

# Problème modèle et résolution classique à cinq points

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Modèle d'étude</b> . . . . .	<b>18</b>
2.1.1	Équations intérieures . . . . .	18
2.1.2	Conditions aux limites et initiales . . . . .	21
<b>2.2</b>	<b>Analyse de stabilité en 1-D</b> . . . . .	<b>22</b>
2.2.1	Coefficients de Corey égaux à 1 . . . . .	26
2.2.2	Coefficients de Corey égaux à 2 . . . . .	31
<b>2.3</b>	<b>Schéma de référence 5P</b> . . . . .	<b>34</b>
2.3.1	Discrétisation en temps . . . . .	34
2.3.2	Discrétisation en espace . . . . .	36
<b>2.4</b>	<b>Cas tests de référence</b> . . . . .	<b>43</b>
2.4.1	Cas radial . . . . .	43
2.4.2	Cas à 5 puits . . . . .	49
2.4.3	Cas digitations . . . . .	57

---

Dans ce chapitre, qui sert de base à tout le manuscrit, le problème modèle (1.1) est établi en §2.1. Sur celui-ci seront développées les nouvelles idées de schémas numériques aux chapitres suivants.

Même s'il repose sur plusieurs hypothèses simplificatrices par rapport à un modèle réaliste, ce modèle « jouet » retient suffisamment de difficultés dignes d'intérêt. Au premier rang de celles-ci figure le caractère instable des solutions au-delà d'un certain seuil critique du rapport des mobilités, comme l'atteste l'analyse effectuée en §2.2 pour des écoulements unidimensionnels.

La résolution numérique la plus classique du modèle combine une discrétisation IMPES (IMplicite en Pression, Explicite en Saturation) en temps et un schéma volumes finis dit à cinq points (5P) en espace. Sa description fait l'objet de §2.3

La dernière section §2.4 rassemble certains résultats de simulation illustrant les principaux défauts du schéma 5P auxquels cette thèse tente de remédier. Ces résultats constituent également une référence de comparaison pour les chapitres ultérieurs.

## 2.1 Modèle d'étude

Le modèle considéré tout au long cette thèse, à l'exception du chapitre §6, est issu d'un modèle plus général appelé *Dead Oil isotherme* [47], lui-même un cas particulier d'une famille plus vaste de modèles de milieux poreux [19, 22].

### 2.1.1 Équations intérieures

Dans le réservoir d'hydrocarbures, représenté par un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ouvert borné connexe et régulier par morceaux, le milieu poreux est une roche solide dans laquelle il y a des pores permettant à un fluide de circuler. Ces pores peuvent être plus ou moins nombreux et de tailles différentes. Au lieu de les décrire au niveau microscopique, le milieu est caractérisé par un champ macroscopique appelé *porosité*  $\phi \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$ . Celle-ci exprime localement le rapport entre le volume des pores et celui du milieu. Par la suite, la porosité  $\phi \in [0, 1]$  sera supposée uniforme en espace.

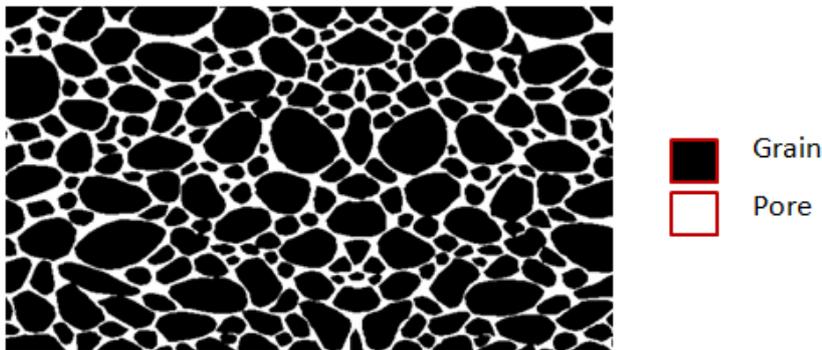


FIGURE 2.1 – Un milieu poreux à l'échelle microscopique.

Quand la roche est saturée par un fluide, elle possède une aptitude à le laisser circuler dans les pores. Cette capacité, appelée *perméabilité absolue*, est en général mesurée par un champ de tenseur symétrique  $\kappa \in L^\infty(\Omega; \text{Sym}(\mathbb{R}^2))$ . Les variations en espace de la perméabilité sont dues aux hétérogénéités et aux changements de type de roche dans le domaine. En milieu homogène et isotrope, hypothèse adaptée ici, ce champ de tenseur se réduit à un scalaire  $\kappa > 0$ . L'unité de mesure courante pour la perméabilité est le darcy (D), avec  $1 \text{ D} = 9.869233 \times 10^{-13} \text{ m}^2$ .

Le fluide diphasique est composé de l'« huile » indicée par  $o$  (oil) et représentant les hydrocarbures, ainsi que de l'« eau » indicée par  $w$  (water) et représentant le liquide injecté artificiellement pour pousser l'huile dans les procédés de récupération secondaire. L'écoulement est supposé immiscible, c'est-à-dire que les deux phases ne peuvent pas se mélanger. Pour chaque phase  $\alpha \in \{w, o\}$ , il y a en outre :

- Deux champs inconnus qui sont la saturation  $s_\alpha(\mathbf{x}, t)$  et la vitesse de filtration  $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}, t)$ . La saturation  $s_\alpha$  est la proportion volumique de la phase  $\alpha$ , ce qui impose  $s_\alpha \in [0, 1]$ . Les équations régissant ces deux champs seront données plus loin.

- Deux propriétés pétrophysiques qui sont la *viscosité* dynamique  $\mu_\alpha$  et la *perméabilité relative*  $\kappa_{r,\alpha}$ . Pour un mélange immiscible,  $\mu_\alpha > 0$  est une constante. L'unité de mesure courante pour la viscosité dynamique est le poise (P) avec  $1\text{P} = 0.1\text{Pa} \cdot \text{s}$ . Quant à la perméabilité relative  $\kappa_{r,\alpha}$ , il s'agit d'une fonction croissante de la saturation de la phase concernée et traduit l'impact d'une phase sur l'autre. Plusieurs lois empiriques existent à cet égard [49, 72, 93]. Pour la thèse, la plus simple est sélectionnée, celle de Brooks-Corey [16] qui s'écrit

$$\kappa_{r,\alpha}(s_\alpha) = \kappa_{r,\alpha}^\# s_\alpha^{m_\alpha}, \quad (2.1)$$

avec a priori un exposant  $m_\alpha \geq 1$  par phase. Souvent, les deux quantités sont égales  $m_w = m_o$  mais dans certaines simulations ce n'est pas le cas.

### Formulation par phases

Si  $(0, T)$  est un intervalle temporel, avec  $T > 0$ , l'écoulement a lieu selon le système

$$\phi \partial_t s_\alpha + \operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha = q_\alpha, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{u}_\alpha = -\kappa \mu_\alpha^{-1} \kappa_{r,\alpha}(s_\alpha) \nabla p, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.2b)$$

$$s_o + s_w = 1, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.2c)$$

qui compte cinq équations pour cinq inconnues que sont les deux saturations  $s_\alpha$ , les deux vitesses  $\mathbf{u}_\alpha$  et la pression  $p$ . Le champ de pression  $p(\mathbf{x}, t)$  est supposé commun aux deux phases. Dans d'autres modèles, il convient de distinguer deux pressions, une par phase, au prix d'une relation algébrique supplémentaire fournissant la pression capillaire (différence entre les deux pressions) en fonction d'une saturation. Cela engendre d'autres difficultés numériques [18, 40].

Les deux premières équations (2.2a) expriment la conservation du volume (donc aussi de la masse, puisqu'ici les phases sont supposées incompressibles par l'absence des masses volumiques). Les deux équations suivantes (2.2b) correspondent à la loi de Darcy-Muskat [73], laquelle généralise au cas diphasique celle découverte par Darcy [33] dans le cas monophasique. La dernière équation (2.2c) stipule que tout le volume des pores est rempli par le fluide.

Les termes sources  $q_\alpha$  aux seconds membres de (2.2a) représentent les débits liés à l'injection et à la production au niveau des puits. Ils sont plus faciles à préciser dans la formulation alternative suivante, avec laquelle nous travaillons dorénavant.

### Formulation par flux fractionnaire

Les variables saturation et pression sont fortement imbriquées dans (2.2). Il est judicieux de « desserrer » un peu leur couplage au moyen d'un changement de notations et de variables [19]. Soit d'abord

$$s = s_w,$$

puis la vitesse totale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_w + \mathbf{u}_o$$

et le débit total

$$q = q_w + q_o.$$

D'autre part, la mobilité  $\lambda_\alpha$  de la phase  $\alpha \in \{w, o\}$  est définie par

$$\lambda_\alpha(s_\alpha) = \mu_\alpha^{-1} \kappa_{r,\alpha}(s_\alpha), \quad (2.3)$$

de sorte que  $\mathbf{u}_\alpha = -\kappa \lambda_\alpha(s_\alpha) \nabla p$ . En sommant les équations de conservation (2.2a) sur  $\alpha$  et en invoquant (2.2c), le système (2.2) devient équivalent au système

$$\mathbf{u} = -\kappa \lambda(s) \nabla p, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.4a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = q, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.4b)$$

$$\phi \partial_t s + \operatorname{div}(f(s)\mathbf{u}) = q_w, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.4c)$$

où

$$\lambda(s) = \lambda_w(s) + \lambda_o(1 - s)$$

est la mobilité totale et

$$f(s) = \frac{\lambda_w(s)}{\lambda(s)}$$

est le *flux fractionnaire* de la phase aqueuse. Pour les lois de perméabilité relative de Brooks-Corey (2.1), le flux fractionnaire

$$f(s) = \frac{\mu_w^{-1} \kappa_{r,w}^\# s^{m_w}}{\mu_w^{-1} \kappa_{r,w}^\# s^{m_w} + \mu_o^{-1} \kappa_{r,o}^\# (1 - s)^{m_o}} \quad (2.5)$$

s'écrit aussi

$$f(s) = \frac{M s^{m_w}}{M s^{m_w} + (1 - s)^{m_o}} \quad (2.6)$$

avec le *rapport de mobilités*

$$M = \frac{\mu_w^{-1} \kappa_{r,w}^\#}{\mu_o^{-1} \kappa_{r,o}^\#} = \frac{\lambda(1)}{\lambda(0)}. \quad (2.7)$$

Il est facile de montrer que  $f$  est une fonction croissante en  $s$ , paramétrée par  $M$ , et que

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

Lorsque  $q \equiv 0$ , la vitesse  $\mathbf{u}$  est à divergence nulle et l'équation (2.4c) à  $\mathbf{u}$  fixé reflète un transport pur. Si  $m_w = m_o = 2$ , elle est appelée l'équation de Buckley-Leverett [17].

Les termes sources  $q$  et  $q_w$  dans (2.4) dépendent du nombre et du type de puits présents dans le domaine. Un cas typique est de considérer un puits injecteur (d'eau) situé en  $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \Omega$  et  $P$  puits producteurs (d'huile et d'eau) situés respectivement en  $(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_P) \in \Omega^P$ . Alors,

$$q = Q(t) \delta_{\mathbf{0}}(\mathbf{x}) - \sum_{L=1}^P Q_L(t) \delta_{\mathbf{X}_L}(\mathbf{x}), \quad (2.8a)$$

$$q_w = Q(t) \delta_{\mathbf{0}}(\mathbf{x}) - \sum_{L=1}^P Q_L(t) f(s(\mathbf{X}_L, t)) \delta_{\mathbf{X}_L}(\mathbf{x}), \quad (2.8b)$$

où  $Q(t) \geq 0$  est le débit d'eau imposé en entrée à  $\mathbf{0}$ ,  $Q_L(t) \geq 0$  est le débit total imposé en sortie à  $\mathbf{X}_L$ , et  $\delta_{\mathbf{X}}$  désigne la masse de Dirac concentrée en  $\mathbf{X}$ . Les formules (2.8) idéalisent chaque puits comme une source ponctuelle en débit imposé. Il existe d'autres modèles de puits à source répartie sur petit rayon équivalent et fonctionnant en pression imposée [23, 74]. Un exemple sera étudié en §2.4.2.

L'avantage de la formulation par flux fractionnaire (2.4) réside dans ce qui semble être une quasi-parfaite décomposition elliptique-hyperbolique de ses équations. En effet, la deuxième équation (2.4b) combinée à la première (2.4a) donne lieu à l'équation elliptique linéaire en pression

$$-\operatorname{div}(\kappa\lambda(s)\nabla p) = q$$

pourvu que la saturation  $s$  soit connue, tandis que la seconde équation (2.4c) correspond à une équation hyperbolique non-linéaire en saturation pourvu que la vitesse  $\mathbf{u}$  soit fixée. C'est d'ailleurs en exploitant la nature présumée de chacune des équations que les ingénieurs ont mis au point la plupart des schémas numériques.

Cette apparence « vertueuse » est pourtant trompeuse. Elle pourrait faire conclure hâtivement à la stabilité de la solution (si celle-ci existe), puisqu'une équation elliptique est stable et qu'il en va de même pour une équation hyperbolique. En réalité, à cause du couplage entre  $s$  et  $p$ , le système (2.4) est susceptible de développer des instabilités lorsque le rapport de mobilités  $M$  est suffisamment grand, appelé alors rapport de mobilités *défavorable*. Deux exemples concrets seront traités en §2.2.

### 2.1.2 Conditions aux limites et initiales

Au système intérieur (2.4), des conditions aux limites et initiales sont ajoutées pour avoir un système bien posé. La frontière  $\partial\Omega$  est décomposée en deux parties vérifiant

$$\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N, \quad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset.$$

Sur la partie Dirichlet  $\Gamma_D$ , une pression est donnée. Sur la partie Neumann  $\Gamma_N$ , un flux est spécifié. Autrement dit,

$$p = p^D, \quad \text{sur } \Gamma_D \times (0, T), \quad (2.9a)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u^N, \quad \text{sur } \Gamma_N \times (0, T), \quad (2.9b)$$

$$s = s^E, \quad \text{si } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad (2.9c)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne la normale unitaire sortante au bord. La condition (2.9c), qui correspond à une entrée (E) de matière, est nécessaire compte tenu du caractère hyperbolique de l'équation en saturation. Bien entendu, dans le cas où  $|\Gamma_D| = 0$ , une condition de compatibilité doit être exigée [79]

$$\int_{\Omega} q + \oint_{\partial\Omega} u^N = 0, \quad (2.10)$$

et la pression  $p$  n'est alors déterminée qu'à une constante additive près.

À l'instant initial, le réservoir est supposé saturé d'huile. Cela signifie que la condition initiale est la suivante :

$$s(\cdot, t = 0) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.11)$$

Le système (2.4), (2.9), (2.11) est le premier modèle diphasique en milieu poreux à avoir été simulé numériquement [51]. En l'absence des termes sources, l'existence d'une solution faible (en un sens propre à chaque auteur) peut être établie sous des hypothèses convenables sur les données (également variables selon les auteurs) [3, 6, 66]. L'unicité a aussi été démontrée sous certaines conditions [5, 20, 67].

## 2.2 Analyse de stabilité en 1-D

Comme mentionné à la fin de §2.1.1, le système (2.4), (2.9), (2.11) peut contenir des instabilités intrinsèquement dues au couplage entre  $p$  et  $s$ . Ces instabilités se produisent lorsque le rapport de mobilités  $M$  dépasse un certain seuil critique. Ainsi,  $M$  apparaît comme une mesure de la raideur du problème.

La littérature regorge d'analyses théoriques corroborant cette assertion sur des modèles diphasiques voisins, y compris en 2-D voire 3-D axisymétrique [24, 26, 50, 54, 57, 59, 61, 80, 81, 99]. Néanmoins, quelques calculs vraiment rigoureux seront mis en avant relatifs au modèle (2.4), (2.9), (2.11). Ces calculs sont inspirés de ceux de Chavent et Jaffré [19, §I.V.2, 39–41] pour les modèles miscibles<sup>1</sup> 1-D. Leur transposition au cas immiscible semble n'avoir jamais été entreprise.

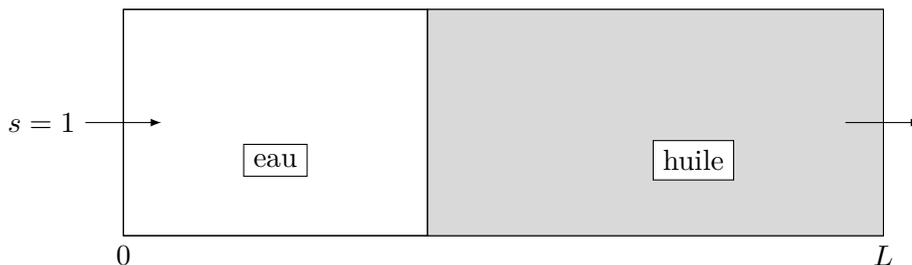


FIGURE 2.2 – Expérience d'injection en 1-D considérée dans l'analyse de stabilité.

Sur le domaine unidimensionnel  $\Omega = (0, L)$ , avec  $L > 0$ , la vitesse  $\mathbf{u}$  se réduit à sa seule composante  $u$ . En l'absence des termes sources, le système (2.4), (2.9), (2.11) dégénère en

- équations intérieures :

$$u = -\kappa\lambda(s)\partial_x p, \quad (2.12a)$$

$$\partial_x u = 0, \quad (2.12b)$$

$$\phi \partial_t s + \partial_x(f(s)u) = 0, \quad (2.12c)$$

pour tout  $(x, t) \in (0, L) \times (0, T)$ .

- Conditions aux limites :

$$p(0, t) = p_e, \quad (2.13a)$$

$$p(L, t) = p_s, \quad (2.13b)$$

$$s(0, t) = 1, \quad (2.13c)$$

1. Dans un modèle miscible, la saturation  $s$  est remplacée par une concentration  $c$ ; les perméabilités relatives  $\kappa_{r,\alpha}$  sont constantes mais les viscosités  $\mu_\alpha$  dépendent de  $c$ .

pour tout  $t \in (0, T)$ , où  $p_e > p_s$  sont deux constantes indépendantes de  $t$ .

- Condition initiale :

$$s(x, 0) = 0 \quad (2.14)$$

pour tout  $x \in (0, L)$ .

L'équation (2.12b) implique que la vitesse  $u$  ne dépend que du temps, à savoir

$$u(x, t) = u(t).$$

En intégrant l'équation (2.12a) de 0 à  $L$ , il vient

$$p_e - p_s = u(t) \int_0^L \frac{dx}{\kappa \lambda(s(x, t))},$$

à partir de quoi

$$u(t) = \frac{\kappa(p_e - p_s)}{\int_0^L [\lambda(s(x, t))]^{-1} dx}. \quad (2.15)$$

Puisque  $p_e > p_s$  par hypothèse,  $u(t) > 0$  pour tout  $t > 0$ , ce qui justifie la condition d'entrée (2.13c) en saturation, qui n'est autre que (2.9c) avec  $s^E = 1$ .

L'idée essentielle de l'analyse est d'extraire de la solution de (2.12)–(2.14) une variable réelle  $X(t)$  qui représente une position de front et qui est soumise à une équation différentielle de la forme

$$\frac{dX}{dt} = \Upsilon(X), \quad (2.16)$$

où  $\Upsilon \in C^1([0, L]; \mathbb{R})$ , tant que  $X(t) \in (0, L)$ . La notion de stabilité considérée est alors celle des perturbations linéaires, qui est précisée ci-dessous.

**Définition 2.1.** *L'évolution différentielle (2.16) est dite stable au sens des perturbations linéarisées si*

$$\Upsilon'(X) \leq 0 \quad \text{pour tout } X \in [0, L]. \quad (2.17a)$$

*Elle est dite instable au sens des perturbations linéarisées si*

$$\Upsilon'(X) > 0 \quad \text{pour tout } X \in [0, L]. \quad (2.17b)$$

REMARQUE 2.1. Contrairement à la définition habituelle pour un système dynamique [56], les conditions de signe (2.17) doivent être satisfaites en tout état  $X \in [0, L]$  et pas seulement en un point stationnaire (qui n'existe pas ici). Ainsi, lorsque  $\Upsilon'$  change de signe, il n'y a ni stabilité ni instabilité.  $\square$

Voici un argument en faveur de cette notion. La donnée initiale  $X_0$  est supposée légèrement perturbée et devient  $X_0 + \delta X_0$ . La nouvelle solution est  $X + \delta X$ . En retranchant (2.16) à

$$\frac{d(X + \delta X)}{dt} = \Upsilon(X + \delta X)$$

et en se contentant de l'approximation du premier ordre

$$\Upsilon(X + \delta X) - \Upsilon(X) \approx \Upsilon'(X) \delta X,$$

une équation différentielle linéaire (à coefficient variable en temps) est obtenue pour la perturbation, à savoir

$$\frac{d(\delta X)}{dt} \approx \Upsilon'(X) \delta X.$$

Cette équation s'intègre en

$$\delta X(t) = \delta X_0 \exp \int_0^t \Upsilon'(X(\varsigma)) d\varsigma.$$

Sous la condition (2.17a),  $|\delta X(t)|$  décroît (au sens large) avec  $t$ . Sous la condition (2.17b),  $|\delta X(t)|$  croît avec  $t$  : il y a alors une amplification de l'erreur.

Ce principe étant posé, la question est maintenant de savoir comment extraire une telle variable  $X(t)$  du problème (2.12)–(2.14). Pour cela, il faut poursuivre sa résolution exacte. Sachant que la vitesse  $u$  ne dépend pas de  $x$ , il est possible de diviser (2.12c) par  $u > 0$  pour obtenir

$$\frac{\phi}{u(t)} \partial_t s + \partial_x f(s) = 0.$$

À ce stade, il est commode d'introduire le temps fictif  $\tau$  tel que

$$d\tau = \frac{u(t)}{\phi} dt, \quad \text{soit } \tau = \int_0^t \frac{u(\varsigma)}{\phi} d\varsigma, \quad (2.18)$$

afin de se ramener à une loi de conservation scalaire strictement hyperbolique au sens classique [69, 90]. Cette dernière s'écrit

$$\partial_\tau \hat{s} + \partial_x f(\hat{s}) = 0 \quad (2.19)$$

moyennant le changement de fonction

$$\hat{s}(x, \tau) = s(x, t).$$

L'équation (2.19) est posée sur le domaine  $(0, L)$  et s'accompagne de la condition de bord entrant

$$\hat{s}(0, \tau) = 1 \quad (2.20)$$

et de la condition initiale

$$\hat{s}(x, 0) = 0 \quad (2.21)$$

pour  $0 < x < L$ . Pour des temps  $\tau > 0$  suffisamment petits, le système (2.19)–(2.21) peut être remplacé par un autre, lequel (2.19) est posé sur  $\mathbb{R}$  tout entier et muni de la condition initiale

$$\hat{s}(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

L'ensemble (2.19), (2.22) n'est autre qu'un problème de Riemann, dont la solution peut être explicitée [52]. La structure de cette solution dépend évidemment des paramètres  $m_\alpha$  et  $M$ .

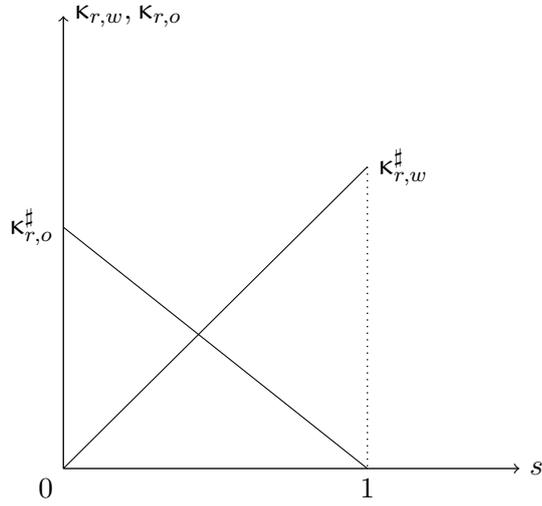


FIGURE 2.3 – Perméabilités relatives dans le cas  $m_w = m_o = 1$ .

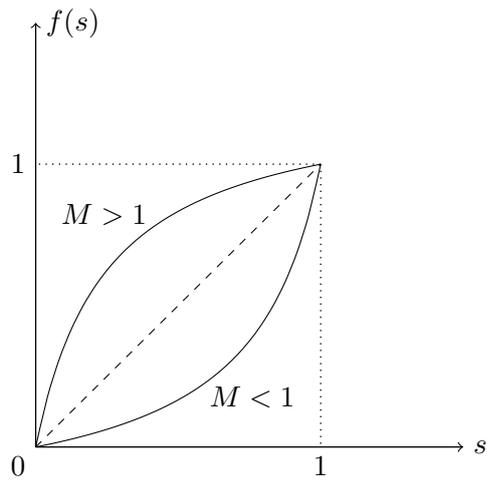


FIGURE 2.4 – Flux fractionnaire dans le cas  $m_w = m_o = 1$ .

### 2.2.1 Coefficients de Corey égaux à 1

Le cas  $m_w = m_o = 1$  est le plus simple à traiter. Les perméabilités relatives sont alors linéaires. Le jargon métier parle de *kr en croix*, comme l'illustre la figure 2.3. Le flux fractionnaire, quant à lui, est égal à

$$f(s) = \frac{Ms}{Ms + (1 - s)}. \quad (2.23)$$

Cette fonction est tracée sur la figure 2.4. Elle est strictement convexe si  $M < 1$ , strictement concave si  $M > 1$ .

**Théorème 2.1.** *Soit  $m_w = m_o = 1$ . Pour des temps  $t > 0$  suffisamment petits, la saturation  $s(\cdot, t)$  de la solution du problème (2.12)–(2.14) a le profil suivant.*

1. Pour  $M \leq 1$ , il est composé d'un choc

$$s(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < X(t), \\ 0 & \text{si } X(t) < x < L, \end{cases} \quad (2.24)$$

dont la position du front  $X(t)$  vérifie  $X(0) = 0$  et

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\kappa\lambda(0)(p_e - p_s)}{\phi[L + (M^{-1} - 1)X]}. \quad (2.25)$$

Le choc dégénère en une discontinuité de contact se propageant à vitesse constante pour  $M = 1$ .

2. Pour  $M > 1$ , il est composé d'une détente

$$s(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < Y(t), \\ (f')^{-1}(x/\sqrt{X(t)Y(t)}) & \text{si } Y(t) < x < X(t), \\ 0 & \text{si } X(t) < x < L, \end{cases} \quad (2.26)$$

dont les positions des fronts vérifient  $X(0) = Y(0) = 0$  et

$$Y = M^{-2}X, \quad (2.27)$$

$$\frac{dX}{dt} = \frac{3M\kappa\lambda(0)(p_e - p_s)}{\phi[3L + (M^{-3} - 1)X]}. \quad (2.28)$$

Avant de faire la preuve de ce résultat, il faut préciser ce que signifie «  $t$  suffisamment petit » : cela signifie que le front  $X(t)$  n'a pas encore atteint le bord droit  $x = L$ .

**DÉMONSTRATION.** Commençons par le cas  $M \leq 1$ . Le flux fractionnaire (2.23) étant convexe, la solution au problème de Riemann (2.19), (2.22) est un choc entre 1 (à gauche) et 0 (à droite) dont la position du front  $\widehat{X}(\tau) = X(t)$  se propage à la vitesse de Rankine-Hugoniot [52]

$$\frac{d\widehat{X}}{d\tau} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1$$

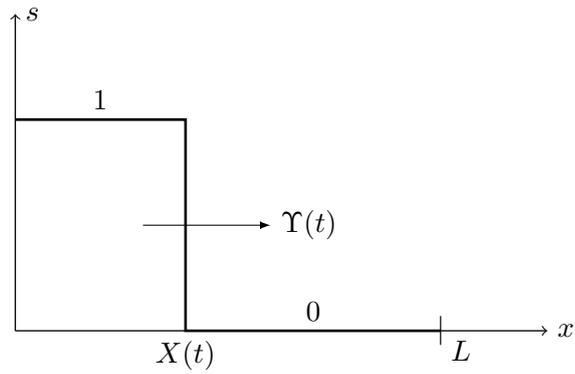


FIGURE 2.5 –  $M \leq 1$  : onde de choc ou discontinuité de contact.

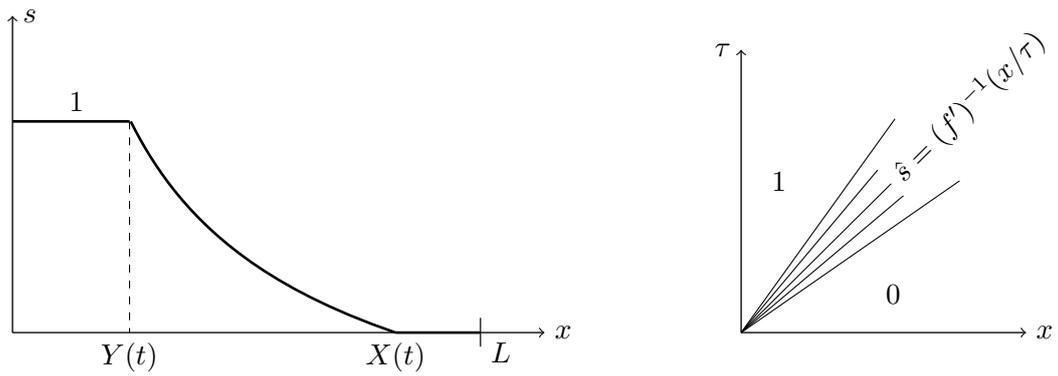


FIGURE 2.6 –  $M > 1$  : onde de détente, dans les plans  $(x, s)$  à gauche et  $(x, \tau)$  à droite.

par rapport au temps fictif  $\tau$  défini en (2.18). Il s'ensuit que

$$\frac{dX}{dt}(t) = \frac{d\tau}{dt}(t) \frac{d\widehat{X}}{d\tau}(\tau) = \frac{u(t)}{\phi}. \quad (2.29)$$

Il reste à calculer  $u(t)$  en fonction de  $X(t)$ . Pour cela, en revenant à la formule générale (2.15), l'intégrale au dénominateur est découpée en deux termes selon la structure de la solution (cf. figure 2.5). En d'autres termes,

$$u(t) = \frac{\kappa(p_e - p_s)}{\int_0^{X(t)} [\lambda(1)]^{-1} dx + \int_{X(t)}^L [\lambda(0)]^{-1} dx}.$$

Les intégrandes de chaque intégrale étant indépendante de la position, il vient que

$$u(t) = \frac{\kappa(p_e - p_s)}{[\lambda(1)]^{-1}X(t) + [\lambda(0)]^{-1}(L - X(t))} = \frac{\kappa\lambda(0)(p_e - p_s)}{M^{-1}X(t) + (L - X(t))}, \quad (2.30)$$

la dernière égalité découlant de  $M = \lambda(1)/\lambda(0)$ . En reportant (2.30) dans (2.29), il vient (2.25).

À présent, le cas  $M > 1$  est considéré. Le flux fractionnaire (2.23) étant strictement concave, la solution est une détente qui démarre en  $\widehat{Y}(\tau) = Y(t)$  et qui s'arrête en  $\widehat{X}(\tau) = X(t)$ . Ces positions avancent avec les vitesses

$$\frac{d\widehat{Y}}{d\tau} = f'(1) = \frac{1}{M}, \quad \frac{d\widehat{X}}{d\tau} = f'(0) = M$$

par rapport au temps fictif  $\tau$  de (2.18). Comme  $\widehat{X}(0) = \widehat{Y}(0) = 0$ , par intégration, il vient

$$\widehat{X}(\tau) = M\tau, \quad \widehat{Y}(\tau) = M^{-1}\tau, \quad (2.31)$$

d'où la relation (2.27), ainsi que la possibilité de remplacer  $\tau$  par  $\sqrt{X(t)Y(t)}$  dans la détente (2.26). Cette équation est donnée en revenant au temps réel par

$$\frac{dX}{dt}(t) = \frac{Mu(t)}{\phi}. \quad (2.32)$$

Il reste à calculer  $u(t)$  en fonction de  $X(t)$ . Comme avant, en revenant à la formule générale (2.15), l'intégrale au dénominateur est découpée en trois termes selon la structure de la solution (cf. figure 2.6). Cette opération est détaillée ci-après

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{dx}{\lambda(s(x,t))} &= \int_0^{Y(t)} \frac{dx}{\lambda(1)} + \int_{\widehat{Y}(\tau)}^{\widehat{X}(\tau)} \frac{dx}{\lambda((f')^{-1}(x/\tau))} + \int_{X(t)}^L \frac{dx}{\lambda(0)} \\ &= \frac{Y(t)}{\lambda(1)} + \tau \int_{1/M}^M \frac{d\xi}{\lambda((f')^{-1}(\xi))} + \frac{L - X(t)}{\lambda(0)} \end{aligned}$$

par le changement de variable  $\xi = x/\tau$  dans l'intégrale du milieu et en vertu de (2.31). Puisque  $Y = M^{-2}X$  et  $\lambda(1) = M\lambda(0)$ , cela donne encore

$$\int_0^L \frac{dx}{\lambda(s(x,t))} = \frac{M^{-3}X(t)}{\lambda(0)} + \tau \int_1^0 \frac{f''(v) dv}{\lambda(v)} + \frac{L - X(t)}{\lambda(0)}$$

après un deuxième changement de variable  $v = (f')^{-1}(\xi)$ . En y substituant

$$f''(v) = \frac{2M(1-M)}{[1+(M-1)v]^3}, \quad \lambda(v) = \lambda(0)[1+(M-1)v],$$

il vient

$$\int_0^L \frac{dx}{\lambda(s(x,t))} = \frac{1}{\lambda(0)} \left\{ L + (M^{-3} - 1)X(t) + \tau \int_1^0 \frac{2M(1-M)dv}{[(M-1)v+1]^4} \right\}. \quad (2.33)$$

Un troisième changement de variable  $w = (M-1)v+1$  permet d'évaluer la dernière intégrale comme

$$\int_1^0 \frac{2M(1-M)dv}{[(M-1)v+1]^4} = 2M \int_1^M \frac{dw}{w^4} = \frac{2}{3}M(1-M^{-3}).$$

En injectant cette valeur dans (2.33) et en remarquant que  $\tau M = X(t)$ , la vitesse s'exprime finalement par

$$u(t) = \frac{\kappa\lambda(0)(p_e - p_s)}{L + \frac{1}{3}(M^{-3} - 1)X(t)}. \quad (2.34)$$

En reportant (2.34) dans (2.32), le résultat souhaité (2.28) est obtenu.  $\square$

Du Théorème 2.1, les conclusions suivantes sont tirées concernant la stabilité de la solution.

**Corollaire 2.1.** *Soit  $m_w = m_o = 1$ . Alors,*

1. *Pour  $M \leq 1$ , la solution du problème (2.12)–(2.14) est stable au sens de la Définition 2.1.*
2. *Pour  $M > 1$ , elle est instable au sens de cette même Définition.*

DÉMONSTRATION. Pour  $M \leq 1$ , la position du front  $X(t)$  obéit à une équation différentielle de la forme (2.16), avec  $\Upsilon(t)$  donné par le second membre de (2.25). La dérivée

$$\Upsilon'(X) = (1 - M^{-1}) \frac{\kappa\lambda(0)(p_e - p_s)}{\Phi[L + (M^{-1} - 1)X]^2}$$

est du même signe que  $1 - M^{-1}$ , lequel est négatif ou nul pour  $M \leq 1$ .

Pour  $M > 1$ , la position du front  $X(t)$  obéit à une équation différentielle de la forme (2.16), avec  $\Upsilon(t)$  donné par le second membre de (2.28). La dérivée

$$\Upsilon'(X) = (1 - M^{-3}) \frac{3M\kappa\lambda(0)(p_e - p_s)}{\Phi[3L + (M^{-3} - 1)X]^2}$$

est du même signe que  $1 - M^{-3}$ , lequel est strictement positif pour  $M > 1$ .  $\square$

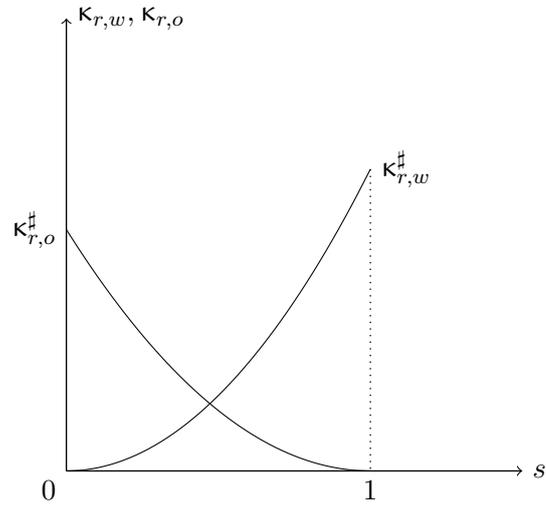


FIGURE 2.7 – Perméabilités relatives dans le cas  $m_w = m_o = 2$ .

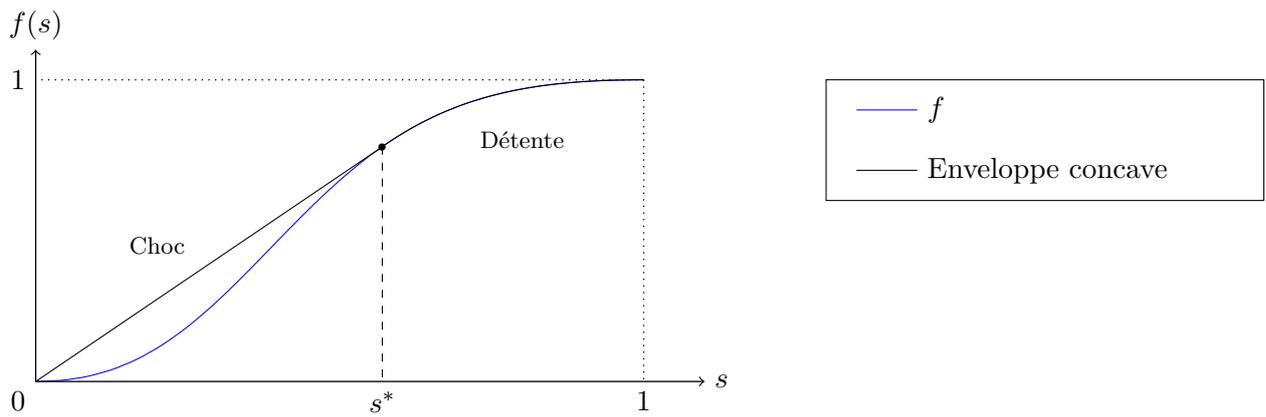


FIGURE 2.8 – Flux fractionnaire et enveloppe concave dans le cas  $m_w = m_o = 2$ .

### 2.2.2 Coefficients de Corey égaux à 2

Le cas  $m_w = m_o = 2$  est un peu plus lourd mais reste faisable. Les perméabilités relatives sont quadratiques, représentées sur la figure 2.7. Le flux fractionnaire, quant à lui, s'écrit

$$f(s) = \frac{Ms^2}{Ms^2 + (1-s)^2}. \quad (2.35)$$

Cette fonction, tracée sur la figure 2.8, comporte une partie convexe suivie d'une partie concave. Un point particulier de ce graphe mérite une attention particulière : c'est le *point de Welge*

$$s^* = \frac{1}{\sqrt{M+1}}. \quad (2.36)$$

En effet, la tangente en  $(s^*, f(s^*))$  au graphe passe par l'origine  $(0,0)$ , coïncidant ainsi avec la partie de l'enveloppe concave qui se trouve strictement au-dessus du graphe.

**Théorème 2.2.** *Soit  $m_w = m_o = 2$ . Pour des temps  $t > 0$  suffisamment petits, le profil de la saturation  $s(\cdot, t)$  de la solution du problème (2.12)–(2.14) est composé d'une détente suivie d'un choc. Il est donné par*

$$s(x, t) = \begin{cases} (f')^{-1}(xf'(s^*)/X(t)) & \text{si } 0 < x < X(t), \\ 0 & \text{si } X(t) < x < L, \end{cases} \quad (2.37)$$

où la position  $X(t)$  du front de choc vérifie  $X(0) = 0$  et

$$\frac{dX}{dt} = \frac{f'(s^*)\kappa\lambda(0)(p_e - p_s)}{\phi[L + (\mathfrak{J}(M) - 1)X]}, \quad (2.38a)$$

avec

$$\mathfrak{J}(M) = \frac{4M}{1 + \sqrt{M+1}} \int_1^{1/\sqrt{M+1}} \frac{2(M+1)v^3 - 3(M+1)v^2 + 1}{[Mv^2 + (1-v)^2]^4} dv. \quad (2.38b)$$

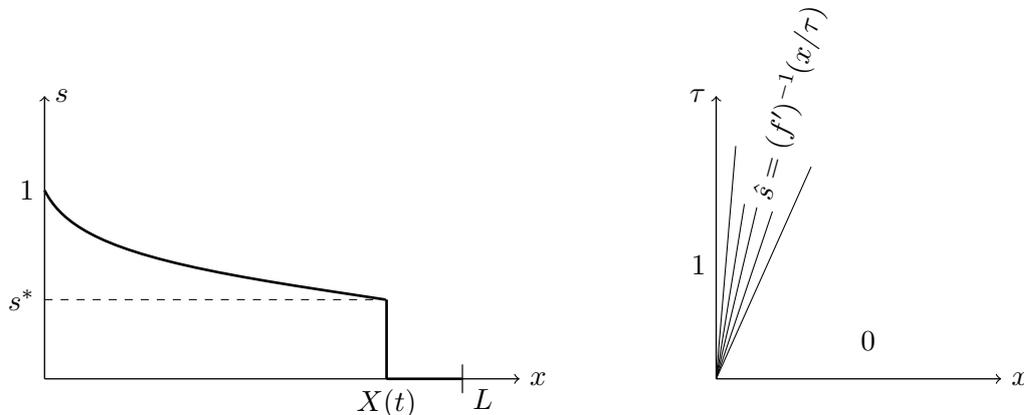
DÉMONSTRATION. À cause de la forme du flux fractionnaire (2.35) décrite plus haut, la solution du problème de Riemann (2.19), (2.22) est la succession d'une détente entre 1 et  $s^*$  et d'un choc entre  $s^*$  et 0. Elle s'écrit

$$\hat{s}(x, \tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < f'(1) = 0, \\ (f')^{-1}(x/\tau) & \text{si } 0 < x < \hat{X}(\tau), \\ 0 & \text{si } x > \hat{X}(\tau), \end{cases}$$

avec la définition  $\hat{X}(\tau) = f'(s^*)\tau = X(t)$ . De (2.18), il suit que

$$\frac{dX}{dt}(t) = f'(s^*) \frac{d\tau}{dt}(t) = \frac{f'(s^*)u(t)}{\phi}. \quad (2.39)$$

Il faut calculer  $u(t)$  en fonction de  $X(t)$ . Dans la formule générale (2.15), l'intégrale au dénominateur est découpée en deux termes selon la structure de la solution (cf. figure 2.9).


 FIGURE 2.9 – Détente-choc dans les plans  $(x, s)$  à gauche et  $(x, \tau)$  à droite.

Cette opération est détaillée ici. L'intégrale vaut

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{dx}{\lambda(s(x, t))} &= \int_0^{\widehat{X}(\tau)} \frac{dx}{\lambda((f')^{-1}(x/\tau))} + \int_{X(t)}^L \frac{dx}{\lambda(0)} \\ &= \tau \int_0^{f(s^*)} \frac{d\xi}{\lambda((f')^{-1}(\xi))} + \frac{L - X(t)}{\lambda(0)}, \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant du changement de variable  $\xi = x/\tau$ . Un deuxième changement de variable  $v = (f')^{-1}(\xi)$ , licite sur l'intervalle considéré, mène à

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{dx}{\lambda(s(x, t))} &= \tau \int_1^{s^*} \frac{f''(v) dv}{\lambda(v)} + \frac{L - X(t)}{\lambda(0)} \\ &= \frac{1}{\lambda(0)} \left\{ \frac{X(t)}{f'(s^*)} \int_1^{s^*} \frac{f''(v) dv}{Mv^2 + (1-v)^2} + L - X(t) \right\}, \end{aligned}$$

où la relation  $\lambda(v) = \lambda(0)[Mv^2 + (1-v)^2]$  est utilisée. En y injectant

$$f''(s) = 2M \frac{(M+1)(2s-3)s^2 + 1}{[Ms^2 + (1-s)^2]^3}, \quad f'(s^*) = \frac{1 + \sqrt{M+1}}{2},$$

l'intégrale devient

$$\int_0^L \frac{dx}{\lambda(s(x, t))} = \frac{1}{\lambda(0)} [L + (\mathfrak{J}(M) - 1)X(t)],$$

avec  $\mathfrak{J}(M)$  introduit en (2.38b). Par conséquent,

$$u(t) = \frac{\kappa \lambda(0) (p_e - p_s)}{L + (\mathfrak{J}(M) - 1)X(t)}. \quad (2.40)$$

En reportant (2.40) dans (2.39), le résultat (2.38a) est établi.  $\square$

Du Théorème 2.2, les conclusions suivantes sont tirées concernant la stabilité de la solution.

**Corollaire 2.2.** Soit  $m_w = m_o = 2$  et soit  $M^\sharp$  l'unique réel positif tel que

$$1 - \mathfrak{J}(M^\sharp) = 0. \quad (2.41)$$

Une approximation décimale à  $10^{-6}$  près de ce nombre est  $M^\sharp \approx 1.653626$ . Alors,

1. Pour  $M \leq M^\sharp$ , la solution du problème (2.12)–(2.14) est stable au sens de la Définition 2.1.
2. Pour  $M > M^\sharp$ , elle est instable au sens de cette même Définition.

DÉMONSTRATION. La position du front  $X(t)$  obéit à une équation différentielle de la forme (2.16), avec  $\Upsilon(t)$  donné par le second membre de (2.38a). La dérivée

$$\Upsilon'(X) = (1 - \mathfrak{J}(M)) \frac{f'(s^*) \kappa \lambda(0) (p_e - p_s)}{\phi[L + (\mathfrak{J}(M) - 1)X]^2}$$

est manifestement du même signe que  $1 - \mathfrak{J}(M)$ .

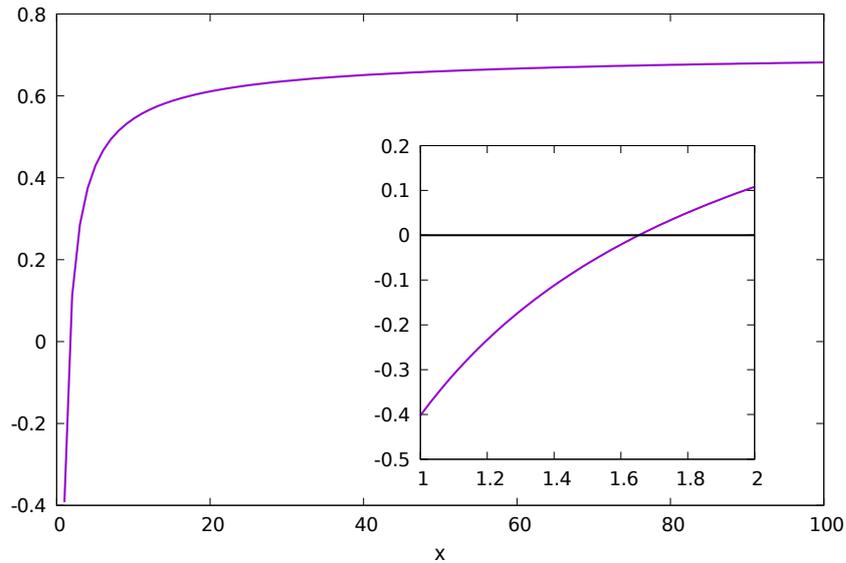


FIGURE 2.10 – Graphe de la fonction  $M \mapsto 1 - \mathfrak{J}(M)$  donnant le signe de  $\Upsilon'$ .

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, la fonction  $M \mapsto 1 - \mathfrak{J}(M)$  peut être étudiée. Son graphe est représentée sur la figure 2.10. Elle est croissante, avec d'abord des valeurs négatives puis des valeurs positives à la traversée de  $M^\sharp$ , dont une approximation décimale est trouvée par dichotomie.  $\square$

Une conjecture naturelle est que pour tout couple  $(m_w, m_o) \in [1, +\infty)^2$  d'exposants de Corey, il existe une constante  $M^\sharp(m_w, m_o) > 0$  telle que, au sens de la Définition 2.1, le système (2.12)–(2.14) soit stable pour  $M \leq M^\sharp(m_w, m_o)$  et instable pour  $M > M^\sharp(m_w, m_o)$ . À part  $M^\sharp(1, 1) = 1$  et  $M^\sharp(2, 2) \approx 1.653626$ , aucune autre valeur n'est connue.

REMARQUE 2.2. En marge des calculs précédents, une manière plus intuitive de comprendre l'origine des instabilités de (2.12)–(2.14) est la suivante. Si la vitesse  $u$ , même

variable en temps, est connue exactement dans l'équation de transport

$$\partial_t s + \partial_x(f(s)u) = 0,$$

alors la saturation  $s$  sera effectivement stable grâce à l'hyperbolicité stricte. Cependant, en vertu des autres équations

$$u = -\kappa\lambda(s)\partial_x p, \quad \partial_x u = 0,$$

toute erreur en  $s$  provoque une erreur en  $p$  et en  $u$ . L'erreur en  $u$  se répercute dès lors dans l'équation de transport, ce qui invalide la vision « découplée » en matière de stabilité.  $\square$

## 2.3 Schéma de référence 5P

Après ce détour en 1-D, le problème modèle (2.4), (2.9), (2.11) en 2-D est étudié. Cette section présente le schéma numérique institué comme référence pour la comparaison avec les nouveaux schémas développés plus tard. Il s'agit d'une méthode de résolution couramment utilisée en simulation de réservoir. Elle combine deux ingrédients, à savoir :

- une discrétisation en temps implicite par rapport à la pression, explicite par rapport à la saturation (IMPES) ;
- une discrétisation en espace qui en langage moderne est qualifiée de volumes finis (VF) avec un flux à deux points (TPFA), mais qui par héritage historique est surnommée *schéma à cinq points* (5P) par les ingénieurs.

### 2.3.1 Discrétisation en temps

Sur l'intervalle temporel de simulation  $[0, T]$ , avec  $T > 0$ , une suite finie croissante de réels positifs est considérée telle que

$$0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T.$$

La durée

$$\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$$

entre deux instants consécutifs est le *pas de temps* courant. À chaque instant  $t^n$ , les champs exacts  $(s(\cdot, t^n), p(\cdot, t^n), \mathbf{u}(\cdot, t^n))$  de la variable spatiale  $\mathbf{x} \in \Omega$  sont approximés par des champs approchés  $(s^n(\cdot), p^n(\cdot), \mathbf{u}^n(\cdot))$ . En oubliant provisoirement les conditions de bord (2.9), le système (2.4) avance en temps par

$$\mathbf{u}^{n+1} = -\kappa\lambda(s^n)\nabla p^{n+1}, \quad (2.42a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = q^{n+1}, \quad (2.42b)$$

$$\phi \frac{s^{n+1} - s^n}{\Delta t^n} + \operatorname{div}(f(s^n)\mathbf{u}^{n+1}) = q_w^{n+1}. \quad (2.42c)$$

La résolution effective de (2.42) se déroule en trois étapes successives, énumérées ci-après en réincorporant les conditions de bord.

1. Connaissant  $s^n$ , résoudre le problème elliptique

$$-\operatorname{div}(\kappa\lambda(s^n)\nabla p^{n+1}) = q^{n+1}, \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.43a)$$

$$p^{n+1} = p^D, \quad \text{sur } \Gamma_D, \quad (2.43b)$$

$$-\kappa\lambda(s^n)\nabla p^{n+1} \cdot \mathbf{n} = u^N, \quad \text{sur } \Gamma_N, \quad (2.43c)$$

pour déterminer  $p^{n+1}$ .

2. Connaissant  $p^{n+1}$ , reconstruire la vitesse

$$\mathbf{u}^{n+1} = -\kappa\lambda(s^n)\nabla p^{n+1}. \quad (2.44)$$

3. Connaissant  $\mathbf{u}^{n+1}$ , résoudre l'équation de transport

$$\phi \frac{s^{n+1} - s^n}{\Delta t^n} + \operatorname{div}(f(s^n)\mathbf{u}^{n+1}) = q_w^{n+1}, \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.45a)$$

$$s^{n+1} = s^E, \quad \text{si } \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} < 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (2.45b)$$

pour obtenir  $s^{n+1}$ .

La semi-discrétisation (2.42) est traditionnellement appelée IMPES [9, 27], pour *Implicit Pressure, Explicit Saturation*. Elle prolonge au niveau semi-discret la philosophie de découplage déjà instaurée au niveau continu par la formulation en flux fractionnaire. Il est important de signaler que, compte tenu de la forme (2.8a) pour la source totale, le terme  $q^{n+1}$  au second membre de (2.42b) ne fait pas intervenir  $s^{n+1}$  et préserve donc le découplage. Quant au terme  $q_w^{n+1}$  dont la forme est donnée par (2.8b), elle contient bien  $s_{X_L}^{n+1}$  et confère au transport (2.42c) un caractère implicite. Toutefois, celui-ci est « local » et peut être pris en compte maille par maille (après discrétisation en espace). Il n'y a donc pas de système global en  $s$  à résoudre.

REMARQUE 2.3. Un inconvénient avec le traitement IMPES est qu'il nécessite une condition de stabilité de type CFL [32], ce qui oblige à travailler avec de « petits » pas de temps [28]. Une telle condition sera explicitée en §2.3.2.  $\square$

REMARQUE 2.4. Il est des situations où les ingénieurs réservoir souhaitent s'affranchir de toute restriction sur le pas de temps. À cette fin, ils sont amenés à implicitiser la saturation dans l'équation de transport, ce qui conduit à

$$\mathbf{u}^{n+1} = -\kappa\lambda(s^n)\nabla p^{n+1}, \quad (2.46a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = q^{n+1}, \quad (2.46b)$$

$$\phi \frac{s^{n+1} - s^n}{\Delta t^n} + \operatorname{div}(f(s^{n+1})\mathbf{u}^{n+1}) = q_w^{n+1}. \quad (2.46c)$$

La semi-discrétisation (2.46) est appelée IMPIMS [45, 84], pour *Implicit Pressure, Implicit Saturation*. Naturellement, le prix à payer pour cette liberté est une plus grande diffusion numérique sur  $s$ .  $\square$

REMARQUE 2.5. Un schéma *Fully Implicit* peut aussi être considéré afin de ne pas trop contraindre le pas de temps. Le système est alors

$$\mathbf{u}^{n+1} = -\kappa\lambda(s^{n+1})\nabla p^{n+1}, \quad (2.47a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = q^{n+1}, \quad (2.47b)$$

$$\phi \frac{s^{n+1} - s^n}{\Delta t^n} + \operatorname{div}(f(s^{n+1})\mathbf{u}^{n+1}) = q_w^{n+1}. \quad (2.47c)$$

Cette semi-discrétisation (2.47) nécessite la résolution d'un système non linéaire où les deux équations sont résolues simultanément, et non plus de façon découplée comme en utilisant le schéma IMPES ou le schéma IMPIMS. Il est néanmoins nécessaire de limiter le pas de temps afin que la méthode de Newton, utilisée pour résoudre le système non linéaire, converge en un nombre d'itérations raisonnables. Cette restriction sur le pas de temps reste tout de même moins contraignante que celle imposée par la condition CFL du schéma IMPES.  $\square$

### 2.3.2 Discrétisation en espace

Le domaine est restreint à être maillé par des rectangles uniformes. À première vue, cela peut paraître « archaïque » à l'heure où d'abondantes méthodes numériques ont fait leur preuve en maillages généraux non-structurés et où IFPEN a beaucoup investi dans certaines d'entre elles [2, 53, 97, 100]. Cela étant, il faut savoir qu'en ingénierie de réservoir, la plupart des simulations tournent sur ce type de maillages car ce sont les mieux adaptés aux expériences envisagées. C'est d'ailleurs seulement en maillage cartésien rectangulaire que la question de l'effet d'orientation a un sens !

#### Maillage et notations

À la place de notations habituellement employées en volumes finis [42], celles à deux indices provenant des différences finies sont adoptées, celles-ci se prêtant mieux à l'analyse d'erreur des chapitres suivants.

Le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est supposé être un rectangle de longueur  $L_x > 0$  et de largeur  $L_y > 0$ . Il est découpé en une grille régulière de  $N_x \times N_y$  cellules rectangulaires, où  $N_x$  et  $N_y$  sont deux entiers positifs. Chaque cellule ou *maille* est donc un rectangle de longueur  $\Delta x$  et de largeur  $\Delta y$ , avec

$$\Delta x = \frac{L_x}{N_x}, \quad \Delta y = \frac{L_y}{N_y}.$$

Elle est identifiée par un couple d'indices  $(i, j) \in \{1, \dots, N_x\} \times \{1, \dots, N_y\}$ . Le centre de la maille  $\mathcal{M}_{i,j}$  est noté  $\mathbf{x}_{i,j} = (x_i, y_j)$ . Sa surface vaut

$$|\mathcal{M}_{i,j}| = \Delta x \Delta y. \quad (2.48)$$

Les relations entre les coordonnées des mailles sont  $x_{i+1} - x_i = \Delta x$  pour tout  $i \in \{1, \dots, N_x - 1\}$  et  $y_{j+1} - y_j = \Delta y$  pour tout  $j \in \{1, \dots, N_y - 1\}$ .

Maintenant (cf. figure 2.11), les abscisses des arêtes verticales sont définies par

$$x_{1/2} = x_1 - \frac{\Delta x}{2}, \quad x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad x_{N_x+1/2} = x_{N_x} + \frac{\Delta x}{2}$$

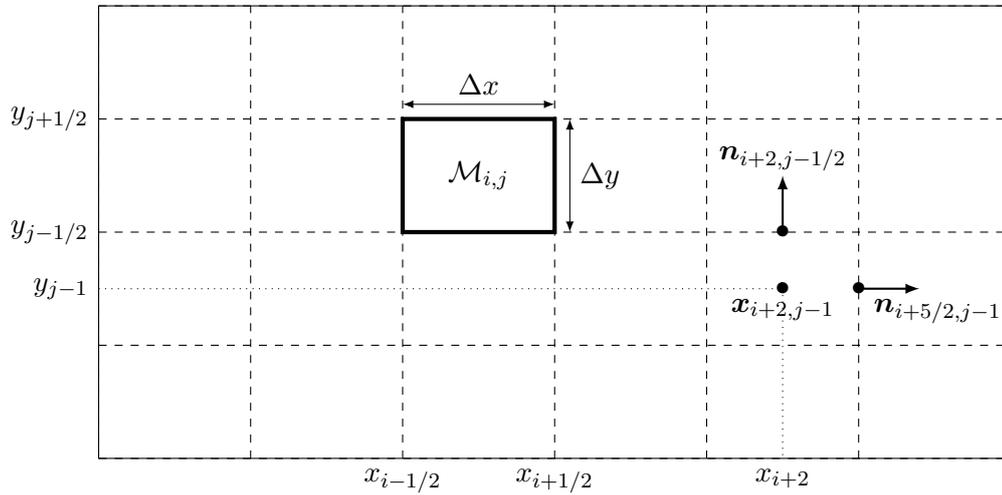
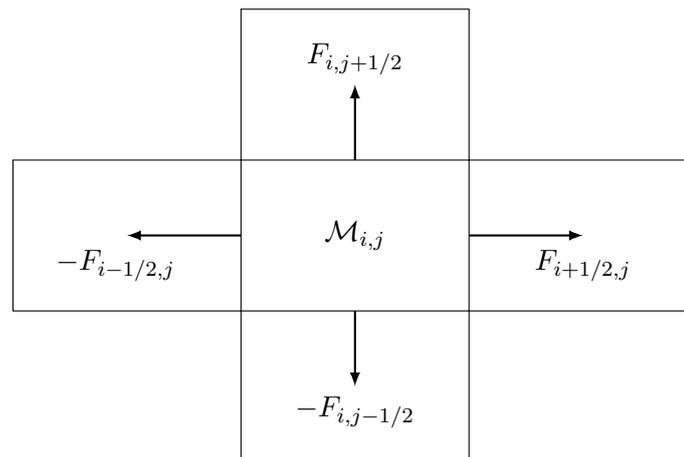


FIGURE 2.11 – Entités définies sur un maillage rectangulaire uniforme.

FIGURE 2.12 – Bilan de flux sur la maille  $\mathcal{M}_{i,j}$  dans le schéma 5P.

pour  $i \in \{1, \dots, N_x - 1\}$ , ainsi que les ordonnées des arêtes horizontales par

$$y_{1/2} = y_1 - \frac{\Delta y}{2}, \quad y_{j+1/2} = \frac{y_j + y_{j+1}}{2}, \quad y_{N_y+1/2} = y_{N_y} + \frac{\Delta y}{2}$$

pour  $j \in \{1, \dots, N_y - 1\}$ . Soient  $\mathbf{x}_{i+1/2,j} = (x_{i+1/2}, y_j)$  les centres des arêtes verticales pour  $i \in \{0, \dots, N_x\}$ . À chaque point  $\mathbf{x}_{i+1/2,j}$ , un vecteur normal unitaire  $\mathbf{n}_{i+1/2,j}$  dirigé horizontalement et orienté de gauche à droite est attaché. De même, soient  $\mathbf{x}_{i,j+1/2} = (x_i, y_{j+1/2})$  les centres des arêtes horizontales pour  $j \in \{0, \dots, N_y\}$ . À chaque point  $\mathbf{x}_{i,j+1/2}$ , un vecteur normal unitaire  $\mathbf{n}_{i,j+1/2}$  dirigé verticalement et orienté de bas en haut<sup>2</sup> est attaché.

Les inconnues  $(s_{i,j}^n, p_{i,j}^n)$  sont localisées au centre  $\mathbf{x}_{i,j}$  de chaque maille  $\mathcal{M}_{i,j}$ , qui peuvent être vues comme une approximation de la moyenne de  $(s^n, p^n)$  sur  $\mathcal{M}_{i,j}$  (en volumes finis) ou une approximation de la valeur ponctuelle de  $(s^n, p^n)$  en  $\mathbf{x}_{i,j}$  (en différences finies).

### Résolution de l'équation en pression

En intégrant (2.43a) sur  $\mathcal{M}_{i,j}$ , il vient

$$\int_{\mathcal{M}_{i,j}} -\operatorname{div}(\kappa\lambda(s^n)\nabla p) \, dx \, dy = \int_{\mathcal{M}_{i,j}} q^{n+1} \, dx \, dy.$$

Par la formule de Green-Ostrogradski, l'intégrale au premier membre est transformée en une intégrale sur le bord de maille  $\partial\mathcal{M}_{i,j}$ . En décomposant ce bord rectangulaire en ses quatre arêtes, cette équation devient

$$\begin{aligned} & - \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \kappa\lambda(s^n)\nabla p \cdot \mathbf{n}_{i+1/2,j}(x_{i+1/2}, y) \, dy + \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \kappa\lambda(s^n)\nabla p \cdot \mathbf{n}_{i-1/2,j}(x_{i-1/2}, y) \, dy \\ & - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \kappa\lambda(s^n)\nabla p \cdot \mathbf{n}_{i,j+1/2}(x, y_{j+1/2}) \, dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \kappa\lambda(s^n)\nabla p \cdot \mathbf{n}_{i,j-1/2}(x, y_{j-1/2}) \, dx \\ & = \int_{\mathcal{M}_{i,j}} q^{n+1} \, dx \, dy. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Il s'agit du bilan de flux vérifié au niveau continu en espace sur chaque maille  $\mathcal{M}_{i,j}$ . L'idée du schéma 5P est de stipuler une version discrète de (2.49) sous la forme

$$F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j} + F_{i,j+1/2} - F_{i,j-1/2} = \Delta x \Delta y q_{i,j}^{n+1}, \quad (2.50)$$

dans laquelle les flux  $F_{i\pm 1/2,j}$  et  $F_{i,j\pm 1/2}$  sont à proposer. Il est intéressant de constater qu'un flux intérieur apparaît deux fois, une fois dans le bilan d'une certaine maille et une autre fois dans celui d'une maille voisine, avec le signe opposé. Cette structure garantit automatiquement la conservativité locale (cf. figure 2.12).

Le flux le plus simple est celui dit « à deux points » (TPFA, pour *two-point flux approximation*). En maillage 2-D cartésien, il est aussi appelé « schéma à cinq points »

---

2. Il convient de faire attention ici à la convention d'orientation :  $\mathbf{n}_{i+1/2,j}$  est une normale sortante de  $\mathcal{M}_{i,j}$ , mais une normale entrante pour  $\mathcal{M}_{i+1,j}$ .

(5P) d'après le nombre de points dans le stencil d'une maille. Il consiste à prendre

$$F_{i+1/2,j} = \kappa \lambda_{i+1/2,j}^n \frac{\Delta y}{\Delta x} (p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}), \quad (2.51a)$$

$$F_{i,j+1/2} = \kappa \lambda_{i,j+1/2}^n \frac{\Delta x}{\Delta y} (p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}), \quad (2.51b)$$

avec deux possibilités concernant la valeur de  $\lambda$  sur les arêtes :

- moyenne harmonique [38, 42]

$$\lambda_{i+1/2,j}^n = \frac{2\lambda(s_{i,j}^n)\lambda(s_{i+1,j}^n)}{\lambda(s_{i,j}^n) + \lambda(s_{i+1,j}^n)}, \quad \lambda_{i,j+1/2}^n = \frac{2\lambda(s_{i,j}^n)\lambda(s_{i,j+1}^n)}{\lambda(s_{i,j}^n) + \lambda(s_{i,j+1}^n)}; \quad (2.52)$$

- décentrement simple amont [46, 89]

$$\lambda_{i+1/2,j}^n = \begin{cases} \lambda(s_{i,j}^n) & \text{si } p_{i,j}^n \geq p_{i+1,j}^n, \\ \lambda(s_{i+1,j}^n) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.53a)$$

$$\lambda_{i,j+1/2}^n = \begin{cases} \lambda(s_{i,j}^n) & \text{si } p_{i,j}^n \geq p_{i,j+1}^n, \\ \lambda(s_{i,j+1}^n) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.53b)$$

REMARQUE 2.6. Les flux numériques (2.51) sont *consistants* avec leurs homologues continus dans le bilan exact (2.49), du fait de l'orthogonalité entre l'arête et la droite reliant les centres de deux mailles voisines. En maillage quelconque, ceci est en général faux.  $\square$

Les formules (2.51) sont valides pour les arêtes intérieures. Lorsqu'une maille touche un bord du domaine, elles doivent être modifiées pour prendre en compte les conditions aux limites (2.9). Par simplicité, chaque arête de bord est supposée incluse entièrement soit dans  $\Gamma_D$  soit dans  $\Gamma_N$ . Dès lors, les flux horizontaux au bord gauche sont

$$F_{1/2,j} = \begin{cases} \kappa \lambda_{1/2,j}^n \frac{\Delta y}{\Delta x/2} (p_{1,j}^{n+1} - p_{1/2,j}^D) & \text{si } |\mathcal{M}_{1,j} \cap \Gamma_D| \neq 0, \\ u_{1/2,j}^N \Delta y & \text{si } |\mathcal{M}_{1,j} \cap \Gamma_N| \neq 0, \end{cases} \quad (2.54)$$

où  $\lambda_{1/2,j}^n$  peut être pris égal à : (1)  $\lambda(s_{1,j}^n)$  tout court ; (2) la moyenne harmonique entre  $\lambda(s_{1,j}^n)$  et  $\lambda(1)$  ; (3) le décentrement simple amont entre  $\lambda(s_{1,j}^n)$  et  $\lambda(1)$ . Les flux horizontaux au bord droit  $F_{N_x+1/2,j}$  s'écrivent de manière analogue. Les flux verticaux au bord inférieur sont

$$F_{i,1/2} = \begin{cases} \kappa \lambda_{i,1/2}^n \frac{\Delta x}{\Delta y/2} (p_{i,1}^{n+1} - p_{i,1/2}^D), & \text{si } |\mathcal{M}_{i,1} \cap \Gamma_D| \neq 0, \\ u_{i,1/2}^N \Delta x & \text{si } |\mathcal{M}_{i,1} \cap \Gamma_N| \neq 0, \end{cases} \quad (2.55)$$

où  $\lambda_{i,1/2}^n$  peut être pris égal à : (1)  $\lambda(s_{i,1}^n)$  tout court ; (2) la moyenne harmonique entre  $\lambda(s_{i,1}^n)$  et  $\lambda(1)$  ; (3) le décentrement simple amont entre  $\lambda(s_{i,1}^n)$  et  $\lambda(1)$ . Les flux verticaux au bord supérieur  $F_{i,N_y+1/2}$  s'écrivent de manière analogue.

Soit  $\mathcal{N} = N_x N_y$  le nombre de cellules du maillage. En assemblant tous les bilans discrets (2.50) avec les flux (2.51), (2.54), (2.55), un système linéaire est obtenu, de la forme

$$\mathbf{A}^n \mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{b}^{n+1}, \quad (2.56)$$

dans lequel  $\mathbf{A}^n$  est une matrice  $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$  symétrique, définie positive tant que  $|\Gamma_D| > 0$ ,  $\mathbf{p}^{n+1} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$  est un vecteur contenant les pressions des mailles, et  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$  est un vecteur regroupant les valeurs des conditions aux limites ainsi que les termes sources de puits. La résolution de ce système linéaire se fait par un solveur disponible « sur étagère ».

### Résolution de l'équation en saturation

La pression  $p^{n+1}$  ayant été calculée après résolution de (2.56), la vitesse  $\mathbf{u}$  n'est en fait pas à reconstruire complètement comme cela était annoncé — par facilité de présentation — en (2.44). En pratique, il suffit d'évaluer les flux  $F$  qui apparaissent dans (2.50) car ce sont eux qui interviennent véritablement dans l'étape suivante.

En intégrant (2.42c) sur  $\mathcal{M}_{i,j}$ , il vient

$$\int_{\mathcal{M}_{i,j}} \phi \frac{s^{n+1} - s^n}{\Delta t^n} dx dy + \int_{\mathcal{M}_{i,j}} \operatorname{div}(f(s^n)\mathbf{u}^{n+1}) dx dy = \int_{\mathcal{M}_{i,j}} q_w^{n+1} dx dy.$$

Par la formule de Green-Ostrogadski, la deuxième intégrale est transformée en une intégrale sur le contour  $\partial\mathcal{M}_{i,j}$ . En décomposant ce bord rectangulaire en ses quatre arêtes, cette équation devient

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}_{i,j}} \phi \frac{s^{n+1} - s^n}{\Delta t^n} dx dy &+ \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} f(s^n)\mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{i+1/2,j}(x_{i+1/2}, y) dy \\ &- \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} f(s^n)\mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{i-1/2,j}(x_{i-1/2}, y) dy \\ &+ \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(s^n)\mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{i,j+1/2}(x, y_{j+1/2}) dx \\ &- \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(s^n)\mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{i,j-1/2}(x, y_{j+1/2}) dx \\ &= \int_{\mathcal{M}_{i,j}} q_w^{n+1} dx dy. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Cette relation au niveau spatialement continu suggère la mise à jour discrète

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \phi \frac{s_{i,j}^{n+1} - s_{i,j}^n}{\Delta t^n} &+ (f(s)F)_{i+1/2,j} - (f(s)F)_{i-1/2,j} \\ &+ (f(s)F)_{i,j+1/2} - (f(s)F)_{i,j-1/2} = \Delta x \Delta y q_w^{n+1}, \end{aligned} \quad (2.58)$$

où

$$(f(s)F)_{i+1/2,j} = f(s_{i,j}^n) [F_{i+1/2,j}]^+ + f(s_{i+1,j}^n) [F_{i+1/2,j}]^-, \quad (2.59a)$$

$$(f(s)F)_{i,j+1/2} = f(s_{i,j}^n) [F_{i,j+1/2}]^+ + f(s_{i,j+1}^n) [F_{i,j+1/2}]^-, \quad (2.59b)$$

expriment le décentrement amont de  $f(s)$  selon l'écoulement indiqué par le signe de  $F$ , avec les notations

$$[F]^+ = \max(0, F), \quad [F]^- = \min(0, F)$$

pour la partie positive et la partie négative d'un nombre réel  $F \in \mathbb{R}$ .

Les formules (2.59) sont valides pour les arêtes intérieures. Elles doivent être amendées à l'approche des bords pour prendre en compte la condition d'entrée éventuelle de l'eau (2.9c). Les flux d'eau gauche et inférieur s'écrivent ainsi

$$(f(s)F)_{1/2,j} = f(s_{1/2,j}^E) [F_{1/2,j}]^+ + f(s_{1,j}^n) [F_{1/2,j}]^-, \quad (2.60a)$$

$$(f(s)F)_{i,1/2} = f(s_{i,1/2}^E) [F_{i,1/2}]^+ + f(s_{i,1}^n) [F_{i,1/2}]^-. \quad (2.60b)$$

Les formules pour les flux d'eau droit  $(f(s)F)_{N_x+1/2,j}$  et supérieur  $(f(s)F)_{i,N_y+1/2}$  sont analogues.

L'actualisation (2.58) de la saturation demande qu'un pas de temps  $\Delta t^n$  soit convenablement choisi à partir des flux explicites (2.59)–(2.60), de sorte à garantir la stabilité du schéma. Pour cela, une condition de type CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) qui ne soit pas trop « brutale » est établie, c'est-à-dire qui ne mène pas à des valeurs exagérément petites pour  $\Delta t^n$ . Pour tout couple  $(s_L, s_R) \in [0, 1]^2$ , la notation suivante est employée

$$\sigma(s_L, s_R) = \begin{cases} \frac{f(s_R) - f(s_L)}{s_R - s_L} & \text{si } s_L \neq s_R, \\ f'(s_L) & \text{si } s_L = s_R. \end{cases}$$

Sur les arêtes intérieures, la définition suivante est adoptée

$$\sigma_{i+1/2,j} = \sigma(s_{i,j}^n, s_{i+1,j}^n), \quad \sigma_{i,j+1/2} = \sigma(s_{i,j}^n, s_{i,j+1}^n). \quad (2.61a)$$

Sur les arêtes de bord, la définition suivante est adoptée

$$\sigma_{1/2,j} = \sigma(s_{1/2,j}^E, s_{1,j}^n), \quad \sigma_{N_x+1/2,j} = \sigma(s_{N_x,j}^n, s_{N_x+1/2,j}^E), \quad (2.61b)$$

$$\sigma_{i,1/2} = \sigma(s_{i,1/2}^E, s_{i,1}^n), \quad \sigma_{i,N_y+1/2} = \sigma(s_{i,N_y}^n, s_{i,N_y+1/2}^E). \quad (2.61c)$$

Les  $\sigma$  définis par (2.61) sont tous positifs car  $f$  est une fonction croissante. En chaque maille  $\mathcal{M}_{i,j}$ , la quantité

$$\begin{aligned} \rangle \sigma F \langle_{i,j} &= \sigma_{i-1/2,j} [F_{i-1/2,j}]^+ - \sigma_{i+1/2,j} [F_{i+1/2,j}]^- \\ &\quad + \sigma_{i,j-1/2} [F_{i,j-1/2}]^+ - \sigma_{i,j+1/2} [F_{i,j+1/2}]^- \end{aligned} \quad (2.62)$$

est positive, homogène au produit d'une vitesse et d'une longueur et mesure une « vitesse des flux » qui entrent dans cette maille, d'où la notation  $\rangle \cdot \langle$ .

**Proposition 2.1.** *Sous la condition*

$$\frac{\Delta t^n}{\phi \Delta x \Delta y} \max_{\substack{1 \leq i \leq N_x \\ 1 \leq j \leq N_y}} \rangle \sigma F \langle_{i,j} \leq 1 \quad (2.63)$$

et en l'absence de termes sources ( $q^{n+1} = q_w^{n+1} = 0$ ), le schéma (2.58)–(2.60) satisfait le principe du maximum suivant :

- Pour les mailles intérieures  $(i, j) \in \{2, \dots, N_x - 1\} \times \{2, \dots, N_y - 1\}$ , la valeur  $s_{i,j}^{n+1}$  est une combinaison convexe de  $s_{i,j}^n$  et des quatre voisins  $s_{i\pm 1,j}^n, s_{i,j\pm 1}^n$ .

- Pour les mailles de bord  $i \in \{1, N_x\}$  ou  $j \in \{1, N_y\}$ , la valeur  $s_{i,j}^{n+1}$  est une combinaison convexe de  $s_{i,j}^n$ , des trois ou deux voisins  $s_{i\pm 1,j}^n$ ,  $s_{i,j\pm 1}^n$  (s'ils sont encore définis) et des valeurs d'entrée  $s^E$  (sur les arêtes concernées).

DÉMONSTRATION. La preuve est calquée sur celle de Braconnier et al. [14]. Les détails en sont entièrement donnés pour les mailles intérieures. Celles de bord n'entraînent pas de difficulté particulière, à part une plus grande lourdeur d'écriture.

L'équation (2.58) est multipliée par  $\Delta t^n / \phi \Delta x \Delta y$  et tous les termes sont passés au second membre, pour ne garder que  $s_{i,j}^{n+1}$  au premier membre. Comme  $q_w^{n+1} = 0$ , il en résulte

$$s_{i,j}^{n+1} = s_{i,j}^n - \frac{\Delta t^n}{\phi \Delta x \Delta y} \left\{ \begin{aligned} & f(s_{i,j}^n)[F_{i+1/2,j}]^+ + f(s_{i+1,j}^n)[F_{i+1/2,j}]^- \\ & - f(s_{i-1,j}^n)[F_{i-1/2,j}]^+ - f(s_{i,j}^n)[F_{i-1/2,j}]^- \\ & + f(s_{i,j}^n)[F_{i,j+1/2}]^+ + f(s_{i,j+1}^n)[F_{i,j+1/2}]^- \\ & - f(s_{i,j-1}^n)[F_{i,j-1/2}]^+ - f(s_{i,j}^n)[F_{i,j-1/2}]^- \end{aligned} \right\}. \quad (2.64)$$

D'autre part, l'équation en pression (2.50) est multipliée par  $f(s_{i,j}^n) \Delta t^n / \phi \Delta x \Delta y$  et chaque flux  $F$  qui y apparaît est décomposé en la somme de sa partie positive et sa partie négative. Comme  $q^{n+1} = 0$ , il en résulte

$$0 = \frac{\Delta t^n}{\phi \Delta x \Delta y} \left\{ \begin{aligned} & f(s_{i,j}^n)[F_{i+1/2,j}]^+ + f(s_{i,j}^n)[F_{i+1/2,j}]^- \\ & - f(s_{i,j}^n)[F_{i-1/2,j}]^+ - f(s_{i,j}^n)[F_{i-1/2,j}]^- \\ & + f(s_{i,j}^n)[F_{i,j+1/2}]^+ + f(s_{i,j}^n)[F_{i,j+1/2}]^- \\ & - f(s_{i,j}^n)[F_{i,j-1/2}]^+ - f(s_{i,j}^n)[F_{i,j-1/2}]^- \end{aligned} \right\}. \quad (2.65)$$

Par addition membre à membre de (2.64) et (2.65), plusieurs termes s'annulent entre eux. Après simplification,

$$s_{i,j}^{n+1} = s_{i,j}^n - \frac{\Delta t^n}{\phi \Delta x \Delta y} \left\{ \begin{aligned} & (f(s_{i+1,j}^n) - f(s_{i,j}^n)) [F_{i+1/2,j}]^- \\ & - (f(s_{i-1,j}^n) - f(s_{i,j}^n)) [F_{i-1/2,j}]^+ \\ & + (f(s_{i,j}^n) - f(s_{i,j}^n)) [F_{i,j+1/2}]^- \\ & - (f(s_{i,j-1}^n) - f(s_{i,j}^n)) [F_{i,j-1/2}]^+ \end{aligned} \right\}. \quad (2.66)$$

à l'aide des quantités (2.61), l'équation (2.66) est transformée en

$$s_{i,j}^{n+1} = s_{i,j}^n - \frac{\Delta t^n}{\phi \Delta x \Delta y} \left\{ \begin{aligned} & \sigma_{i+1/2,j}^n (s_{i+1,j}^n - s_{i,j}^n) [F_{i+1/2,j}]^- - \sigma_{i-1/2,j}^n (s_{i-1,j}^n - s_{i,j}^n) [F_{i-1/2,j}]^+ \\ & + \sigma_{i,j+1/2}^n (s_{i,j}^n - s_{i,j}^n) [F_{i,j+1/2}]^- - \sigma_{i,j-1/2}^n (s_{i,j-1}^n - s_{i,j}^n) [F_{i,j-1/2}]^+ \end{aligned} \right\},$$

soit encore

$$\begin{aligned}
 s_{i,j}^{n+1} &= \left(1 - \frac{\Delta t^n}{\phi \Delta x \Delta y}\right) \sigma F \langle i,j \rangle s_{i,j}^n \\
 &+ \frac{\Delta t^n}{\phi \Delta x \Delta y} \sigma_{i-1/2,j}^n [F_{i-1/2,j}]^+ s_{i-1,j}^n - \frac{\Delta t^n}{\phi \Delta x \Delta y} \sigma_{i+1/2,j}^n [F_{i+1/2,j}]^- s_{i+1,j}^n \\
 &+ \frac{\Delta t^n}{\phi \Delta x \Delta y} \sigma_{i,j-1/2}^n [F_{i,j-1/2}]^+ s_{i,j-1}^n - \frac{\Delta t^n}{\phi \Delta x \Delta y} \sigma_{i,j+1/2}^n [F_{i,j+1/2}]^- s_{i,j+1}^n \quad (2.67)
 \end{aligned}$$

avec la notation (2.62). L'expression (2.67) s'interprète comme une moyenne de  $s_{i,j}^n$  et des  $s_{i\pm 1,j\pm 1}^n$  car la somme des coefficients vaut exactement 1. De plus, les coefficients des voisins  $s_{i\pm 1,j\pm 1}^n$  sont tous positifs. L'hypothèse (2.63) assure que le coefficient de  $s_{i,j}^n$  est aussi positif, ce qui dans ces conditions donne lieu à une combinaison convexe.  $\square$

En présence de termes sources de type (2.8), chaque masse de Dirac est discrétisée par une constante égale à  $1/\Delta x \Delta y$  dans la maille où elle est localisée, de sorte que son intégrale soit égale à 1. Cela implique qu'il faut reporter dans les seconds membres de (2.50), (2.58) les expressions

$$\Delta x \Delta y q_{i,j}^{n+1} = Q(t^{n+1}) \delta_{i(\mathbf{0}),j(\mathbf{0})}(i,j) - \sum_{L=1}^P Q_L(t^{n+1}) \delta_{i(\mathbf{X}_L),j(\mathbf{X}_L)}(i,j), \quad (2.68a)$$

$$\Delta x \Delta y q_{w;i,j}^{n+1} = Q(t^{n+1}) \delta_{i(\mathbf{0}),j(\mathbf{0})}(i,j) - \sum_{L=1}^P Q_L(t^{n+1}) f(s_{i,j}^{n+1}) \delta_{i(\mathbf{X}_L),j(\mathbf{X}_L)}(i,j), \quad (2.68b)$$

où  $(i(\mathbf{X}), j(\mathbf{X}))$  révèlent les indices de la maille contenant la position  $\mathbf{X}$  et où

$$\delta_{i_0,j_0}(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) = (i_0,j_0), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est le symbole de Kronecker. Lorsque la maille  $\mathcal{M}_{i,j}$  est « perforée » par un puits producteur en  $\mathbf{X}_L$ , le terme en  $f(s_{i,j}^{n+1})$  qui émerge au second membre de (2.58) doit être repassé au premier membre, créant ainsi une équation non-linéaire scalaire en l'inconnue  $s_{i,j}^{n+1}$ . La mise à jour de la saturation comporte donc un degré d'implicite, qui n'est toutefois pas gênant dans la mesure où il ne couple pas les mailles.

## 2.4 Cas tests de référence

Peu cher et facile à implémenter, le schéma 5P décrit en §2.3 tient sa place dans les logiciels industriels en tant qu'option de base. Sa performance en terme de précision laisse cependant à désirer dans certaines situations. Trois configurations caractéristiques sont identifiées ici, pour lesquelles son comportement est jugé inacceptable. Ces cas tests sont qualifiés de « référence » parce qu'ils seront repris systématiquement, à chaque fois qu'un nouveau schéma sera étudié.

### 2.4.1 Cas radial

L'idée est d'observer le défaut d'isotropie des schémas sur un problème à symétrie radiale dont la solution est connue analytiquement. Cette configuration a été considérée par Eymard et al. [43]. Ci-dessous les détails nécessaires à sa mise en place sont fournis.

### Solution exacte en domaine infini

Soit d'abord le système d'équations

$$\mathbf{u} = -\kappa\lambda(s)\nabla p, \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, T), \quad (2.69a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = Q\delta_{\mathbf{0}}, \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, T), \quad (2.69b)$$

$$\phi \partial_t s + \operatorname{div}(f(s)\mathbf{u}) = Q\delta_{\mathbf{0}}, \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, T), \quad (2.69c)$$

muni de la condition à l'infini

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} \|\mathbf{u}\| = 0, \quad (2.70)$$

et de la condition initiale

$$s(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^2. \quad (2.71)$$

Il s'agit de l'extension à tout le plan  $\Omega = \mathbb{R}^2$  du problème modèle (2.4), ce qui explique le remplacement des conditions aux limites (2.9) par la condition de décroissance (2.70). Au niveau des termes sources, il est à noter que le puits injecteur en  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$  a un débit imposé  $Q > 0$  constant en temps, et qu'il n'y a aucun puits producteur. Pour les exposants de Corey, il est supposé

$$m_w = m_o = 2. \quad (2.72)$$

il conviendra de prendre aussi

$$\kappa_{r,w}^\# = \kappa_{r,o}^\# = 1, \quad (2.73)$$

ce qui par (2.7) entraîne

$$M = \frac{\mu_o}{\mu_w}.$$

La viscosité de l'eau est fixée à  $\mu_w = 1$  cP et celle de l'huile sera variable  $\mu_o = M$ , considérés comme un paramètre libre. Bien que plusieurs autres constantes soient prises égales à 1 dans les simulations, à savoir

$$\phi = \kappa = Q = 1 \text{ SI},$$

elles figureront expressément dans les formules afin de mieux percevoir leur influence sur la solution.

Soit

$$r = \|\mathbf{x}\|$$

la distance entre l'origine  $\mathbf{0}$  et le point courant  $\mathbf{x}$  (cf. figure 2.13). Pour tout  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , le vecteur  $\mathbf{e}_r$  est désigné par

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \mathbf{x}$$

vecteur unitaire dans la direction radiale. Il est rappelé que

$$s^* = \frac{1}{\sqrt{M+1}}$$

est le point de Welge introduit en (2.36) et que sur l'intervalle  $[s^*, 1]$  la dérivée du flux fractionnaire (2.35) admet une réciproque, notée  $(f')^{-1}$ .

**Théorème 2.3.** *Pour  $m_w = m_o = 2$ , le problème (2.69)–(2.71) admet une solution unique à une constante additive près en pression. Elle est radiale et est donnée par les formules suivantes :*

- Pour la vitesse,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{Q}{2\pi r} \mathbf{e}_r. \quad (2.74)$$

- Pour la saturation,

$$s(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} (f')^{-1}\left(\frac{\Phi\pi r^2}{Qt}\right) & \text{si } 0 < r^2 < \frac{f'(s^*)Qt}{\Phi\pi} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.75)$$

- Pour la pression,

$$p(\mathbf{x}, t) = p_0 - \frac{Q}{2\pi\kappa} \int_{r_0/r}^1 \frac{d\rho}{\lambda(s(\rho\mathbf{x}, t))\rho}, \quad (2.76)$$

ce qui correspond à la normalisation  $p = p_0$  sur un cercle de rayon  $r_0 > 0$ .

DÉMONSTRATION. La solution  $\mathbf{u}$  du problème (2.69b), (2.70) est classiquement connue [34, §II.1] comme étant (2.74). En combinant (2.69b) et (2.69c) pour  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , il vient

$$\Phi \partial_t s + \mathbf{u} \cdot \nabla f(s) = 0, \quad (2.77)$$

ce qui signifie que  $s$  est transportée par  $\mathbf{u}$ . Étant initialement radiale et subissant une vitesse de transport radiale,  $s$  doit rester radiale. En allant en coordonnées polaires, l'équation (2.77) peut se réécrire sous la forme

$$\Phi \partial_t s + \frac{Q}{2\pi r} \partial_r f(s) = 0 \quad (2.78)$$

pour  $r > 0$ . Cette équation est à compléter par  $s(r, 0) = 0$  et la condition d'injection

$$s(r = 0, t) = 1, \quad (2.79)$$

qui résulte également de la combinaison de (2.69b) et (2.69c). En effet, en développant la divergence,

$$\Phi \partial_t s + \mathbf{u} \cdot \nabla f(s) + f(s) Q \delta_{\mathbf{0}} = Q \delta_{\mathbf{0}}.$$

Par « passage à la limite » depuis un point  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  vers  $\mathbf{0}$ , il vient que  $f(s(\mathbf{0}, t)) = 1$ , ce qui au vu de la forme de  $f$  implique  $s(\mathbf{0}, t) = 1$ .

Le changement de variable spatiale

$$dR = \frac{2\pi r \Phi}{Q} dr, \quad \text{soit } R = \frac{\Phi\pi r^2}{Q},$$

ramène à la loi de conservation scalaire

$$\partial_t s + \partial_R f(s) = 0 \quad (2.80)$$

sur la demi-droite  $R > 0$ , complétée par

$$s(R, t = 0) = 0, \quad (2.81a)$$

$$s(R = 0, t) = 1. \quad (2.81b)$$

Afin de résoudre (2.80)–(2.81), l'équation (2.80) est étendue à la droite  $\mathbb{R}$  entière et le problème de Riemann associé est considéré avec la donnée initiale

$$s(R, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } R < 0, \\ 0 & \text{si } R > 0. \end{cases}$$

La solution de ce problème de Riemann est composée d'une détente de  $s = 1$  à  $s = s^*$ , suivie immédiatement par un choc avec  $s = 0$ , comme exprimé par (2.75).

En multipliant scalairement (2.69a) par  $\mathbf{e}_r$  et en utilisant (2.74), il en résulte

$$\partial_r p = -\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_r}{\kappa \lambda(s)} = -\frac{Q}{2\pi \kappa \lambda(s) r}.$$

En intégrant cette équation différentielle de  $r_0$  à  $r$  et en spécifiant  $p = p_0$  en  $r = r_0$ , l'équation (2.76) est trouvée. Il est à noter qu'il n'est pas possible de prendre  $r_0 = 0$ , sous peine de faire diverger l'intégrale. Cela signifie que la pression  $p$  est infinie en  $\mathbf{0}$ , comme l'est d'ailleurs la vitesse  $\mathbf{u}$ .  $\square$

### Implémentation en domaine borné

L'objectif est de simuler le problème (2.69)–(2.71) sur le domaine carré borné

$$\Omega = (-L/2, L/2)^2.$$

L'astuce consiste à imposer sur le bord  $\partial\Omega$  une condition de flux en  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  égale à la valeur obtenue avec la vitesse exacte (2.74). Plus précisément, il convient de prescrire

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u^N = \frac{Q}{2\pi r} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}, \quad (2.82)$$

les équations intérieures et la condition initiale demeurant identiques au cas infini.

La principale difficulté est que, comme il n'y a pas de condition de Dirichlet en pression, la matrice  $\mathbf{A}^n$  du système linéaire (2.56) est singulière. Par conséquent, il faut s'assurer de la relation de compatibilité (2.10), qui au niveau discret devient

$$\mathbf{1}^T \mathbf{b}^{n+1} = 0, \quad (2.83)$$

avec  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$  puisque  $\mathbf{1}^T \mathbf{A}^n = \mathbf{0}^T$ . Pour garantir (2.83), il faut évaluer le second membre  $\mathbf{b}^{n+1}$  exactement. Au lieu d'approcher les flux de Neumann par  $u_{1/2,j}^N \Delta y$  comme en (2.54) ou  $u_{i,1/2}^N \Delta x$  comme en (2.55), il est impératif de calculer l'intégrale de (2.82) sur les arêtes concernées. Cette opération est facilitée par la propriété géométrique suivante.

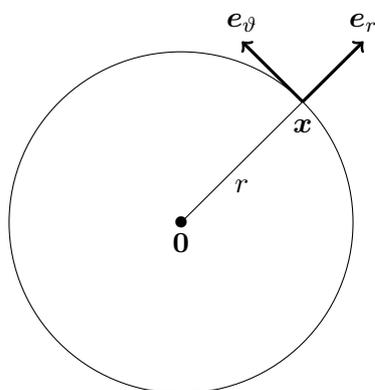


FIGURE 2.13 – Coordonnées polaires pour le problème radial.

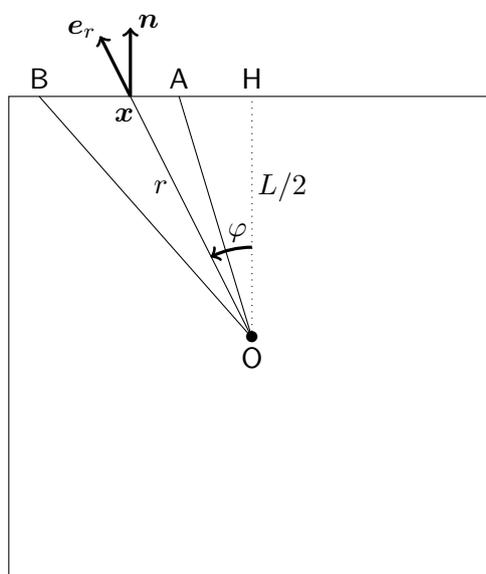


FIGURE 2.14 – Flux de Neumann pour le problème radial.

**Proposition 2.2.** *Soient A et B deux points distincts du plan tels que la droite (AB) ne contienne pas l'origine  $O = \mathbf{0}$ . Soit  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire telle que  $(\overrightarrow{AB}, \mathbf{n}) = -\pi/2$ . Alors,*

$$\int_{[AB]} \frac{1}{r} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n} = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}), \quad (2.84)$$

où les angles sont orientés et mesurés en radians.

DÉMONSTRATION. Pour fixer les idées, la preuve est faite dans le cas où le segment [AB] se trouve sur le bord supérieur  $y = L/2$  du domaine (cf. figure 2.14). Le lecteur se convaincra que la propriété est en fait vraie en position générale.

Soit H le pied de la perpendiculaire issue de O à la droite (AB). Un point courant du segment est appelé  $\mathbf{x} \in [AB]$  et  $\varphi$  désigne l'angle orienté  $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{Ox})$ . Cet angle est bien défini puisque  $O \notin (AB)$  par hypothèse. Le point  $\mathbf{x}$  peut en outre être repéré par son abscisse curviligne  $\xi$ , mesurée à partir de H et croissante dans le sens de A vers B. Dans ces conditions,

$$\int_{[AB]} \frac{1}{r} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n} = \int_{\xi(A)}^{\xi(B)} \frac{\cos \varphi}{r} d\xi.$$

Dans le second membre,  $\varphi$  et  $r$  doivent être vus comme des fonctions de  $\xi$ . Comme  $L/2 = r \cos \varphi$ , il vient

$$r = \frac{L/2}{\cos \varphi}.$$

D'autre part, puisque  $\xi = (L/2) \tan \varphi$ , il vient aussi

$$d\xi = \frac{L/2}{\cos^2 \varphi} d\varphi.$$

Il en découle que

$$\int_{\xi(A)}^{\xi(B)} \frac{\cos \varphi}{r} d\xi = \int_{\varphi(A)}^{\varphi(B)} \frac{\cos^2 \varphi}{L/2} \frac{L/2}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \int_{\varphi(A)}^{\varphi(B)} d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A),$$

ce qui est le résultat désiré.  $\square$

Une fois la condition (2.83) certifiée, une normalisation de la pression est réalisée. Si  $(i(\mathbf{0}), j(\mathbf{0}))$  désigne la maille qui contient le puits injecteur  $Q\delta_{\mathbf{0}}$ , dans (2.56) le bilan

$$F_{i(\mathbf{0})+1/2, j(\mathbf{0})} - F_{i(\mathbf{0})-1/2, j(\mathbf{0})} + F_{i(\mathbf{0}), j(\mathbf{0})+1/2} - F_{i(\mathbf{0}), j(\mathbf{0})-1/2} = Q \quad (2.85)$$

peut être remplacé par

$$F_{i(\mathbf{0})+1/2, j(\mathbf{0})} - F_{i(\mathbf{0})-1/2, j(\mathbf{0})} + F_{i(\mathbf{0}), j(\mathbf{0})+1/2} - F_{i(\mathbf{0}), j(\mathbf{0})-1/2} = Q + \alpha(p_{\bullet} - p_{i(\mathbf{0}), j(\mathbf{0})}). \quad (2.86)$$

où  $p_{\bullet} \in \mathbb{R}$  est une valeur arbitrairement choisie pour la pression dans la maille  $\mathcal{M}_{i(\mathbf{0}), j(\mathbf{0})}$  et  $\alpha > 0$  une constante arbitraire homogène à  $\kappa\lambda(s)$ . La modification (2.86) affecte peu la structure de la matrice  $\mathbf{A}$  et la rend inversible en chargeant positivement un seul élément de la diagonale. Ainsi, au niveau discret, la pression est finie dans toutes les mailles.

Enfin, il est souhaitable de s'arranger pour que la source soit située exactement au milieu de la maille  $\mathcal{M}_{i(\mathbf{0}), j(\mathbf{0})}$ , et que celle-ci soit exactement au milieu de la grille. Cela oblige à prendre les entiers  $N_x$  et  $N_y$  impairs.

### Résultats obtenus par le schéma 5P

Les quantités suivantes sont données

$$L = 1 \text{ m}, \quad N_x = N_y = 101, \quad \Delta x = \Delta y = \frac{1}{101} \text{ m}.$$

Autrement dit, chaque maille est un carré. Sur cette grille, deux expériences sont réalisées correspondant à

$$M = 0.8 \quad \text{et} \quad 200.$$

La figure 2.15 montre deux instantanées au temps  $T = 0.05$  s de la saturation  $s$ , calculée avec le schéma 5P. Elle illustre l'influence du rapport de mobilités  $M$  sur la qualité de la solution obtenue. Pour  $M = 0.8$  (à gauche), les fronts sont bien « ronds », tandis que pour  $M = 200$  (à droite), les lignes isovaleurs se dégradent en losanges, avec des « pointes » étirées dans les directions d'axes (horizontale et verticale) du maillage.

Ce problème est communément évoqué en parlant d'« effet d'orientation du maillage », mais il convient de méditer quelque peu sur cette notion. Tout schéma, aussi sophistiqué soit-il, comporte des erreurs et notamment celles dues à l'orientation du maillage : après tout, il n'est guère raisonnable d'exiger une isotropie parfaite au niveau numérique. Ce qui peut légitimement être espéré, par contre, c'est que l'erreur d'orientation reste « contrôlée », si possible peu visible. Ce qui s'est probablement produit dans le cas spectaculaire du rapport de mobilités  $M = 200$ , c'est que celui-ci a sans doute dépassé le seuil critique de stabilité (l'équivalent en 2-D de ce qui est calculé en 1-D à la section §2.2) et que l'instabilité inhérente au système a progressivement amplifié l'erreur due à l'orientation.

Pour observer de plus près l'erreur sur la position des fronts pour  $M = 200$ , sur la figure 2.16 sont affichées des coupes 1-D des variables  $s$  et  $p$  selon trois directions : horizontale (en bleu), verticale (en jaune) et première diagonale (en vert). En rouge est représenté le profil de la solution exacte, qui est identique quelle que soit la direction de coupe.

Le choc de la saturation est bien visible à  $r = 0.379$  m sur la solution exacte tandis qu'il est diffusé avec la solution numérique. La détente (partie avant le choc) est relativement bien approchée par la solution numérique. L'écart est plus conséquent au niveau du choc, particulièrement sur l'axe médian du fait de la déformation de la solution en carreau : le choc se situe à un rayon supérieur à celui de la solution exacte. À l'inverse, le choc et l'après choc sont plutôt bien approchés pour la pression. La partie détente est légèrement plus élevée numériquement mais la forme est similaire.

Le plus surprenant — et sans doute le plus « ennuyeux » — est qu'en raffinant le maillage, l'erreur commise n'est pas diminuée. Au contraire, plus le maillage est fin, plus l'effet d'axes est apparent.

#### 2.4.2 Cas à 5 puits

Le deuxième cas test intéressant est inspiré d'une configuration plus complexe en simulation de réservoir appelée *five spots*. Proposé par Keilegavlen et al. [60], il est constitué de quatre puits producteurs disposés en carré autour du puits injecteur<sup>3</sup>. Dans un objectif

3. Dans le vrai *five spots*, le motif pour l'emplacement des puits est répété doublement périodiquement à l'infini. La théorie des fonctions elliptiques permet de déterminer certaines solutions analytiquement [7, 8].

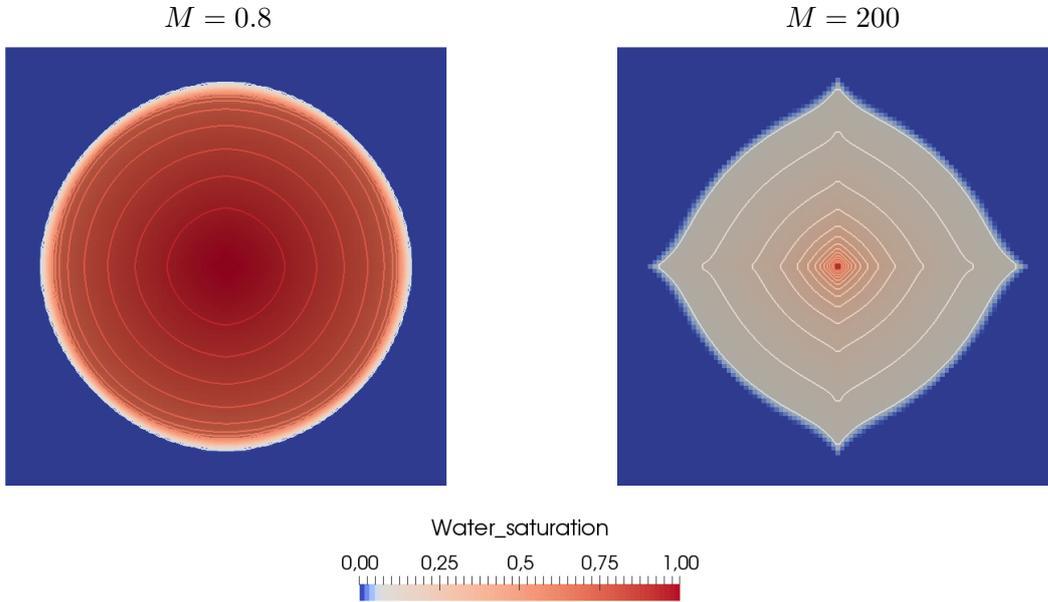


FIGURE 2.15 – Champs de saturation au temps  $T = 0.05$  s obtenu sur un maillage  $101 \times 101$  avec le schéma 5P pour  $M = 0.8$  (à gauche) et  $M = 200$  (à droite).

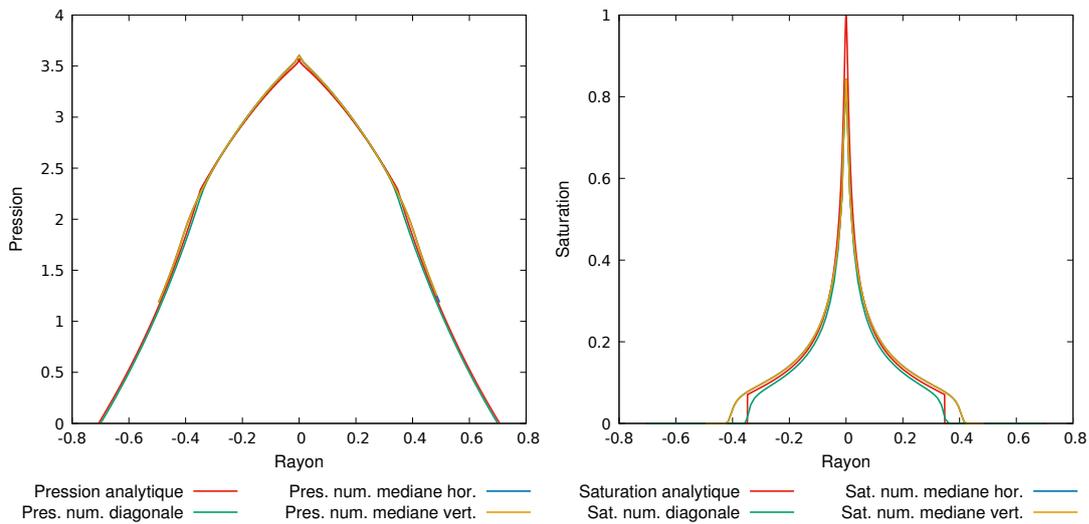


FIGURE 2.16 – Coupes selon différentes directions en pression (à gauche) et en saturation (à droite) de la solution obtenue avec le schéma 5P pour  $M = 200$ .

de comparaison, deux domaines carrés sont considérés

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= (-L/2, L/2)^2, \\ \Omega_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq L/\sqrt{2}\},\end{aligned}$$

qui se déduisent l'un de l'autre par une rotation d'angle  $\pm\pi/4$ . Que ce soit dans  $\Omega_1$  ou  $\Omega_2$ , le puits injecteur est placé en  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ , tandis que les puits producteurs sont situés en

$$\mathbf{X}_{1,2,3,4} = (\pm d/\sqrt{2}, \pm d/\sqrt{2}),$$

pour  $0 < d < L/2$ , comme l'indiquent les figures 2.17–2.18.

### Perméabilité variable et puits à pression imposée

Pour  $\Omega \in \{\Omega_1, \Omega_2\}$ , la simulation est réalisée de sorte à trouver la solution du système

$$\mathbf{u} = -\kappa(\mathbf{x})\lambda(s)\nabla p, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.87a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = Q\delta_{\mathbf{0}} - \sum_{L=1}^4 Q_L(s, p)\delta_{\mathbf{X}_L}, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.87b)$$

$$\phi \partial_t s + \operatorname{div}(f(s)\mathbf{u}) = Q\delta_{\mathbf{0}} - \sum_{L=1}^4 Q_L(s, p)f(s)\delta_{\mathbf{X}_L}, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.87c)$$

muni de la condition aux limites de Neumann homogène

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (2.88)$$

et de la condition initiale

$$s(\mathbf{x}, 0) = s_0(\mathbf{x}). \quad (2.89)$$

Par rapport au problème modèle (2.4), deux différences majeures sont à signaler. Leurs répercussions sur le schéma seront toutefois mineures.

1. La perméabilité  $\kappa$  est maintenant une fonction de  $\mathbf{x}$ , mais sa dépendance en espace est très simple. En fait, elle prend deux valeurs constantes, i.e.,

$$\kappa(\mathbf{x}) = \begin{cases} \kappa_M & \text{si } r = \|\mathbf{x}\| < D, \\ \kappa_m & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.90)$$

avec  $0 < \kappa_m \ll \kappa_M$  et  $0 < d < D < L/2$ . La motivation pour une très faible valeur de perméabilité  $\kappa_m$  dans la région extérieure  $r > D$  est d'empêcher le fluide de s'écouler. Ce choix vise aussi à rendre les solutions moins sensibles à l'influence de la condition de Neumann (2.88).

2. Contrairement à (2.8), les puits producteurs fonctionnent maintenant en mode pression imposée. En d'autres termes, les débits  $Q_L$  aux seconds membres de (2.87) ne sont pas des fonctions de  $t$  mais de  $(s, p)$ . Ils sont modélisés [75, 76] par

$$Q_L(s, p) = \lambda(s) \frac{2\pi\kappa(\mathbf{X}_L)}{\ln(r_e/r_{p,L})} (p - p_B(\mathbf{X}_L)), \quad (2.91)$$

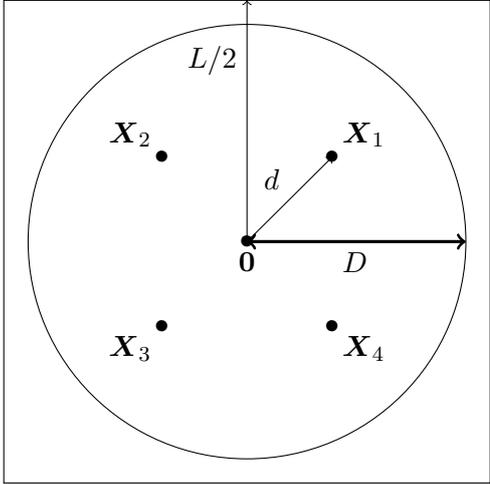


FIGURE 2.17 – Domaine  $\Omega_1$  : maillage diagonal.

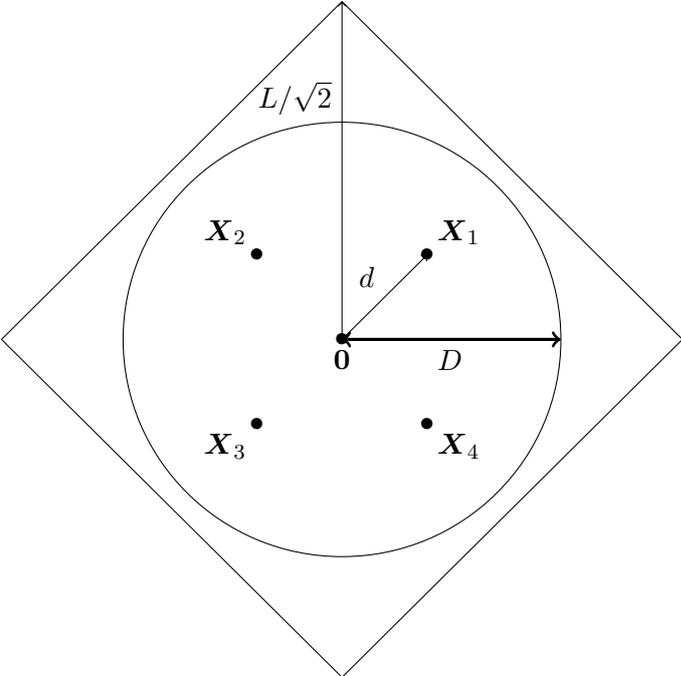


FIGURE 2.18 – Domaine  $\Omega_2$  : maillage parallèle.

où  $p_B(\mathbf{X}_L)$  est la pression imposée au fond du puits  $\mathbf{X}_L$ ,  $r_{p,L}$  est son rayon et

$$r_e \approx 0.14\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (2.92)$$

est le rayon équivalent de la maille. Le quotient

$$\text{WP}_L = \frac{2\pi\kappa(\mathbf{X}_L)}{\ln(r_e/r_{p,L})}$$

est d'ailleurs appelé *indice de Peaceman*. En général,  $r_{p,L} \ll r_e$ , si bien que cet indice est positif. La présence des pas de maillage  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  dans le modèle « continu » (2.91)–(2.92) résulte d'un raisonnement « rigoureux », bien expliqué dans [42, §3.5.1].

### Impact sur le schéma numérique

La transposition du schéma 5P à un champ de perméabilité variable est aisée pour les flux intérieurs. Si la perméabilité est donnée comme une constante  $\kappa_{i,j}$  sur la maille  $\mathcal{M}_{i,j}$ , alors les formules (2.51)–(2.53) sont remplacées par

$$F_{i+1/2,j} = \kappa_{i+1/2,j} \lambda_{i+1/2,j}^n \frac{\Delta y}{\Delta x} (p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}), \quad (2.93a)$$

$$F_{i,j+1/2} = \kappa_{i,j+1/2} \lambda_{i,j+1/2}^n \frac{\Delta x}{\Delta y} (p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}), \quad (2.93b)$$

avec, en pratique, la valeur de  $\kappa$  sur les arêtes calculée par moyenne harmonique [38, 42]

$$\kappa_{i+1/2,j} = \frac{2\kappa_{i,j} \kappa_{i+1,j}}{\kappa_{i,j} + \kappa_{i+1,j}}, \quad (2.94a)$$

$$\kappa_{i,j+1/2} = \frac{2\kappa_{i,j} \kappa_{i,j+1}}{\kappa_{i,j} + \kappa_{i,j+1}}; \quad (2.94b)$$

La seule difficulté concerne les flux sur les arêtes aux bords du domaine, dans la mesure où ce qu'il y a de l'« autre côté » est inconnu pour appliquer la moyenne harmonique. Néanmoins, dans ce cas test, cette difficulté n'existe pas car les bords se trouvent à l'extérieur du cercle de rayon  $D$ , donc dans la région de la faible perméabilité. Les formules (2.54)–(2.55) sont réutilisées avec  $\kappa = \kappa_m$ .

La prise en compte au niveau discret des puits modélisés par (2.91) ne pose pas de problème particulier. Soient  $i(\mathbf{X}_L), j(\mathbf{X}_L)$  les indices de la maille contenant la position  $\mathbf{x}_L$ . Le bilan de flux en pression (2.50) sur cette maille s'écrit

$$\begin{aligned} & F_{i(\mathbf{X}_L)+1/2,j(\mathbf{X}_L)} - F_{i(\mathbf{X}_L)-1/2,j(\mathbf{X}_L)} + F_{i(\mathbf{X}_L),j(\mathbf{X}_L)+1/2} - F_{i(\mathbf{X}_L),j(\mathbf{X}_L)-1/2} \\ & = -\lambda(s_{i(\mathbf{X}_L),j(\mathbf{X}_L)}^n) \text{WP}_L (p_{i(\mathbf{X}_L),j(\mathbf{X}_L)}^{n+1} - p_B(\mathbf{X}_L)). \end{aligned} \quad (2.95)$$

Le choix d'expliciter  $s$  et d'impliquer  $p$  au second membre de (2.95) est conforme avec l'esprit de la discrétisation IMPES. En repassant le terme contenant  $p^{n+1}$  au premier membre, la diagonale de la matrice  $\mathbf{A}$  est chargée positivement ce qui rend la matrice inversible. Ainsi, en dépit des conditions de Neumann (2.88) sur tout le bord, aucune normalisation en  $p$  n'est nécessaire.

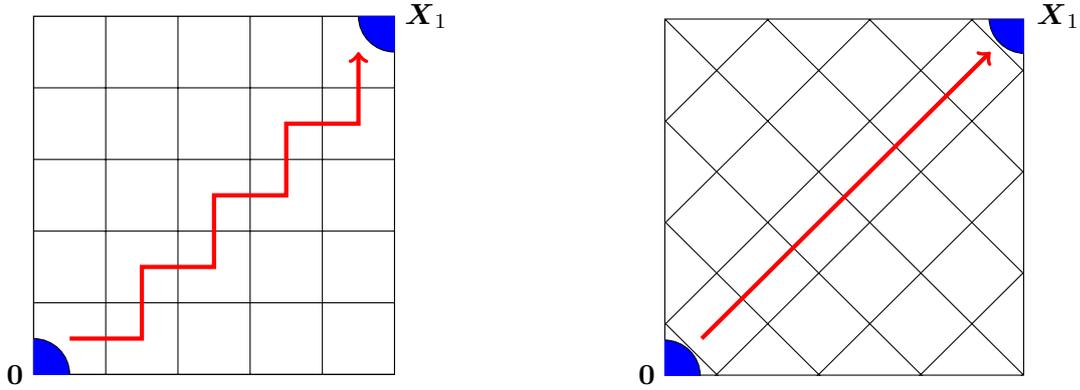


FIGURE 2.19 – Positions des puits injecteur  $\mathbf{0}$  et producteur  $\mathbf{X}_1$ , ainsi que trajectoires du flux numérique pour un maillage diagonal (à gauche) et un maillage parallèle (à droite).

### Résultats obtenus par le schéma 5P

Les quantités suivantes sont données

$$L = 101 \text{ m}, \quad N_x = N_y = 101, \quad \Delta x = \Delta y = 1 \text{ m}.$$

Autrement dit, les deux domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont maillés par des carrés (cf. figure 2.19). Les deux autres longueurs du problème sont

$$d = 29.7 \text{ m}, \quad D = 48.5 \text{ m}.$$

Il est important de voir que, relativement à l'orientation des maillages, la position de chaque puits producteur  $\mathbf{X}_L$ , où est imposée une pression, est différente dans les deux domaines. Le domaine  $\Omega_1$  est désigné par un maillage *diagonal* car la ligne joignant le puits injecteur et chaque puits producteur traverse diagonalement le maillage. Le domaine  $\Omega_2$  est désigné par un maillage *parallèle* car cette même ligne coïncide avec une direction principale du maillage.

Les paramètres des puits sont

$$Q = 5 \text{ m}^3 \cdot \text{j}^{-1}, \quad p_B(\mathbf{X}_L) = 50 \text{ Bar}.$$

Les propriétés pétrophysiques sont

$$\phi = 1, \quad \kappa_M = 100 \text{ mD}, \quad \kappa_m = 10^{-4} \text{ mD}, \quad \mu_w = 1 \text{ cP}.$$

Les exposants de Corey sont différents selon la phase. Plus précisément,

$$m_w = 4, \quad m_o = 2,$$

tandis que les perméabilités relatives maximales sont égales, i.e.,

$$\kappa_{r,w}^\# = \kappa_{r,o}^\# = 1.$$

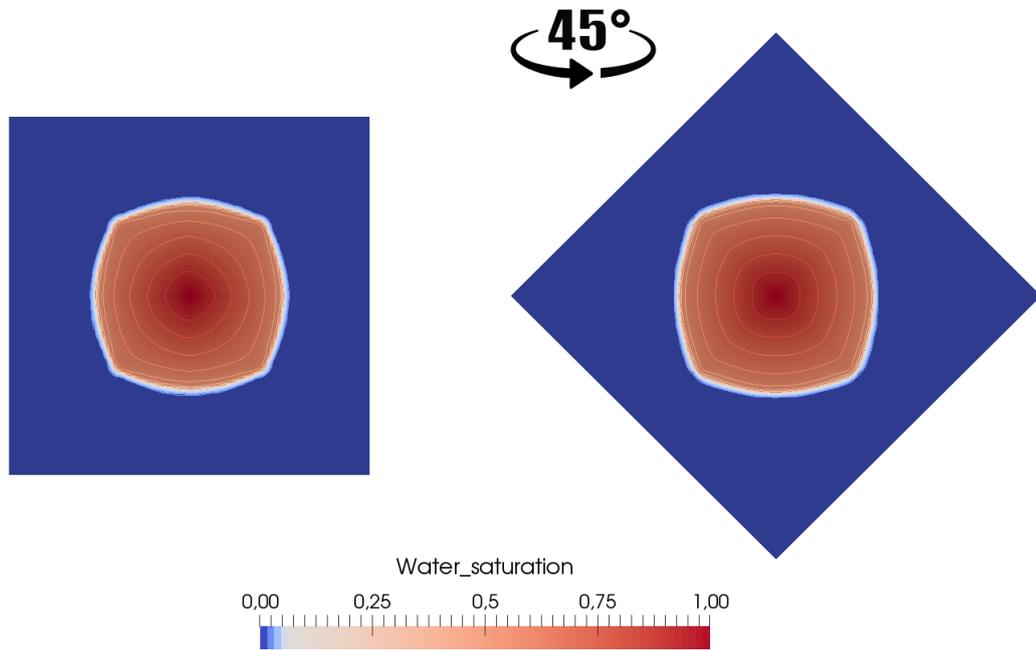


FIGURE 2.20 – Champ de saturation au temps  $T = 430$  jours pour  $M = 1.6$ , obtenu avec le schéma 5P en maillage diagonal (à gauche) et maillage parallèle (à droite).

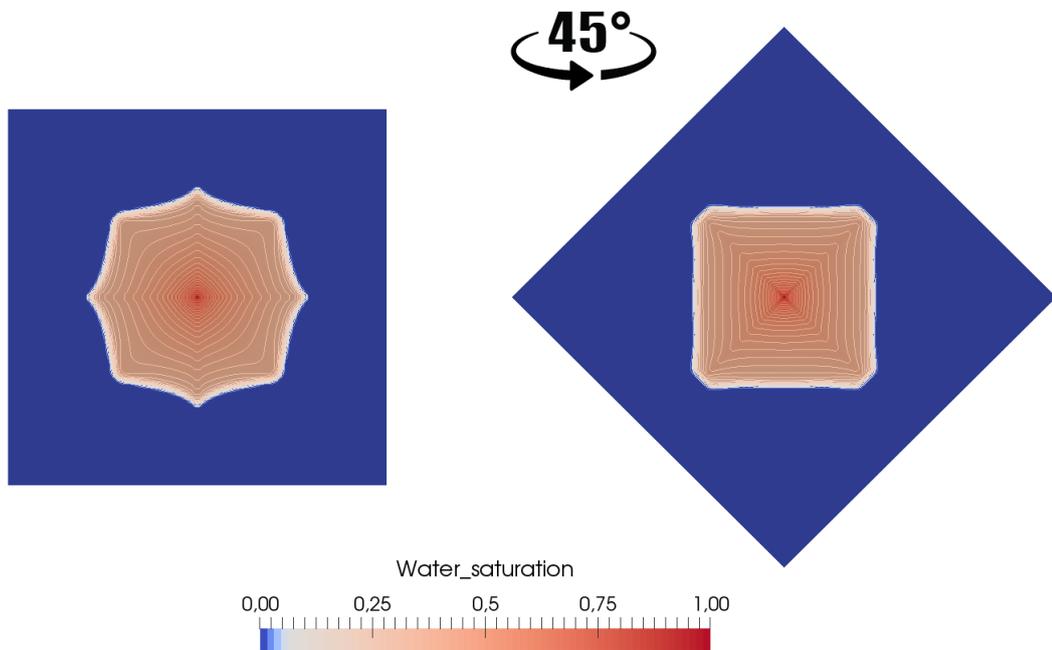


FIGURE 2.21 – Champ de saturation au temps  $T = 200$  jours pour  $M = 100$ , obtenu avec le schéma 5P en maillage diagonal (à gauche) et maillage parallèle (à droite).

Cela entraîne

$$f(s) = \frac{Ms^4}{Ms^4 + (1-s)^2}$$

pour le flux fractionnaire. Le rapport de mobilités  $M$  est un paramètre libre qui varie en réglant

$$\mu_o = M\mu_w.$$

Sur chacune des deux grilles, deux expériences sont réalisées correspondant à

$$M = 1.6 \quad \text{et} \quad 100.$$

Celle avec  $M = 1.6$  dure  $T = 430$  jours, tandis que celle avec  $M = 100$  dure  $T = 200$  jours. Ces durées de simulation sont ajustées de sorte que les supports de  $s$  soient à peu près au même endroit à l'arrivée.

Les solutions obtenues avec le schéma 5P pour  $M = 1.6$  sont représentées sur la figure 2.20. Visuellement, elles sont identiques sur les deux maillages, ce qui est fort satisfaisant. Il peut être surprenant que les fronts ne soient pas « ronds », mais ici il n'y a aucune raison pour cela : à cause des pressions imposées aux quatre puits producteurs, le problème posé n'a pas de symétrie radiale et la solution n'a pas à l'être.

Les solutions obtenues avec le schéma 5P pour  $M = 100$  sont représentées sur la figure 2.21. Visuellement, la différence entre les deux maillages est flagrante. Sur le maillage diagonal à gauche, les directions principales du maillage sont mises en évidence avec des « pointes » de propagation avancées le long des axes horizontal et vertical. Le maillage parallèle, à droite, retranscrirait sans doute plus fidèlement la solution attendue, au sens où il ne privilégie apparemment aucune direction et où la solution semble davantage « attirée » vers les puits producteurs. Il convient néanmoins de ne pas tirer de conclusion hâtive quant à celle des deux qui serait plus proche de la solution exacte.

Une autre façon d'observer le décalage entre les solutions correspondant aux deux maillages pour  $M = 100$  consiste à comparer les instants de percée d'eau en sortie des puits producteurs. Ces *courbes de production* sont tracées sur la figure 2.22. Bien que les quatre puits produisent de l'eau de manière simultanée, la production sur maillage diagonal et celle sur maillage parallèle n'ont pas lieu au même moment. Il y a même un fort écart, d'environ 50 jours, entre les deux instants de la percée d'eau aux puits producteurs. Il est évident que cette incertitude sur l'estimation du jour de percée d'eau est un inconvénient pour la compagnie pétrolière et peut entraîner des pertes financières assez conséquentes.

Une explication heuristique au décalage est souvent avancée par les ingénieurs : sur la figure 2.19, pour aller du puits injecteur  $\mathbf{0}$  au puits producteur  $\mathbf{X}_1$ , le flux numérique en maillage diagonal doit emprunter un chemin « en zigzag » qui est plus bien long que la « ligne droite » qu'il suivrait naturellement en maillage parallèle. Cette intuition peut certes être à l'origine de l'introduction de flux diagonaux dans le schéma (cf. Chapitre 3), en guise de remède à l'effet d'orientation du maillage. Elle n'est toutefois pas complète car elle ne tient pas compte de l'influence décisive du rapport de mobilités. Elle passe à côté du fait fondamental que c'est le caractère instable du système physique dans un régime défavorable qui amplifie toutes sortes d'erreur, y compris celle due à l'orientation du maillage.

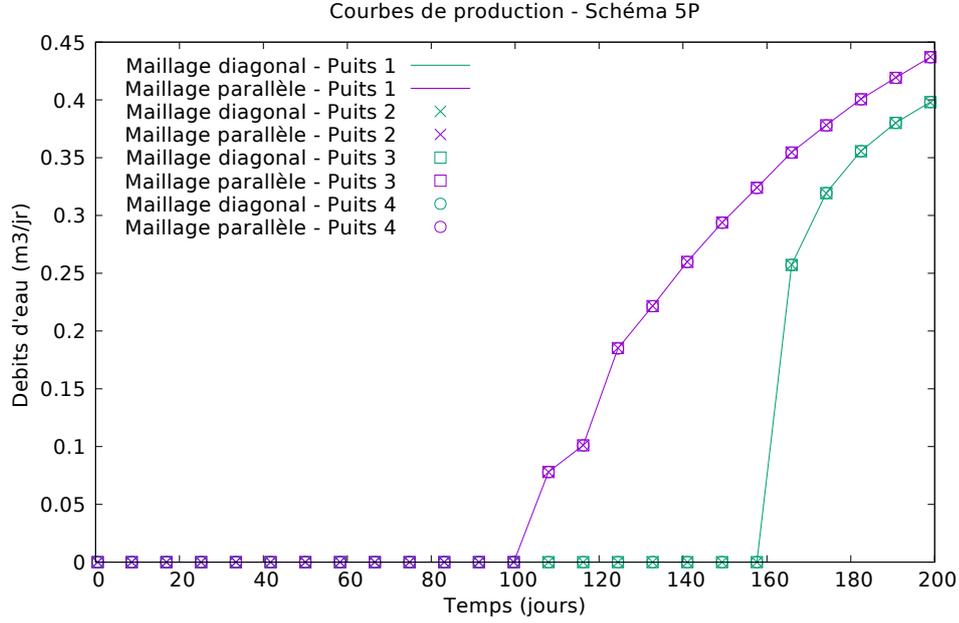


FIGURE 2.22 – Courbes de production d'eau au cours du temps aux puits producteurs pour  $M = 100$  en maillages diagonal et parallèle, avec le schéma 5P.

### 2.4.3 Cas digitations

Le troisième et dernier cas test envisagé est un écoulement de type piston, appelé *carotte* dans la communauté des ingénieurs réservoir. Il peut être vu comme une réalisation en 2-D du problème (2.12)–(2.14), examiné en §2.2 pour l'analyse de stabilité en 1-D. L'instabilité de l'écoulement, lorsqu'elle a lieu, se manifeste par des perturbations de la position du front, connues sous le vocable de *digitations*.

Soit le domaine rectangulaire

$$\Omega = (0, L_x) \times (0, L_y)$$

et soit le système

$$\mathbf{u} = -\kappa\lambda(s)\nabla p, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.96a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.96b)$$

$$\phi \partial_t s + \operatorname{div}(f(s)\mathbf{u}) = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.96c)$$

muni des conditions aux limites

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \{y = 0\} \cup \{y = L_y\}, \quad (2.97a)$$

$$p = p_e \quad \text{sur } \{x = 0\}, \quad (2.97b)$$

$$p = p_s \quad \text{sur } \{x = L_x\}, \quad (2.97c)$$

$$s = 1 \quad \text{sur } \{x = 0\}, \quad (2.97d)$$

et de la condition initiale

$$s(\mathbf{x}, 0) = s_0, \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.98)$$

Dans (2.97b)–(2.97c), la pression à l'entrée  $p_e$  est supposée supérieure à la pression en sortie  $p_s$ . De ce fait, le bord gauche est entrant, ce qui justifie (2.97d).

### Saturations d'eau irréductible et d'huile résiduelle

Par rapport à (2.12)–(2.14), la particularité de ce cas test réside dans l'emploi des lois de perméabilités relatives de Brooks-Corey plus élaborées, avec deux constantes physiques supplémentaires. Au lieu de (2.1), les perméabilités relatives sont

$$\kappa_{r,w}(s) = \kappa_{r,w}^\# \left| \pi_{[0,1]} \left( \frac{s - s_{wi}}{1 - s_{wi}} \right) \right|^{m_w}, \quad (2.99a)$$

$$\kappa_{r,o}(1 - s) = \kappa_{r,o}^\# \left| \pi_{[0,1]} \left( \frac{1 - s - s_{or}}{1 - s_{wi} - s_{or}} \right) \right|^{m_o}, \quad (2.99b)$$

où  $0 \leq s_{wi} < 1 - s_{or} < 1$  sont des seuils fixés. La quantité  $s_{wi}$  est appelée saturation *irréductible d'eau*, tandis que  $s_{or}$  est appelée saturation *résiduelle d'huile*. L'opérateur  $\pi_{[0,1]}$  représente la projection sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Autrement dit,

$$\pi_{[0,1]}(w) = \begin{cases} 0 & \text{si } w < 0, \\ w & \text{si } w \in [0, 1], \\ 1 & \text{si } w > 1. \end{cases}$$

Les lois (2.99) sont censées apporter plus de réalisme à la simulation. Le rapport de mobilités  $M$  garde la même définition qu'en (2.7).

### Résultats obtenus par le schéma 5P

Les quantités suivantes sont données

$$L_x = 300 \text{ m}, \quad L_y = 200 \text{ m}, \quad N_x = 150, \quad N_y = 100.$$

Les mailles sont à présent des rectangles de taille

$$\Delta x = 2 \text{ m}, \quad \Delta y = 1 \text{ m}.$$

Les conditions aux limites et initiales ont pour valeurs

$$p_e = 40 \text{ bar}, \quad p_s = 20 \text{ bar}, \quad s_0 = 0.15.$$

Pour les lois de perméabilités relatives, les coefficients sont

$$s_{wi} = 0.15, \quad s_{or} = 0.3, \quad m_w = m_o = 2, \quad \kappa_{r,w}^\# = \kappa_{r,o}^\# = 1.$$

Les propriétés pétrophysiques sont

$$\phi = 0.3, \quad \kappa = 500 \text{ mD}, \quad \mu_w = 1 \text{ cP}, \quad \mu_o = 200 \text{ cP},$$

ce qui implique un rapport de mobilités  $M = 200$ . La durée de simulation est de  $T = 3000$  jours.

Comme le montrent les images de la figure 2.23, le front de choc est rectiligne en début de simulation. Cependant, lorsque l'eau arrive à la moitié du domaine, soit à environ 1760 jours, des perturbations sous forme de « doigts » commencent à surgir aux niveaux des bords supérieur et inférieur du domaine. Bien que purement numériques (la saturation d'entrée est identique en chaque maille de bord gauche), ces instabilités sont bien liées au rapport de mobilités : leur apparition est retardée voire empêchée en baissant  $M$ .

Ce phénomène est appelé *digitations* par les ingénieurs, qui dans ce cas précis les assimilent toutefois à l'amplification du bruit numérique par la nature instable du système, plutôt qu'aux *digitations visqueuses* proprement physiques qui doivent être modélisées de manière appropriée [11,62,83] et pour la simulation desquelles il faut utiliser des méthodes numériques d'ordres élevés [70].

Au niveau numérique, un moyen pour stabiliser le front serait d'introduire une dissipation artificielle transverse, dans la direction perpendiculaire à l'écoulement. Cela permettrait aux rangées unidimensionnelles de « communiquer » entre elles.

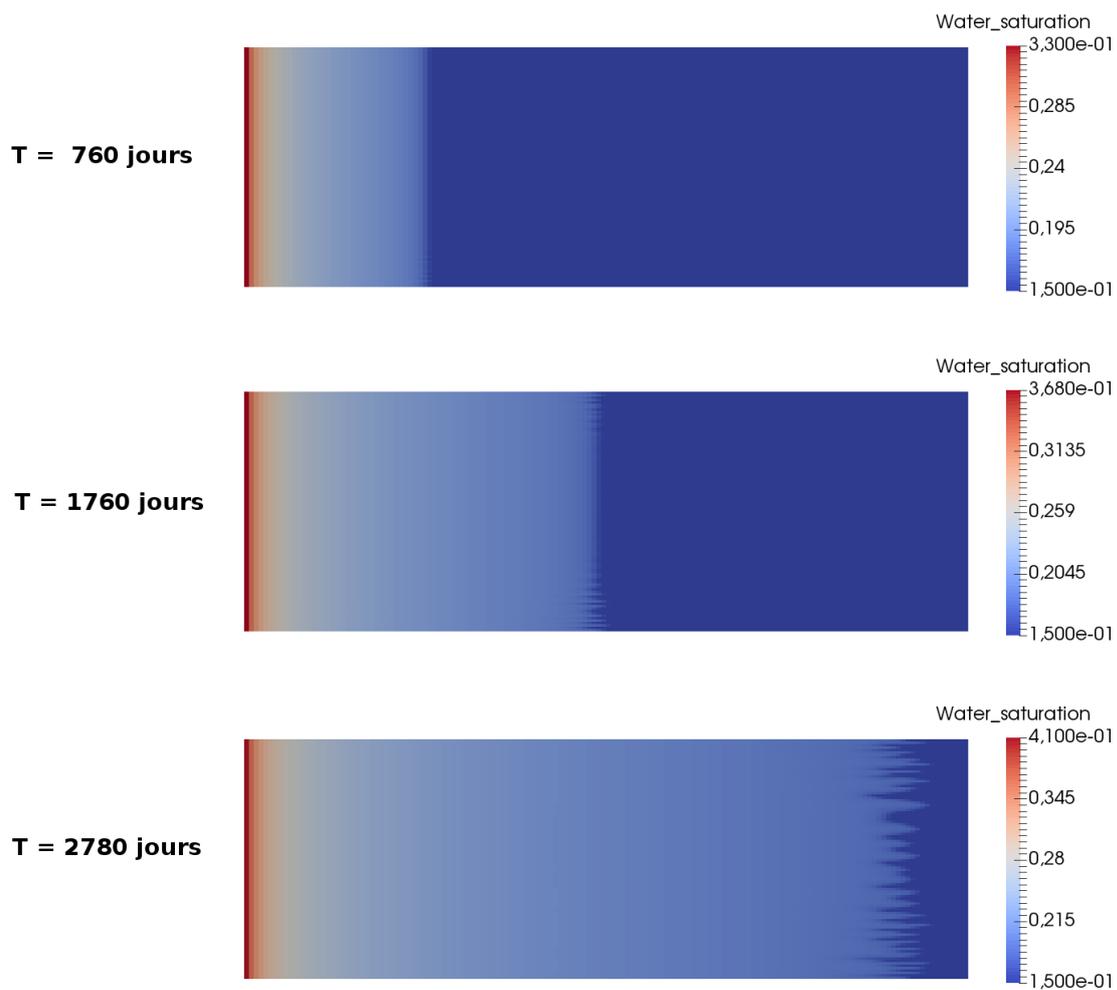


FIGURE 2.23 – Représentation de la saturation à différents temps de simulation pour le cas digitations.