $u \equiv 0$ de l'équation (1.1), est linéairement instable pour $\alpha > 2$. Lorsque α dépasse le seuil critique $\alpha_c = 2$ des modes instables de vecteurs d'onde $(s_c, r_c) = (1, 1)$ apparaissent.*

Preuve

Chaque perturbation (spatialement périodique) de l'état d'équilibre trivial, s'exprime par son développement en séries de Fourier. On la décompose ainsi en modes propres ayant pour vecteur d'onde $(s,\, r)$ et pour taux de croissance la partie réelle d'un certain nombre complexe λ. On peut représenter ces modes propres sous la forme (en notation complexe)

$$U(t,x,y) = e^{\lambda t}\varphi(x,y), \quad \text{où } \ \varphi(x,y) = e^{i(sx+ry)}, \tag{2.1}$$

avec $(s,r) \in \mathbb{Z}^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

L'équation (1.1) linéarisée en $u \equiv 0$, s'écrit pour U comme suit

$$U_t\,(t,x,y) = -\Delta^2 U\,(t,x,y) - \alpha \Delta U\,(t,x,y)\,. \tag{2.2}$$

Ainsi, d'après (2.1) on obtient

$$\begin{aligned} \lambda\varphi &= -\Delta^2\varphi - \alpha\Delta\varphi \\ &= \Big(\alpha(s^2+r^2) - (s^2+r^2)^2\Big)\,\varphi. \end{aligned}$$

Par conséquent la solution de l'équation (2.2) s'exprime à travers $(s,\, r)$ solution de l'équation

$$\lambda = -(s^2+r^2)^2 + \alpha(s^2+r^2). \tag{2.3}$$

Donc α_c, valeur critique du paramètre α est déterminée par la valeur minimale de $(s,\, r)$ pour laquelle l'équation (2.3) admet une solution $(s,\, r)$ non nulle avec

$\Re(\lambda) > 0$. Ce qui est le cas lorsque

$$\alpha > s^2 + r^2.$$

Ainsi,

$$\alpha_c = \min\{(s^2 + r^2),\ (s, r) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Sachant, qu'on est concerné que par les solutions périodiques à moyennes nulles, et non constantes, on doit avoir $s^2 + r^2 \neq 0$.

De plus, l'espace fonctionnel dans lequel on travaille (qui sera précisé plus tard) étant constitué de fonctions ayant la même période suivant les deux directions x et y, il est nécessaire d'avoir $s = r$.

Par conséquent,

$$\alpha_c = \min\left\{2s^2,\ s \in \mathbb{Z}\ et\ s \neq 0\right\} = 2.$$

Pour $s = 1$ le minimum est réalisé, par conséquent $\alpha_c = 2$ et $(s_c,\, r_c) = (1, 1)$ sont des valeurs critiques, tel que c'est annoncé dans la proposition.

2.2 Reformulation du problème stationnaire

Nous nous proposons d'étudier les configurations indépendantes du temps et spatialement périodiques. Il serait donc plus commode de faire apparaitre le vecteur d'onde (s, r) comme paramètre dans l'équation du problème, et non pas dans la définition des espaces où les solutions sont recherchées. C'est dans ce cadre que nous allons reformuler le problème stationnaire de l'équation (1.1)

2.2.1 Notations et reformulation

En supposant que U est T périodique par rapport à x et R périodique par rapport à y, il existe alors deux réels s et r, tels que $T = \frac{2\pi}{s}$ et $R = \frac{2\pi}{r}$, autrement dit on a

$$U(x + \frac{2\pi}{s}, y) = U(x, y + \frac{2\pi}{r}) = U(x, y) \quad \text{pour tout} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

En composant par les transformations de variable $X = sx$ et $Y = ry$, U devient 2π-périodique par rapport à X et Y, et bien défini par sa restriction sur l'ensemble $(X, Y) \in \Omega =]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$. Ainsi, on peut se ramener à une équation aux dérivées partielles dans un domaine spatial indépendant des paramètres.

Les dérivées partielles de U par rapport à x et y s'expriment en fonction de celles par rapport aux nouvelles variables X et Y respectivement. En effet, ce changement de variables implique que

$$U\left(\frac{X+2\pi}{s},\frac{Y}{r}\right)=U\left(\frac{X}{s},\frac{Y+2\pi}{r}\right)=U\left(\frac{X}{s},\frac{Y}{r}\right)$$

Ainsi en posant

$$\widetilde{U}\left(X,Y\right)=U\left(\frac{X}{s},\frac{Y}{r}\right)$$

on a

$$\widetilde{U}\left(X+2\pi,Y\right)=U\left(\frac{X+2\pi}{s},\frac{Y}{r}\right)=U\left(\frac{X}{s},\frac{Y}{r}\right)=\widetilde{U}\left(X,Y\right)$$

et

$$\widetilde{U}\left(X,Y+2\pi\right)=U\left(\frac{X}{s},\frac{Y+2\pi}{r}\right)=U\left(\frac{X}{s},\frac{Y}{r}\right)=\widetilde{U}\left(X,Y\right)$$

Donc $\widetilde{U}$ est 2π- périodique par rapport à X et Y.

En utilisant la règle de dérivation d'une fonction composée on obtient

$$\partial_X\widetilde{U}\left(X,Y\right)=\frac{1}{s}\partial_xU\left(\frac{X}{s},\frac{Y}{r}\right)=\frac{1}{s}\partial_xU\left(x,y\right),$$

donc

$$\partial_xU\left(x,y\right)=s\partial_X\widetilde{U}\left(X,Y\right),$$

et de la même manière on obtient

$$\partial_yU\left(x,y\right)=r\partial_Y\widetilde{U}\left(X,Y\right).$$

En dérivant encore une fois par rapport à X on a

$$\partial_X^2 \widetilde{U}(X,Y) = \partial_X \left(\partial_X \widetilde{U}(X,Y) \right) = \partial_X \left(\frac{1}{s} \partial_x U \left(\frac{X}{s}, \frac{Y}{r} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{s^2} \partial_x^2 U \left(\frac{X}{s}, \frac{Y}{r} \right) = \frac{1}{s^2} \partial_x^2 U(x,y),$$

ainsi

$$\partial_x^2 U(x,y) = s^2 \partial_X^2 \widetilde{U}(X,Y),$$

et de la même manière on obtient

$$\partial_y^2 U(x,y) = r^2 \partial_Y^2 \widetilde{U}(X,Y).$$

Remarque 2.2.1: *On gardera dans la suite, la même notation $\widetilde{U} = U$, tout en considérant comme fonction $\widetilde{U}$ (2π-périodique par rapport à X et Y), sa représentation par sa restriction à l'ensemble des $(X,Y) \in \overline{\Omega} = [0,2\pi] \times [0,2\pi]$.*

Il est clair maintemant, que pour toute solution stationnaire $u(x,y)$ de (1.1), correspond une solution $U(X,Y)$ de l'équation suivante

$$\begin{aligned} &-\Delta^2{}_{sr} U(X,Y) - \alpha \Delta_{sr} U(X,Y) \\ &+\frac{\alpha}{2} \left(\left| \nabla_{sr} U(X,Y) \right|^2 - \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \nabla_{sr} U(\xi,\eta) \right|^2 d\xi d\eta \right) = 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

pour $(X,Y) \in \Omega =]0,\, 2\pi[\times]0,\, 2\pi[$. Où

$$\Delta_{sr} = s^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial Y^2}, \quad \text{et} \quad \nabla_{sr} = \left(s\frac{\partial}{\partial X} \,,\, r\frac{\partial}{\partial Y} \right).$$

Avec $\quad \left|\nabla_{sr} U\left(X,Y\right)\right|^2 = \left\langle \nabla_{sr} U\left(X,Y\right) \,,\, \nabla_{sr} U\left(X,Y\right) \right\rangle_{\mathbb{R}^2}$ [1].

1. Ici $\langle \,,\, \rangle_{\mathbb{R}^2}$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$.

2.3 Forme opérationnelle du problème

On peut réécrire l'équation (2.4) sous la forme opérationnelle suivante

$$\mathcal{L}_{\alpha,s,r}(U) + \mathcal{N}_{\alpha,s,r}(U) = 0, \tag{2.5}$$

définie dans un certain espace de Hilbert, qu'on précisera par la suite. Où $\mathcal{L}_{\alpha,s,r}$ est un opérateur linéaire, alors que la source non locale est représentée par $\mathcal{N}_{\alpha,s,r}$, la partie non linéaire du problème.

2.3.1 Définition de l'opérateur linéaire $\mathcal{L}_{\alpha,s,r}$

L'opérateur linéaire $\mathcal{L}_{\alpha,s,r}$ est défini par

$$\mathcal{L}_{\alpha,s,r}(U) = -\Delta^2{}_{sr} U\left(X,Y\right) - \alpha \Delta_{sr} U\left(X,Y\right).$$

2.3.2 Définition de l'opérateur non linéaire $\mathcal{N}_{\alpha,s,r}$

L'opérateur non linéaire $\mathcal{N}_{\alpha,s,r}$ est défini par

$$\mathcal{N}_{\alpha,s,r}(U) = \mathcal{N}(U,U),$$

tel que

$$\mathcal{N}(U,V) = \frac{\alpha}{2}\left\langle \nabla_{sr} U\left(X,Y\right) \, , \, \nabla_{sr} V\left(X,Y\right)\right\rangle_{\mathbb{R}^2} -$$

$$\frac{\alpha}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\langle \nabla_{sr}U\left(\xi,\eta\right)\ ,\ \nabla_{sr}V\left(\xi,\eta\right)\right\rangle_{\mathbb{R}^2} d\xi d\eta.$$

Remarque 2.3.1: *Les définitions précédentes ne sont que formelles, et c'est dans le paragraphe suivant que nous allons les préciser, avec le cadre fonctionnel approprié.*