# Étude théorique de la solution d'un problème générique de commande optimale

Dans ce chapitre, on cherche à obtenir les conditions d'optimalité des solutions des problèmes du type (1.1) et (1.2). Pour chacun des problèmes, l'état final $x(T)$ est imposé par la contrainte d'égalité $x(T) = x(0)$. Néanmoins, on trouve surtout dans la littérature les conditions d'optimalité pour des problèmes dont l'état final est contraint par une fonction (notée $\phi$ par la suite), dont on peut ensuite tirer une condition sur la valeur du multiplicateur au temps final [Bertsekas, 2001], [Bryson and Ho, 1975]. Ces problèmes sont pour cette raison connus sous le nom de *problèmes aux deux bouts* : l'état $x$ au temps initial est imposé via $x(0) = x_0$, et l'état adjoint $p$ vérifie une condition d'optimalité au temps final (condition présentée par la suite).

Ici, nous présentons le cas d'un problème classique de commande optimale, dont on déduit les conditions d'optimalité. On soulignera néanmoins à chaque fois les conditions qui sont différentes de celles que l'on obtient dans le cas des problèmes (1.1) et (1.2).

On considère le problème de commande optimale

$$(PO)\begin{cases} \min\limits_{u\in U}\left\{J(u) := \int_0^T L(x(t),u(t),t)dt + \phi(x(T),T)\right\} \\ \text{avec :} \\ \dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t), \quad x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $U$ représente l'espace des commandes admissibles, et où l'état scalaire $x$ à l'instant final $T$ est contraint par la fonction $\phi$. Il s'agit de trouver, parmi toutes les solutions possibles du système $\dot{x} = f(x(t),u(t),t)$ reliant $x_0$ à $x(T)$, celle qui minimise la fonctionnelle $J(u)$. Une telle trajectoire, si elle existe, est dite *optimale*.

## 2.1 Conditions d'optimalité en l'absence de contraintes sur l'état

On peut qualifier la solution optimale de $(PO)$ par des conditions d'optimalité, conditions nécessaires pour qu'une trajectoire soit optimale, ou fasse partie des candidats retenus pour une trajectoire optimale. On se place dans un premier temps dans le cas du problème $(PO)$, sans contrainte sur l'état.

Définissons tout d'abord l'Hamiltonien $H$ associé au problème $(PO)$, sous sa forme générale

$$H(x,u,t,p) = L(x,u,t) + p(t)f(x,u,t), \tag{2.2}$$

où $H$ est défini $\forall u \in U$, $p$ étant le multiplicateur de Lagrange (ou état adjoint) associé à la contrainte d'égalité $\dot{x}(t) = f(x,u,t)$.

**Conditions d'optimalité**

Les conditions d'optimalité du problème $(PO)$ s'écrivent

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x^*,u^*,t,p^*) \tag{2.3a}$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*,u^*,t,p^*) \tag{2.3b}$$

$$x(0) = x_0, \quad p(T) = \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{t=T} \tag{2.3c}$$

$$u^*(t) = \underset{u \in U}{\operatorname{argmin}} H(x,u,t,p). \tag{2.3d}$$

Ces conditions d'optimalité définissent donc des conditions que doit remplir la solution du problème $(PO)$. Dans le cas où l'état final est fixé, tel que $x(T) = x(0) = x_0$, alors la condition d'optimalité (2.3c) est remplacée par

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_0. \tag{2.4}$$

**Principe de Pontryagin**

Le principe de Pontryagin énonce que si $u^* \in U$ est une commande optimale, alors

$$H(x^*,u^*,p^*,t) \leq H(x^*,u,p^*,t), \quad \forall u \in U,\ \forall t \in [0,T], \tag{2.5}$$

où $x^*(t)$ et $p^*(t)$ sont respectivement l'état et l'état adjoint optimaux. Cette propriété correspond à la condition d'optimalité (2.3d), et donne une condition locale d'optimalité d'une trajectoire $(x,t)$.

**Justification des conditions d'optimalité**

Les conditions d'optimalité du problème peuvent se retrouver en ré-écrivant (2.1) sous une forme différente. On considère tout d'abord que $u \in \mathbb{R}$ (pas de contraintes sur la commande). On adjoint l'équation différentielle de (2.1) à $J$ à l'aide d'un multiplicateur $p(t)$

$$\hat{J}(u) = \int_0^T \left[L(x(t),u(t),t) + p(t)(f(x,u,t) - \dot{x})\right] dt + \phi(x(T),T). \tag{2.6}$$

En intégrant par partie le membre de droite de (2.6), et en utilisant la définition de l'Hamiltonien, on obtient

$$\hat{J}(u) = -p(T)x(T) + p(0)x(0) + \int_0^T \left[H(x,u,t,p) + \dot{p}(t)x(t)\right] dt + \phi(x(T),T). \tag{2.7}$$

On considère maintenant une petite variation $\delta u$ du vecteur $u(t)$, ainsi qu'une variation $\delta x$ du vecteur $x(t)$, menant à une variation de $\hat{J}$, avec pour temps initial et final $t = 0$ et $t = T$.

$$\delta\hat{J}(u) = [p(t)\delta x]_{t=0} + \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - p(t)\right)\delta x\right]_{t=T} + \int_0^T \left[\left(\frac{\partial H(x,u,t,p)}{\partial x} + \dot{p}(t)\right)\delta x + \frac{\partial H(x,u,t,p)}{\partial u}\delta u\right] dt \tag{2.8}$$

Si la commande $u^*(t)$ est optimale, alors une variation telle que $u(t) = u^*(t) + \delta u(t)$ engendre *au premier ordre* une variation nulle de $\hat{J}$. Nous énonçons donc par la suite les conditions pour annuler les termes de $\delta\hat{J}$.

Le premier terme $[p\delta x]_{t=0}$ est directement nul, étant donné que l'état initial $x(t=0)$ est imposé. L'annulation du second terme constitue la condition sur la valeur finale du multiplicateur, donnée par l'équation (2.3c)

$$p(T) = \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{t=T}. \tag{2.9}$$

Le troisième terme de droite de (2.8) s'annule si

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*, u^*, t, p^*), \tag{2.10}$$

ce qui constitue la condition d'optimalité donnée par (2.3b). Enfin, à l'optimum, $\delta\hat{J}(u^*) = 0$ pour une variation arbitraire $\delta u$. Cette propriété implique forcément

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x^*, u^*, t, p^*) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2.11}$$

On notera que cette condition est plus faible que celle donnée par (2.3d). Néanmoins, le lecteur peut se référer à [Pontryagin et al., 1974] pour une démonstration plus complète.

Ces conditions sont utilisées dans les méthodes de tir et en particulier dans l'algorithme SCOP, présenté dans la section (3.4).

**Remarque 2.1.1.** *On notera qu'en présence de contraintes sur la commande $u$, la précédente justification utilisant l'équation (2.11) n'a plus de sens. Le principe de Pontryagin reste néanmoins valide même pour des commandes $u \in U$ discrètes ou non-differentiables, auquel cas on cherchera $u^*$ tel que*

$$u^* = \underset{u \in U}{\operatorname{argmin}} H(x, u, t, p). \tag{2.12}$$

**Remarque 2.1.2.** *Dans le cas d'une contrainte d'égalité sur $x(T)$, telle que $x(T) = x_0$, la fonction $\phi$ n'apparaît plus dans (2.1), (2.6), (2.7) et (2.8). De plus, le terme $[p(t)\delta x]_{t=T}$ devient forcément nul, étant donné que $x(T)$ est imposé. Ainsi, la condition (2.9) disparaît, au profit de la condition $x(T) = x_0$.*

## 2.2 Conditions d'optimalité en présence de contraintes sur l'état

Les conditions d'optimalité qui viennent d'être définies sont incomplètes lorsque des contraintes sur l'état sont introduites dans le problème d'optimisation. On doit prendre en compte ces contraintes via l'introduction de nouveaux multiplicateurs.

L'introduction de ces nouveaux multiplicateurs rend difficile la résolution du problème dans le cas où $x$ est contraint. On citera [Bryson and Ho, 1975] qui comporte plusieurs exemples simples d'application du principe de Pontryagin, dont la résolution s'effectue directement (i.e. sans devoir passer par une méthode de tir), ou encore [Evans, 2000].

Le problème d'optimisation général avec contraintes sur l'état $(PO_{sce})$ s'écrit à présent

$$(PO_{sce}) \begin{cases} \min\limits_{u \in U} \left\{ J(u) := \int_0^T L(x(t), u(t), t)dt + \phi(x(T), T) \right\} \\ \text{avec :} \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \qquad x(0) = x_0 \\ g(x(t), t) \leq 0, \end{cases} \tag{2.13}$$

où $g(x(t),t)$ est la fonction définissant les contraintes sur l'état.

Deux écoles existent pour la formulation des conditions d'optimalité d'un problème de commande optimale avec contraintes sur l'état, telles qu'elles sont expliquées dans [Hartl et al., 1995] : la méthode directe et la méthode indirecte. La méthode directe consiste à associer directement la contrainte sur l'état à l'Hamiltonien $H$, c'est cette méthode qui est décrite ci-après. Dans la méthode indirecte, on associe à l'Hamiltonien la dérivée totale de la contrainte sur l'état. Le lecteur est invité à lire [Hartl et al., 1995] pour une présentation plus détaillée de la méthode indirecte.

Reprenons l'expression de l'Hamiltonien dans (2.2). Pour prendre en compte les contraintes sur l'état, on introduit un nouveau multiplicateur $\mu$ associé à la contrainte $g(x(t),t) \leq 0$. A partir de cette expression, on construit le Lagrangien (ou Hamiltonien augmenté), tel que

$$\mathcal{L}(x,u,t,p,\mu) = H(x,u,t,p) + \mu(t)g(x,t), \tag{2.14}$$

où $\mu$ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $g(x,t) \leq 0$. [1]

Pour introduire le théorème suivant, nous définissons tout d'abord la notion de point de jonction, tirée de [Hartl et al., 1995] (voir aussi [Bonnans and Hermant, 2008]).

**Définition 2.2.1.** *Un sous-intervalle $[\tau_1,\tau_2] \subset [0,T]$ avec $\tau_1 < \tau_2$ est appelé arc intérieur d'une trajectoire $x(\cdot)$ si $g(x,t) < 0$ pour tout $t \in [\tau_1,\tau_2]$. Un sous-intervalle $[\tau_1,\tau_2] \subset [0,T]$ avec $\tau_1 < \tau_2$ est appelé arc frontière d'une trajectoire $x(\cdot)$ si $g(x,t) = 0$ pour tout $t \in [\tau_1,\tau_2]$. Les points extrêmes gauche et droite d'un arc frontière $[\tau_1,\tau_2]$ sont appelés points d'entrée et de sortie respectivement. Un point de contact $\tau_0$ est un point isolé satisfaisant $g(x,\tau_0) = 0$ et $g(x,t) \neq 0$ pour tout $t \neq \tau_0$ au voisinage de $\tau_0$. Points d'entrée, points de sortie, et points de contact sont appelés points de jonction.*

**Théorème 2.2.1.** *Soit $x^*(\cdot),u^*(\cdot)$ une paire optimale pour le problème précédent $(PO_{sce})$ pendant un intervalle fixé [0, T]. On suppose que $x^*(\cdot)$ possède un nombre fini de points de jonction. Alors il existe une variable adjointe $p(\cdot)$ continue par morceaux sur [0,T], un multiplicateur $\mu$ continu par morceaux sur [0,T], un vecteur $\eta(\tau_i)$ pour chaque point de discontinuité de $p(\cdot)$ tels que $(p(t),\nu(t),\eta(\tau_1),\eta(\tau_2),...) \neq 0$ pour tout t, et telles que les conditions suivantes soient vraies presque partout :*

$$u^* = \underset{u\in U}{\operatorname{argmin}} H(x^*,u^*,t,p^*),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(x^*,u^*,t,p^*,\mu^*) = \frac{\partial H^*}{\partial u}(x^*,u^*,t,p^*) = 0,$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x^*,u^*,t,p^*,\mu^*)$$

$$\mu(t) \geq 0, \qquad \mu(t)g(x,t) = 0$$

*À n'importe quel point $\tau$ où $g(x,\tau) = 0$ et pour n'importe quel point de contact $\tau$, la trajectoire de l'état adjoint p peut avoir une discontinuité donnée par la condition de saut suivante :*

$$p(\tau^-) = p(\tau^+) + \eta(\tau)\frac{\partial g}{\partial x}(x,\tau),$$

$$H^*[\tau^-] = H^*[\tau^+] - \eta(\tau)\frac{\partial g}{\partial t}(x,\tau),$$

$$\eta(\tau) \geq 0, \qquad \eta(\tau)g^*[\tau] = 0.$$

[1] On notera que pour davantage de généralité, on peut aussi introduire dans le Lagrangien un autre multiplicateur $\nu$, associé à une contrainte mixte sur l'état $x$ et sur la commande $u$.

Ce théorème indique que le multiplicateur $p$ associé à l'état peut subir un saut au point de jonction $t = \tau$, ou lors d'un point de contact. On notera néanmoins que l'auteur dans [Hartl et al., 1995] ne fait aucune hypothèse sur l'ordre de la contrainte sur l'état, celle-ci pouvant donc être d'ordre supérieur à 1. [Bonnans and Hermant, 2007] démontrent que lorsque les contraintes sont du premier ordre, le multiplicateur $p$ reste continu lorsqu'une contrainte devient active, ou inactive. Cette propriété sera utile pour la démonstration de la convergence de SCOP, dans la section 3.4.6.

## 2.3 Étude de problèmes académiques

On aborde ici les quelques problèmes dont la formulation générale a été donnée dans la section 1.3, et qui sont ici traités avec des cas simples pour l'expression de $L$, $u_{\min}$, $u_{\max}$, $x_{\min}$, et $x_{\max}$. On rappelle que l'état $x$ correspond pour notre application à l'état de charge de la batterie, et que la commande $u$ représente la répartition de couple entre les différents moteurs du véhicule hybride.

### 2.3.1 Recherche d'une solution pour un problème simple du type (1.1)

On considère ici un problème simple du type (1.1), où la fonction $L(t)$ est donnée par un polynôme du second degré en $u$, tel que

$$\min_u \int_0^T \left(\frac{1}{2}a(t)u^2(t) + b(t)u(t) + c(t)\right) dt \tag{2.15a}$$

$$\dot{x}(t) = -s(t)\big(1 - u(t)\big), \quad x(0) = x(T) = x_0 \tag{2.15b}$$

$$0 \leq u(t) \leq 1 \tag{2.15c}$$

$$0 \leq x(t) \leq 1. \tag{2.15d}$$

avec $a(t) > 0$, $b(t) > 0$, et $c(t) > 0$, des fonctions du cycle suivit par le conducteur à chaque instant $t$, et $s(t)$ une fonction du cycle à valeurs dans $\mathbb{R}$, et des contraintes de bornes constantes sur l'état et sur la commande. On considère tout d'abord le problème sans contrainte, puis avec contraintes, et on cherchera à le résoudre dans ces différents cas.

#### Cas sans contrainte sur la commande et sur l'état

On considère tout d'abord le problème de minimisation (2.15a-2.15b), sans les contraintes sur l'état (2.15d) et sur la commande (2.15c). Ce problème se résout aisément en utilisant le principe de Pontryagin (présenté dans la section 2.1) : on forme l'Hamiltonien $H$

$$H(u,t,p) = \frac{1}{2}a(t)u^2(t) + b(t)u(t) + c(t) - p(t)s(t)\big(1 - u(t)\big), \tag{2.16}$$

qui ne dépend pas de $x$, puis on écrit les conditions d'optimalité que doit vérifier la solution :

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(u^*, t, p^*) \tag{2.17a}$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u}(u^*, t, p^*), \tag{2.17b}$$

ce qui mène aux égalités $a(t)u^*(t) + b(t) + p^*(t)s(t) = 0$ et $p^*(t) = p_0$. Comme $a > 0$, il découle, pour le problème dont la commande n'est pas contrainte, une solution de la forme

$$u^*_{nc}(t) = -\frac{p_0 s(t) + b(t)}{a(t)}. \tag{2.18}$$

On trouve ensuite la valeur de $p_0$ en ré-injectant $u_{nc}^*(t)$ dans l'équation d'état de (2.15$b$), et en résolvant ensuite l'équation

$$\int_0^T \dot{x}(t)dt = x(T) - x(0) = -\int_0^T s(t)\left(1 + \frac{p_0 s(t) + b(t)}{a(t)}\right)dt, \tag{2.19}$$

soit finalement, avec $x(0) = x(T)$,

$$p_0 = -\frac{\displaystyle\int_0^T s(t)\left(1 + \frac{b(t)}{a(t)}\right)dt}{\displaystyle\int_0^T \frac{s^2(t)}{a(t)}dt}, \tag{2.20}$$

ce qui permet de connaître la commande optimale $u_{nc}^*(t)$ du problème (2.15a-2.15b), ainsi que la trajectoire optimale $x^*(t)$ de l'état.

### Cas avec contraintes sur la commande

Si l'on considère le problème (2.15a-2.15b-2.15c), la présence de contraintes sur $u$ ne nous permet plus d'écrire une expression analytique pour $p_0$. On peut cependant toujours définir la solution du problème non contraint $u_{nc}^*(t)$ par l'expression

$$u_{nc}^*(t) = -\frac{p_0 s(t) + b(t)}{a(t)},$$

et projeter $u_{nc}^*(t)$ sur le domaine admissible $[0,1]$ imposé par les contraintes de bornes sur $u$ (équation 2.15c). On trouve ensuite la valeur de $p_0$ en utilisant une méthode de tir (voir section 3.2) pour vérifier la contrainte d'égalité sur $x(T)$ .

### Cas avec contraintes sur la commande et sur l'état

On considère maintenant le problème (2.15) complet, avec les contraintes sur la commande et sur l'état. Pour prendre en compte les contraintes sur l'état, on les introduit à l'expression de l'Hamiltonien. Les contraintes issues de $0 \leq x(t) \leq 1$ s'écrivent $-x(t) \leq 0$ et $x(t) - 1 \leq 0$. On définit alors deux multiplicateurs $\mu_1 \geq 0$ et $\mu_2 \geq 0$, qui vérifient

$$\mu_1(t)(-x(t)) = 0 \quad \text{et} \quad \mu_2(t)(x(t)-1) = 0. \tag{2.21}$$

On construit ensuite le Lagrangien (ou Hamiltonien augmenté uniquement des contraintes sur l'état) qui s'écrit

$$\mathcal{L}(x,u,t,p,\mu_1,\mu_2) = \frac{1}{2}a(t)u^2(t) + b(t)u(t) + c(t) - p(t)s(t)\big(1-u(t)\big) - \mu_1(t)x(t) + \mu_2(t)(x(t)-1). \tag{2.22}$$

L'écriture des conditions d'optimalité sur $\mathcal{L}$ mène à

$$\dot{p}^*(t) = \mu_1^*(t) - \mu_2^*(t) \tag{2.23a}$$
$$0 = a(t)u^*(t) + b(t) + p^*(t)s(t). \tag{2.23b}$$

Ainsi $p^*(t)$ évolue selon l'équation (2.23a) quand une contrainte sur l'état est active. En revanche, lorsque $x$ ne se trouve pas sur un arc frontière, c'est à dire $0 < x < 1$, alors $\mu_1^* = \mu_2^* = 0$, et $p(t)$ reste constant (on est ramené localement à un problème sans contrainte sur l'état).

Lorsqu'une contrainte sur l'état est active, la commande optimale reste de la même forme, c'est à dire

$$u^*(t) = \min\left(\max\left(-\frac{p(t)s(t)+b(t)}{a(t)}, 0\right), 1\right).$$

En remarquant que $x = 0$ ou $x = 1$ implique forcément $u = 1$, on peut connaître la loi d'évolution de $p^*(t)$ lorsqu'une contrainte sur l'état est active,

$$p^*(t) = -\frac{a(t)+b(t)}{s(t)},$$

cette équation nous indiquant donc la forme de $\mu_1(t)$ et de $\mu_2(t)$. On peut donc remarquer que l'écriture des conditions d'optimalité nous permet de connaître la loi d'évolution de $p^*(t)$ lorsque les contraintes sont actives, ou inactives ($p^*$ est alors constant), mais en revanche il n'est pas possible de connaître à quels instants les contraintes deviendront actives. Il n'est donc pas possible non plus de savoir le nombre de fois où ces contraintes deviendront actives.

En conséquence, l'utilisation d'un algorithme de tir multiple (section 3.2.2) n'est pas possible sur un problème simple tel que le problème (2.15), sans connaissance sur la trajectoire optimale de l'état et sur les contraintes violées. L'algorithme SCOP, capable quant à lui de traiter ce problème, sera présenté dans la section 3.4.

### 2.3.2 Recherche d'une solution pour un problème simple du type (1.2)

On s'intéresse maintenant au problème d'optimisation de la répartition de couple sur un cycle durant lequel le moteur thermique peut être éteint, problème du type (1.2). Ce problème comporte une variable d'état $x$ continue et bornée, et une variable d'état discrète $r$ continue par morceaux prenant les valeurs 0 ou 1. On considère comme dans la section 2.3.1 que $L$ est définie par un polynôme en $u$, le problème simple s'écrivant alors

$$\min_{u,v}\left\{\int_0^T r(t)\left(\frac{1}{2}a(t)u^2(t)+b(t)u(t)+c(t)\right)dt + \int_0^T C_0 \max(0,\dot{r}(t))dt\right\} \tag{2.24a}$$

$$\dot{x}(t) = -s(t)\big(1-r(t)u(t)\big), \quad x(0) = x(T) = x_0 \tag{2.24b}$$

$$0 \leq u(t) \leq 1 \tag{2.24c}$$

$$0 \leq x(t) \leq 1 \tag{2.24d}$$

$$r(t) \in \{0,1\}, \tag{2.24e}$$

où la commande $u$ et l'état $x$ sont bornés par 0 et 1. On définit une seconde commande, notée $v$, telle que $v(t) = \dot{r}(t)$.

Afin d'étudier plus facilement le problème (2.24), on relaxe la nature discrète de $r$, et on suppose que $r$ est continu entre 0 et 1. L'idée est de considérer et de chercher à résoudre le problème continu, en espérant que la solution du problème relaxé continu tende vers la solution du problème discret. On cherche donc à étudier ce problème dans le cas simplifié où les deux variables d'état $x$ et $r$ sont continues.

#### Cas sans contrainte sur la commande $u$ et sur les états $x$ et $r$

Dans un premier temps, on étudie le problème (2.24) sans les contraintes (2.24c) et (2.24d), et sans les contraintes de bornes sur $r$. On doit toutefois observer que la variable d'état $r$, lorsqu'elle est non bornée entre 0 et 1, n'a plus aucune signification physique, rendant le problème d'optimisation et sa solution décorrélés de l'application traitée. Néanmoins, on pourra analyser plus facilement le comportement des variables d'état et des multiplicateurs associés. On considérera les contraintes de bornes sur $r$ dans un second temps.

L'Hamiltonien $H$ associé au problème (2.24a -2.24b) s'écrit

$$H(r,u,v,t,p_x,p_r) = r(t)\left(\frac{1}{2}a(t)u^2(t)+b(t)u(t)+c(t)\right)+C_0\max\big(0,v(t)\big) \\ -p_x(t)s(t)(1-r(t)u(t))+p_r(t)v(t), \quad (2.25)$$

où $p_x$ et $p_r$ sont respectivement les multiplicateurs de Lagrange associés aux variables d'état $x$ et $r$. On écrit les conditions d'optimalité, valables $\forall t\in[0,T]$ :

$$\dot{p}_x^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(r^*,u^*,v^*,t,p_x^*,p_r^*) \quad (2.26a)$$

$$\dot{p}_r^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial r}(r^*,u^*,v^*,t,p_x^*,p_r^*) \quad (2.26b)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u}(r^*,u^*,v^*,t,p_x^*,p_r^*) \quad (2.26c)$$

$$v^*(t) = \underset{v}{\operatorname{argmin}} H(r^*,u^*,v,t,p_x^*,p_r^*). \quad (2.26d)$$

On remarque que les conditions d'optimalité sur $u$ et sur $v$ sont complètement découplées, on peut donc les traiter indépendamment l'une de l'autre. Les équations (2.26) mènent respectivement à

$$\dot{p}_x^*(t) = 0 \quad (2.27a)$$

$$\dot{p}_r^*(t) = -\left(\frac{1}{2}a(t)u^{*^2}(t)+b(t)u^*(t)+c(t)\right)-p_x^*(t)s(t)u^*(t) \quad (2.27b)$$

$$0 = r^*(t)\big(a(t)u^*(t)+b(t)\big)+p_x^*(t)r^*(t)s(t) \quad (2.27c)$$

$$v^*(t) = \underset{v}{\operatorname{argmin}}\{C_0\max(0,v(t))+p_r^*(t)v(t)\}. \quad (2.27d)$$

L'équation (2.27a) indique que le multiplicateur de Lagrange $p_x^*$ associé à $x$ est constant $\forall t\in[0,T]$, les contraintes sur l'état $x$ n'ayant pas été considérées. Dans l'équation (2.27c), $r(t)$ est directement factorisable. Cette équation possède donc deux solutions :

1. $r^*(t)=0$ qui correspond à un fonctionnement en mode électrique pur (moteur thermique éteint), la valeur de $u^*(t)$ pouvant alors être quelconque,
2. $r^*(t)\neq 0$ et $a(t)u^*(t)+b(t)+p_x^*(t)s(t)=0$ avec laquelle on retrouve l'expression de la commande optimale du problème non contraint précédent (2.15a-2.15b) (identique au problème (2.24a -2.24b) avec $r\equiv 1$, $\forall t\in[0,T]$), c'est à dire

$$u^*(t) = -\frac{p_x^*s(t)+b(t)}{a(t)}, \quad (2.28)$$

où $p_x^*$ est donc constant sur $[0,T]$ (équation 2.27a et pas de contrainte de borne sur $x$).

On suppose que $u^*(t) = -\dfrac{p_x^*s(t)+b(t)}{a(t)}$ lorsque $r(t)=0$. Il est alors naturel de reporter l'expression de $u^*(t)$ dans l'équation (2.27b), qui devient

$$\dot{p}_r^*(t) = -\left[\frac{1}{2}a(t)\left(-\frac{p_x^*s(t)+b(t)}{a(t)}\right)^2+b(t)\left(-\frac{p_x^*s(t)+b(t)}{a(t)}\right)+c(t)\right]-p_x^*s(t)\left(-\frac{p_x^*s(t)+b(t)}{a(t)}\right). \quad (2.29)$$

En remarquant que

$$-\left[b(t)\left(-\frac{p_x^* s(t)+b(t)}{a(t)}\right)+c(t)\right]-p_x^* s(t)\left(-\frac{p_x^* s(t)+b(t)}{a(t)}\right)=\frac{(p_x^* s(t)+b(t))^2}{a(t)}-c(t),$$

on en déduit une expression très simple pour $\dot{p}_r^*(t)$, donnée par

$$\dot{p}_r^*(t)=\frac{1}{2a(t)}\Big(p_x^* s(t)+b(t)\Big)^2-c(t). \tag{2.30}$$

Comme les termes $a(t)$ et $c(t)$ sont positifs $\forall t \in [0,T]$, le signe de $\dot{p}_r^*(t)$ dépend directement de $c(t)$ qui correspond à la consommation à couple nul (au ralenti). On vérifie par ailleurs que si $c \equiv 0$, alors $\dot{p}_r^*(t) \geq 0$, ce qui implique qu'il y a *au plus* un changement de signe de $p_r^*(t)$ sur $[0,T]$.

La condition d'optimalité donnée par l'équation (2.27d) relie la commande $v^*$ au multiplicateur $p_r$. Pour résoudre cette équation, il suffit de rechercher $v$ telle que la fonction $v \mapsto C_0 \max(0,v)+p_r^* v$ soit minimale, selon la valeur de $p_r^*(t)$. On identifie alors deux valeurs particulières $-C_0$ et 0 autour desquels $v^*$ est susceptible de changer. La Figure 2.1 donne l'allure de la fonction $v \mapsto C_0 \max(0,v)+p_r^* v$ selon la valeur de $p_r$.

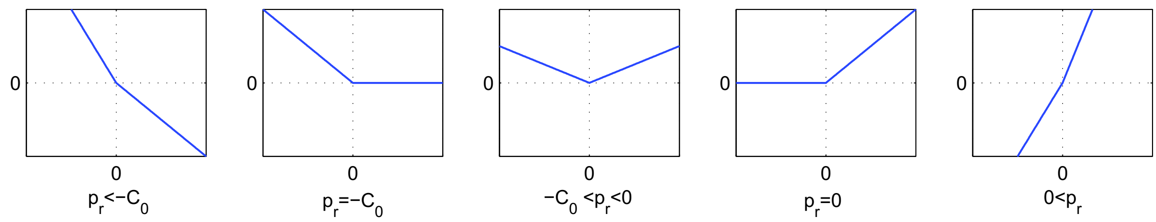


FIG. 2.1: *Courbes de* $v \mapsto (C_0 \max(0,v)+p_r^* v)$ *en fonction de* $p_r$.

On obtient finalement :

$$\begin{array}{lll}
\bullet\ \text{Si} & p_r^*(t) < -C_0 & \text{alors } v^*(t)=+\infty, \\
\bullet\ \text{Si} & p_r^*(t) = -C_0 & \text{alors } v^*(t) \text{ est indéterminé } (v^*(t)\in\mathbb{R}^+), \\
\bullet\ \text{Si} & -C_0 < p_r^*(t) < 0 & \text{alors } v^*(t)=0, \\
\bullet\ \text{Si} & p_r^*(t)=0 & \text{alors } v^*(t) \text{ est indéterminé } (v^*(t)\in\mathbb{R}^-), \\
\bullet\ \text{Si} & 0 < p_r^*(t) & \text{alors } v^*(t)=-\infty,
\end{array} \tag{2.31}$$

où $p_r^*(t)=p_r(0)+\int_0^t \left[\frac{1}{2a(\tau)}\Big(p_x^* s(\tau)+b(\tau)\Big)^2-c(\tau)\right] d\tau$. Il suffit alors de fixer un couple de variables parmi $r(0)$, $p_r(0)$, $r(T)$, et $p_r(T)$, par exemple $r(T)=0$, et $p_r(0)=0$.

Comme l'équation qui régit l'évolution de $p_r^*(t)$ dépend du cycle via les fonctions $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, et $s(t)$, on peut faire l'hypothèse que $p_r^*(t)$ ne prend que ponctuellement les valeurs 0 et $-C_0$. C'est donc l'évolution du multiplicateur $p_r(t)$ au cours du temps qui, comparé aux bornes 0 et $C_0$, impose la commande optimale $v^*(t)$ et commande l'état $r(t)$.

**Prise en compte des contraintes de bornes sur $r$**

On reprend à nouveau le problème précédent, dans lequel on tient maintenant compte des contraintes de bornes sur la variable d'état $r$. On rappelle qu'il n'y a pas de contraintes sur $x$ et sur $u$. La variable d'état $r$ étant bornée entre 0 et 1, on définit deux multiplicateurs de Lagrange $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_2 \geq 0$ associés respectivement aux contraintes sur l'état $-r \leq 0$ et $r-1 \leq 0$. Le Lagrangien $\mathcal{L}$ associé au problème (2.24a -2.24b) avec les contraintes de borne $0 \leq r(t) \leq 1$ s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(r,u,v,t,p_x,p_r,\lambda_1,\lambda_2) = r(t)\left(\frac{1}{2}a(t)u^2(t)+b(t)u(t)+c(t)\right)+C_0\max\big(0,v(t)\big)\\ -p_x(t)s(t)(1-r(t)u(t))+p_r(t)v(t)-\lambda_1(t)r(t)+\lambda_2(t)(r(t)-1)\end{aligned} \tag{2.32}$$

où $p_x$ et $p_r$ sont respectivement les multiplicateurs de Lagrange associés aux variables d'état $x$ et $r$, et $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont les multiplicateurs associés aux contraintes de bornes sur $r$. Les conditions d'optimalité (qui ne diffèrent de (2.27) que par la prise en compte des contraintes de bornes sur $r$ et des multiplicateurs $\lambda_1$ et $\lambda_2$ associés) s'écrivent maintenant

$$\dot{p}_x^*(t) = 0 \tag{2.33a}$$

$$\dot{p}_r^*(t) = -\left(\frac{1}{2}a(t)u^{*^2}(t)+b(t)u^*(t)+c(t)\right)-p_x^*(t)s(t)u^*(t)+\lambda_1^*(t)-\lambda_2^*(t) \tag{2.33b}$$

$$0 = r^*(t)\big(a(t)u^*(t)+b(t)\big)+p_x^*(t)r^*(t)s(t) \tag{2.33c}$$

$$v^*(t) = \underset{v}{\operatorname{argmin}}\{C_0\max(0,v(t))+p_r^*(t)v(t)\} \tag{2.33d}$$

On retrouve les mêmes expressions de $p_x^*$ et $u^*$ que dans le cas où $r$ n'est pas borné, c'est à dire

1. $p_x^*(t) = p_x^* = \text{constante } \forall t \in [0,T]$ (pas de contraintes de bornes sur $x$),
2. $u^*(t) = -\dfrac{p_x^*s(t)+b(t)}{a(t)}$.

La condition d'optimalité (2.33b), avec l'expression de $u^*(t)$ ci-dessus, se simplifie comme précédemment, menant à

$$\dot{p}_r^*(t) = \frac{1}{2a(t)}\Big(p_x^*s(t)+b(t)\Big)^2-c(t)+\lambda_1^*(t)-\lambda_2^*(t). \tag{2.34}$$

On peut à nouveau écrire l'ensemble des équations qui décrivent les propriétés et l'évolution des variables $x^*$, $r^*$, $p_x^*$, $p_r^*$, $u^*$, $v^*$, $\lambda_1^*$ et $\lambda_2^*$ :

$$\dot{x}^*(t) = -s(t)(1-r^*(t)u(t)),\quad x^*(0)=x^*(T)=x_0 \tag{2.35a}$$

$$\dot{r}^*(t) = v^*(t),\quad r^*(T)=0 \tag{2.35b}$$

$$p_x^*(t) = p_x^* = \text{constante} \tag{2.35c}$$

$$\dot{p}_r^*(t) = \frac{1}{2a(t)}\Big(p_x^*s(t)+b(t)\Big)^2-c(t)+\lambda_1^*(t)-\lambda_2^*(t),\quad p_r^*(0)=0 \tag{2.35d}$$

$$u^*(t) = -\frac{p_x^*s(t)+b(t)}{a(t)} \tag{2.35e}$$

$$v^*(t) = \underset{v}{\operatorname{argmin}}\{C_0\max(0,v(t))+p_r^*(t)v(t)\} \tag{2.35f}$$

$$\lambda_1^*(t) \geq 0 \tag{2.35g}$$

$$\lambda_2^*(t) \geq 0 \tag{2.35h}$$

$$r^*(t) \in [0,1]. \tag{2.35i}$$

où l'on se retrouve dans le cas d'un problème avec contraintes sur l'état $r$, les évolutions de $\lambda_1(t)$ et de $\lambda_2(t)$ étant inconnues.

On peut néanmoins observer que $p_r$ correspond au coût marginal associé à la variable d'état $r$, et en ce sens c'est donc la valeur de $p_r$ qui doit être comparée avec 0 et $C_0$, pour savoir s'il est intéressant d'arrêter le moteur (coût nul) ou de le démarrer (coût $C_0$).

De plus, on possède maintenant, via l'expression de $p_r(t)$ et les bornes 0 et $C_0$ , une commande supplémentaire $v$ sur le moteur thermique qui nous permettrait de posséder un contrôleur temps-réel avec deux états : l'état de charge de la batterie, et l'état du moteur thermique. L'idée serait alors d'utiliser cette commande en temps réel avec un horizon glissant, par exemple.