

Les notions de base des processus de laminage

Dans ce chapitre nous allons tenter de présenter les principales notions de base des processus de laminage et nous étudierons les évolutions élastoplastiques de la bande lors du laminage en fonction des principaux paramètres adimensionnels définissant ce processus. Ce travail nous servira de guide pour les choix des méthodes de modélisations simplifiées qui feront l'objet des prochains chapitres.

Dans le premier paragraphe nous préciserons les différentes hypothèses sous lesquelles nous avons mené les calculs afin de simplifier le problème et faciliter cette présentation. En particulier, comme dans ce travail nous nous intéressons principalement à ce qui se passe dans la partie centrale de la bande, nous travaillerons en déformations planes.

Dans le second paragraphe nous présenterons brièvement les principales caractéristiques du logiciel LAM3 qui nous a permis de mener ces calculs.

Dans le troisième paragraphe nous analyserons les différents paramètres permettant de définir un processus de laminage. Ensuite nous essaierons de déterminer, à priori, les principaux paramètres adimensionnels influençant les processus de déformation.

Dans le quatrième paragraphe nous présenterons les différentes sorties utiles d'une simulation numérique de laminage avec LAM3 et nous présenterons avec certains détails ces différentes sorties sur un cas de laminage typique.

L'influence des principaux paramètres de laminage sera présentée dans le cinquième paragraphe.

1.1. Hypothèses retenues pour les simulations de laminage

De nombreuses questions relatives au laminage sont clairement des questions qui font appel à une modélisation thermomécanique tridimensionnelle. C'est notamment le cas si l'on s'intéresse à la variation de largeur des bandes ou aux contraintes résiduelles présentes dans la bande, après le passage dans les cages des laminoirs. Cependant si l'on veut avoir une première idée simple des mécanismes de déformation en jeu dans la partie centrale des bandes, il est possible de faire l'hypothèse que l'évolution est en déformations planes, les frottements parallèles à l'axe des cylindres de laminage étant, en général, suffisants pour limiter très fortement les déplacements de la matière suivant cet axe dans une très large partie centrale.

Nous nous placerons donc dans les hypothèses de déformations planes pour les modélisations ci-dessous.

L'entrée et la sortie d'une bande dans une cage est un processus transitoire, donc fonction du temps, cependant il est généralement admis que le régime permanent s'établit très rapidement, la bande défilant à une vitesse quasiment constante et les lignes de courant de la matière en déplacement se stabilisant très rapidement.

Les calculs ci-dessous seront donc menés dans l'hypothèse d'un régime permanent établi.

Les aciers ont un comportement élastoplastique avec le plus souvent un écrouissage isotrope et cinématique. Cependant dans les cas les plus courants, la prise en compte de cette loi d'écrouissage dans les calculs ne modifie pas qualitativement les mécanismes de déformations à l'œuvre lors du laminage par rapport à une modélisation élastique parfaitement plastique.

Par ailleurs, la comparaison de simulations sans écrouissage est plus facile à développer.

Nous retiendrons donc, ci-dessous, un comportement élastique parfaitement plastique de Von Mises pour modéliser les aciers.

La loi de frottement entre le cylindre et la bande est complexe pour les laminages réels. Dans les modélisations il est généralement choisi une loi de Tresca, de Coulomb ou de Norton. Dans un objectif de comparaison des mécanismes de déformation en fonction de paramètres adimensionnels, il est plus simple de retenir la loi de frottement de Tresca, car la composante tangentielle de la force surfacique de contact entre le cylindre et la bande peut être donnée en proportion du seuil de Von Mises de l'acier, lorsqu'il y a glissement.

Nous modéliserons donc le contact bande-cylindre avec une loi de Tresca.

Lors du passage de la bande sous le laminoir les efforts mutuels exercés sont importants et la cage du laminoir se déforme, ainsi que le cylindre. Ce phénomène a plus ou moins d'importance suivant les conditions de laminage. Les calculs couplant les déformations élastoplastiques de la bande et les déformations, généralement élastiques, de la cage et des cylindres sont assez complexes et en tout cas trop lourds pour l'objectif modeste que nous nous sommes donné ici.

Nous ferons donc l'hypothèse que les cylindres et les cages sont rigides et ne se déforment pas lors de l'opération de laminage.

1.2. Présentation de LAM3

Actuellement les chercheurs d'ArcelorMittal, utilisent fréquemment le logiciel LAM3 pour simuler les opérations de laminage. Ce logiciel a été développé au milieu des années 90 par le CEMEF en commun avec Alcan et Arcelor pour la modélisation du laminage de produits plats (Hacquin A., 1996). En fait, LAM3 est un outil de calculs thermomécaniques par Eléments Finis avec formulation lagrangienne réactualisée ou eulérienne stationnaire. La rhéologie est définie aux points d'intégration. Il est possible de coupler le calcul des déformations dans la bande avec un calcul Thermo-Elastique dans la cage de cylindres.

La formulation lagrangienne réactualisée est destinée à simuler les procédés non stationnaires (forgeage, bi-poinçonnement, laminage à pas de pèlerin,...).

La formulation eulérienne stationnaire est utilisée pour simuler les régimes permanents, le gain en précision ou temps de calcul est alors très significatif (de 1 à 2 ordres de grandeur).

La Figure 1-1 résume l'algorithme de calcul de LAM3.

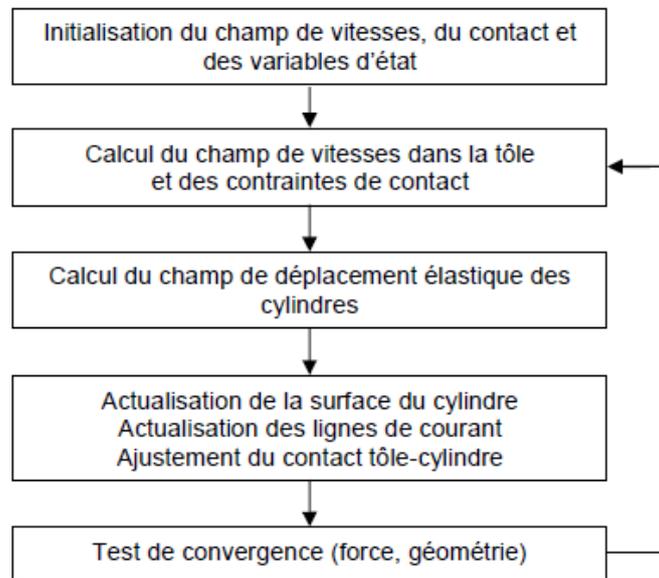


Figure 1-1 : Algorithme utilisé [LAM3, Manuel de l'utilisateur, 96]

L'inconvénient de LAM3 est le coût de stockage élevé pour la résolution et le temps de calcul pour des maillages fins en 3D. Cela limite sévèrement l'utilisation de LAM3 dans certaines questions industrielles plus complexes.

Le Tableau 1-1 résume les principales caractéristiques du modèle actuel :

FONCTION	METHODE NUMERIQUE
Déformation élastique de cage duo, quarto, sexto	Semi-analytique
Thermique Cylindre de Travail stationnaire/instationnaire	Eléments Finis (EF) 2D Streamline Upwind Petrov Galerkin (SUPG)
Plan de simulations thermomécaniques de cage	Boucle sur le cédage et/ou la thermique découplée de Forge3
Thermique pièce stationnaire/instationnaire	EF 3D SUPG/ EF 3D Galerkin en hexaèdres linéaires
Mécanique pièce multimatériaux stationnaire/instationnaire	EF 3D en hexaèdres avec pénalisation de l'incompressibilité (toutes rhéologies)

avec rhéologies : Visco-Plastique (VP) anisotrope	Lagrangienne Réactualisée/Eulérien
Elasto-Visco-Plastique (EVP) anisotrope	Lagrangienne Réactualisée/ Eulérienne Lagrangienne à pas de temps Δt Hétérogène (ELDTH)
et frottement : Coulomb anisotrope	
Norton anisotrope	
Tresca isotrope	
Bay-Wanheim aniso	

Tableau 1-1 Caractéristiques actuelles de LAM3 (Transvalor, 1996)

Dans les calculs ci-dessous nous utiliserons la version eulérienne stationnaire du logiciel LAM3. Ce modèle servira de modèle de référence tout au long de ce travail, mais les temps de calculs assez longs justifient l'objectif de recherche de modèles simplifiés pour un certain nombre d'applications courantes.

LAM3 sait faire beaucoup de choses, nous n'en utilisons qu'une petite partie.

1.3. Paramètres permettant de définir un processus de laminage

Sous les hypothèses du paragraphe 1.1 les paramètres permettant de définir un cas de laminage sont peu nombreux. Nous les introduisons ci-dessous.

A/ Paramètres géométriques.

Dans un problème en déformation plane et en régime permanent, le seul paramètre de la géométrie initiale est l'épaisseur. Le problème étant symétrique par rapport au plan médian horizontal, nous noterons h_e la demi-épaisseur initiale de la bande (ou **demi-épaisseur en entrée**).

L'objectif de réduction de l'épaisseur de la bande dans l'opération de laminage conduit à définir l'épaisseur de sortie de la bande après passage dans la cage. Nous noterons h_s la **demi-épaisseur de la bande en sortie**.

Les cylindres étant rigides, et leur axe ne se déplaçant pas (rigidité de la cage), d'un point de vue géométrique, il suffit de connaître leur **rayon R**.

Ainsi les paramètres géométriques sont :

Demi-épaisseur de la bande en entrée et sortie de l'emprise h_e, h_s

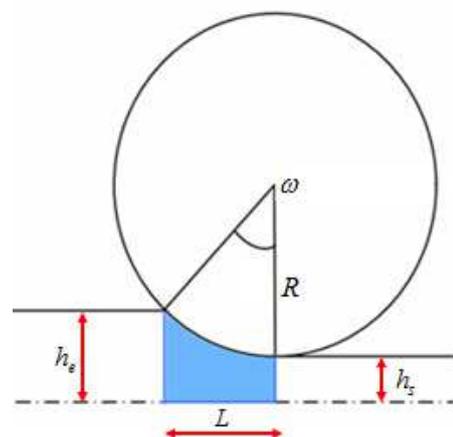


Figure 1-2 : Paramètres de laminage

Rayon de cylindre R

B/ Paramètres Matériaux.

Le comportement du matériau de la bande est supposé élastique parfaitement plastique de Von Mises. L'élasticité étant supposée isotrope, elle fait appel à deux paramètres caractéristiques du comportement, le **module d'Young** E et le **coefficient de poisson** ν .

Il faut aussi définir la **limite d'élasticité** σ_0 de ce matériau.

Enfin le frottement retenu est de type Tresca avec une limite de frottement $\tau = \pm k\sigma_0/\sqrt{3}$ où k est un **paramètre adimensionnel de frottement**.

Ainsi les paramètres matériaux sont :

Module d'Young et coefficient de Poisson du matériau de la bande E, ν

Limite d'élasticité du matériau de la bande σ_0 (Von Mises sans écrouissage)

Paramètre adimensionnel de frottement k (l'effort surfacique de frottement est $\tau = \pm k\sigma_0/\sqrt{3}$ lorsqu'il y a glissement)

C/ Paramètres de chargement.

Le chargement est donné d'une part par la **vitesse de rotation** ω des cylindres. (La vitesse des particules sur la frontière des cylindres est $V_c = R\omega$)

D'autre part, en général on exerce une **contrainte de traction** σ_e **sur la bande du côté de l'entrée** et une **contrainte de traction** σ_s **sur la bande du côté de la sortie**.

Ainsi les paramètres de chargement sont :

Vitesse du cylindre $V_c = R\omega$

Contraintes à l'entrée et à la sortie σ_e, σ_s

Il y a ainsi une dizaine de paramètres pour définir les cas de laminage sous les hypothèses du paragraphe 1.1.

Parmi ces paramètres, nous n'évoquerons plus le module d'Young et le coefficient de Poisson qui n'ont pas de raisons de varier beaucoup d'un cas à l'autre et qui, de toute façon, jouent un rôle secondaire.

Nous retiendrons pour les calculs $E = 210000$ MPa , $\nu = 0.3$.

Les 8 autres paramètres sont dimensionnés. Il est possible de dégager les principaux paramètres adimensionnels associés à ces 8 paramètres.

A'/ Paramètres adimensionnels géométriques.

Les trois paramètres géométriques dont la dimension est une longueur conduisent à deux paramètres adimensionnels.

Le premier que nous nommerons la **réduction verticale** $\lambda = \frac{h_s}{h_e}$ s'impose.

Pour avoir un second paramètre pertinent il est nécessaire de développer un peu les aspects géométriques du contact. Pour cela nous commençons par définir L la **longueur de contact** comme la longueur de la projection sur l'axe horizontal de la zone de contact entre la bande et le cylindre. La détermination de L est un petit travail géométrique élémentaire utilisant la rigidité de la cage, des cylindres et le théorème de Pythagore. Après calculs on trouve :

$$L = \sqrt{R^2 - (R + h_s - h_e)^2} .$$

Du point de vue le plus sommaire, l'opération de laminage peut être vu comme l'écrasement d'une bande de largeur L et de hauteur initiale $2h_e$.

Un deuxième paramètre géométrique adimensionnel important $e = \frac{h_s}{L}$ semble alors apparaître.

Nous l'appellerons par abus de langage l'**élancement** $e = \frac{h_s}{L}$

B' / Paramètres adimensionnels matériaux.

Nous avons déjà introduit le **paramètre adimensionnel de frottement** k

Si nous acceptons l'idée que l'on peut négliger les phénomènes liés à l'élasticité dans l'étude de l'influence des paramètres de laminage, il n'y aura pas d'autres paramètres adimensionnels matériaux. En particulier la limite d'élasticité σ_0 n'interviendra pas dans cette analyse. Bien sûr σ_0 sera alors à peu de choses près (élasticité négligée) en facteur des différentes sorties en efforts ou en contraintes des simulations.

C' / Paramètres adimensionnels de chargement.

La vitesse de rotation ω des cylindres est le seul paramètre faisant intervenir de manière explicite le temps. Il n'y a donc pas de paramètre adimensionnel qui lui soit associé.

Pour les autres paramètres de chargement, nous retiendrons

le paramètre adimensionnel de traction en entrée $t_e = \frac{\sigma_e}{\sigma_0}$

et le paramètre adimensionnel de traction en sortie $t_s = \frac{\sigma_s}{\sigma_0}$

On voit que, dans la limite où l'élasticité peut être négligée et sous les hypothèses du paragraphe 1.1, nous avons à travailler avec une famille de 5 paramètres adimensionnels.

C'est encore beaucoup et il semble nécessaire de mener un raisonnement qualitatif pour identifier les plus importants d'entre eux.

L'abondante littérature scientifique sur le sujet et la longue expérience des industriels guide heureusement pour le choix des paramètres principaux (Montmitonnet P., 2002).

Finalement les deux paramètres qui seront principalement étudiés sont la réduction verticale

$$\lambda = \frac{h_s}{h_e} \text{ et l'élanement } e = \frac{h_s}{L}.$$

Sauf indications contraires, k sera choisi égal à 0.4, et $t_e = t_s = 0.25$. La réduction verticale

$$\lambda = \frac{h_s}{h_e} \text{ variera dans les calculs qui suivent entre 0.5 et 0.9}$$

Enfin c'est surtout en faisant varier $e = \frac{h_s}{L}$ entre 0.08 et 0.18 que nous essaierons de mettre en évidence un changement de mécanisme de déformation sous l'emprise.

A titre d'exemple donnons ici les paramètres adimensionnels et dimensionnés du cas de laminage N°1 étudié plus loin

Cas 1 :

Paramètres adimensionnels :

$$\lambda = 0.7, e = 0.08, k = 0.4, t_e = t_s = 0.25$$

Paramètres dimensionnés :

Nous retenons les valeurs suivantes :

$$\sigma_0 = 600 \text{ MPa}, R = 250 \text{ mm}, V_c = 1000 \text{ mm/s}$$

Ce qui donne :

$$h_e = \frac{2R(1-\lambda)e^2}{\lambda^2 + e^2(\lambda-1)^2} = 1.957 \text{ mm}$$

$$h_s = \lambda h_e = 1.370 \text{ mm}$$

(h_e, h_s : demi-hauteur d'entrée et de sortie de la bande)

$$\sigma_e = 150 \text{ MPa}, \sigma_s = 150 \text{ MPa}$$

C'est un cas typique de laminage à froid.

1.4. Les sorties utiles d'un calcul avec LAM3

LAM3 permet d'obtenir une quantité considérable d'informations sur les opérations de laminage simulées. Nous allons ici lister les principales d'entre elles et la manière dont nous allons les utiliser. Nous verrons successivement des informations globales comme la force et le couple de laminage, la puissance de laminage et le glissement. Ensuite nous verrons les informations sur les vitesses, les contraintes, les déformations et la variation du volume.

A/ Les sorties globales

Avec LAM3, on peut avoir des sorties globales comme la force et le couple de laminage, la puissance de laminage et le glissement.

- La force de laminage, exprimée en N/m est la force verticale exercée par les cylindres sur une largeur de 1m de la bande. Cette force n'apporte pas de puissance mécanique à la bande
- Le couple de laminage, exprimé en N.m/m est le couple exercé sur chacun des cylindres par mètre de largeur de la bande pour créer la rotation de celui-ci à la vitesse angulaire ω . La puissance apportée par chaque cylindre à une unité de la largeur de la bande est $C \cdot \omega$
- La puissance de laminage est la somme de la puissance dissipée par la déformation de la bande et la puissance dissipée par frottement entre la bande et les cylindre. Elle est égale à la somme de la puissance fournie par chacun des cylindres et des puissances fournies par les tractions en entrée et en sortie de la bande. Nous conviendrons de noter P , la moitié de cette puissance par unité de largeur de la bande :

$$P = C \cdot \omega - \sigma_e h_e V_e + \sigma_s h_s V_s$$

Où :

V_e est la vitesse d'entrée de la bande

V_s est la vitesse de sortie de la bande

- Le glissement, exprimé en % est une grandeur qui est associée au glissement entre la bande et le cylindre à la sortie du cylindre :

$$G = \frac{V_s - V_c}{V_c} \times 100$$

B/ Les sorties en vitesse

Nous choisissons un repère orthonormé $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$ tel que O soit sur l'axe de symétrie du problème sous le point bas du cylindre haut, \underline{e}_x le vecteur unitaire dans la direction de laminage et \underline{e}_y le vecteur unitaire directement orthogonal.

LAM3 donne les champs de vitesse en régime permanent.

Nous nous intéressons tout d'abord à $V_x(x, y)$ **la première composante du champ de vitesse** des particules de la bande dans la direction de laminage. La question principale concerne la non uniformité éventuelle de ce champ dans l'épaisseur dans la zone d'emprise. Pour étudier cela, les calculs LAM3 sont menés avec un maillage comprenant 5 mailles dans l'épaisseur soit, 6 « lignes de nœuds ».

Il est facile de déterminer un champ de vitesse de référence sous les hypothèses d'uniformité parfaite de cette composante dans l'épaisseur et de conservation du volume. On trouve

$V_x^{ref}(x; \mathcal{X}) = V_e \frac{h_e}{h(x)}$ où nous rappelons que V_e est la « vitesse d'entrée » de la bande avant la

zone d'emprise (vitesse des particules de la bande pour $x < -L$) et $h(x)$ est la demi-hauteur

de la bande sous l'hypothèse de cylindres et cages indéformables ($h(x) = h_e$ avec $x < -L$, $h(x) = R + h_s - \sqrt{R^2 - x^2}$ avec $x \in [-L, 0]$ et $h(x) = h_s$ avec $x > 0$).

La présentation des résultats LAM3 qui nous a paru la plus pertinente pour répondre à la question de la non uniformité éventuelle de la composante horizontale dans l'épaisseur est une présentation « normalisée » dans un repère $\left(\frac{x}{L}, \frac{V_x(x, y)}{V_x^{ref}(x)} \right)$.

Dans cette présentation chaque cas de laminage est représenté par 6 courbes (chacune d'entre elle correspond à une ligne de nœuds). L'écart entre ces courbes permet de juger de la non uniformité de cette composante. L'écart par rapport à une courbe uniforme de valeur 1 permet de juger de l'importance de la variation de volume dans la bande.

Nous nous intéressons ensuite à $V_y(x, y)$ **la deuxième composante du champ de vitesse**.

Le champ de vitesse de référence sous les hypothèses d'uniformité parfaite de la composante horizontale dans l'épaisseur et de conservation du volume donne pour la composante verticale de la vitesse $V_y^{ref}(x, y) = V_e h_e \frac{h'(x)}{h^2(x)}$ (Intégration de l'équation $div(\underline{V}^{ref}) = 0$).

La présentation des résultats des simulations LAM3 sera faite sous forme « normalisée » dans le repère $\left(\frac{x}{L}, \frac{V_y(x, y)}{V_y^{ref}(x, y)} \right)$.

Pour finir sur la comparaison des champs de vitesse pour les différents cas de laminage étudiés, nous nous intéresserons à la **vitesse de glissement à l'interface bande-cylindre**.

Sous les hypothèses du paragraphe 1.1 la vitesse des particules du cylindre à la surface du cylindre est uniforme égale à $V_c = R\omega$. LAM3 donne les deux composantes de la vitesse pour les particules sur la ligne de nœud du contact (ligne 6). Nous tracerons donc pour chaque cas de laminage la grandeur adimensionnelle $\left(\sqrt{V_x^2(x, h(x)) + V_y^2(x, h(x))} \right) / V_c - 1$ en fonction de $\frac{x}{L}$. Nous la nommerons « Vitesse normalisée de glissement ». La valeur globale G est la

valeur de cette vitesse normalisée de glissement en $x=0$.

Dans la partie de la courbe où cette valeur est négative, les particules de la bande vont moins vite que celles du cylindre et le frottement est « moteur ». Dans la partie de la courbe où cette valeur est positive, les particules de la bande vont plus vite que celles du cylindre et le frottement est « résistant ».

Les points ou zones où la valeur est nulle sont des points ou zones neutres.

C/ Les sorties en contrainte

LAM3 donne le champ de contraintes dans la bande de laminage. Nous présentons les courbes de contraintes « normalisées » σ_{xx} / σ_0 , σ_{yy} / σ_0 et σ_{xy} / σ_0

Avec LAM3, on peut également sortir la contrainte de Von mises « normalisée » :

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sigma_0} \sqrt{\frac{3}{2} (\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}})}$$

Où : σ_{eq} est la contrainte Von Mises « normalisée »

σ_0 est la limite d'élasticité de la matière

$\underline{\underline{s}}$ est la partie déviatorique de $\underline{\underline{\sigma}}$

Dans toutes les zones « plastiques » sous le cylindre, on doit avoir $\sigma_{eq} = 1$

D/ Les sorties en variation du volume et déformation

Nous ne présentons que peu des nombreuses sorties possibles en déformation. Nous nous contenterons de présenter la variation de volume d'origine purement élastique qui peut être déterminée à partir de la trace du tenseur de contrainte par la formule :

$$J = \frac{1}{3k_0} tr(\underline{\underline{\sigma}}) + 1$$

Où k_0 est le module d'incompressibilité de la matière, $k_0 = 1/3 \times E / (1 - \nu)$

Nous présenterons aussi la courbe de la déformation plastique cumulée. Par définition, la déformation plastique cumulée entre les instants t_0 et t est le scalaire $p_{cum} = \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{d}}^p : \underline{\underline{d}}^p} dt$

Où $\underline{\underline{d}}^p$ est le tenseur taux de déformation plastique.

Dans le cas du régime permanent, l'intégrale sur le temps est transformée en une intégrale sur l'espace et la déformation plastique cumulée est donnée par LAM3 pour chaque ligne d'éléments.

Donnons en détail ci-dessous ces sorties dans un cas particulier.

Application numérique pour un cas de laminage (Cas 1) :

Pour certaine comparaisons, nous ferons appel à d'autres jeux de paramètres. Ces jeux de paramètres seront alors précisés.

Rappelons les paramètres de ce cas 1.

Paramètres adimensionnels :

$$\lambda = 0.7, e = 0.08, k = 0.4, t_e = t_s = 0.25$$

Paramètres dimensionnés :

Nous avons retenu les valeurs dimensionnées de base suivantes :

$$\sigma_0 = 600 \text{ MPa}, R = 250 \text{ mm}, V_c = 1000 \text{ mm/s}, \left(\omega = V_c / R = 4 \text{ rad/s} \right)$$

Ce qui donne :

$$h_e = \frac{2R(1 - \lambda)e^2}{\lambda^2 + e^2(\lambda - 1)^2} = 1.957 \text{ mm}$$

$$h_s = \lambda h_e = 1.370 \text{ mm}$$

$$\sigma_e = 150 \text{ MPa}, \sigma_s = 150 \text{ MPa}$$

A/ Les sorties globales

LAM3 donne les sorties globales suivantes :

La force de laminage par unité de largeur de la bande : $F = 18.94 \times 10^6 \text{ N/m}$

Le couple de laminage par unité de largeur la bande sur chaque cylindre :

$$C = 1.44 \times 10^5 \text{ N.m/m}$$

La puissance de laminage par unité de largeur de la bande (pour une demie bande) :

$$P = 6.07 \times 10^5 \text{ N.m/ms}$$

Le glissement en sortie : $G = 6.20\%$ (Ce qui correspond à une vitesse de sortie sous le cylindre $V_s = V_c(1 + 0.01 \times G) = 1062 \text{ mm/s}$. Sous une hypothèse de conservation de débit, cela donnerait une vitesse d'entrée $V_e = \lambda V_s = 743.4 \text{ mm/s}$).

Remarque :

Nous avons vu que $P = C \cdot \omega - \sigma_e h_e V_e + \sigma_s h_s V_s$

Bien sûr si le débit volumique de matière est conservé ($h_e V_e = h_s V_s$) , une différence entre ces valeurs en régime permanent ne peut être associée qu'à une compression élastique résiduelle en sortie du laminoir.

Ici $\sigma_e = \sigma_s$, donc dans l'hypothèse de débit conservé $P = C \cdot \omega$. Mais on constate que ce n'est pas exactement le cas dans nos résultats numériques $C \cdot \omega = 5.76 \text{ kN.m/ms}$ au lieu de $6.07 \times 10^5 \text{ N.m/ms}$. Il y a un écart numérique.

Cet écart ne peut pas être associé à une différence de débit volumique entre l'entrée et la sortie du cylindre. En effet, même si le débit volumique entre l'entrée et la sortie des cylindres n'est pas conservé, ce phénomène est due à la forte compression isotrope de la bande en sortie de cylindre qui « emporte » donc une certaine quantité d'énergie élastique ($\sigma_s h_s V_s - \sigma_e h_e V_e$ par unité de largeur de la bande). La correction sur $C \cdot \omega$ introduit par la prise en compte de ce phénomène de compression isotrope n'a donc pas le signe souhaité. L'écart est donc probablement dû au cumul d'erreurs numériques dans le calcul de la puissance de laminage. Cet écart est suffisamment faible pour qu'il ne soit pas nécessaire de s'inquiéter.

Pour confirmer ce que nous venons de dire, nous réalisons une simulation de laminage avec la traction en entrée et en sortie nulles ($\sigma_e = \sigma_s = 0$) et nous obtenons :

La force de laminage par unité de largeur de la bande : $F = 22.10 \times 10^6 \text{ N/m}$

Le couple de laminage par unité de largeur la bande sur chaque cylindre :

$$C = 1.43 \times 10^5 \text{ N.m/m}$$

La puissance de laminage par unité de largeur de la bande (pour une demi-bande) :

$$P = 6.06 \times 10^5 \text{ N.m/ms}$$

Le glissement en sortie : $G = 6.17\%$

Nous voyons que les forces sur la bande en entrée et sortie du laminoir ont surtout une influence sur la force de laminage qui ne travaille pas.

B/ Les sorties en vitesse

Commençons par dessiner les sorties en vitesse non « normalisée » :

La première constatation que l'on peut faire sur cette courbe est que la vitesse horizontale est sensiblement identique pour toutes les particules à la même abscisse (courbe 1 à 6 à peu près confondues).

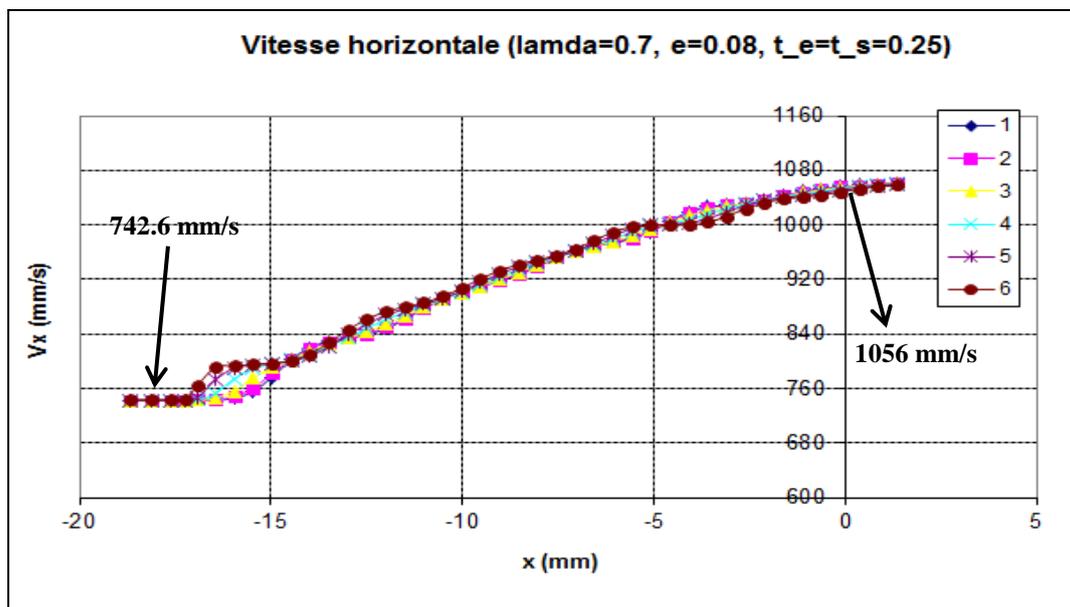


Figure 1-3 : Vitesse horizontale dans la bande de laminage

La deuxième constatation est que la vitesse maximale n'est pas atteinte directement à la sortie de la cage ($x=0$) mais un peu plus loin. Ce phénomène est vraisemblablement due à la relaxation de la contrainte élastique dont la partie isotrope reste sensiblement négative en $x=0$ et diminue ensuite, entraînant une augmentation élastique de volume.

La dernière constatation immédiate est que la vitesse d'entrée des particules de la bande (en $x=-17.2$ mm) est de 742.6 mm/s. Cette valeur est un peu différente avec la valeur trouvée ci-dessus (743.4 mm/s avec hypothèse de conservation du débit). De plus, la vitesse en $x=0$ est de 1056 mm/s. Cette valeur est un peu inférieure à la vitesse de sortie $V_s = 1062$ mm/s.

Ainsi on constate que $h_e V_e$ est en fait différent de $h_s V_s$. Le débit volumique est donc différent entre l'entrée et la sortie sous cylindre. Nous retrouvons ici le phénomène de forte compression élastique sous cylindre qui est ensuite relaxée.

Concernant la vitesse verticale (Figure 1-4), constatons d'abord qu'elle est de deux ordres de grandeur inférieure à la vitesse horizontale. La première ligne de nœuds correspondant à l'axe de symétrie a bien sûr une vitesse verticale nulle. La sixième ligne suit la géométrie du

cylindre et le rapport entre V_x et V_y est donc imposé. Pour les autres lignes de nœuds, on constate une oscillation. Les creux sur la Figure 1-4 correspondent à des sortes « de dents » de matière presque rigide s'enfonçant depuis le cylindre en rotation, les bosses correspondent à des dents presque rigides d'orientation inverse générées sur l'axe de symétrie.

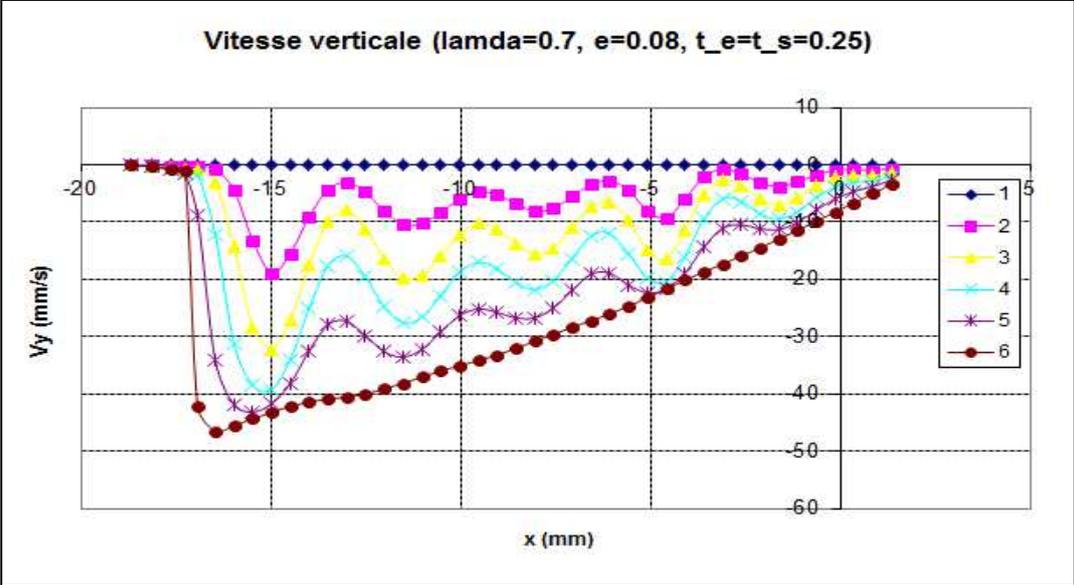


Figure 1-4 : Vitesse verticale dans la bande de laminage

Examinons maintenant les courbes « normalisées » telle qu'elles sont définies plus haut. Nous constatons que la vitesse horizontale « normalisée » (Figure 1-5) ne vaut pas exactement 1 pour toutes les abscisses. Ceci confirme que le débit volumique n'est pas exactement uniforme. Comme la partie plastique de la déformation est sans variation de volume, l'écart à 1 de ces courbes résulte de la compression élastique de la matière.

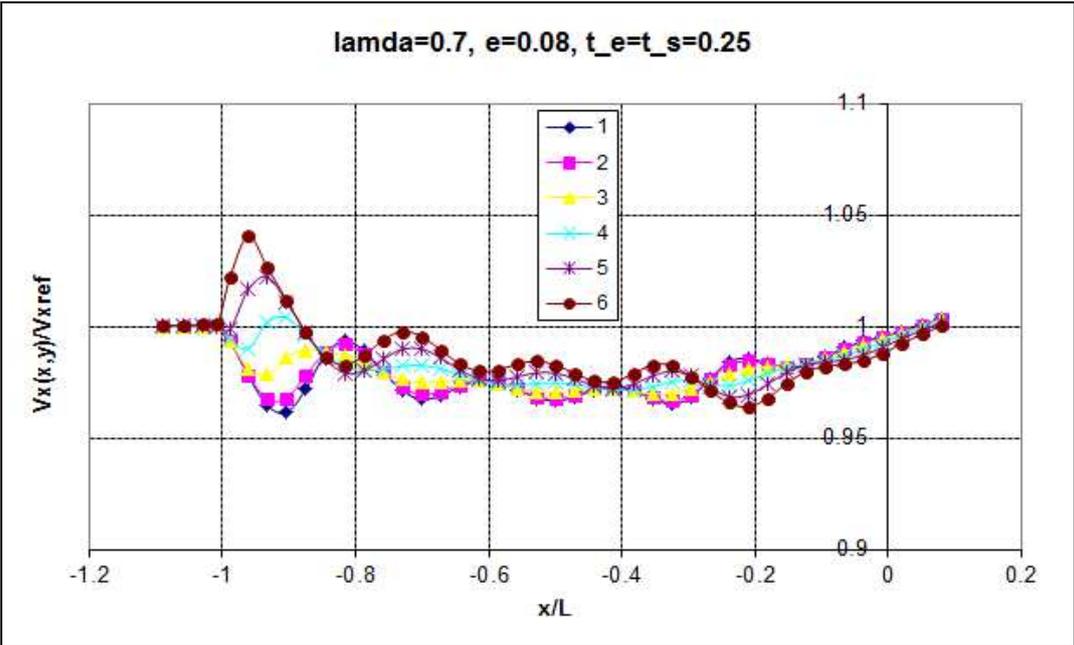


Figure 1-5 : Vitesse horizontale « normalisée » dans la bande de laminage

Pour confirmer ce que nous venons de dire sur la compression élastique dans la bande, nous réalisons une simulation de laminage avec un Module d'Young multiplié par 10^3 de façon à être très proche de la description d'un matériau rigide plastique.

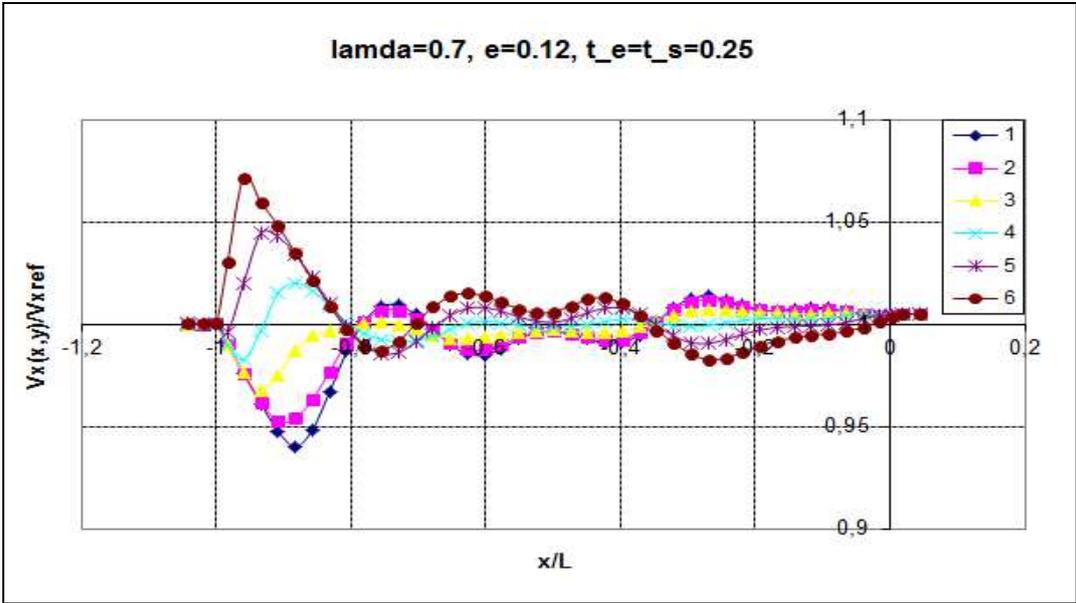


Figure 1-6 : Vitesse horizontale « normalisée » dans la bande de laminage (matériau rigide plastique)

Sur la Figure 1-6 donnant la vitesse horizontale « normalisée » correspondante, on constate que les courbes sont beaucoup plus proches de 1 (et la moyenne de ces courbes encore plus proche de 1). Ce qui implique que le débit volumique est uniforme. Cela confirme notre analyse sur l'influence de la compression élastique dans la variation de débit volumique.

Vérifions que l'écroutissage n'est pas déterminant dans le processus de laminage en montrant ci-dessous la courbe V_x « normalisée » dans un cas qui correspond à peu près à un écroutissage isotrope avec une limite d'élasticité $\sigma_p = \sigma_0(1 + \alpha \times p_{cum})$ (on choisit $\alpha = 0.1$)

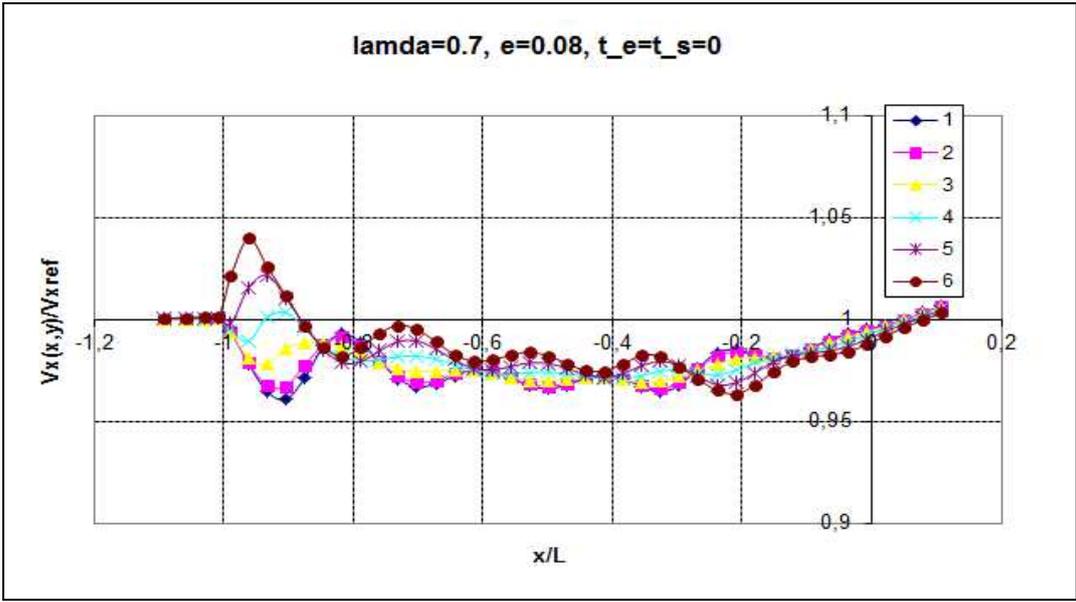


Figure 1-7 : Vitesse horizontale « normalisée » dans la bande de laminage (l'écroutissage)

En comparant cette courbe à celle du cas 1 de référence. On voit que les différences sont très faibles. Cela justifie de ne pas faire entrer les paramètres d'écroûissage dans les paramètres dont l'influence est primordiale.

Notons que l'écart à 1 sur la Figure 1-5 reste faible (<3%) pour toutes les abscisses, ce qui justifie que certains modèles simplifiés négligent cette compression. La vitesse de référence dans la direction longitudinale de la bande de laminage $V_x^{ref}(x; \mathcal{X}) = V_e \frac{h_e}{h(x)}$ est souvent une bonne approximation.

Examinons maintenant la vitesse « normalisée » verticale (Figure 1-8). On constate que la vitesse de référence verticale $V_y^{ref}(x, y) = V_e h_e \frac{h'(x)}{h^2(x)}$ est une assez médiocre approximation, particulièrement en sortie de l'emprise (Figure 1-9).

Notons qu'en sortie d'emprise $V_y^{ref}(x, y)$ tend vers 0, ainsi la vitesse verticale normalisée n'a plus de sens. Il ne donc pas trop s'inquiéter de cette brusque montée sur la courbe de la Figure 1-8. Nous redessinons la courbe sur la Figure 1-9 en changeant d'échelle. Les courbes de la vitesse verticale normalisée oscillent. La pseudo période d'oscillation de ces courbes (de l'ordre de $2 \times e$) semble fixée mais l'amplitude est variable.

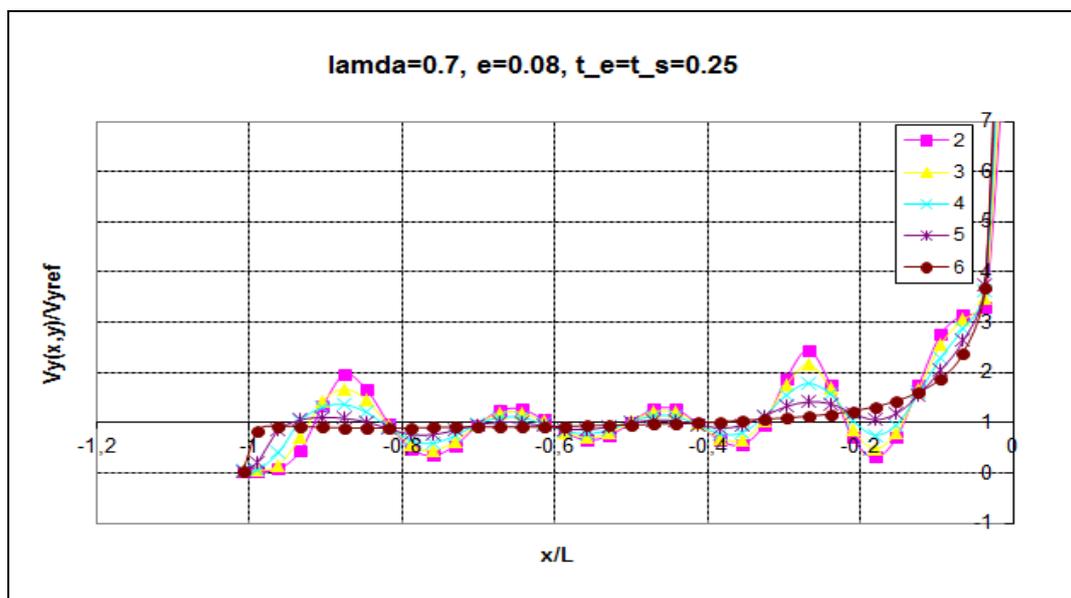


Figure 1-8 : Vitesse verticale « normalisée » dans la bande de laminage (grande échelle)

Examinons maintenant la vitesse normalisée de glissement à l'interface bande-cylindre. Dans la partie de la courbe où cette valeur est négative (partie à gauche de la zone neutre, Figure 1-10), les particules de la bande vont moins vite que celles du cylindre et le frottement est « moteur ». Dans la partie de la courbe où cette valeur est positive (partie à gauche de la zone neutre, Figure 1-10), les particules de la bande vont plus vite que celles du cylindre et le frottement est « résistant ».

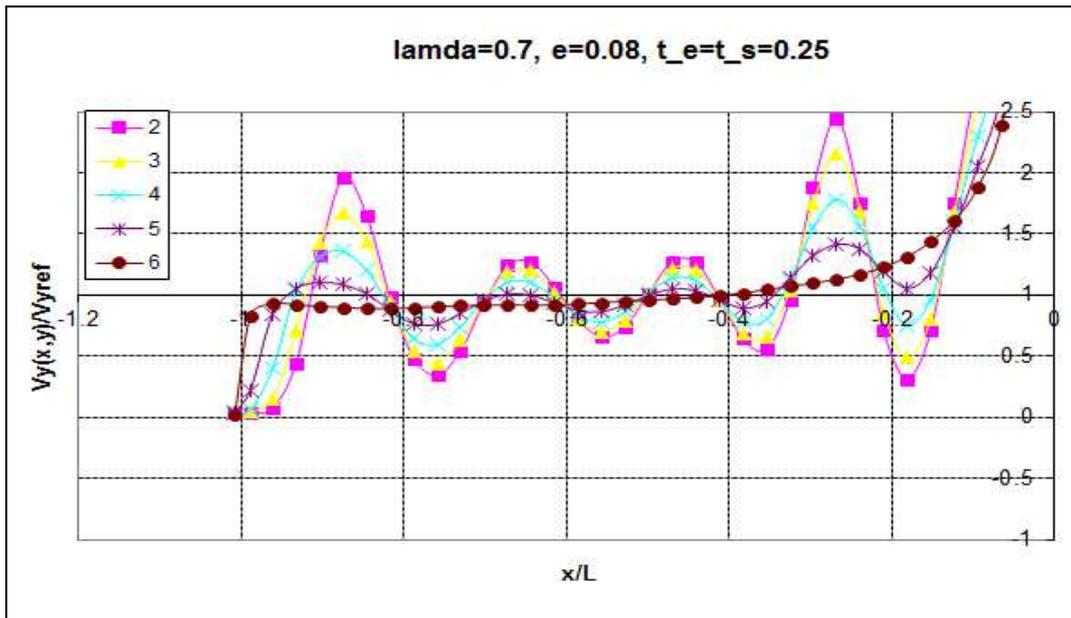


Figure 1-9 : Vitesse verticale « normalisée » dans la bande de laminage (petite échelle)

La zone (indiquée dans la Figure 1-10) où la valeur de la vitesse de glissement est nulle est la zone neutre.

Rappelons que $G = 6.20\%$ est égale au maximum de cette courbe. Ce maximum est atteint un peu après la sortie de l'empreise.

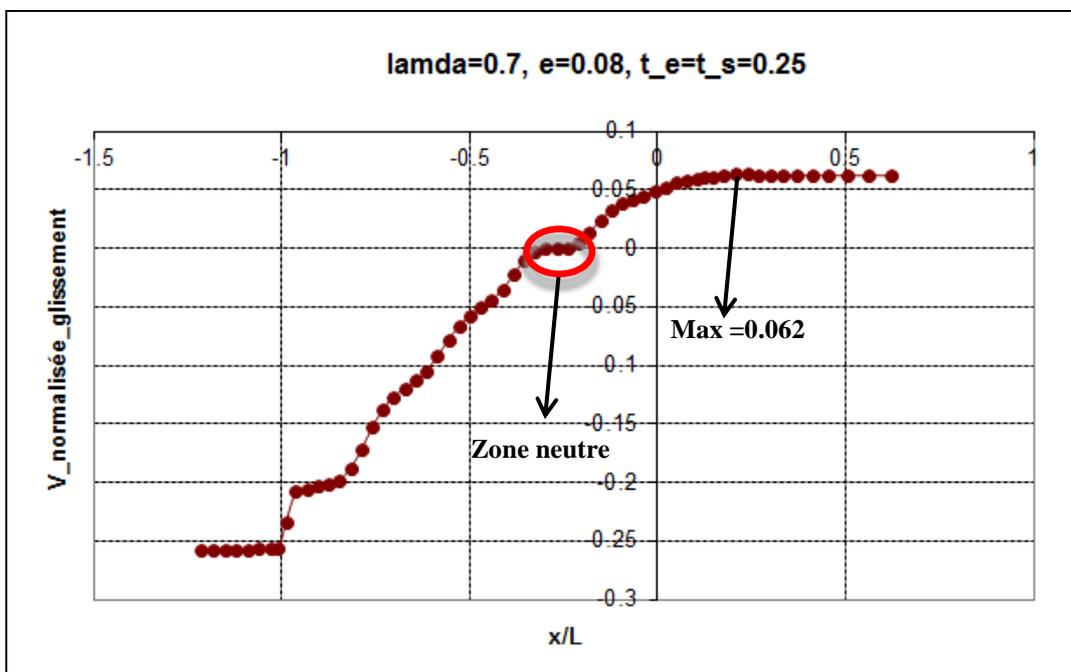


Figure 1-10 : Vitesse normalisée de glissement à l'interface bande-cylindre

C/ Les sorties en contrainte

Les contraintes « normalisé » σ_{xx} / σ_0 et σ_{yy} / σ_0 sont présentées dans Figure 1-11 et Figure 1-12. Nous constatons que dans notre cas (l'élancement e est petit), ces contraintes sont presque identiques pour les éléments qui ont la même abscisse. De plus, elles sont à peu près linéaires par morceaux (2 morceaux ici) et l'intersection entre les deux morceaux se situe au niveau de la zone neutre.

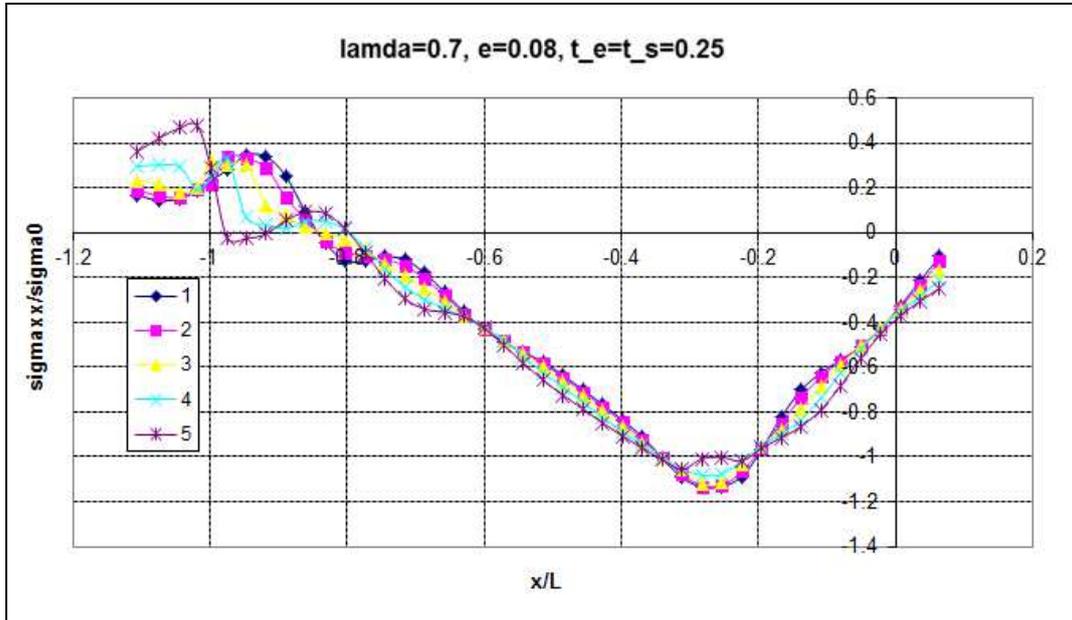


Figure 1-11 : Courbe de la contrainte σ_{xx} / σ_0

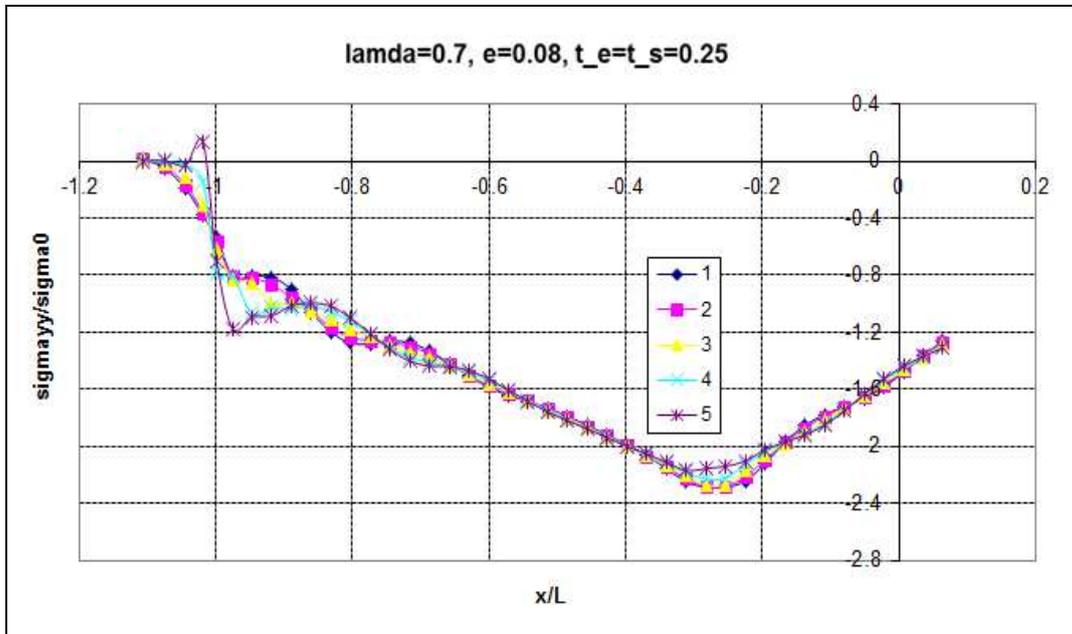


Figure 1-12 : Courbe de la contrainte σ_{yy} / σ_0

Concernant le cisaillement « normalisé », on constate qu'il est plus élevé dans les éléments qui sont plus proches du cylindre et qu'ils sont nulles au point neutre. Dans la partie en amont

(à gauche du point neutre), la valeur de cisaillement est positive (Figure 1-13). Cela s'explique par le fait que les particules de la bande vont moins vite que celles du cylindre. Dans la partie en aval (à droite du point neutre), la valeur de cisaillement est négative. Cela s'explique par le fait que les particules de la bande vont plus vite que celles du cylindre.

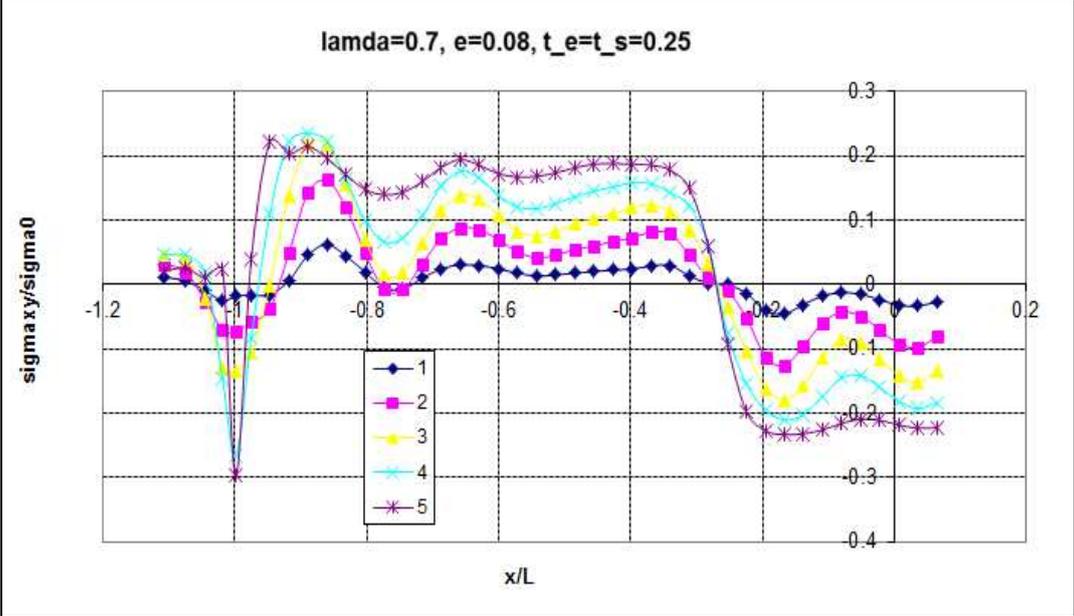


Figure 1-13 : Courbe de la contrainte σ_{xy}/σ_0

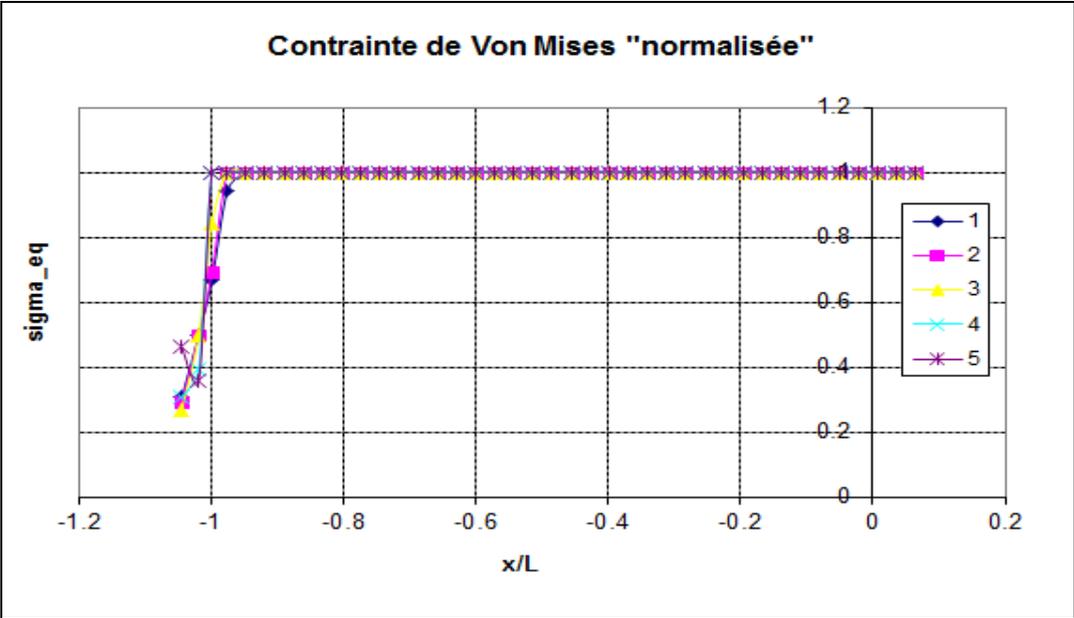


Figure 1-14 : Courbe de la contrainte Von Mises « normalisé »

Nous vérifions que la courbe de la contrainte Von Mises « normalisée » vaut bien uniformément 1 dans la zone plastique de la bande de laminage.

D/ Les sorties en variation du volume et déformation

Comme les contraintes σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} sont à peu près linéaires par morceaux, la variation du volume (associé à $tr(\underline{\underline{\sigma}})$) est aussi à peu près linéaire par morceaux. L'intersection entre les deux morceaux se situe au point neutre.

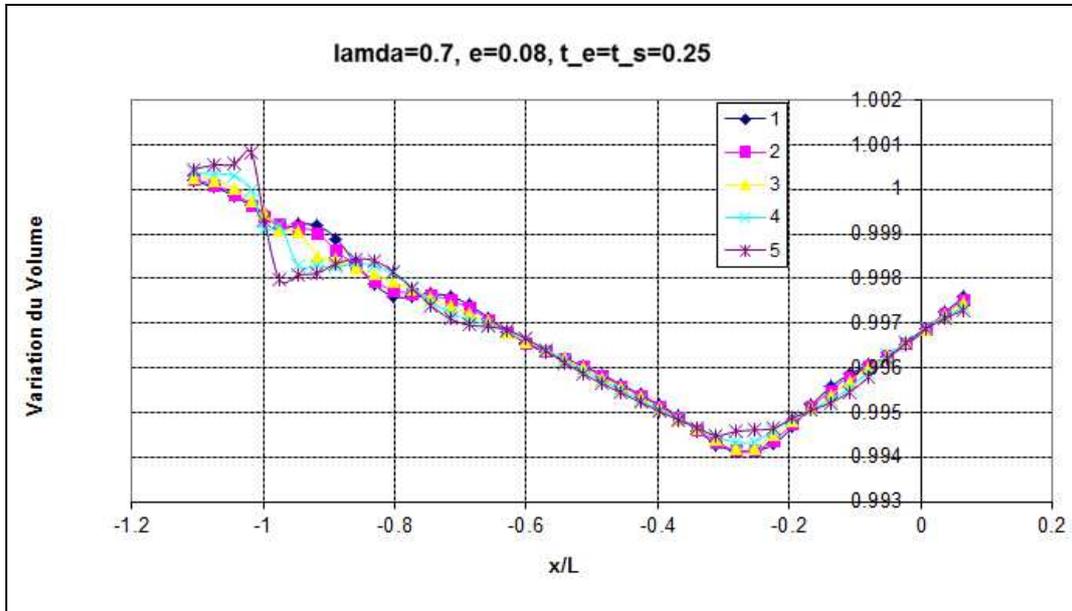


Figure 1-15 : Courbe de la variation du volume

La déformation plastique cumulée dans la bande de laminage dans ce cas-là est presque uniforme dans l'épaisseur :

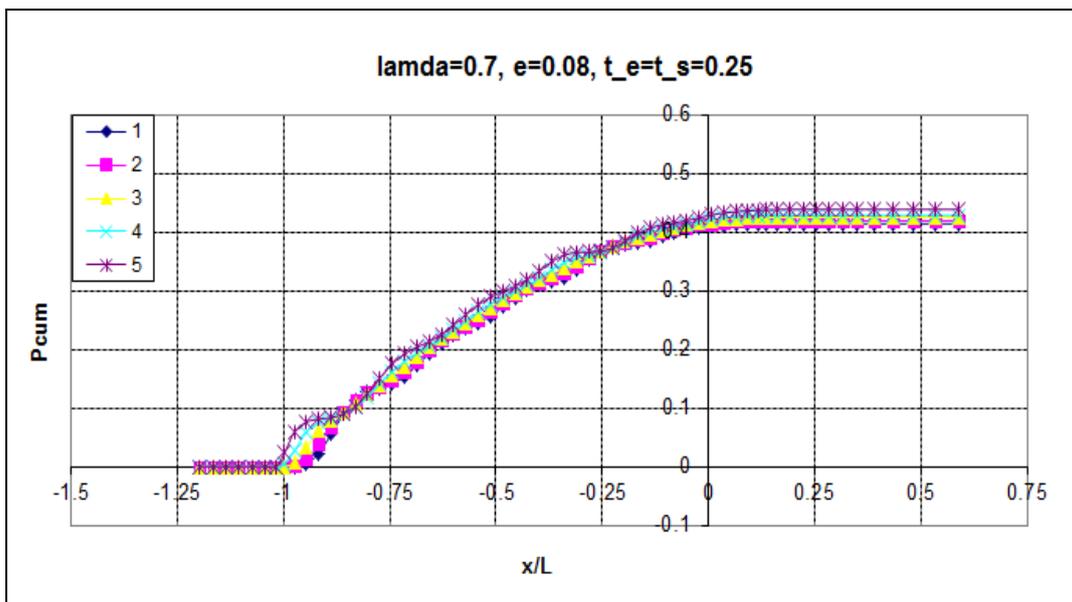


Figure 1-16 : Déformation plastique cumulée dans la bande de laminage

1.5. Influence des principaux paramètres du laminage

Nous avons vu plus haut que nous avons 5 paramètres adimensionnels définissant les cas de laminage sous les hypothèses du paragraphe 1.1.

L'expérience des industriels nous a conduit à privilégier 2 de ces paramètres dont nous allons étudier l'influence

- la réduction verticale $\lambda = \frac{h_s}{h_e}$

- l'élanement $e = \frac{h_s}{L}$.

Rappelons que les autres paramètres ont été fixés :

- le paramètre adimensionnel de frottement $k=0.4$

- le paramètre adimensionnel de traction en entrée $t_e = \frac{\sigma_e}{\sigma_0} = 0.25$

- le paramètre adimensionnel de traction en sortie $t_s = \frac{\sigma_s}{\sigma_0} = 0.25$

Pour étudier l'influence de ces deux paramètres adimensionnels importants, nous avons fait des calculs LAM3 avec 3 valeurs pour λ (0.5 ; 0.7 ; 0.9) et 6 valeurs pour e (0.08 ; 0.10 ; 0.12 ; 0.14 ; 0.16 ; 0.18). Cela donne 18 cas « de base » :

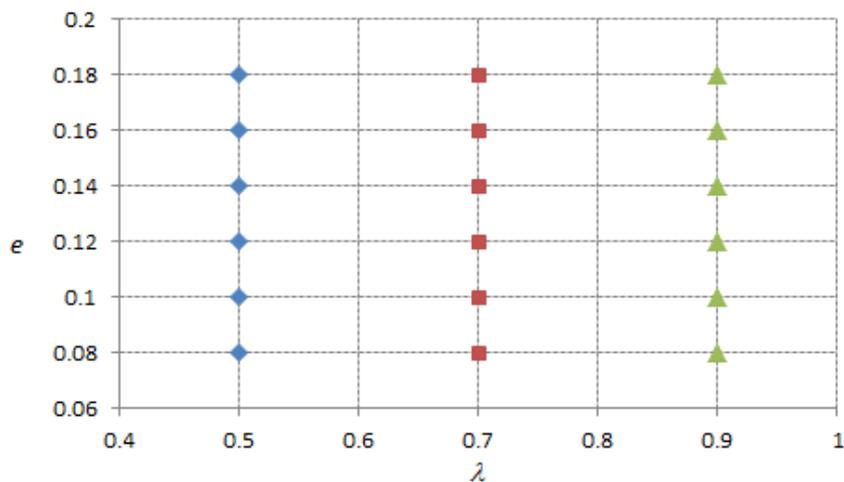


Figure 1-17 : Les valeurs des deux paramètres adimensionnels importants

Nous avons ajouté à ces 18 cas, 6 cas pour l'étude de l'influence des tractions d'entrée et de sortie, 6 cas pour l'étude de l'influence de l'écroutissage et 6 cas pour l'étude de l'influence de la prise en compte de déformation élastique. Nous ne reviendrons pas sur ces 18 autres cas.

Les résultats complets correspondent à ces 36 cas ne sont pas présentés dans ce mémoire de thèse. Dans ce paragraphe, nous ne présentons que les résultats qui nous paraissent nécessaires pour discuter l'influence des principaux paramètres.

Commençons par nous intéresser aux valeurs globales. Nous définissons la force normalisée (adimensionnel) de laminage par unité de longueur de bande par :

$$\hat{F} = \frac{F}{\sigma_0 L}$$

Où - F est la force de laminage par unité de largeur de bande

- σ_0 est la limite d'élasticité

- L est la longueur de contact entre le cylindre et la bande

Les 3 courbes de la figure ci-dessous donnent la force normalisée de laminage par unité de largeur de bande \hat{F} en fonction de l'élancement e pour les 3 valeurs de la réduction verticale λ

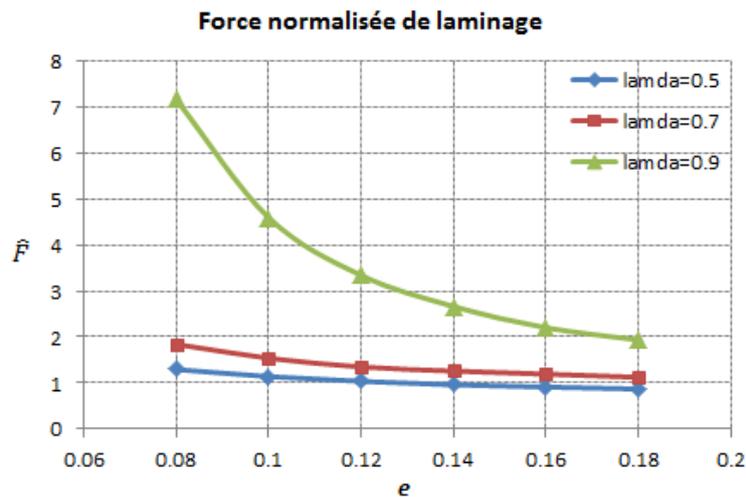


Figure 1-18 : La force normalisée de laminage

Nous constatons que pour les réductions fortes ($\lambda = \frac{h_s}{h_e} = 0.5$) ou moyennes ($\lambda = \frac{h_s}{h_e} = 0.7$), la force de laminage est de l'ordre de grandeur $\sigma_0 L$ quel que soit l'élancement $e = \frac{h_s}{L}$. Pour les

cas de réduction faible ($\lambda = \frac{h_s}{h_e} = 0.9$), la force normalisée de laminage est beaucoup plus

grande, en particulier lorsque l'élancement $e = \frac{h_s}{L}$ est faible. Rappelons que la force de

laminage est sensible aux tractions d'entrée et de sortie des bandes que nous ne faisons pas varier. Nous n'étudierons pas plus ce phénomène ici.

Définissons maintenant le couple normalisé (adimensionnel) de laminage par unité de longueur par :

$$\hat{C} = \frac{C}{\sigma_0 L}$$

Où C est le couple de laminage par unité de largeur de bande.

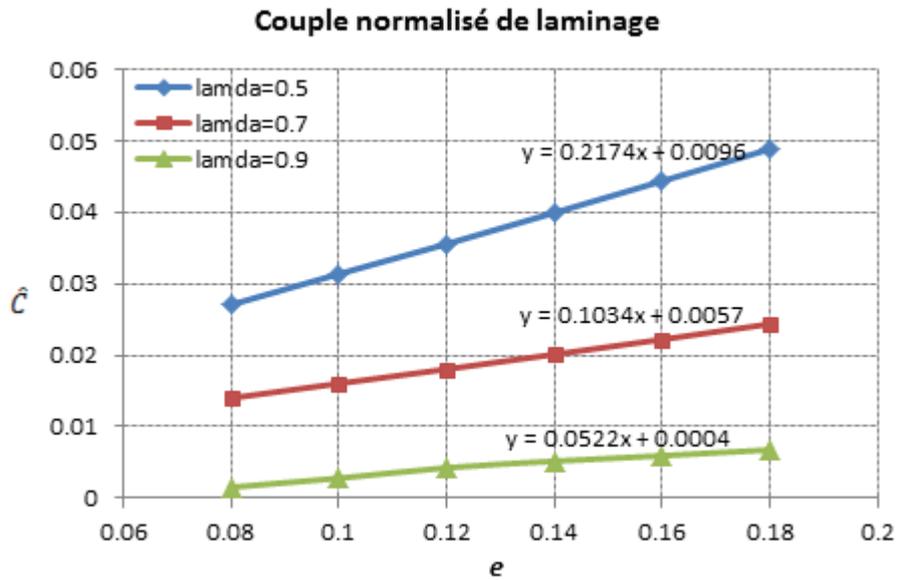


Figure 1-19 : Le couple normalisé de laminage

Nous constatons que les couples normalisés de laminage varient de façon à peu près linéaire en fonction de e quel que soit λ . Plus la réduction verticale est forte ($\lambda \searrow$) plus le couple normalisé est élevé.

La courbe ci-dessous donne le glissement en sortie G en fonction de e pour les 3 valeurs de λ :

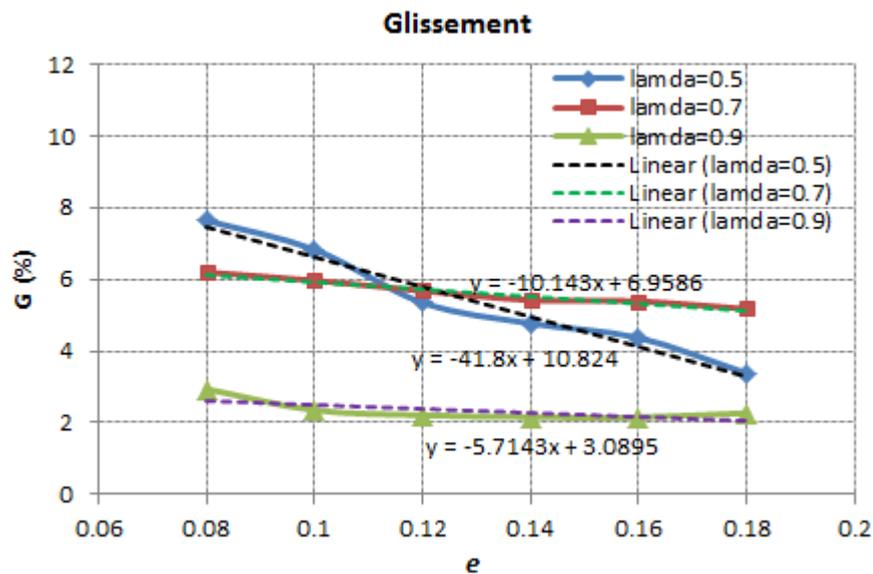


Figure 1-20 : Le glissement en sortie

Nous constatons que pour les fortes réductions fortes ($\lambda = \frac{h_s}{h_e} = 0.5$), le glissement en sortie

dépend fortement de l'élongement $e = \frac{h_s}{L}$.

Intéressons-nous maintenant à la vitesse longitudinale normalisée dans la bande $\frac{V_x(x, y)}{V_x^{ref}(x)}$ où

la vitesse longitudinale de référence est définie par la formule $V_x^{ref}(x; \lambda) = V_e \frac{h_e}{h(x)}$

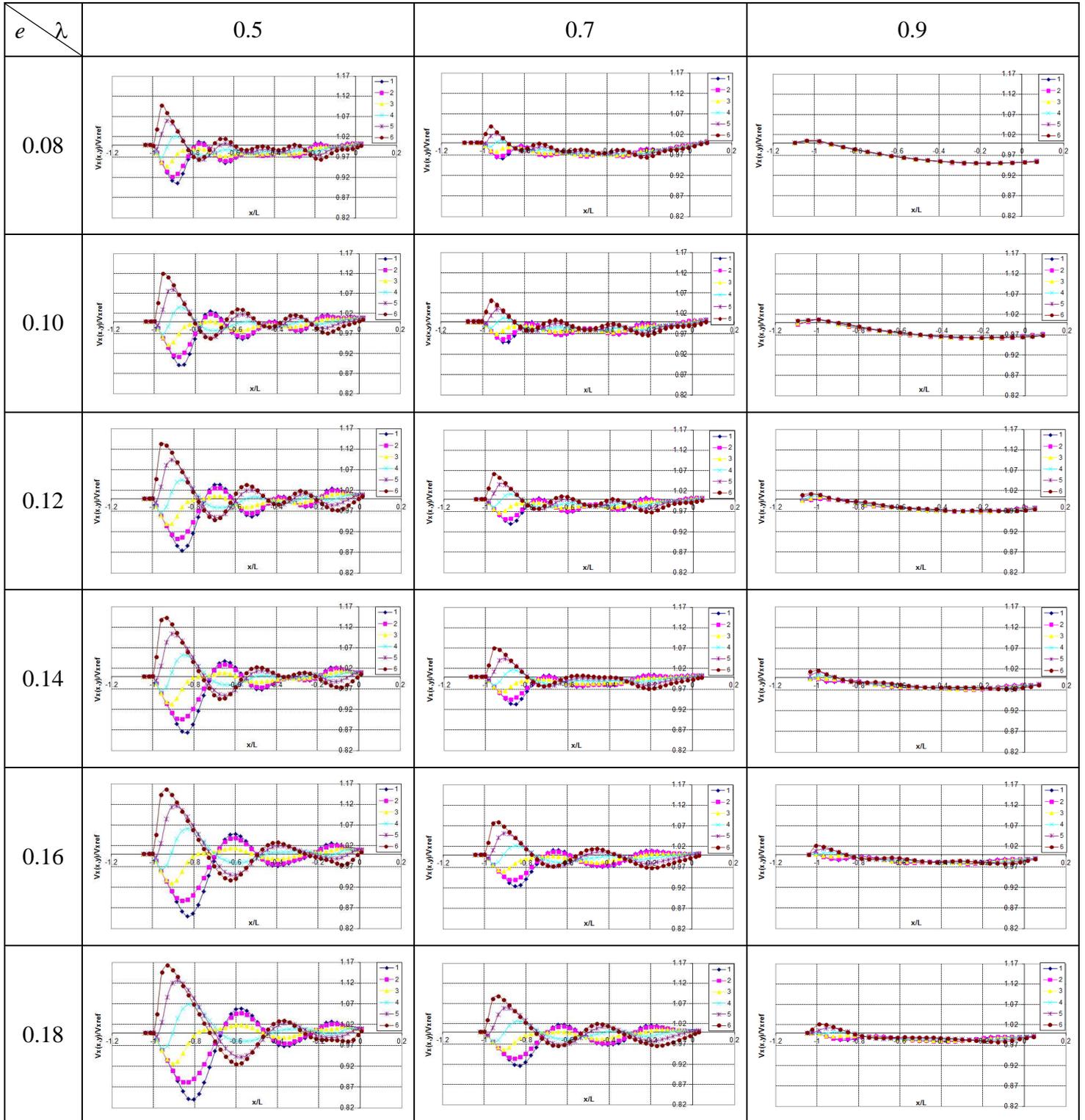


Figure 1-21 : Vitesse longitudinale normalisée dans la bande des 18 cas « de base »

Nous constatons que la vitesse de référence reste une approximation acceptable dans la plupart des cas (l'écart maximal de 17% en entrée sous le cylindre pour le cas le plus défavorable de forte réduction ($\lambda = 0.5$) et de grand élancement ($e = 0.18$)).

Plus la réduction est faible, plus l'hypothèse d'uniformité de la vitesse horizontale dans l'épaisseur est vérifiée.

Pour les réductions plus fortes, la vitesse horizontale normalisée « oscille » en fonction de x/L , les particules les plus rapides étant alternativement au centre de la bande ou sur les surfaces de contact des cylindres.

On compte de 4 à 7 « demi-oscillations », la diminution de e entraînant une augmentation du nombre des oscillations.

Enfin, l'amplitude de « l'oscillation » est plus forte en entrée qu'en sortie et d'autant plus forte que la réduction est importante ($\lambda \searrow$) ou l'élancement est grand ($e \nearrow$).

Présentons maintenant 18 courbes donnant la vitesse verticale de la bande (Figure 1-22). Cela n'aurait pas de sens ici de représenter les résultats à la même échelle avant adimensionalisation. La constatation principale sur cet ensemble de figures est « l'oscillation » de la vitesse verticale qui fait écho à l'oscillation constatée sur les vitesses horizontales.

Notons cependant que ces oscillations apparaissent mêmes pour de faibles réductions ($\lambda = 0.9$) alors que les oscillations correspondantes sur les vitesses horizontales étaient presque imperceptibles. Cela est bien sûr due au fait que la vitesse verticale est de 2 ordres de grandeurs inférieure à la vitesse horizontale. Les petites variations de l'une entraînent de fortes variations de l'autre.

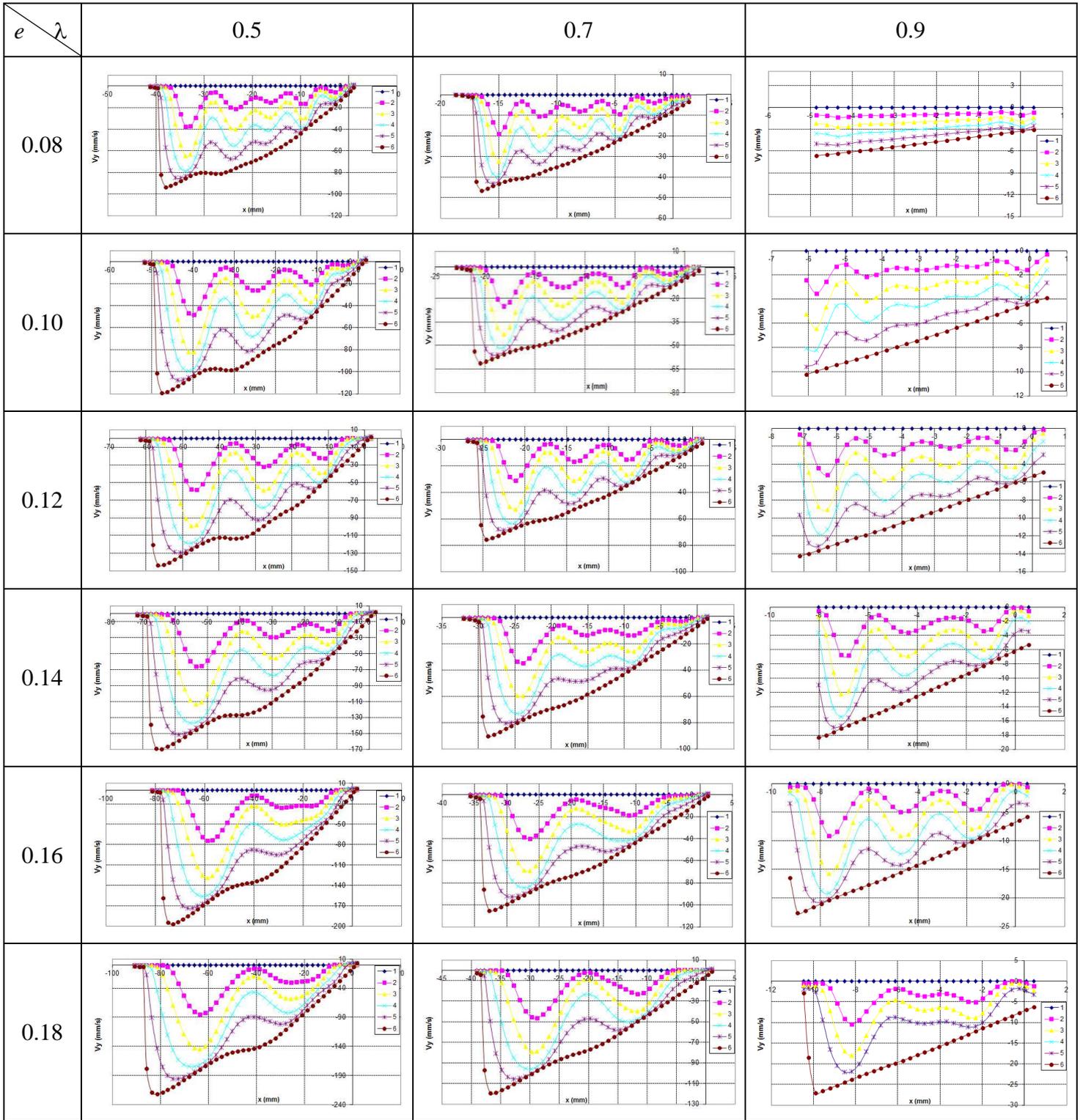


Figure 1-22 : Vitesse verticale dans la bande des 18 cas « de base »

Une autre façon de présenter ces résultats est de considérer les courbes donnant la vitesse

verticale normalisée $\frac{V_y(x, y)}{V_y^{ref}(x, y)}$ dans la bande (Figure 1-23) où la vitesse verticale de

référence est définie par la formule $V_y^{ref}(x, y) = V_e h_e \frac{h'(x)}{h^2(x)}$

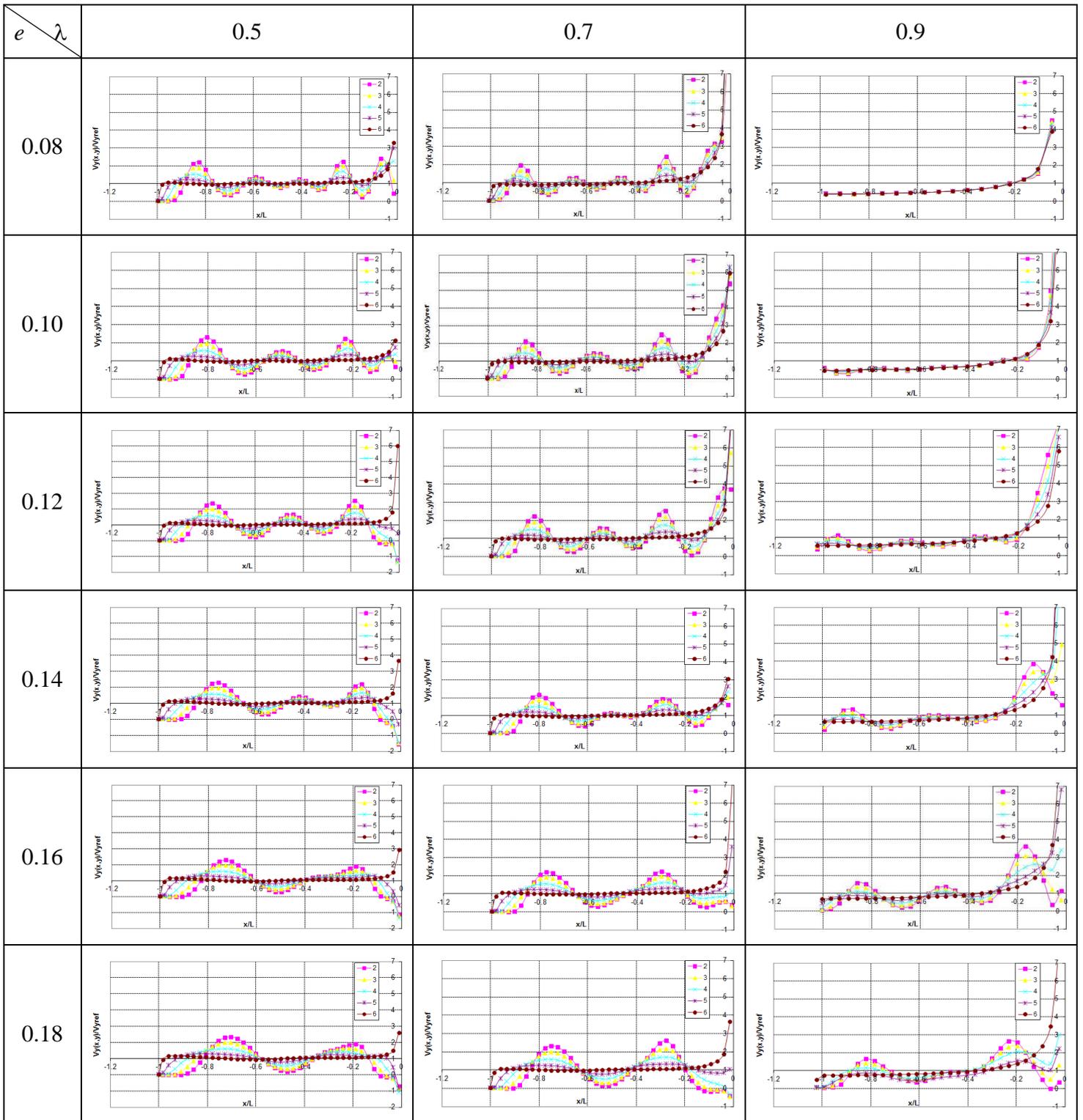


Figure 1-23 : Vitesse verticale normalisée dans la bande des 18 cas « de base »

Les courbes peuvent être ici présentées avec la même échelle. On constate que la vitesse verticale de référence est une assez médiocre approximation de la vitesse verticale. C'est particulièrement le cas en sortie de la bande mais ceci est due au fait que la vitesse verticale de référence tend vers 0 en sortie de cylindre. Il ne faut donc pas attacher trop d'importance à cette partie des courbes. Pour le reste, on constate à nouveau le phénomène d'oscillation.

Présentons les courbes donnant les vitesses normalisées de glissement à l'interface bande – cylindre qui sont définies par la formule $\left(\sqrt{V_x^2(x, h(x)) + V_y^2(x, h(x))}\right) / V_c - 1$:

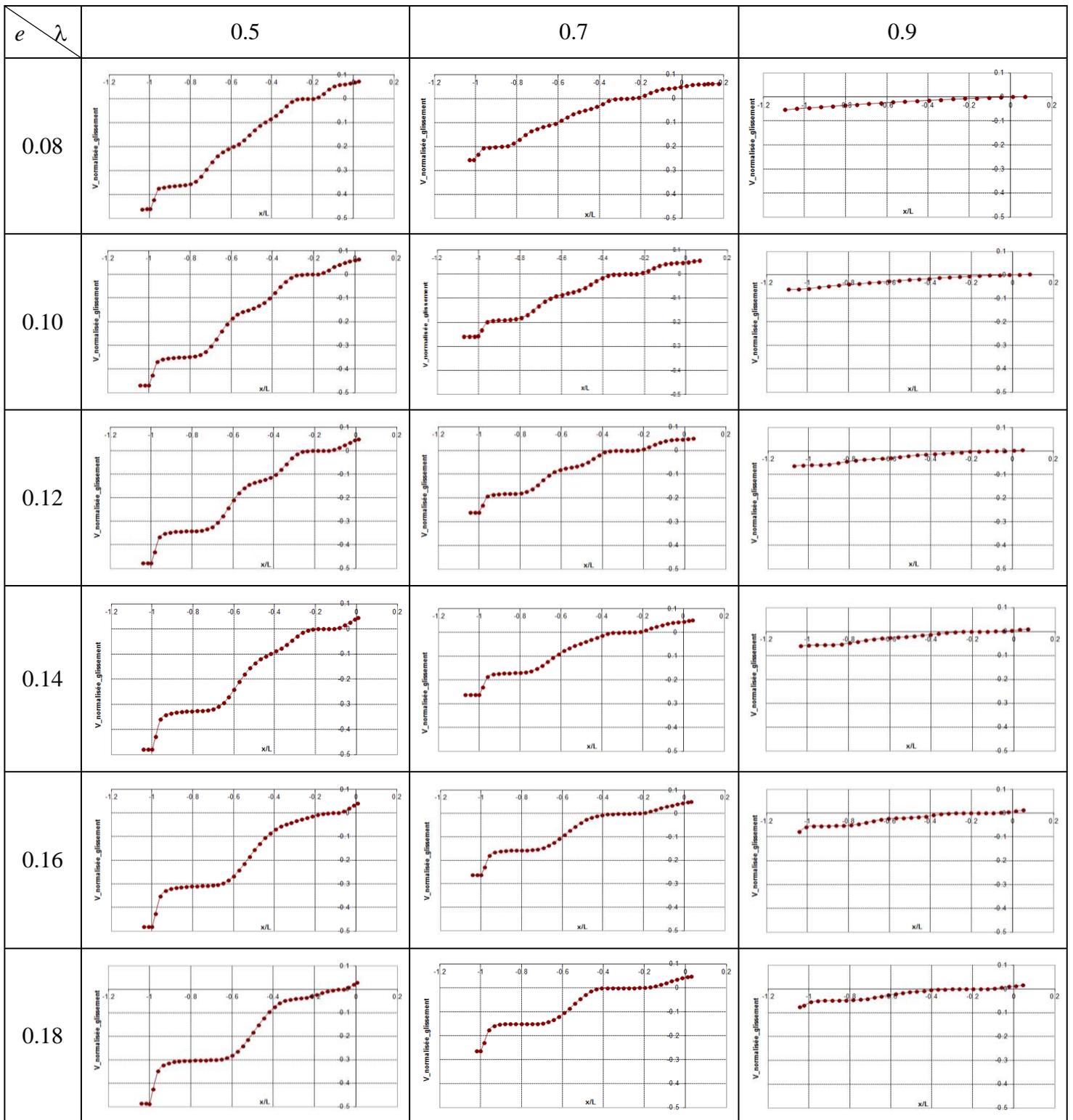


Figure 1-24 : Vitesse normalisée de glissement à l'interface bande - cylindre des 18 cas « de base »

Pour les faibles réductions ($\lambda = 0.9$), les vitesses normalisées de glissement restent faibles. Le point neutre (ou la zone neutre) correspondant au point (ou à la portion de courbe) où le glissement est nul est très proche de la sortie.

Lorsque la réduction est plus importante, la courbe a une allure de « fonction en escalier », impliquant l'existence de bloc en rotation autour de l'axe du cylindre pour lesquelles la vitesse de glissement est assez uniforme.

On constate surtout que la zone neutre est d'autant plus importante que la réduction est faible ($\lambda \geq 0.7$) et l'élancement est grand ($e \nearrow$).

Présentons les courbes donnant les contraintes normalisées σ_{xx}/σ_0

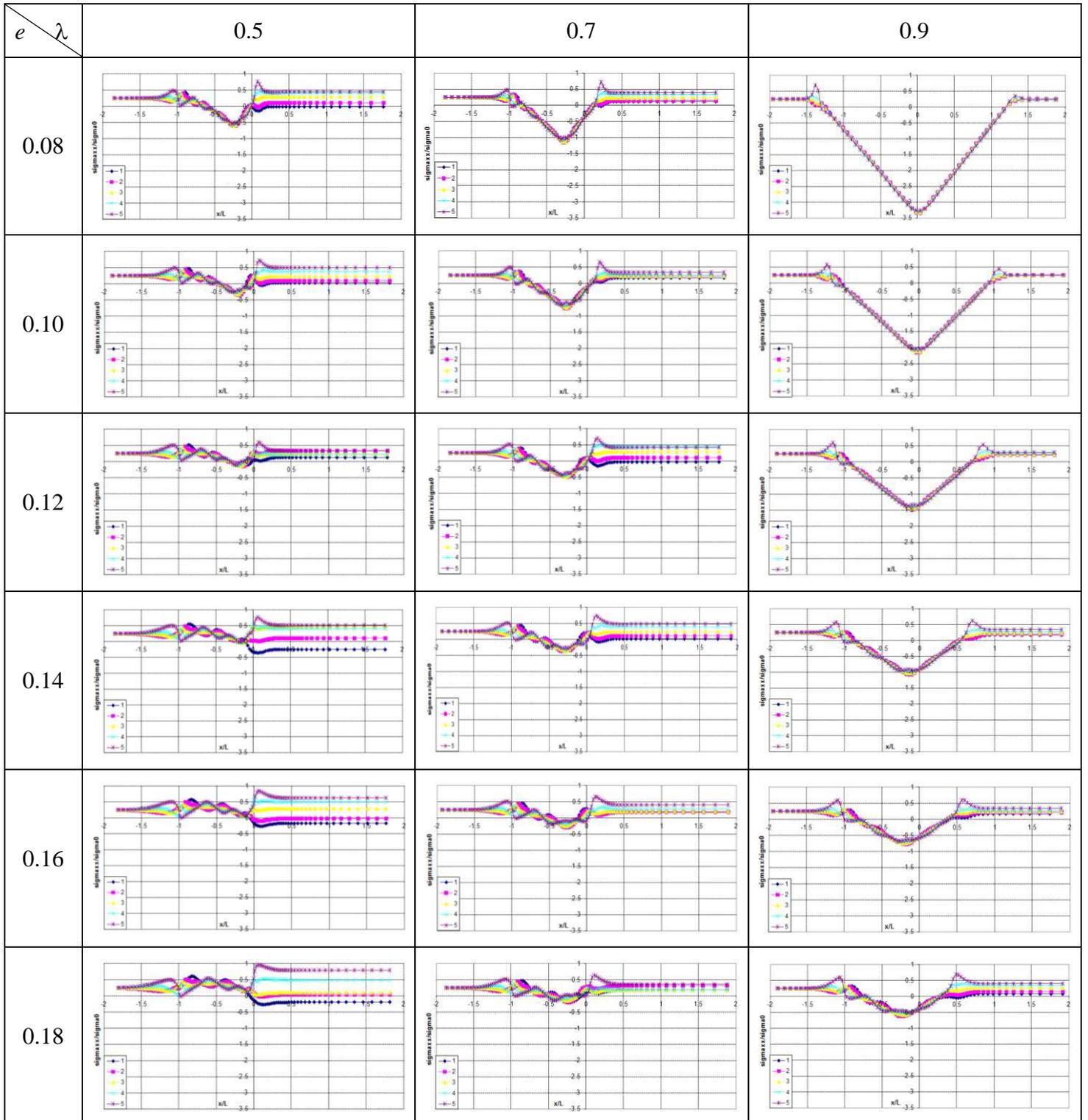


Figure 1-25 : Contrainte normalisée σ_{xx}/σ_0 dans la bande des 18 cas « de base »

Nous présentons tout d'abord les courbes σ_{xx}/σ_0 sur une large plage de valeur de x/L ($x/L \in [-2; 2]$). Nous faisons cela principalement pour observer les valeurs en entrée et sortie de la bande.

Nous constatons qu'en x/L de l'ordre de -2 (en entrée), toutes les courbes ont la valeur déterminée par la condition limite ($t_e = 0.25$). Par contre, on constate que σ_{xx}/σ_0 s'écarte de t_e bien avant l'entrée de la bande sous le cylindre (bien avant $x/L = -1$)

La constatation en sortie est encore plus intéressante, car même loin du cylindre en $x/L = 2$, on constate que généralement le champ σ_{xx}/σ_0 n'est pas uniformément égale à $t_s = 0.25$. En fait seule la valeur moyenne sur l'épaisseur vaut 0.25. Il y a donc généralement un champ de contrainte résiduel dans l'épaisseur de la bande en sortie du laminoir. Cette contrainte résiduelle est d'autant plus importante que l'écrasement est fort (λ petit) et l'élanement important (e grand).

Etudions maintenant le reste de la courbe dans la partie sous le cylindre. Pour cela, nous présentons un zoom des courbes pour $x/L \in [-1.2; 0.2]$ (voir Figure 1-26).

On constate que la courbe σ_{xx}/σ_0 initialement positive pour $x/L = -1$, décroît et devient rapidement fortement négative à cause de la compression volumique élastique.

Une approximation de ces courbes par des courbes affines par morceau peut être envisagée pour de faible écrasement (λ grand) et de faible élanement (e petit). Tout se passe en première approximation comme si le frottement moteur en avant, entre la bande et le cylindre, comprimait la bande, puis le frottement en sortie la décomprimait. Cette approximation est de plus en plus médiocre si l'on s'éloigne de cette zone des paramètres et on observe l'apparition croissante d'oscillations qui font écho aux oscillations constatées sur les courbes en vitesse.

Il semble par ailleurs clair que le contact entre la bande et le cylindre est prolongé au-delà du point bas ($x/L = 0$) jusqu'à un point $x/L > 0$ à partir duquel les valeurs de σ_{xx} n'évoluent plus.

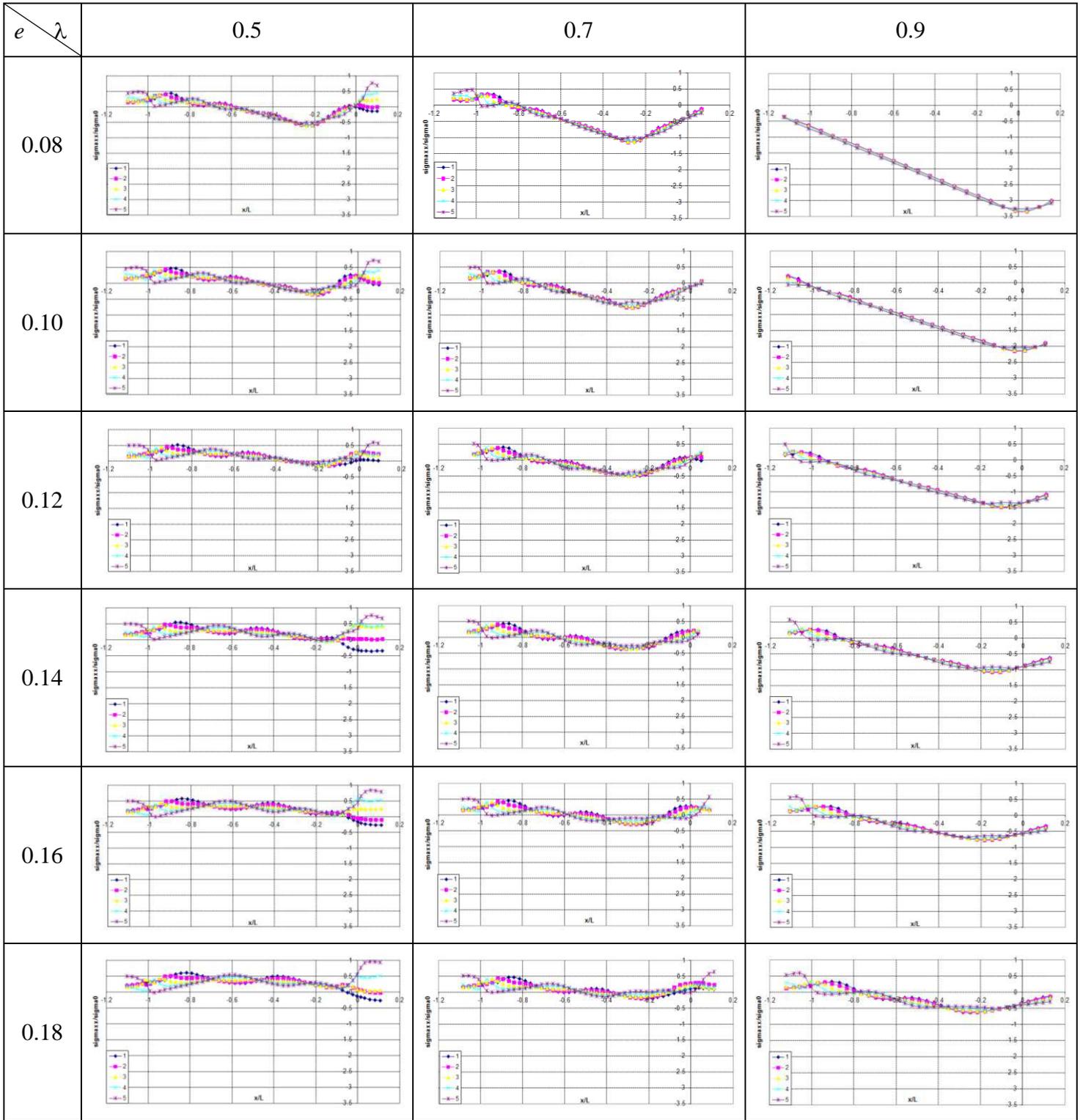


Figure 1-26 : Contrainte normalisée σ_{xx}/σ_0 dans la bande des 18 cas « de base »

Présentons les courbes donnant les contraintes normalisées σ_{yy}/σ_0

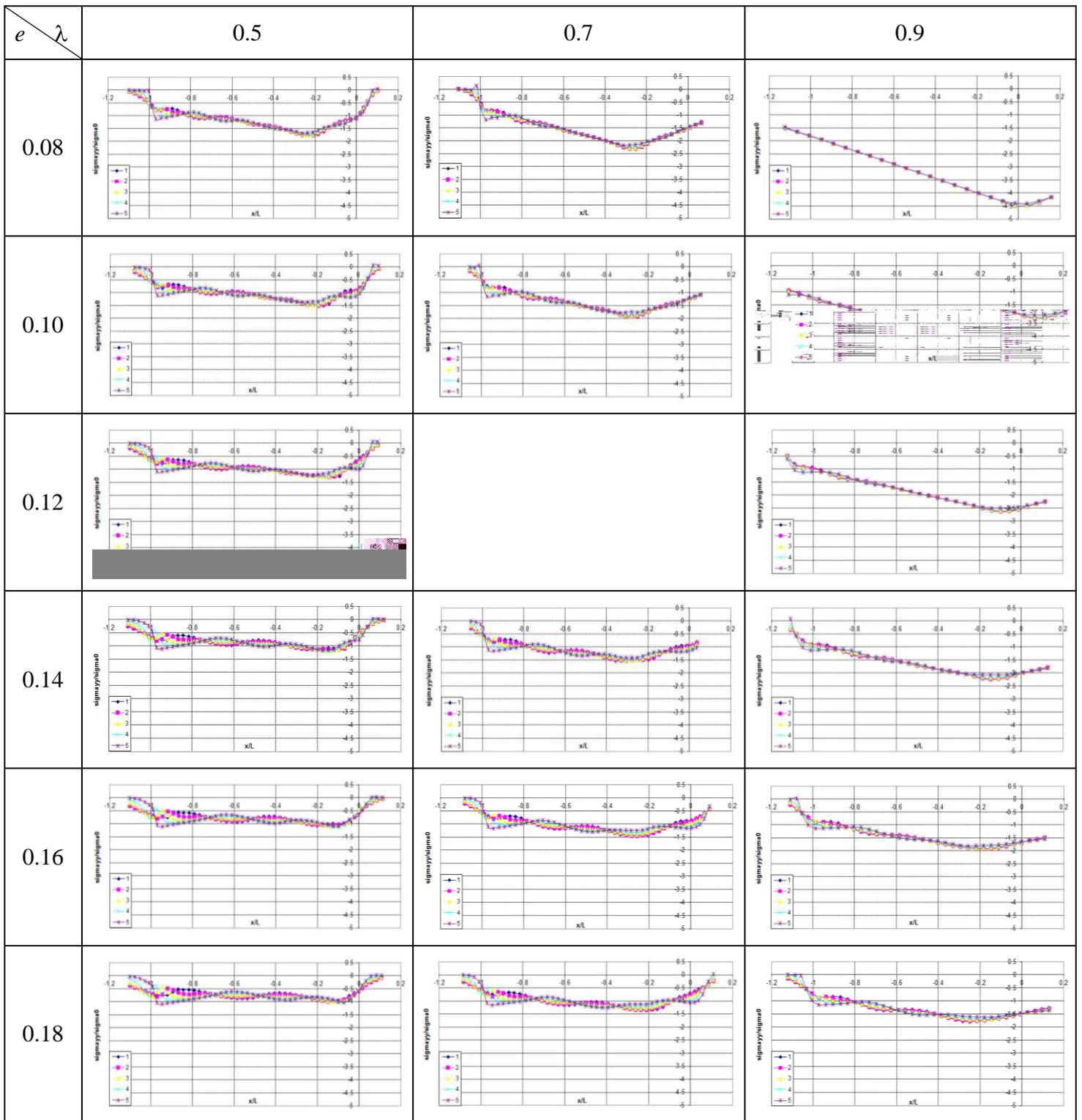


Figure 1-27 : Contrainte normalisée σ_{yy}/σ_0 dans la bande des 18 cas « de base »

Ces courbes ne présentent pas un intérêt majeur aussi nous ne les donnons que pour $x/L \in [-1.2; 0.2]$. On constate l'augmentation progressive de la compression de la bande et

surtout qu'au-delà de $x/L = 0$, σ_{yy} est non nul ce qui implique bien que le contact bande – cylindre se prolonge au-delà du point bas du cylindre.

Présentons les courbes donnant les contraintes normalisées σ_{xy}/σ_0

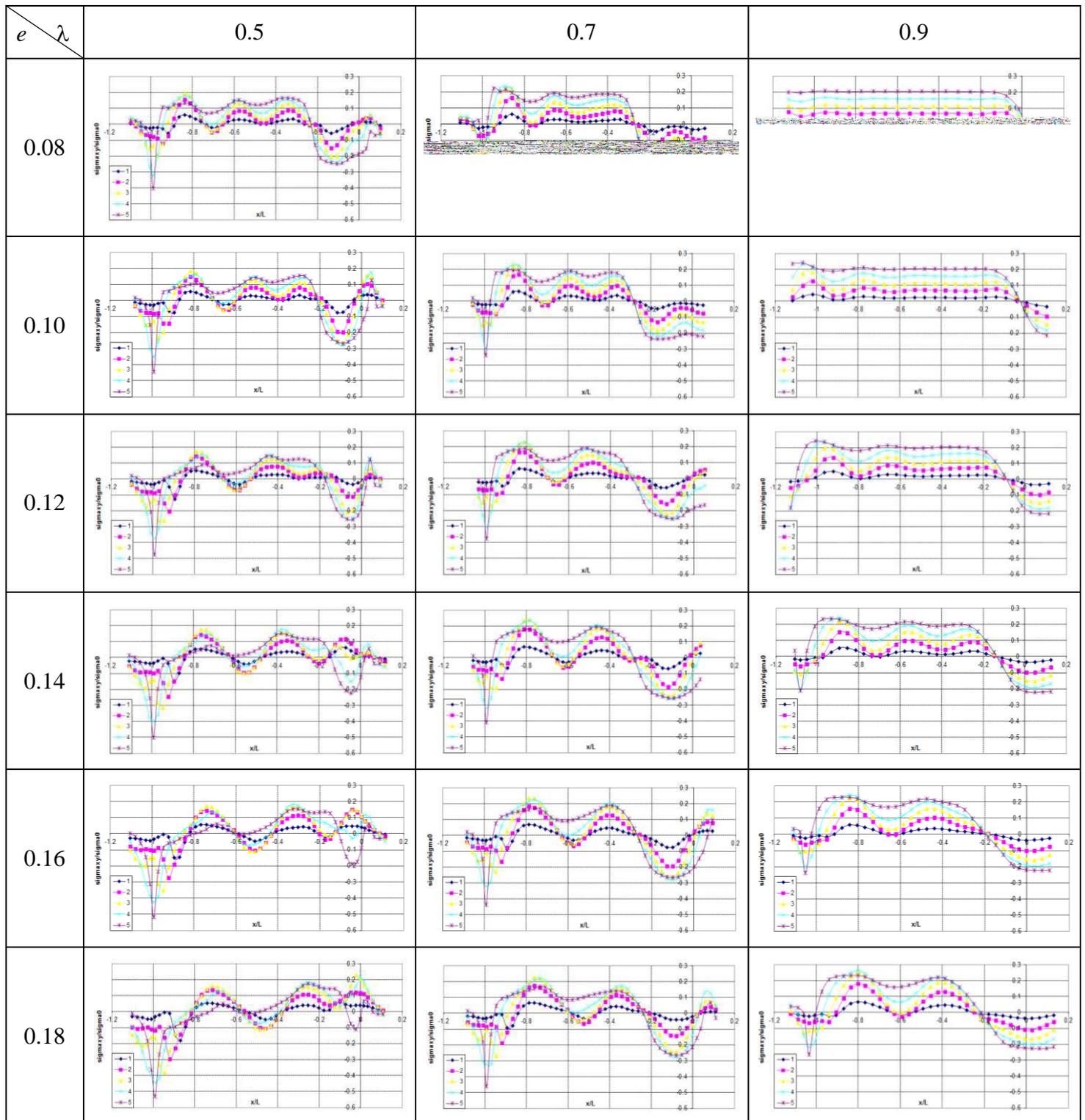


Figure 1-28 : Contrainte normalisée σ_{xy}/σ_0 dans la bande des 18 cas « de base »

La contrainte normalisée σ_{xy}/σ_0 est d'un ordre de grandeur inférieur à σ_{xx}/σ_0 . Le signe change au passage de la zone neutre, comme attendu.

La zone d'entrée de la bande sous le cylindre est soumise à un cisaillement σ_{xy} beaucoup plus intense. Pour les faibles valeurs d'écrasement (λ grand), il est raisonnable de considérer que la composante σ_{xy}/σ_0 est linéaire en y dans l'épaisseur et quasi uniforme par morceau en x . Enfin dans le cas de plus fort écrasement (λ faible) et de grand élancement (e grand). On observe de fortes oscillations de σ_{xy}/σ_0 généralement sans changement signe en amont.

Présentons les courbes donnant la variation de volume (Figure 1-29) qui est déterminée à partir de la trace du tenseur de contrainte par la formule :

$$J = \frac{1}{3k_0} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) + 1$$

Où k_0 est le module d'incompressibilité de la matière, $k_0 = 1/3 \times E/(1-\nu)$

Nous constatons que la variation de volume peut paraître faible, mais la raideur du matériau étant importante. Elle permet d'expliquer le niveau de contrainte σ_{xx}/σ_0 et σ_{yy}/σ_0 observé plus haut.

Notons qu'une approximation affine par morceau de part et d'autre du point ou de la zone neutre peut être acceptable généralement.

Présentons les courbes donnant la déformation plastique cumulée. Rappelons que par définition, la déformation plastique cumulée entre les instants t_0 et t est le scalaire

$$P_{cum} = \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{d}}^p : \underline{\underline{d}}^p} dt$$
 où $\underline{\underline{d}}^p$ est le tenseur le taux de déformation plastique. Dans le cas du régime permanent, l'intégrale sur le temps est transformée en une intégrale sur l'espace.

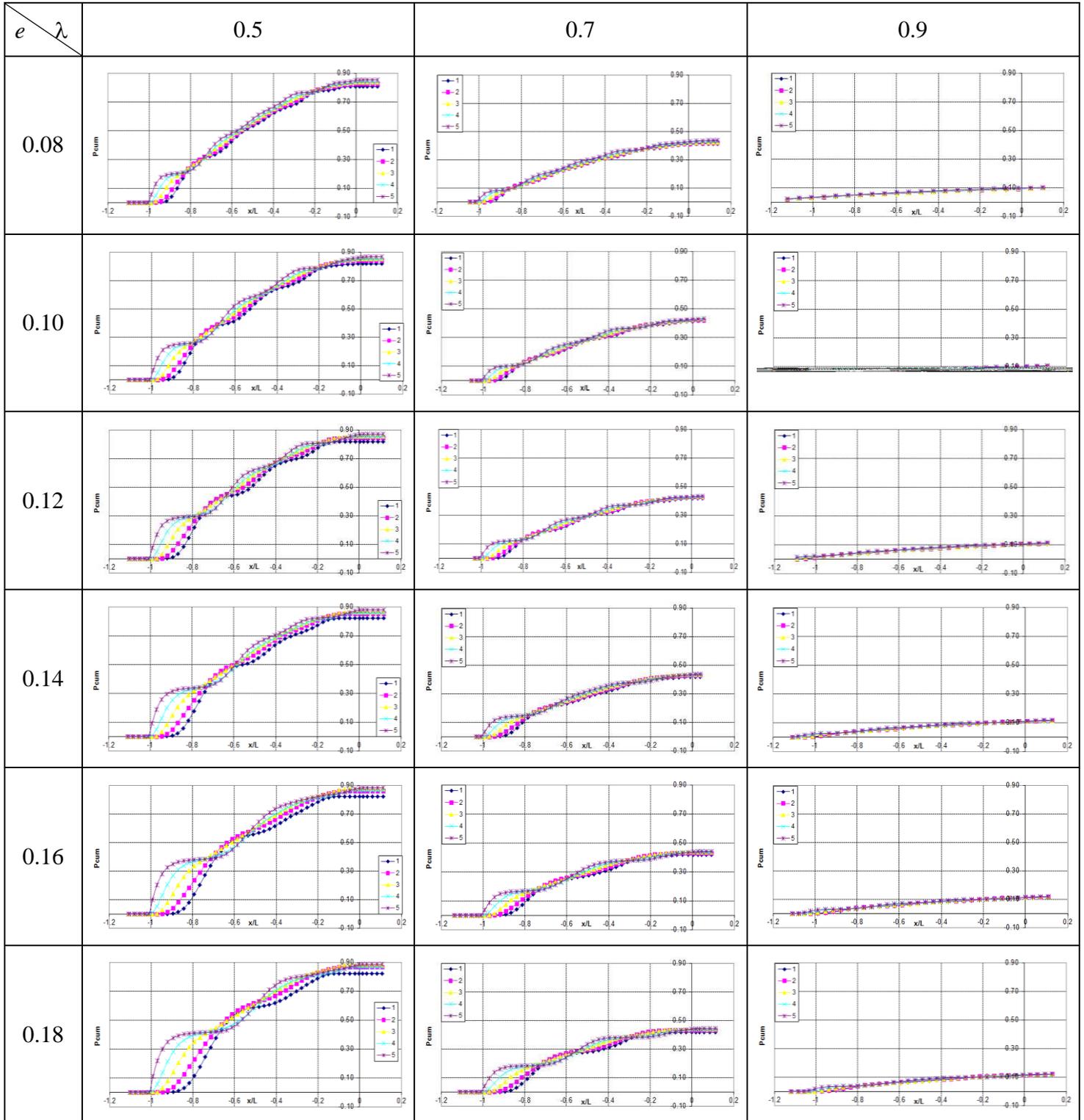


Figure 1-30 : Déformation plastique cumulée dans la bande des 18 cas « de base »

En observant les courbes pour un fort écrasement (λ petit), on observe qu'en entrée de la bande sous le cylindre, la zone plastique débute au voisinage du cylindre et que le cœur de la bande ne se plastifie que plus loin. Il y a ainsi une sorte de « coin élastique » sous le cylindre en entrée de la bande. Ce phénomène est d'autant plus important que l'élanement e est important.

Ensuite la déformation plastique cumulée tend à devenir uniforme dans l'épaisseur.

1.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons voulu nous forger une certaine compréhension du processus de laminage et de l'influence des principaux paramètres que sont la réduction verticale $\lambda = \frac{h_s}{h_e}$ et

l'élanement $e = \frac{h_s}{L}$ sur ces processus. Pour cela, nous avons mené des calculs avec le logiciel LAM3 en déformation plane et régime permanent dans 18 « cas de base » avec $\lambda = 0.5 ; 0.7 ; 0.9$ et $e = 0.08 ; 0.10 ; 0.12 ; 0.14 ; 0.16 ; 0.18$.

L'examen des différentes courbes indique une évolution continue des mécanismes avec ces paramètres plutôt que l'apparition d'une variation brutale de mécanismes.

Parmi les principales conclusions, retenons l'influence de la variation de volume d'origine élastique sous les cylindres entraînant, entre autre, le fait que le contact bande cylindre continue au-delà du point bas du cylindre, à cause du retour élastique.

Retenons aussi l'existence de contraintes résiduelles dans l'épaisseur d'autant plus importantes que la réduction $\lambda = \frac{h_s}{h_e}$ est faible (fort écrasement) et l'élanement $e = \frac{h_s}{L}$

