

Chapitre 2

LA TEMPÉRATURE DANS LES MODÈLES DE PLASTICITÉ.

II. LA TEMPÉRATURE DANS LES MODÈLES DE PLASTICITÉ.

L'objectif de ce chapitre est de cerner et de modéliser l'influence de la température sur les comportements plastiques. La formulation classique de la plasticité, définie généralement dans un cadre isotherme, est modifiée afin d'inclure la variable température dans l'étude du comportement du matériau.

II.1. Introduction.

De nombreuses études mécaniques concernent des structures soumises à des chargements à la fois mécanique et thermique. Or, les propriétés mécaniques des matériaux solides sont sensibles à la température et une méconnaissance du rôle de la température sur les caractéristiques mécaniques conduit généralement à des modélisations incorrectes. Les lois élastiques, plastiques ou viscoplastiques qui représentent le comportement à la température ambiante doivent être adaptées avant d'en faire usage dans une étude thermomécanique.

Dans cette extension thermomécanique de la plasticité, le chargement d'un volume élémentaire du milieu continu comprend à la fois la contrainte mécanique et la température. La plasticité désigne toujours la propriété qu'a un corps solide d'acquérir des déformations de manière permanente lorsque l'on restaure le chargement initial. Mais à présent, ces déformations sont constatées après un déchargement en contraintes et en température. Dans certains cas, des déformations permanentes surviennent après un cycle en température uniquement, sans modification de l'état de contraintes.

Une modélisation correcte des couplages thermomécaniques exige une formulation compatible avec les principes de la thermodynamique. Cette approche, qui peut paraître superflue dans une étude isotherme du comportement mécanique, se justifie pleinement lorsque la température influence sensiblement le comportement du matériau. La description thermodynamique du comportement mécanique et thermique rend compte à une échelle macroscopique des échanges entre les énergies thermiques et mécaniques.

Cette description des écrouissages thermiques concerne la modélisation des matériaux solides. L'extension aux milieux poreux s'obtient aisément, en remplaçant le terme "état de contraintes" par "état de contraintes et de pression interstitielle". Dans toute la suite de ce

chapitre, le modèle est présenté pour les matériaux solides tandis que l'extension de ces résultats aux milieux poreux est faite en Annexe 1.

Signalons enfin que cette étude se limite aux modèles de comportement plastique sous l'hypothèse de la petite transformation et que les aspects liés aux transformations finies du matériau ne sont pas évoqués. Tout au long de cet exposé, la géométrie actuelle du matériau est supposée être très proche de la géométrie de l'état de référence, ce qui revient à confondre les descriptions lagrangiennes et eulériennes du mouvement du solide. En occultant les difficultés liées à la modélisation du comportement plastique en grande transformation, cette présentation insiste sur les aspects thermiques.

II.2. Un état des lieux.

Ce chapitre introduit des notions classiques de la théorie de l'élastoplasticité. La bibliographie à ce sujet est très abondante, et ce qui suit ne prétend à aucune exhaustivité. Les références données ci-après ont servi de support aux réflexions exposées dans ce chapitre.

La description des aspects phénoménologiques de l'écrouissage thermique s'inspire de résultats d'essais thermomécaniques sur des matériaux argileux. On a choisi de présenter dans ce chapitre des expériences idéalisées, les résultats d'expériences faites sur des argiles étant présentés dans le chapitre suivant.

Les premières études sur les effets de cycles de chauffage et de refroidissement sur des argiles datent des années 1960. Ces études ont été motivées par des problèmes géotechniques classiques, sans chargement thermique particulier. En effet, la plupart des matériaux sont analysés en laboratoire à une température différente de celle à laquelle ils ont été prélevés. Pour savoir si les caractéristiques de résistance mécanique fournies par cette analyse peut effectivement s'appliquer au matériau in situ, il faut être en mesure de dire quelle est l'évolution en température de ces paramètres.

L'article publié par Campanella & Mitchell [1] en 1968 montre une contraction irréversible d'un échantillon d'argile au cours du premier cycle de chauffage, et une réponse quasiment réversible au cours des cycles suivants. L'article de Plum & Esrig [2] en 1969 présentent des résultats similaires obtenus avec un autre matériau argileux. Ces auteurs montrent de plus le rôle de l'état de contrainte et plus précisément du taux de surconsolidation sur la réponse du matériau. Ces deux articles donnent une illustration de l'essentiel des effets de l'écrouissage thermique que l'on décrit dans ce chapitre. Campanella & Mitchell ont cependant proposé une interprétation différente de leurs expériences, fondée sur une accélération du fluage avec la température [3] (1969).

Plusieurs études ont été faites à ce sujet au cours des décennies suivantes, leurs résultats montrent les mêmes tendances pour divers matériaux argileux. Plus récemment, les perspectives de stockage de déchets exothermiques d'origine nucléaire au sein de formations argileuses ont motivé de nouvelles études sur des argiles naturelles non remaniées.

Parallèlement au cours des années 60, le développement des modèles de Cam clay remplace l'étude du comportement des matériaux argileux dans un contexte élastoplastique. Le développement du formalisme élastoplastique au cours des années 50 s'adressait à la rhéologie des métaux.

Les concepts généraux et en particulier le principe du travail maximal sont exposés dans l'ouvrage de référence de Hill [4] de 1953. S'agissant des solides plastiques ordinaires, une présentation générale des aspects thermodynamiques peut être consultée dans Mandel [8] (1971) ou Germain [9] et [10] (1973,1986). Le concept de matériaux standards généralisés a été introduit par Halphen & Nguyen [16] (1975), il s'étend sans difficulté à un matériau thermiquement écrouissable. Plus récemment, les travaux de Brun [11] présentent un cadre thermodynamique légèrement différent, en insistant sur la normalité des écoulements.

Ces présentations sont surtout destinées à l'étude du comportement plastique en condition isotherme, la présence éventuelle de la température dans la description du domaine d'élasticité n'est pas argumentée. A notre connaissance, les couplages entre une sensibilité thermique des limites d'élasticité et le comportement thermique du matériau sont rarement évoqués. Ce problème est abordé dans les articles de Raniecki & Sawczuk [12] (1975) et de Mróz & Raniecki [13] (1976), qui décrivent un cadre thermodynamique où la dépendance en température des limites d'élasticité est en partie couplée à une "chaleur réversible de déformation plastique" qui correspond précisément à la chaleur latente de transformation de l'état d'écrouissage introduite dans ce chapitre. Cependant, le cadre thermodynamique proposé par ces auteurs fait également état d'une dépendance directe du critère de plasticité avec température, sans contrepartie sur les bilans thermiques. Le principe d'un écrouissage thermique demeure obscur.

L'étude des bandes de cisaillement a également motivé des recherches sur les conséquences d'une sensibilité du critère de plasticité à la température. Le mécanisme proposé est le suivant : la plasticité est un processus exothermique, qui en condition adiabatique va provoquer des augmentations de température plus élevées dans les zones où la vitesse de déformation plastique est la plus intense. Une diminution des limites de plasticité avec la température va accroître la déformation plastique dans les zones chaudes, au détriment des parties froides. Ce mécanisme crée une déstabilisation, qui peut conduire à une localisation des déformations plastiques. Dans une étude mathématique du problème unidimensionnel du cisaillement d'une bande infinie soumise à une traction constante, Tzavaras [14] [15] (1986,1987)

donne des critères quantitatifs assurant l'apparition ou l'absence d'une localisation des déformations, pour une loi viscoplastique. Les aspects thermodynamiques étant ignorés, la chaleur latente de transformation de l'état d'écrouissage n'est cependant pas prise en considération, bien que son effet ne soit sans doute pas négligeable.

Les travaux effectués récemment par Coussy [7] (1989) ont permis d'étendre les notions thermodynamiques de l'élastoplasticité aux milieux poreux saturés par une phase fluide. Notre objectif étant d'appliquer l'écrouissage thermique aux argiles, on présente les concepts de l'élastoplasticité des milieux poreux. Une présentation complète de ces aspects peut être trouvée dans Coussy [6] (1991) ou Coussy [?] (1994).

L'étude de l'identification des paramètres plastiques n'est pas propre à la plasticité en température, elle donne des conclusions identiques pour un matériau plastique ordinaire. Cette approche critique de l'analyse d'un modèle, suggérée par Coussy [6], est de portée très générale en ce qui concerne l'étude du domaine de pertinence d'un modèle, et elle méritait en ce sens d'être reprise ici.

Enfin, les conditions suffisantes de stabilité thermodynamiques exposées dans ce chapitre sont obtenues aisément en suivant l'approche exposée par Mandel [17] (1966). Mróz & Raniecki [13] (1976) ont également proposé un résultat d'unicité locale, mais sans admettre l'éventualité d'un processus plastique endothermique. Le résultat concernant la stabilité thermodynamique en température du modèle plastique paraît inédit.

II.3. Description des écrouissages thermiques.

Cette partie présente un aperçu des effets de la température sur le comportement plastique, à travers quelques résultats d'essais thermomécaniques en laboratoire.

Pour ne pas nuire à la clarté de cet exposé, il n'est pas fait référence à des observations réelles dans cette partie, car leur interprétation n'est pas immédiate. On présente des résultats d'expériences idéales, qui sont caractéristiques d'un comportement plastique avec écrouissage thermique. Les essais thermomécaniques réels sont présentés dans le chapitre suivant consacré aux argiles.

Tous les essais idéalisés qui suivent sont supposés être accomplis dans des conditions expérimentales identiques avec des éprouvettes "vierges" provenant du même matériau. Pour chaque essai la charge mécanique et la température sont contrôlées de façon indépendante et l'on "mesure" les déformations de l'éprouvette. Le chargement thermomécanique est donné par un graphe dans l'espace des températures et des contraintes, sans faire référence à un temps

physique. Le résultat de l'expérience montre une évolution des déformations en fonction du trajet de chargement.

Pour simplifier, on ne considère qu'un seul type de chargement mécanique, et les déformations sont représentées dans une seule direction. L'extension au comportement mécanique tridimensionnel se fait aisément en admettant que les résultats obtenus pour d'autres directions de chargement sont de même nature.

II.3.1. Le domaine d'élasticité dans un cadre thermomécanique.

1. La déformation plastique.

Deux éprouvettes identiques sont testées pour des chargements thermomécaniques de différentes intensités, suivis d'un déchargement complet qui respecte la même succession d'état de contraintes et de température que celle suivie lors du chargement. Les résultats de ces essais sont représentés sur les figures 1 et 2.

L'évolution de la déformation en figure 1 est réversible. Sur ce trajet de chargement, la déformation est déterminée de façon unique en fonction de la contrainte et de la température.

Le matériau a un comportement thermoélastique.

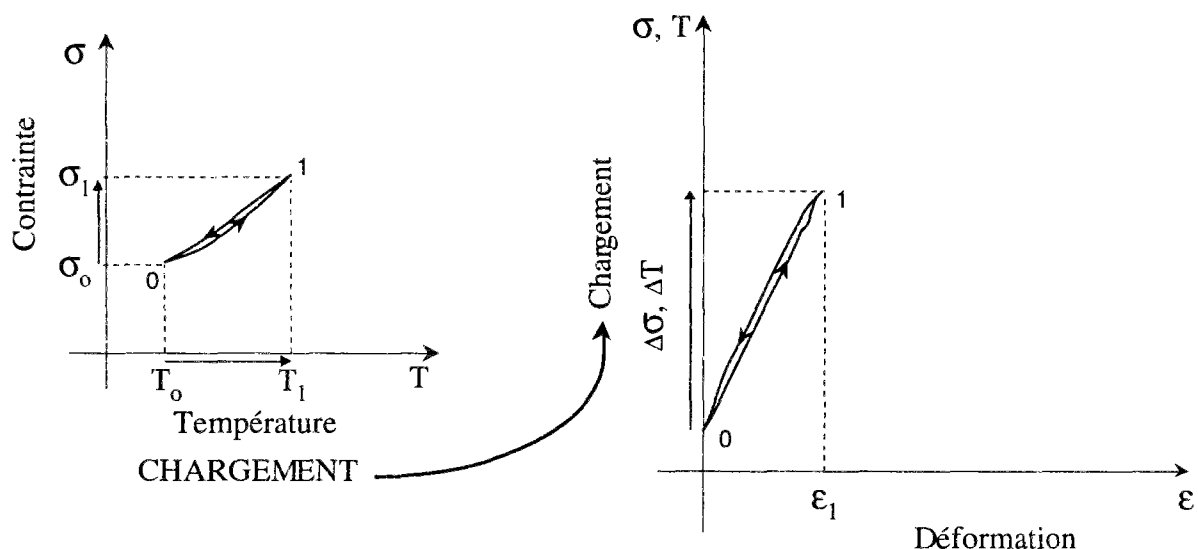


Figure 1 : Évolution thermoélastique.

Pour un chargement de plus forte ampleur, l'évolution est irréversible. Après un déchargement complet, il existe une déformation permanente de l'éprouvette. L'état de déformations n'est pas restauré après décharge, l'évolution considérée est de nature thermoélastoplastique.

On appelle *déformation plastique*, notée ϵ_P , la déformation résiduelle obtenue après une décharge complète du matériau. Cette définition est identique à celle adoptée dans une étude isotherme de la plasticité, en précisant que la décharge concerne à la fois les contraintes et la température.

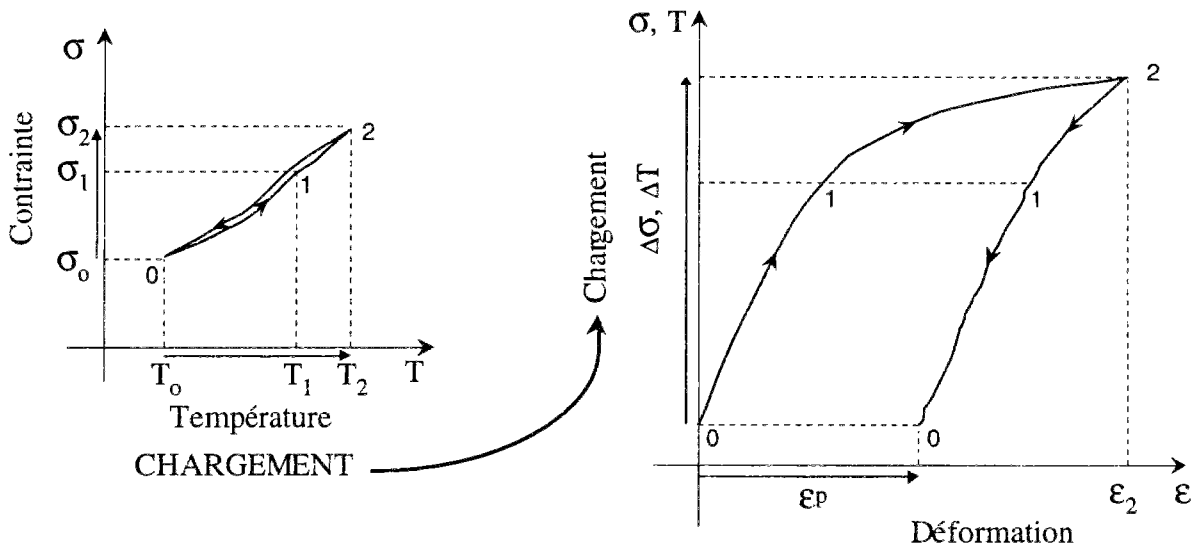


Figure 2 : Évolution plastique en thermomécanique.

Notons qu'il n'y a pas lieu de décomposer la déformation plastique en la somme de deux termes, liés respectivement à l'évolution des températures et à celle des contraintes. En effet, les variations de température et de contraintes ont lieu simultanément et l'on ne peut distinguer l'origine thermique ou mécanique des déformations plastiques.

2. Le domaine d'élasticité.

Les expériences précédentes montrent qu'il existe, sur un trajet de chargement donné, un seuil au-delà duquel les évolutions des déformations deviennent irréversibles.

En se limitant à des essais isothermes à la température du laboratoire, l'on met en évidence la limite d'élasticité du matériau pour une direction des contraintes donnée. Suivant le type d'essai effectué, cette limite sera de nature différente : limite en traction ou compression simple, cohésion, pression critique... Un grand nombre d'essais sur le même matériau mettent en évidence le caractère intrinsèque de ces limites d'élasticité.

L'ensemble des limites d'élasticité lorsque l'on parcourt toutes les directions de contraintes constitue une surface dans l'espace des contraintes. Cette surface sépare les états de contraintes accessibles dans une évolution élastique isotherme de ceux qui ne peuvent être atteints de cette façon.

Le domaine d'élasticité est l'ensemble des états de contraintes pouvant être atteints par une évolution élastique sans variation de température.

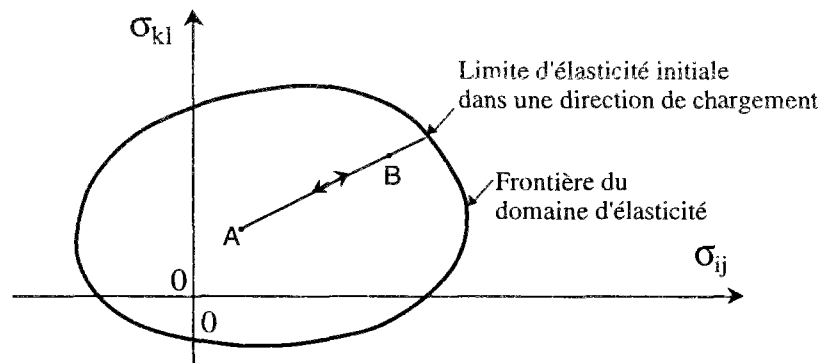


Figure 3 : Domaine d'élasticité initial.

Les limites d'élasticité peuvent être modifiées après une évolution plastique ou après une variation de température. Il faut alors distinguer le domaine d'élasticité correspondant à l'état actuel du matériau du domaine d'élasticité du matériau à l'état "vierge".¹

Notons au passage que la température intervient dans la définition du domaine d'élasticité actuel, et que la température doit donc être spécifiée lorsque l'on détermine le domaine d'élasticité.

Lorsque le domaine d'élasticité est à tout moment confondu avec le domaine d'élasticité initial, le comportement du matériau est dit plastique parfait. Dans le cas contraire, il s'agit d'un matériau plastique écrouissable.

II.3.2. Ecrouissages du domaine d'élasticité.

On s'intéresse aux matériaux dont le comportement plastique est sensible à la température, nous allons donc examiner les modèles plastiques écrouissables.

1. Ecrouissage activé par un chargement mécanique.

Un écrouissage est mis en évidence dans un essai isotherme lorsqu'il y a un dépassement de la limite d'élasticité initiale du matériau, sans qu'il y ait une altération importante ou une rupture de l'éprouvette.

¹ L'état vierge n'est pas une notion absolue comme le sont les notions d'état naturel ou de corps purs, mais elle est relative aux conditions initiales dans le laboratoire. Il se peut en effet que ce matériau "vierge" ait été chargé par le passé, qu'il s'agisse d'une consolidation d'un sol ou des chargements inhérents aux procédés de fabrication de ce matériau.

L'essai suivant est effectué à une température constante, égale à la température initiale du matériau "vierge". En partant de l'état initial de contrainte A, l'on effectue trois cycles mécaniques d'intensité croissante sur la même éprouvette. On note par B, C et D les valeurs extrêmes des chargements qui sont atteints au cours de ces cycles successifs.

Les résultats correspondant à cet essai sont présentés sur les graphiques de la figure 4.

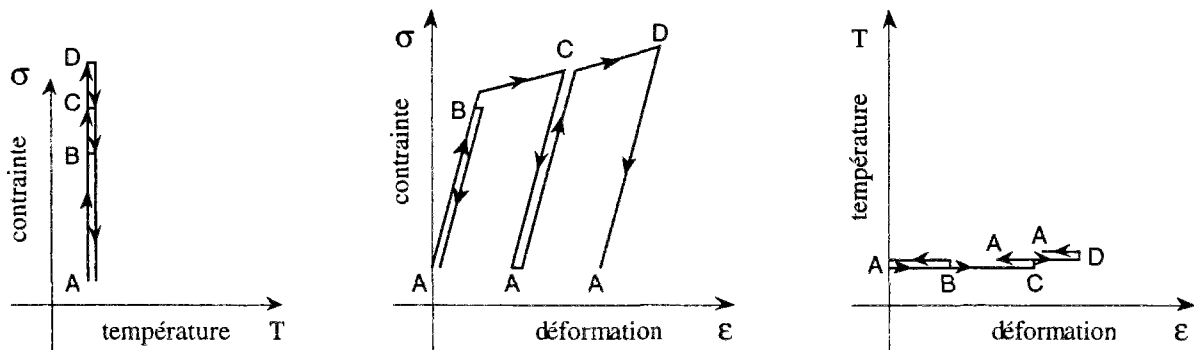


Figure 4 : Ecroûissage au cours d'un chargement isotherme.

La limite d'élasticité initiale est comprise entre B et C. En effet, le premier cycle ABA est élastique, tandis que le cycle ACA entraîne une déformation permanente de l'éprouvette.

Au cours du troisième cycle ADA, la limite d'élasticité augmente et elle atteint la valeur correspondant à la contrainte dans l'état D.

L'écroûissage qui vient d'être décrit présente les caractéristiques suivantes :

- il a lieu au cours d'une évolution isotherme.
- cet écroûissage s'accompagne d'une déformation plastique.

C'est cet écroûissage qui est usuellement décrit dans les modèles de plasticité. Nous le qualifierons d'écroûissage mécanique.

2. Ecroûissage activé par un chargement thermique.

L'essai suivant consiste à chauffer l'éprouvette, sans modifier l'état de contrainte. Afin d'étudier les effets de cette variation de température sur les limites d'élasticité, un chargement mécanique isotherme est effectué avant et après le chargement thermique.

L'état initial de température et de contraintes est noté A. Après un chargement mécanique a lieu sans variation de température, on atteint l'état noté B. Dans les états A' et B', la contrainte est identique à celle des états A et B mais la température est plus élevée.

Les résultats sont représentés sur la figure 5 :

- le premier cycle ABA est élastique (comme précédemment)

- le cycle A'B'A', réalisé à une température plus élevée, provoque une déformation permanente de l'éprouvette.

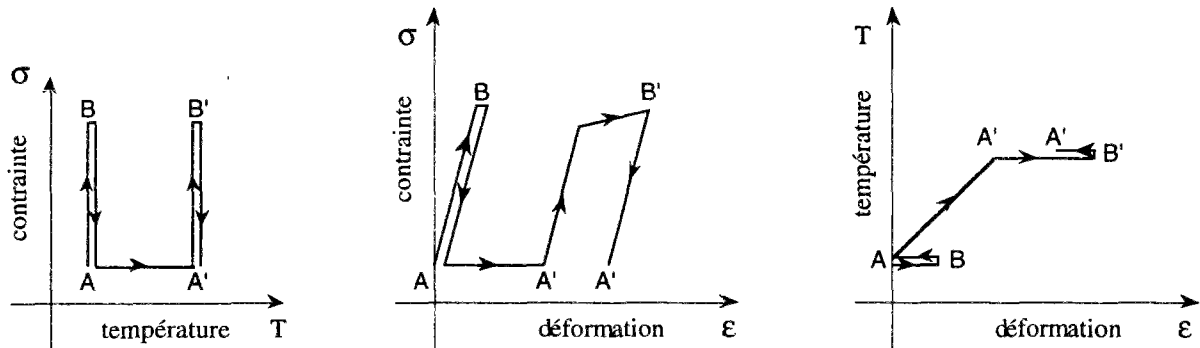


Figure 5 : Mise en évidence d'une modification de la limite d'élasticité avec la température.

Le cycle mécanique isotherme A'B'A' révèle ainsi une baisse de la limite d'élasticité, qui s'est produite lors de l'échauffement AA' de l'éprouvette : il s'agit d'un écrouissage thermique de ce matériau.

Un écrouissage thermique est un phénomène latent : sur l'essai précédent, l'écrouissage a lieu lors du chargement thermique (trajet AA'), mais il n'est révélé que plus tard par un chargement mécanique isotherme (trajet A'B'A'). Ce caractère latent le distingue de l'écrouissage plastique décrit précédemment; il le rend également plus difficile à mettre en évidence.

3. Restauration des limites d'élasticité pour un écrouissage thermique libre

Nous dirons que l'écrouissage thermique a lieu librement lorsque la variation de la limite élastique avec la température est à tout moment compatible avec la charge mécanique appliquée à l'échantillon. C'est par exemple le cas de l'écrouissage thermique présenté dans l'essai précédent, puisque la limite d'élasticité s'abaisse, mais sans jamais devenir incompatible avec l'état de contrainte maintenu constant dans le matériau.

Un écrouissage thermique libre est réversible, et en particulier, les limites d'élasticité sont restaurées au cours d'un cycle thermique complet. Pour s'en convaincre, il faudrait réaliser un essai tel que celui décrit figure 6.

Une éprouvette faite du même matériau que précédemment est portée à la température A', puis refroidie à la température du laboratoire. Afin d'étudier les modifications de comportement induit par le cycle thermique AA'A, la limite d'élasticité de cette éprouvette est ensuite déterminée par plusieurs chargements mécaniques isothermes, à la température du laboratoire. Aucun chargement mécanique n'est effectué à la température A', car l'essai précédent a déjà établi qu'un cycle mécanique A'B'A' provoque un écrouissage mécanique.

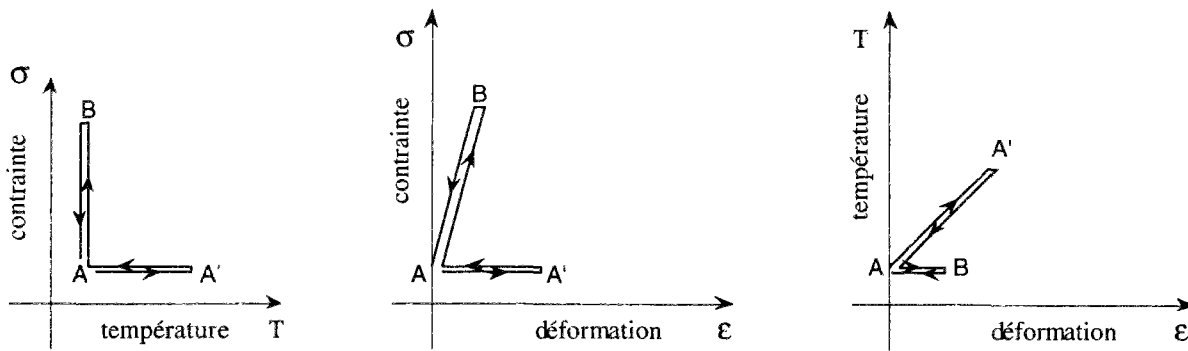


Figure 6 : Restauration de la limite d'élasticité.

Ce chargement donne une réponse thermoélastique.

La déformation résiduelle du matériau après le cycle thermique AA'A est nulle. Ainsi, l'écrouissage thermique libre révélé par l'essai précédent se manifeste sans occasionner de déformations plastiques du matériau.

Le chargement AB qui suit le cycle thermique AA'A est également réversible. La limite d'élasticité qui avait diminué au cours de l'échauffement AA' est restaurée lors du refroidissement A'A.

L'écrouissage thermique au cours de l'échauffement est exactement compensé par un écrouissage thermique en sens inverse au cours du refroidissement.

Un écrouissage thermique libre est réversible².

- cet écrouissage ne s'accompagne pas de déformation plastique.
- les limites d'élasticité sont restaurées par une variation de température opposée.

4. Domaines d'élasticité thermoextensible ou thermorétrécissant

Le sens de variation des limites d'élasticité avec la température dépend du sens de variation de la température, mais également du matériau étudié.

Nous dirons que le domaine d'élasticité du matériau est thermoextensible lorsque toutes les limites d'élasticité augmentent si la température augmente. Dans le cas contraire, le domaine d'élasticité est alors dit *thermorétrécissant*.

²On est ainsi assuré de l'existence d'une plage de températures et de contraintes où les évolutions sont toutes de nature réversible. En effet, les écrouissages induits par de faibles variations de température s'effectuent librement, dès lors que l'état de contraintes est suffisamment éloigné de la frontière du domaine d'élasticité. Par conséquent, on peut toujours caractériser les propriétés thermoélastiques du matériau pour les états de température et de contraintes situées à l'intérieur du domaine d'élasticité.

Notons que la terminologie thermoextensible et thermorétrécissant fait référence à une élévation de température, le sens de variation est inversé pour une diminution de température.

Lors d'un refroidissement :

- le domaine d'élasticité d'un matériau thermorétrécissant s'agrandit,
- le domaine d'élasticité d'un matériau thermoextensible diminue.

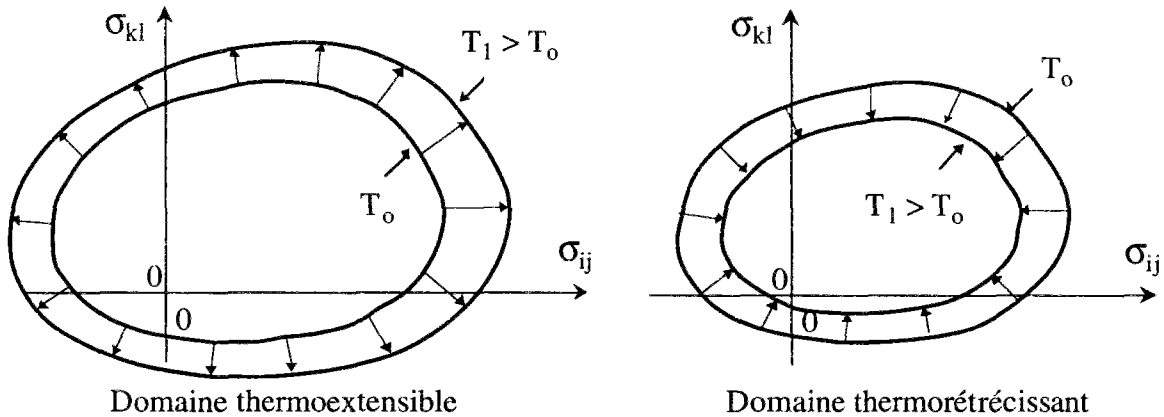


Figure 7 : Domaines d'élasticité thermoextensible et thermorétrécissant.

5. Ecouissage thermique gêné par l'état de contraintes.

Lorsque les limites d'élasticité diminuent au cours d'un chargement thermique, le domaine d'élasticité se réduit et la contrainte maintenue constante dans l'échantillon peut se retrouver à la frontière de ce domaine. Si l'on poursuit le chargement thermique, l'écrouissage thermique est alors gêné par la charge mécanique appliquée à l'échantillon.

L'essai décrit en figure 8 comporte à la fois un écouissage thermique libre et un écouissage thermique gêné. Cet essai débute par le cycle thermique AA'A décrit précédemment., puis une charge mécanique est appliquée à la température du laboratoire jusqu'à un niveau de contrainte B, proche de la limite d'élasticité initiale. Les essais précédents ont montré que ces opérations sont réversibles. En maintenant cette fois ci la contrainte au niveau B, l'éprouvette est soumise à un deuxième cycle thermique BB'B. L'essai se termine par un chargement mécanique à la température du laboratoire: la contrainte mécanique est portée à un niveau C puis relâchée jusqu'au niveau B.

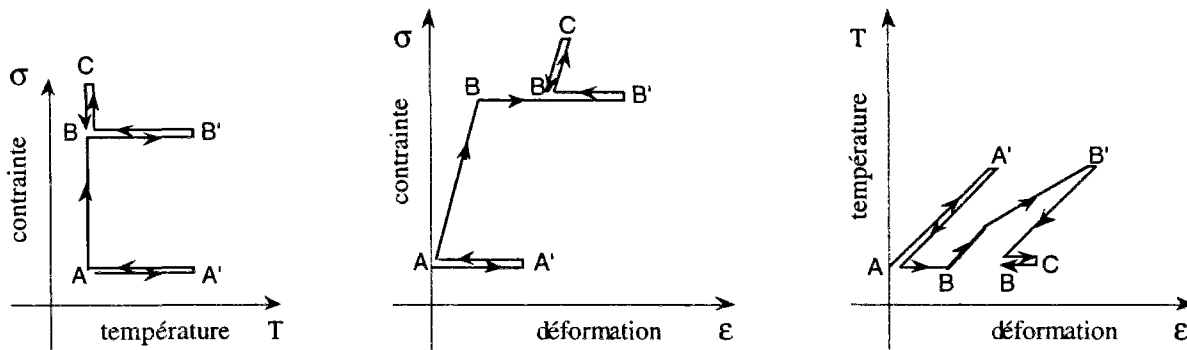


Figure 8 : Ecroissance et déformation plastique au cours d'un cycle thermique

Les cycles thermiques AA'A et BB'B sont de même intensité, mais ils n'ont manifestement pas les mêmes effets. Le cycle thermique BB'B fait apparaître des déformations plastiques dans le matériau, alors que rien de tel n'est constaté sur le cycle AA'A.

Le cycle final BCB de l'essai 8 est élastique, il montre une augmentation de la limite d'élasticité du matériau après le cycle thermique complet BB'B. La limite d'élasticité est modifiée par le cycle thermique BB'B, alors qu'il y a restauration des limites d'élasticité lors du cycle AA'A.

Lors de l'échauffement BB', l'écroissance thermique est gêné par le chargement mécanique. Cet écroissance thermique gêné est manifestement un phénomène irréversible :

- il s'accompagne d'une déformation plastique.
- les limites d'élasticité ne sont pas restaurées par une variation de température opposée.

Un écroissance thermique gêné est plus facile à déceler qu'un écroissance thermique libre, car il se manifeste avec une déformation irréversible du matériau. C'est ce phénomène qui est généralement mis en évidence au cours d'essais de laboratoire, alors que l'écroissance thermique libre est souvent ignoré, du fait de son caractère latent.

Les écroissages thermiques du domaine d'élasticité pour les phases d'échauffement AA' (écroissance thermique libre) et BB' (écroissance thermique gêné) sont différents. Au cours de l'écroissance thermique gêné de B à B', la variation de la limite d'élasticité mesurée dans cet essai est bloquée à la valeur de la contrainte B. Dans d'autres directions de contraintes, les limites d'élasticité ne sont pas nécessairement bloquées, cependant leur évolution diffère certainement de celle obtenue pour un écroissance thermique libre. On aboutit ainsi aux évolutions présentées figure 9.

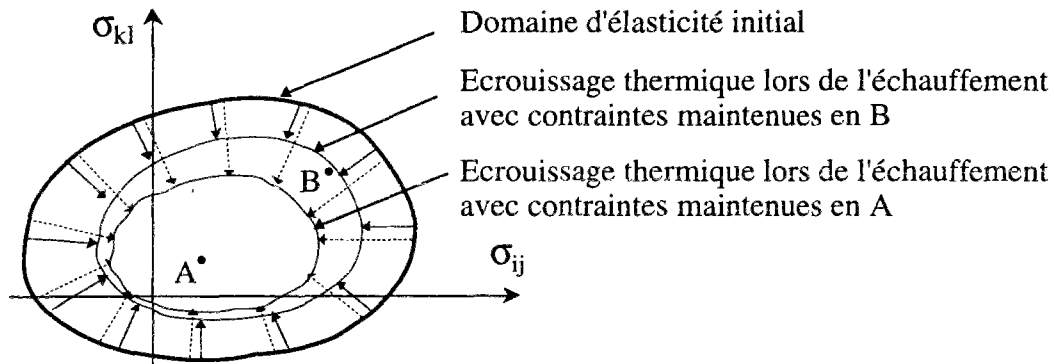


Figure 9 : Évolutions du domaine d'élasticité au cours du chargement.

Au cours du refroidissement B'B, la limite d'élasticité augmente. Elle est ainsi supérieure à sa valeur à la contrainte en B et l'écrouissage thermique s'effectue librement. Les variations du domaine d'élasticité pour les refroidissements AA' et BB' sont représentées figure 10.

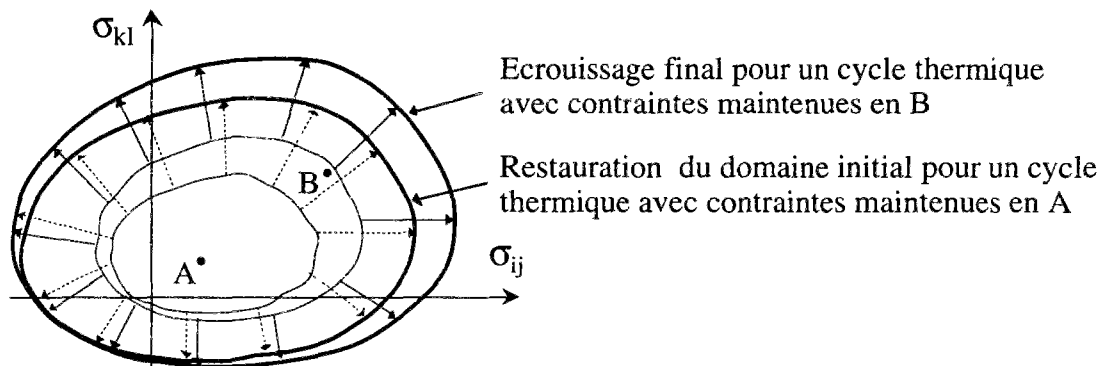


Figure 10 : Évolutions du domaine d'élasticité au cours du déchargement.

6. Combinaison des écrouissages thermique et mécanique.

Les écrouissages du domaine d'élasticité sont de natures diverses. On a présenté successivement un écrouissage mécanique (en condition isotherme), et des écrouissages thermiques libres et gênés.

Pour un chargement quelconque défini par un trajet donné en contraintes et en température, l'écrouissage du domaine peut être décomposé en une succession d'écrouissages infinitésimaux qui sont de deux types :

- écrouissage mécanique isotherme.
- écrouissage thermique libre.

Par conséquent, il suffit de connaître les règles d'évolution de ces deux types d'écrouissage pour décrire tous les écrouissages du domaine d'élasticité.

Ce point se montre aisément de la façon suivante. Considérons un chargement donné en contraintes et en température. Tant que la contrainte appliquée est à l'intérieur du domaine

d'élasticité, les écrouissages thermiques ont lieu librement. Lorsque la contrainte appliquée est à la frontière du domaine d'élasticité, on poursuit le chargement par incréments de température et de contraintes (δT , $\delta \sigma$). Avant d'appliquer l'incrément de température δT , on diminue le chargement mécanique pour que l'écrouissage thermique ait lieu librement. Le chargement mécanique est ensuite rétabli dans une évolution isotherme, et l'incrément de chargement mécanique $\delta \sigma$ est alors appliqué.

De cette façon, on remplace le chargement réel par une suite d'incrément de chargements "perturbés", au cours desquels les écrouissages thermiques ont lieu librement. En diminuant la taille du volume élémentaire des incréments, le chargement perturbé converge de façon uniforme vers le chargement souhaité. Cette convergence uniforme des chargements assure une convergence uniforme des déformations et déformations plastiques associées à ces chargements³.

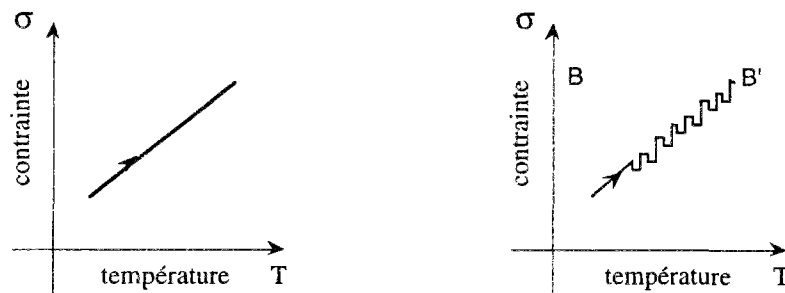


Figure 11 : Trajets de chargement réel et perturbé.

Cette décomposition des écrouissages est extrêmement utile pour formuler les lois d'écoulement. On remarquera en particulier que la déformation plastique apparue lors d'un écrouissage thermique gêné provient du même mécanisme plastique que pour les écrouissages mécaniques isothermes.

II.4. Quelques aspects thermodynamiques de l'écrouissage thermique.

L'objectif de cette partie est de parvenir à une meilleure compréhension de l'écrouissage thermique. En inscrivant la démarche dans un cadre thermodynamique, il devient possible de bénéficier des présentations classiques de la plasticité à l'aide de potentiels énergétiques. Cette partie introduit la notion de chaleur latente de transformation de l'état d'écrouissage.

³ Cette hypothèse revient à postuler à une dépendance continue de la réponse (ici, les déformations) en fonction la variable d'entrée (ici, le chargement). En l'absence de cette hypothèse de convergence, il n'est pas possible de prétendre à une modélisation du comportement du matériau sans prendre en compte la nature exacte des perturbations intervenant dans des essais réels. Cette hypothèse est en fait un préalable à la modélisation, sans elle, on ne peut affirmer que de faibles perturbations sont sans effet sur les résultats expérimentaux.

II.4.1. Notions thermodynamiques.

En premier lieu, sont rappelées quelques notions de thermodynamique utiles à la description des lois de comportement en mécanique. Cet exposé rapide est nécessairement incomplet, certains points importants tels que le postulat de l'état local ne sont pas évoqués. On se contente ici de préciser le vocabulaire et les notations employés par la suite.

1. État thermodynamique et variables d'état.

Une modélisation sous entend la notion d'état du matériau. Définir le comportement d'un matériau, c'est exhiber les lois qui gouvernent l'évolution des variables caractérisant l'état de ce matériau pour des sollicitations données.

Dans une approche thermodynamique, l'*état thermodynamique* du matériau désigne ses états d'énergie autres que l'énergie cinétique (macroscopique). La modélisation repose sur la recherche des variables d'état donnant une représentation de l'état thermodynamique du matériau. Ces variables d'état servent donc à la description des états d'énergies. La loi de comportement est formée par les relations qui lient les variables d'état au cours des évolutions de l'état du matériau sous l'effet des variations des sollicitations externes.

L'état thermodynamique est défini pour une quantité de matière qui constitue le système thermodynamique. Dans une description en terme de milieux continus, le système thermodynamique correspond à la matière contenue dans un volume élémentaire représentatif du comportement. La taille volume élémentaire représentatif donne l'échelle de la modélisation. Les variables d'état sont définies à cette échelle, il s'agit donc d'une description locale de l'état thermodynamique et du comportement.

Un milieu continu est décrit par des champs de variables continues spatialement. Les énergies et les variables d'état sont des quantités volumiques définies pour un volume élémentaire représentatif.

2. Inégalité de Clausius Duhem en thermomécanique.

Le premier principe de la thermodynamique affirme que l'énergie se conserve lorsqu'on la considère sous toutes ses formes. Les échanges d'énergie se répartissent ici en le travail des efforts extérieurs et les apports extérieurs de chaleur. En partant de la description classique des efforts mécaniques s'exerçant sur les milieux solides, on obtient le résultat suivant :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \pi : \frac{d\Delta}{dt} - \text{Div } \mathbf{Q} \quad (1)$$

$\mathcal{E}$ désigne l'énergie interne volumique dans une description lagrangienne, π est le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, Δ le tenseur des déformations de Green-Lagrange et $\mathbf{Q}$ le vecteur courant de chaleur en description lagrangienne. Nous ne considérerons ici que les échanges de chaleur par conduction.

Le second principe de la thermodynamique fixe une limite à la conversion de chaleur en travail. Il postule l'existence d'une variable d'état, l'*entropie*, et d'une grandeur universelle positive, la *température*. L'inégalité fondamentale pour un milieu continu prend la forme suivante :

$$\frac{dS}{dt} + \text{Div} \frac{\mathbf{Q}}{T} \geq 0 \quad (2)$$

où S est l'entropie volumique dans une description lagrangienne et T la température absolue.

On appelle "inégalité de Clausius-Duhem" l'inégalité obtenue en multipliant la relation (2) par la température T puis en retranchant à chaque membre les termes de la relation (1) :

$$\pi : \frac{d\Delta}{dt} - S \frac{dT}{dt} - \frac{d\Psi}{dt} - \frac{\mathbf{Q}}{T} \cdot \text{Grad } T \geq 0 \quad (3)$$

Ψ désigne l'énergie libre volumique $E - TS$.

Pour l'ensemble de cette étude, l'on adopte l'hypothèse de la petite transformation. Les quantités lagrangienne et eulérienne ont alors la même valeur numérique. L'écriture de l'inégalité (3) est modifiée en remplaçant le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff π par le tenseur de Cauchy σ , le vecteur de courant de chaleur lagrangien $\mathbf{Q}$ par son homologue eulérien $\mathbf{q}$ et le tenseur des déformations de Green-Lagrange par sa forme linéarisée ε . En adoptant ces notations, l'inégalité de Clausius-Duhem devient :

$$D = \sigma : \frac{d\varepsilon}{dt} - S \frac{dT}{dt} - \frac{d\Psi}{dt} - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \text{grad } T \geq 0 \quad (4)$$

3. Dissipation intrinsèque.

Le terme D défini par (4) représente la dissipation dans un volume élémentaire du milieu continu. On distingue deux quantités, appelées respectivement dissipation intrinsèque D_I et dissipation thermique Φ_T , que l'on suppose séparément positives :

$$D_I = \sigma : \frac{d\varepsilon}{dt} - S \frac{dT}{dt} - \frac{d\Psi}{dt} \geq 0 \quad (5)$$

$$\Phi_T = - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \text{grad } T \geq 0 \quad (6)$$

Lorsque la température dans le matériau est uniforme, la dissipation se réduit à la dissipation intrinsèque.

La dissipation thermique est associée à la conduction de la chaleur dans le milieu continu.

4. Équation thermique.

L'inégalité (4) étant une combinaison linéaire des relations (1) et (2), le terme $\frac{D}{T}$ est identiquement égal au premier membre de l'inégalité (2). On a la relation :

$$\frac{dS}{dt} + \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{T} = \frac{D}{T} \quad (7)$$

Il existe deux sources d'entropie volumique : un apport d'entropie externe $-\operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{T}$ et une production interne d'entropie $\frac{D}{T}$.

En éliminant la dissipation thermique Φ_T dans l'équation (7), on obtient l'équation thermique :

$$T \frac{dS}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + DI \quad (8)$$

L'équation thermique est un bilan entropique liant l'évolution de l'entropie volumique, la chaleur apportée par conduction par unité de volume et la dissipation intrinsèque DI . Lorsque l'expression de la dissipation intrinsèque en fonction des variables d'état est connue, l'équation thermique donne l'évolution de l'entropie du système.

5. Variables externes et internes, équations d'état.

On fait généralement une distinction parmi les variables d'état. Celles qui apparaissent *explicitement* dans l'écriture de la dissipation intrinsèque sont qualifiées de *variables externes*, les autres sont dites *variables internes*. Dans cette étude, les déformations totales, les contraintes, la température et l'entropie sont donc des variables externes⁴.

Dans un comportement thermoélastique la dissipation intrinsèque est nulle. L'énergie libre Ψ ne varie que si les déformations ε ou la température T évoluent, cette fonction sera donc

⁴ A l'exception de l'entropie, ces variables externes sont également observables, c'est à dire qu'il est possible de les mesurer directement. La déformation est obtenue par des mesures de déplacements, les contraintes sont déterminées à partir de l'équilibre mécanique des facettes du matériau et la température est mesurée en cas d'équilibre thermique avec un autre corps solide en contact. En revanche, l'entropie ne fait pas l'objet de mesure directe, cette quantité ne doit son existence qu'au second principe et elle ne peut être définie autrement. (Voir également la remarque sur la réversibilité en II.5.6)

décrite à l'aide de ces deux variables. Les deux variables ε et T étant indépendantes, la fonction $\Psi(\varepsilon, T)$ décrivant l'énergie libre vérifie :

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \quad (9a)$$

$$S = - \frac{\partial \Psi}{\partial T} \quad (9b)$$

Ces relations entre les variables externes constituent les *équations d'état* du système.

6. Jeu de variables normal vis-à-vis des variables externes.

Les évolutions réversibles sont décrites par une loi de comportement liant les variables externes. En revanche lorsque la dissipation intrinsèque est non nulle, la description du comportement et des états thermodynamiques doit faire appel à des variables internes. Dans un matériau de comportement plastique, ces variables peuvent être fonction des déformations irréversibles ou des limites d'élasticité. On recherche un *jeu de variable d'état complet*, c'est-à-dire suffisant pour décrire l'état du système pour toutes les sollicitations que l'on envisage sur ce matériau.

La validité des équations d'état (9) est maintenue si le jeu des variables d'état est *normal vis-à-vis des variables d'état externes*, c'est-à-dire s'il existe des évolutions réelles où chacune des variables externes évolue indépendamment de toutes les autres variables d'état.

Par exemple, le jeu de variables (ε, T, α) est normal vis-à-vis des variables externes ε et T s'il existe :

- des évolutions réelles où seule la température varie, la déformation et les variables α étant fixées,
- des évolutions réelles où seules les déformations varient, la température et les variables α étant fixées.

En ce cas, l'expression de la dissipation intrinsèque lors des évolutions irréversibles se simplifie :

$$DI = - \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} \geq 0 \quad (10)$$

Pour connaître la valeur de la dissipation intrinsèque, il faut déterminer la loi complémentaire liant $\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}$ à $\frac{d\alpha}{dt}$. Cette loi reste soumise à la restriction thermodynamique qui impose une dissipation DI positive.

Le choix des variables internes et de la loi complémentaire est bien évidemment fonction du comportement du matériau. Un cadre adapté aux modèles plastiques va être examiné à présent.

II.4.2. Les équations d'état de la plasticité.

1. Définition des paramètres d'écrouissage.

Le *domaine d'élasticité* est l'ensemble des contraintes σ accessible à partir de l'état de contraintes actuel par une évolution infiniment lente⁵, réversible et isotherme.

Pour décrire cet ensemble, on introduit une fonction scalaire continue f , appelée *critère de plasticité*, définie sur l'espace des tenseurs des contraintes dont le signe constitue un indicateur du domaine d'élasticité. Par convention, le tenseur de contrainte σ appartient au domaine d'élasticité si et seulement si $f(\sigma)$ est négatif ou nul.

Pour modéliser un comportement plastique écrouissable, il faut être en mesure de décrire l'ensemble des domaines d'élasticité après diverses sollicitations mécaniques et thermiques. D'un point de vue pratique, un modèle requiert un nombre fini de paramètres et l'on recherche les fonctions critères dans un espace de fonction de dimension finie. La dimension de cet espace définit le nombre minimal de *paramètres d'écrouissage indépendants* donnant une représentation des évolutions du domaine d'élasticité qui soit compatible avec le degré de précision que l'on s'est fixé. En général, de nombreux facteurs viennent limiter la connaissance précise du domaine d'élasticité réel, il suffit alors de peu de paramètres d'écrouissage pour rendre compte des observations expérimentales.

L'ensemble des domaines d'élasticité est donc décrit par les paramètres d'écrouissage, notés ζ , et par le critère de plasticité $f(\sigma, \zeta)$ fonction des deux variables σ et ζ . Par convention, dire que la contrainte σ appartient au domaine d'élasticité décrit par ζ signifie :

$$f(\sigma, \zeta) \leq 0 \quad (11)$$

Le jeu de paramètres d'écrouissage ζ permet la description de tous les écrouissages du matériau, y compris les écrouissages thermiques.

La température n'apparaît pas de manière explicite dans l'écriture du critère de plasticité, mais la valeur des paramètres ζ dépend de la température. L'intérêt de cette présentation est que

⁵ Les comportements plastiques étudiés étant indépendants des vitesses d'évolution, il est inutile de se limiter aux évolutions infiniment lentes dans la définition précédente.

le même paramètre d'écrouissage peut servir à la fois à la description d'un écrouissage plastique isotherme et d'un écrouissage purement thermique.

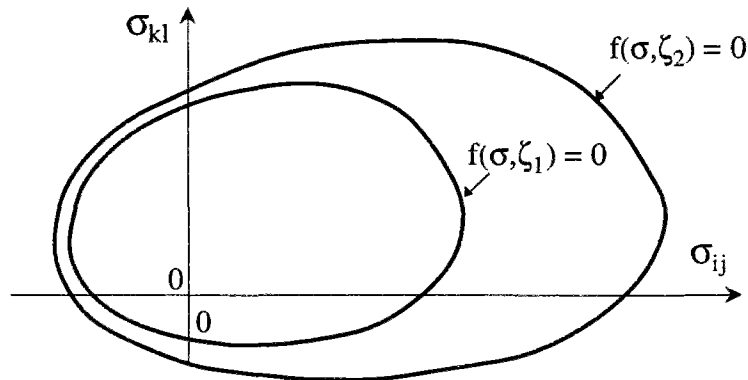


Figure 12 : Variation du domaine d'élasticité et paramètres d'écrouissage.

2 Variables internes caractérisant l'état d'écrouissage

Considérons un volume élémentaire d'un matériau plastique dans un état déformé. Pour caractériser son état actuel par rapport à un état de référence, la donnée des déformations ϵ et de la température θ suffit lorsque cette matière a connu uniquement des évolutions thermoélastiques. En revanche, lorsqu'il s'est produit des évolutions plastiques, il faut de plus indiquer les déformations plastiques ϵ^p et l'état d'écrouissage du matériau.

La description des phénomènes physiques responsables de l'écrouissage ne peut généralement pas être faite à l'échelle du volume élémentaire représentatif. Cependant, pour parvenir à une modélisation du comportement mécanique, il faut connaître une mesure globale des effets de ces phénomènes microscopiques. On désigne par χ les variables internes permettant de caractériser l'état d'écrouissage à l'échelle du volume élémentaire représentatif.

Le fait que l'on ne puisse pas décrire la physique des phénomènes à notre échelle d'étude ne signifie pas qu'il faille les négliger. Prenons pour exemple la plasticité des métaux. Le mécanisme responsable de la plasticité de ces matériaux est à rechercher dans le mouvement de dislocations au sein du réseau cristallin. Mais dans l'étude du comportement mécanique, il n'est pas question de décrire l'évolution des dislocations. En revanche, la déformation plastique peut être vue comme une mesure globale des effets de ces dislocations à l'échelle du volume élémentaire représentatif.

Les variables internes χ sont à distinguer des paramètres d'écrouissage ζ . On donne plus loin les liens entre ces deux variables. Pour l'instant, on remarquera simplement qu'au cours d'un écrouissage thermique libre, les paramètres ζ sont modifiés, alors que les variables χ sont

par définition des variables internes dont la valeur ne change pas au cours d'une évolution réversible.

3. Energie libre et équations d'état.

L'état d'un volume élémentaire est caractérisé par les variables suivantes:

- θ : température,
- ε : déformation,
- ε^p : déformation plastique,
- χ : état d'écrouissage.

L'énergie libre est une fonction d'état, qui dépend par conséquent de ce jeu de variables. On suppose que cette fonction prend la forme suivante :

$$\Psi(\theta, \varepsilon, \varepsilon^p, \chi) = \varphi(\varepsilon - \varepsilon^p, \theta) + V(\chi, \theta) \quad (12)$$

L'énergie libre est la somme de deux énergies :

- φ est la fonction énergie libre élastique ($\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^p$)
- V est appelée énergie libre bloquée par écrouissage.

La justification de ces dénominations est faite plus loin, lorsque l'on explicite les équations d'état.

Cette séparation des énergies se rencontre classiquement dans les présentations thermodynamique de la plasticité. L'originalité de l'expression (12) de l'énergie libre réside dans la présence de la température parmi les arguments de l'énergie bloquée par écrouissage.

Avec l'expression (12), les équations d'état (8) deviennent :

$$\sigma = \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \Big|_{\theta} (\varepsilon - \varepsilon^p, \theta) \quad (13a)$$

$$S = - \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \Big|_{\varepsilon} (\varepsilon - \varepsilon^p, \theta) - \frac{\partial V}{\partial \theta} \Big|_{\chi} (\chi, \theta) \quad (13b)$$

L'équation (13a) relie les contraintes aux déformations élastiques et à la température. Cette équation est en particulier indépendante de l'état d'écrouissage et des évolutions plastiques passées.

Compte tenu de (10) et (13a), la dissipation intrinsèque a pour expression :

$$DI = \sigma : \dot{\varepsilon}^p - \frac{\partial V}{\partial \chi} \Big|_{\theta} \dot{\chi} \quad (14)$$

La force thermodynamique associée à la dissipation à la vitesse des déformations plastiques d'écrouissage est égale à la contrainte σ . Le terme $\sigma : \dot{\epsilon}^p$ est appelé dissipation plastique. Cette terminologie ne doit pas faire oublier la présence d'un autre terme dans la dissipation qui associe à la vitesse des variables d'écrouissage une force thermodynamique :

$$A = - \frac{\partial V}{\partial \chi} |_{\theta} (\chi, \theta) \quad (15)$$

L'hypothèse suivante est une étape essentielle de la modélisation des écrouissages :

On suppose qu'il existe un paramétrage ζ du domaine d'élasticité et des variables internes χ caractéristiques de l'état d'écrouissage tel que ζ soit égal à la force thermodynamique associée à $\dot{\chi}$ dans la dissipation.

L'intérêt de la présence de la température parmi les arguments de la fonction V est maintenant clair : la valeur des forces thermodynamiques ζ dépend ainsi de la température, ce qui cause des écrouissages thermiques du domaine d'élasticité.

4. Sens thermodynamique du domaine d'élasticité : une loi complémentaire.

L'identification d'un paramétrage ζ avec les forces thermodynamiques associées aux variations des variables interne χ ne résulte pas d'un choix arbitraire. Cette opération donne un sens nouveau au domaine d'élasticité.

En effet, pour achever la description du modèle de comportement, il faut déterminer les lois complémentaires qui lient la vitesse d'évolution des variables internes aux forces thermodynamiques associées à ces variables.

Les variables ζ , issues de la description du domaine d'élasticité, s'identifient à présent aux forces thermodynamiques associées aux variations à la variable interne d'écrouissage χ .

De même, les forces associées aux déformations plastiques ϵ^p s'identifient au tenseur des contraintes σ . Les forces thermodynamiques associées aux déformations totales et aux déformations plastiques ont donc la même valeur⁶.

⁶ On note ici le double statut des contraintes, qui sont à la fois les forces thermodynamiques pour les déformations totales du système et pour les déformations plastiques. Ce double statut est essentiellement dû à l'hypothèse de restitution du travail élastique.

Le domaine d'élasticité prend une signification nouvelle : il est constitué de l'ensemble des forces (σ, ζ) pour lesquelles la vitesse d'évolution des variables internes associées ϵ^p et χ est nulle. C'est une information partielle sur les lois complémentaires.

Les règles d'écoulement viendront compléter cette information.

5. Illustration sur un modèle rhéologique

Considérons le système rhéologique décrit figure 13 qui associe en série un ressort $\mathcal{K}$ et un patin relié à un deuxième ressort $\mathcal{H}$. Le patin reste bloqué si la force demeure en deçà d'un seuil noté C , et il glisse si la force qui lui est appliquée atteint ce seuil. Il s'agit d'un comportement plastique parfait de ce patin.

Le ressort $\mathcal{H}$ permet de simuler un écrouissage cinématique de ce système rhéologique. Le système étudié comporte une liaison linéaire entre allongements du patin et du ressort d'écrouissage de la figure 2. L'on réservera la notation χ pour l'allongement du ressort $\mathcal{H}$.

Cette liaison entre le patin et le ressort $\mathcal{H}$ n'apporte pas de modification de principe dans le fonctionnement de ce système rhéologique. Elle est introduite pour marquer une différence entre les deux variables internes déformation plastique ϵ^p et la variable χ caractéristique de l'état d'écrouissage.

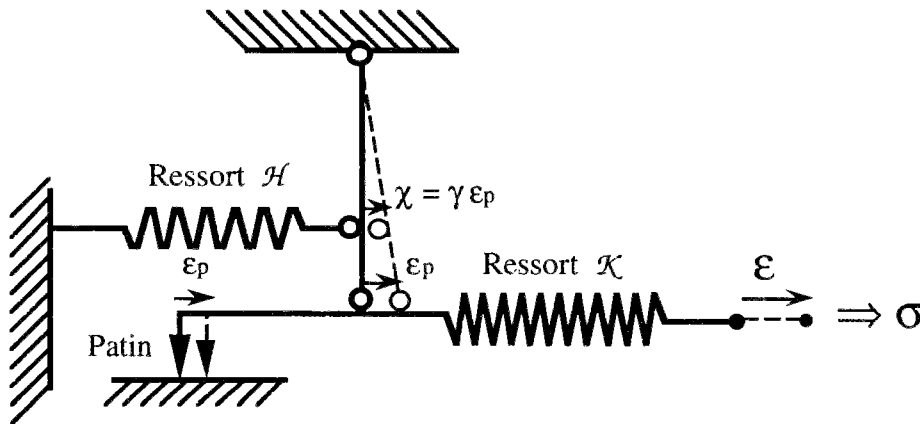


Figure 13 : Système rhéologique plastique écrouissable avec une liaison linéaire entre les allongements du patin et du ressort d'écrouissage.

La température est une variable commune aux éléments du système rhéologique. On suppose que chacun des éléments "ressorts" suit une loi thermoélastique linéaire avec une raideur notée respectivement K et H , une dilatation thermique linéaire α_K et α_H et une capacité calorifique C_K et C_H .

L'énergie libre du système est égale à la somme des énergies libres des composants :

$$\Psi(\theta, \epsilon, \epsilon^p, \chi) = \Psi_K(\epsilon - \epsilon^p, \theta) + \Psi_H(\chi, \theta) \quad (16)$$

Avec les expressions suivantes des potentiels :

$$\Psi_K(\varepsilon^e, \theta) = \frac{1}{2} K \varepsilon^2 - \frac{1}{2} \frac{C_K}{T_0} \theta^2 - \alpha_K K \theta \varepsilon^e \quad (17)$$

$$\Psi_H(\chi, \theta) = \frac{1}{2} H \chi^2 - \frac{1}{2} \frac{C_H}{T_0} \theta^2 - \alpha_H H \theta \chi \quad (18)$$

On suppose que le patin peut dissiper de l'énergie sous forme de chaleur, mais qu'il ne peut pas en emmagasiner. L'énergie libre de cet élément ne varie ni par allongement, ni par changement de température.

On note ζ l'opposée de la force agissant sur le ressort $\mathcal{H}$.

$$\zeta = - \frac{\partial \Psi_H}{\partial \chi} |_{\theta} (\chi, \theta) = - H \chi + \alpha_H H \theta \quad (19)$$

Soit γ les rapports des bras de levier entre le patin et le ressort d'écrouissage (figure 13). La force agissant sur le patin est égale à $\sigma + \gamma \zeta$. On en déduit l'expression du critère de plasticité pour ce système rhéologique :

$$f(\sigma, \zeta) = | \sigma + \gamma \zeta | - C \quad (20)$$

Cet exemple présente toutes les caractéristiques souhaitées :

- le domaine d'élasticité est écrouissable thermiquement,
- l'expression de l'énergie libre a une forme identique à l'expression (12),
- la force associée à la variable interne d'écrouissage χ est le paramètre d'écrouissage du domaine d'élasticité ζ .

Dans un système rhéologique, on visualise directement les variables et les liaisons internes au système. Lorsque l'on cherche à modéliser le comportement plastique d'un matériau, les variables internes ne sont pas observables. Les variables internes pertinentes pour un matériau donné sont déterminées par une analyse des résultats d'essais.

II.4.3. Les couplages thermomécaniques associés à l'écrouissage thermique.

1. Énergie libre bloquée par écrouissage.

Après une décharge totale qui restitue l'état initial en contrainte et en température, l'énergie libre du matériau est augmentée du terme $V(\chi, \theta)$. Entre l'état initial et cet état où l'on a restauré contrainte et température, les propriétés mécaniques du matériau n'ont pas varié, on note simplement un écrouissage du domaine d'élasticité.

Cette énergie est appelée "énergie bloquée par écrouissage" pour la raison suivante. Pour des évolutions isothermes, un bilan d'énergie montre que l'énergie bloquée par écrouissage est la différence entre l'énergie mécanique fournie et l'énergie dissipée par la dissipation intrinsèque du matériau.

Si ΔV est positif, l'énergie bloquée est effectivement stockée au sein de l'énergie libre du matériau, en revanche si ΔV est négatif, cette énergie bloquée est en fait restituée au milieu extérieur. L'énergie bloquée est donc une énergie emmagasinée dans le matériau qui peut éventuellement être restituée ultérieurement, au cours d'un autre chargement. Le signe de l'énergie bloquée ΔV n'est pas connu a priori, les restrictions thermodynamiques portant uniquement sur le signe de l'énergie dissipée.

Dans une modélisation classique de la plasticité, l'énergie bloquée par écrouissage ne dépend pas de la température. Pour justifier la présence de la température parmi les arguments de V , il faut comprendre l'origine physique de cette énergie. Ces phénomènes physiques responsables des écrouissages sont décrits à une échelle en deçà de celle adoptée dans l'étude du comportement thermomécanique du matériau.

Une origine de l'énergie bloquée communément admise est qu'elle provient d'une incompatibilité géométrique des déformations irréversibles qui se produisent à une échelle microscopique. Cela suppose en particulier que les déformations irréversibles ne sont pas homogènes à cette échelle microscopique. Les déformations plastiques microscopiques résultent par exemple de dislocations dans des réseaux cristallins (cas de métaux), ou encore de glissements irréversibles entre grains (cas de milieux granulaires) voire également de déformations plastiques de ces grains.

En tout état de cause, ces déformations plastiques sont rarement cinématiquement compatibles à elles seules, une contribution élastique est nécessaire pour assurer la compatibilité du champ des déformations totales à cette échelle. Même après décharge, il reste à l'échelle microscopique une déformation élastique. Ainsi une certaine quantité d'énergie n'est pas récupérée à la décharge sous forme de travail, mais elle n'est pas non plus convertie sous forme de chaleur. D'où la présence d'une énergie bloquée.

Compte tenu de cette explication, une dépendance en température de l'énergie bloquée se conçoit aisément. En effet, l'énergie bloquée a la même origine physique que l'énergie élastique macroscopique. Puisque l'énergie libre élastique varie en fonction de la température, il est naturel de supposer qu'il en est de même pour l'énergie libre bloquée par écrouissage.

Plus précisément, il faut tenir compte des termes de couplages thermoélastiques à l'échelle microscopique.

Sous l'effet d'une élévation de température uniforme, la dilatation thermique à une échelle microscopique est généralement cinématiquement incompatible dans un milieu formé de matériau de propriétés hétérogènes (cas de polycristaux ou de milieux granulaires par exemple) ou dans un milieu ayant une structure complexe (enchevêtrement de plaquettes argileuses ou de filaments de polymère par exemple). Il faut à nouveau une contribution élastique pour assurer la compatibilité du champ des déformations totales. L'énergie bloquée par écrouissage est donc sensible à la température.

De plus, les "contraintes thermiques" présentes à un niveau microscopique vont modifier les seuils d'élasticité à l'échelle du volume élémentaire représentatif. Ce phénomène est à l'origine de l'écrouissage thermique libre.

Le modèle rhéologique présenté plus haut donne une bonne illustration de ces phénomènes. La dilatation thermique du ressort d'écrouissage est empêchée par le patin. Sous l'action d'une variation de température, la force interne sur le patin varie, ce qui donne un écrouissage thermique. Tant que le seuil de glissement n'est pas atteint, ce phénomène est réversible : c'est un écrouissage thermique libre.

2. Fonction entropie bloquée par écrouissage.

En différenciant l'équation d'état (13b), on obtient la relation suivante :

$$dS = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon^e \partial \theta} d\varepsilon^e + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right) d\theta - \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \chi} d\chi \quad (21)$$

Le facteur de $d\theta$ est proportionnel à la capacité calorifique du matériau. Ce terme est indépendant de la valeur de l'état d'écrouissage lorsque :

$$\frac{\partial^3 V}{\partial \theta^2 \partial \chi} = 0 \quad (22)$$

En admettant la relation (22), la forme de l'énergie libre se simplifie :

$$\Psi(\theta, \varepsilon, \varepsilon^p, \chi) = \varphi(\varepsilon - \varepsilon^p, \theta) + U^b(\chi) - \theta S^b(\chi) \quad (23)$$

La première fonction $U^b(\chi)$ représente l'énergie bloquée sous forme mécanique à la température T_0 ($\theta=0$). Cette énergie bloquée $U^b(\chi)$ se rencontre classiquement dans une étude isotherme du modèle plastique écrouissable.

La deuxième fonction $S^b(\chi)$ est la *fonction entropie bloquée par écrouissage*.

Cette dénomination se justifie si on examine la forme nouvelle de l'équation d'état (13b) :

$$S = S^b(\chi) - \frac{\partial \phi}{\partial \theta}(\varepsilon - \varepsilon^p, \theta) \quad (24)$$

Après un cycle de chargements en contraintes et température pendant lequel l'écrouissage évolue de c_1 à c_2 , la variation d'entropie sera égale à $S^b(c_2) - S^b(c_1)$. Cette entropie est acquise lors des écrouissages irréversibles et elle reste bloquée avec l'état d'écrouissage.

Dans ce chapitre les échanges thermiques sont étudiés avec une capacité calorifique indépendante de l'état d'écrouissage car l'emploi des fonctions U^b et S^b permet de mieux saisir la signification des équations.

Mais en règle générale, l'expression (12) de l'énergie libre ne présente pas de difficulté particulière. En l'absence de l'hypothèse (22), l'entropie bloquée par écrouissage a pour expression :

$$S^b = - \int \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \chi}(\chi, \theta) d\chi \quad (25)$$

Cette quantité n'est pas une fonction de l'état du système, car sa valeur dépend de l'histoire des températures au cours des évolutions plastiques.

3. Chaleur latente de transformation de l'état d'écrouissage

On dénomme habituellement chaleur latente le produit de la température absolue⁷ T avec une variation d'entropie induite sans variation de température. Ainsi, à partir de la fonction entropie bloquée, on définit une *chaleur latente de transformation de l'état d'écrouissage* $L\chi.d\chi$ où le vecteur $L\chi$ est défini par :

$$L\chi = T \frac{dS^b}{d\chi} \quad (26)$$

Lorsque la relation (22) n'est pas vérifiée, le vecteur chaleur latente $L\chi$ est défini par :

$$L\chi = -T \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \chi} \quad (27)$$

-Une modification à température constante de l'état d'écrouissage de χ à $\chi + d\chi$ nécessite un apport de chaleur $L\chi d\chi$. Cette chaleur latente de transformation de l'état d'écrouissage intervient dans les bilans d'énergie au cours des évolutions plastiques.

⁷ On réserve la notation T à la température absolue, et la notation θ à une mesure usuelle de la température.

Pour illustrer ces propos, considérons un cycle de chargements formé d'un incrément de contrainte de σ à $\sigma + d\sigma$, suivi d'un incrément en sens inverse, tout en maintenant la température constante. On suppose qu'au cours de ce cycle élémentaire, la déformation plastique s'accroît de la quantité $d\epsilon^p$ et l'état d'écrouissage de la quantité $d\chi$.

Soit δQ la quantité de chaleur, rapportée à un volume unité, cédée à l'extérieur au cours de ce cycle élémentaire. Compte tenu des relations (8) (14) et (27), il vient :

$$\delta Q = (\sigma : d\epsilon^p + \zeta d\chi) - L\chi d\chi \quad (28)$$

Le terme entre parenthèse provient de la dissipation intrinsèque. Il est par conséquent positif. En revanche, le signe de δQ est fonction des importances respectives de ζ et $L\chi$.

S'il est positif la plastification produit un dégagement de chaleur. Dans le cas contraire il faut apporter de la chaleur depuis l'extérieur pour que ce cycle élémentaire se fasse de façon isotherme. Cette opération est exothermique dans le premier cas et endothermique dans le second.

En l'absence de chaleur latente d'écrouissage, c'est-à-dire pour les matériaux qui ne sont pas thermiquement écrouissables, on a toujours un dégagement de chaleur pour le chargement précédent. Cette mesure donne une idée de l'importance de la dissipation intrinsèque. Avec les matériaux écrouissables thermiquement, cette mesure directe de la dissipation intrinsèque est impossible.

4. Coefficient d'écrouissage thermique.

Le vecteur chaleur latente $L\chi$ intervient également dans le calcul de la sensibilité en température des forces d'écrouissage. En inversant l'ordre des dérivées partielles dans (27), on obtient la dérivée des paramètres d'écrouissage ζ par rapport à la température :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \Big|_{\chi} = \frac{L\chi}{T} \quad (29)$$

Ainsi, dans une description thermodynamique de la plasticité, la chaleur latente de transformation de l'état d'écrouissage est la clef du phénomène d'écrouissage thermique.

La variation du critère pour un incrément de température $d\theta$ vaut :

$$df \Big|_{\sigma, \chi} = \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{L\chi}{T} d\theta \quad (30)$$

Nous appellerons *coefficient d'écrouissage thermique* et nous noterons H_T le scalaire :

$$H_T = \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{L\chi}{T} = \frac{\partial f}{\partial \zeta} \Big|_{\sigma} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \Big|_{\chi} \quad (31)$$

Le signe du coefficient H_T calculé en bordure du domaine d'élasticité donne la direction de l'évolution locale du domaine d'élasticité avec la température. Les chaleurs latentes n'étant pas assujetties à des restrictions thermodynamiques, ce signe est a priori quelconque.

Si H_T est positif, alors le domaine d'élasticité se rétrécit lorsque la température augmente; le domaine d'élasticité est localement thermorétrécissant. Si H_T est négatif, le domaine d'élasticité s'agrandit lorsque la température augmente; le domaine d'élasticité est localement thermoextensible. Ces résultats concernent bien entendu l'ensemble du domaine d'élasticité si le signe de H_T est constant à la frontière du domaine d'élasticité.

II.5. Le comportement élastoplastique avec écrouissage thermique.

II.5.1. Directions d'écoulement.

Le critère indique quand une évolution thermomécanique devient irréversible. Les règles d'écoulement définissent comment s'effectue cette évolution.

1. Loi complémentaire sur les évolutions des variables internes.

Dans un modèle plastique, les évolutions des variables internes ε^p et χ se produisent simultanément au chargement. Puisque l'amplitude des évolutions des variables internes est fonction de l'amplitude du chargement, l'écoulement est déterminé par la seule donnée des directions d'écoulement.

La règle d'écoulement fixe l'ensemble des directions permises pour l'évolution des paramètres ε^p et χ . Cette règle complète la loi complémentaire sur les évolutions des variables internes. On admet l'hypothèse suivante :

La direction d'écoulement des variables internes (ε^p, χ) ne dépend que des forces thermodynamiques associées à ces variables, c'est-à-dire (σ, ζ) .

Pour calculer l'évolution des variables internes, il faut procéder de façon incrémentale. La direction d'écoulement (h_ε, h_χ) étant connue, les incréments de déformation plastique $d\varepsilon^p$ et de l'état d'écrouissage $d\chi$ sont tels que :

$$d\varepsilon^p = d\lambda h_\varepsilon \quad (32a)$$

$$d\chi = d\lambda h_\chi \quad (32b)$$

Les amplitudes des écoulements étant liées par le même multiplicateur plastique $d\lambda$. $d\lambda$ est un scalaire positif.

La direction d'écoulement (h_E, h_χ) est une fonction de (σ, ζ) , qui est définie indépendamment de la direction d'évolution du chargement. Par conséquent, il n'y a pas lieu de découper les déformations plastiques en deux termes provenant d'un chargement mécanique et d'un chargement thermique, car la direction d'écoulement est la même pour ces deux chargements⁸.

Signalons enfin que les directions d'écoulement ne sont pas quelconques, elles doivent satisfaire à une restriction thermodynamique :

$$\sigma: h_E + \zeta \cdot h_\chi \geq 0 \quad (33)$$

On est ainsi assuré que la dissipation intrinsèque définie par (10) est positive.

2. Potentiels d'écoulement.

L'on introduit généralement deux potentiels d'écoulement g et h , qui sont des fonctions des variables (σ, ζ) , convexes et dont les dérivées partielles donnent les directions d'écoulement :

$$h_E = \frac{\partial g}{\partial \sigma}(\sigma, \zeta) \quad (34a)$$

$$h_\chi = \frac{\partial h}{\partial \zeta}(\sigma, \zeta) \quad (34b)$$

L'écoulement est associé, ou de manière équivalente il vérifie l'hypothèse de normalité lorsque le potentiel d'écoulement g peut être confondu avec le critère de plasticité f . Si de plus, le potentiel h se confond avec f , l'écrouissage est dit associé.

D'autre part, lorsque les fonctions g et h sont égales, on peut étendre la formulation (34) pour des potentiels convexes mais non continûment différentiables en introduisant la sous différentielle⁹ ∂g d'une fonction convexe. Les directions admissibles (h_E, h_χ) sont définies par la relation :

⁸ Dans quelques modèles de plasticité (Tresca, Mohr-Coulomb,...) il existe des valeurs particulières de (σ, ζ) auxquelles sont associées plusieurs directions d'écoulement admissibles. On a alors un écoulement selon un *régime d'arête* ou de coin. Nous laissons ici de côté la description de ces écoulements singuliers car ces notions ne nécessitent pas de traitement particulier en rapport avec l'écrouissage thermique.

⁹ La sous différentielle au point x d'une fonction convexe semi-continue inférieurement g se définit par l'ensemble des vecteurs γ tel que $g(x) + \gamma \cdot (y-x) \leq g(y)$ est vrai pour tous les y .

$$(h_\varepsilon, h_\chi) \in \partial g(\sigma, \zeta) \quad (35)$$

Un écoulement de type (35) conduit à un régime d'arête ou de coin sur tous les points où le potentiel g n'est pas continûment différentiable.

II.5.2. Module d'écrouissage et charge plastique.

On peut à présent calculer le module d'écrouissage.

En différenciant la fonction critère $f(\sigma, \zeta(\chi, \theta))$ on obtient :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \cdot \frac{L\chi}{T} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \chi} d\chi \quad (36)$$

Compte tenu de (31) et (32b) on peut écrire de façon générale :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma + H_T d\theta + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \chi} h_\chi d\lambda \quad (37)$$

Le coefficient en facteur de $d\lambda$ définit, au signe près, le module d'écrouissage H :

$$H = - \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \chi} h_\chi = + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 V}{\partial \chi^2} h_\chi \quad (38)$$

L'expression de H obtenue ici est la même que celle que l'on obtiendrait en l'absence d'écrouissage thermique. Remarquons cependant que ce module dépend ici de la température, car ζ et V sont des fonctions de la température.

En cas de charge plastique lors de l'incrément de charge $(d\sigma, d\theta)$, l'équation de consistance conduit à la relation suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma + H_T d\theta = H d\lambda \quad (39)$$

L'écrouissage thermique intervient dans le calcul du multiplicateur plastique. On note en particulier qu'une évolution plastique peut se produire sans qu'il y ait de variations de contrainte. On retrouve ainsi les écrouissages thermiques gênés par l'état de contrainte décrits précédemment.

De manière géométrique dans l'espace des points (x, g) , cette condition signifie que le plan orthogonal à $(\gamma, 1)$ passant en $(x, g(x))$ est toujours en dessous du graphe de g . Si g est régulière, seul le plan tangent au graphe convient.

II.5.3. Règles d'écoulement.

Lorsque l'état initial de contrainte est à la frontière du domaine d'élasticité, l'évolution est soit plastique, soit élastique. Compte tenu des relations précédentes, les règles d'écoulement varient suivant le signe du module d'écrouissage H .

1. Module d'écrouissage positif.

Si le module d'écrouissage est positif, les conclusions sont les suivantes :

Module d'écrouissage strictement positif : $H > 0$

$$\text{Si } df|_{\chi} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma + H_T d\theta \geq 0 \quad \text{alors } (d\varepsilon^p, d\chi) = \frac{df|_{\chi}}{H} (h_{\varepsilon}, h_{\chi}) \quad (40)$$

$$\text{Si } df|_{\chi} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma + H_T d\theta < 0 \quad \text{alors } (d\varepsilon^p, d\chi) = (0, 0)$$

L'alternative (40) est sans ambiguïté, elle établit une distinction claire entre les chargements donnant une réponse élastique et ceux donnant une réponse plastique.

Dans l'espace des contraintes, un module d'écrouissage positif s'interprète généralement de façon géométrique par une extension locale du domaine d'élasticité lors des évolutions plastiques. Cette interprétation concerne uniquement les évolutions isothermes.

En présence d'un écrouissage thermique, l'extension du domaine d'élasticité s'observe lorsque l'on compare les domaines d'élasticité à des températures identiques.

Sur les figures 14 et 15 sont représentées quelques exemples de l'évolution du domaine d'élasticité pour un module d'écrouissage positif. La position du domaine d'élasticité a été représentée par un trait fin après la charge plastique et par un trait gras après restauration de la température initiale.

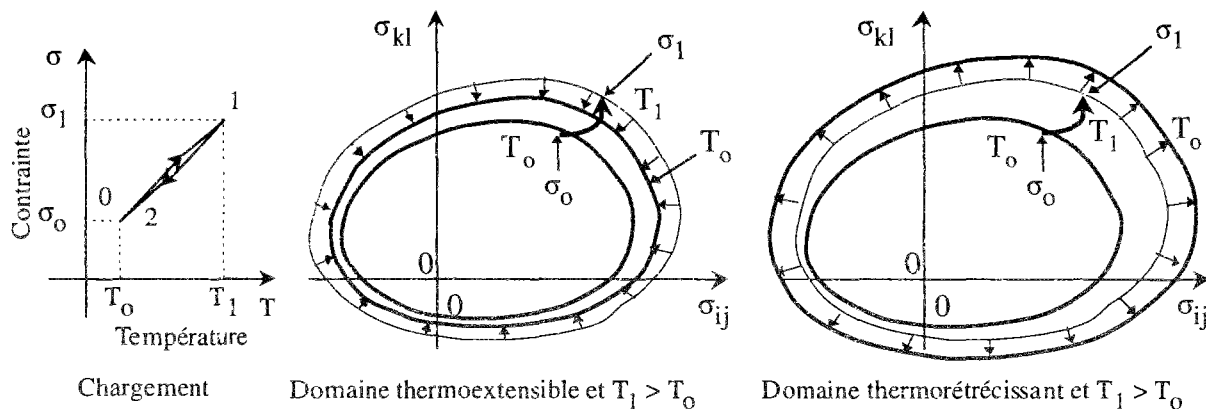


Figure 14 : Evolutions plastiques avec un module d'écrouissage positif.

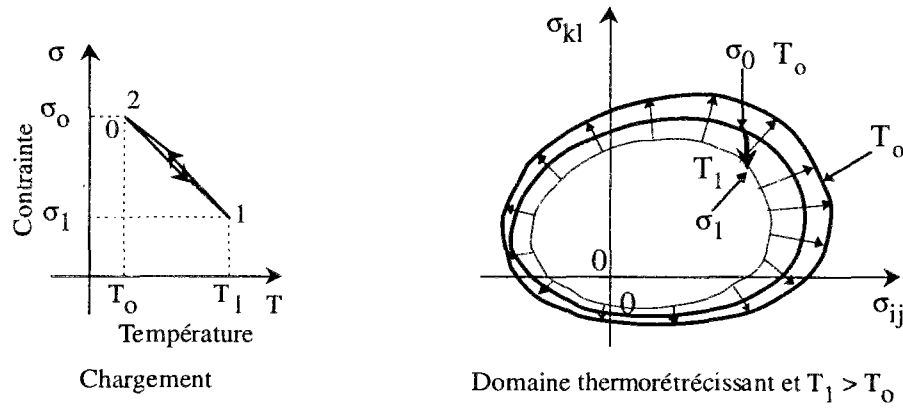


Figure 15 : Evolution plastique avec un module d'écrouissage positif.

Sur le dernier exemple figure 15, on assiste à une diminution des limites élastiques au cours du chargement plastique. Cela illustre le fait que l'extension du domaine d'élasticité n'est pas simultanée à la charge plastique, elle n'est visible qu'après restauration de la température initiale.

La situation présentée figure 15 se rencontre lorsque l'écrouissage thermique libre réduit la taille du domaine d'élasticité au cours du chargement plastique.

2. Module d'écrouissage négatif.

Si le module d'écrouissage est négatif, les conclusions sont les suivantes :

Module d'écrouissage strictement négatif : $H < 0$

$$\text{Si } df|_{\chi} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma + H_T d\theta < 0 \quad \text{soit } (d\varepsilon^p, d\chi) = \frac{df|_{\chi}}{H} (h_{\varepsilon}, h_{\chi}) \quad (41)$$

$$\text{soit } (d\varepsilon^p, d\chi) = (0, 0)$$

$$\text{Si } df|_{\chi} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma + H_T d\theta = 0 \quad \text{alors } (d\varepsilon^p, d\chi) = (0, 0)$$

$$\text{Et } df|_{\chi} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma + H_T d\theta > 0 \quad \text{est impossible}$$

Lorsque le module d'écrouissage est négatif, il existe une indétermination sur la nature de l'écoulement. Il est impossible de savoir a priori si un incrément donné de contrainte et de température va entraîner une charge plastique ou une décharge élastique.

Cette ambiguïté peut être levée lorsque l'on impose le chargement en terme d'incréments de déformation et de température.

D'autre part, certaines directions de chargement en contraintes et température ne peuvent être réalisées. Par exemple, si la contrainte est maintenue constante, une élévation de température n'est pas admise par un modèle plastique thermorétrécissant. Ainsi ce modèle plastique va fixer un seuil limite à un chargement thermique sans variation de contraintes.

Ces limitations et indéterminations pose alors le problème de la stabilité thermodynamique des comportements que ces modèles cherchent à décrire. On verra plus loin que lorsque le module d'écroissance est négatif, la stabilité thermodynamique du modèle par rapport aux variables contraintes et température n'est pas garantie.

Une interprétation géométrique d'un module d'écroissance négatif est une contraction du domaine d'élasticité au cours des évolutions plastiques. Comme précédemment, cette réduction du domaine d'élasticité n'est effective que lorsque l'on compare la taille du domaine pour des températures identiques. Après un chargement thermomécanique, il faut effectuer une décharge thermoélastique restaurant la température pour observer cette contraction du domaine, de façon à retrancher les effets de l'écroissance thermique. Les évolutions du domaine plastique sont représentées sur les figures 16 et 17.

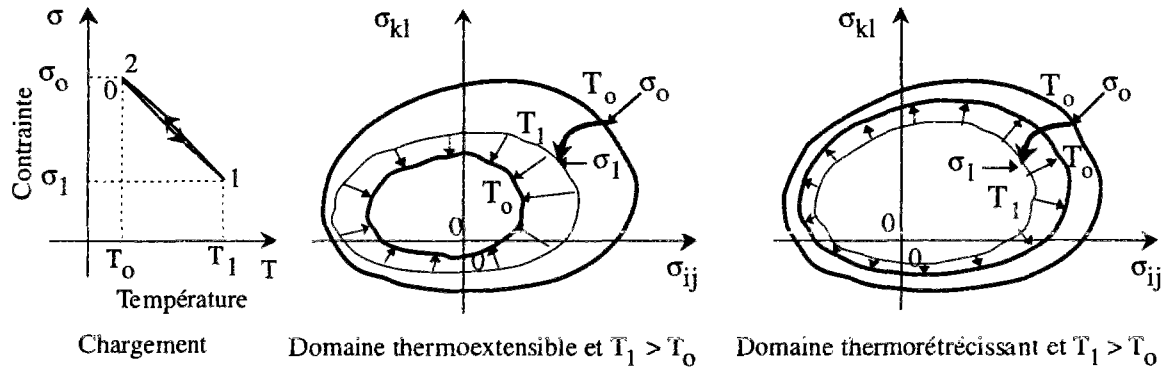


Figure 16 : Evolutions plastiques avec un module d'écroissance négatif.

Une augmentation du domaine d'élasticité peut éventuellement avoir lieu en même temps que le chargement plastique, comme l'illustre la figure 17.

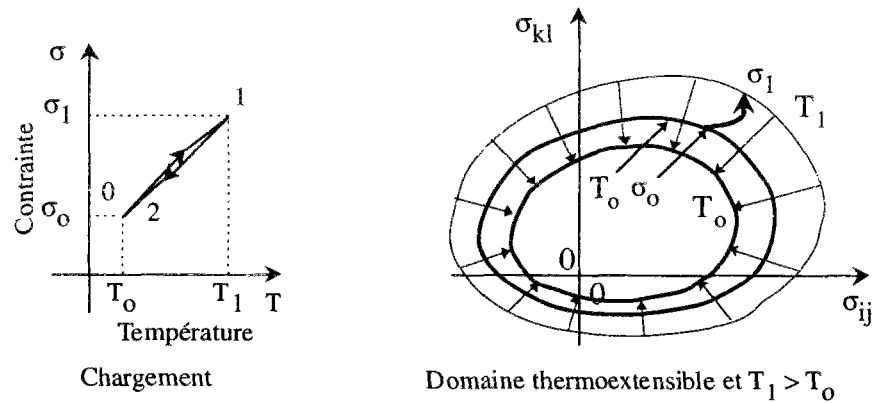


Figure 17 : Evolutions plastiques avec un module d'écrouissage négatif.

3. Ecouissage nul ou plasticité parfaite.

Lorsque le module d'écrouissage est nul, la quantité $df|_{\chi}$ est nulle lors des écoulements plastiques.

Module d'écrouissage nul : $H = 0$

$$\text{Si } df|_{\chi} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma + H_T d\theta = 0 \quad \text{alors } (d\epsilon^p, d\chi) = d\lambda (h_{\epsilon}, h_{\chi}) ; d\lambda \geq 0 \quad (42)$$

$$\text{Si } df|_{\chi} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma + H_T d\theta < 0 \quad \text{alors } (d\epsilon^p, d\chi) = (0, 0)$$

$$\text{Et } df|_{\chi} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma + H_T d\theta > 0 \quad \text{est impossible}$$

L'alternative (42) établit une distinction claire entre les chargements donnant une réponse thermoélastique et ceux donnant une réponse thermoplastique. En revanche, la valeur du multiplicateur plastique $d\lambda$ n'est pas connue a priori et il existe des directions de chargement impossibles à réaliser. Il s'agit d'un cas intermédiaire entre les écrouissages positifs et négatifs.

Dans l'espace des contraintes, un module d'écrouissage nul s'interprète généralement de façon géométrique par un domaine d'élasticité invariable. Cette interprétation n'est valable que pour les évolutions isothermes. Même lorsque le module d'écrouissage est nul, il peut subsister un écrouissage thermique qui donne un écrouissage de ce domaine avec la température.

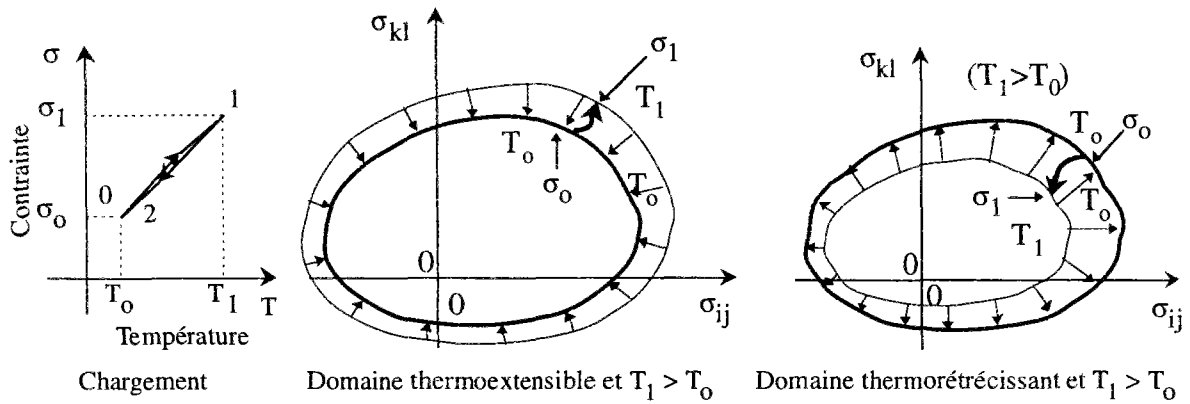


Figure 18 : Evolutions plastiques avec un module d'écrouissage nul.

Un modèle plastique parfait se caractérise par un module d'écrouissage constamment nul. Avec cette définition, le domaine d'élasticité n'est pas nécessairement fixe, mais la position du domaine d'élasticité à une température donnée est toujours la même.

Un domaine d'élasticité invariable est une condition plus stricte sur les coefficients d'écrouissage à savoir un module d'écrouissage H et un coefficient d'écrouissage thermique H_T constamment nuls.

II.5.4. Tenseur de dilatation élastoplastique tangent.

Considérons un matériau élastoplastique, écrouissable thermiquement. On s'intéresse aux évolutions plastiques sous l'effet d'une variation de température. On désigne par α le tenseur des coefficients de dilatation thermique élastique et C_σ la capacité thermique volumique.

Lorsque les contraintes sont maintenues constantes, les variations élastiques sont données par les équations d'état (13) :

$$d\varepsilon - d\varepsilon^p = \alpha d\theta \quad (43a)$$

$$dS - \frac{L\chi}{T} d\chi = \frac{C_\sigma}{T_0} d\theta \quad (43b)$$

Le terme $\frac{L\chi}{T} d\chi$ résulte de la variation d'entropie bloquée par écrouissage.

Pour un matériau plastique avec écrouissage positif, l'évolution des variables internes ε^p et de χ en fonction de $d\theta$ est connue sans ambiguïté. On en déduit :

$$d\varepsilon = \alpha d\theta + \frac{1}{H} Y(f) \langle H_T d\theta \rangle \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (44a)$$

$$dS = \frac{C_\sigma}{T_0} d\theta + \frac{1}{H} Y(f) \langle H_T d\theta \rangle \frac{L\chi}{T} \cdot \frac{\partial h}{\partial \zeta} \quad (44b)$$

g et h sont les potentiels d'écoulement de $\mathcal{E}^p$ et de χ , $\langle x \rangle$ représente la partie positive de la quantité x ($=x$ si $x>0$, $=0$ sinon) et $Y(x)$ désigne la fonction de Heavyside ($=1$ si $x>0$, $=0$ sinon).

On définit deux caractéristiques thermomécaniques tangentes lors d'une évolution plastique :

- le tenseur de dilatation thermique tangent :

$$\alpha^{tg} = \alpha + \frac{H_T}{H} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (45)$$

- la capacité calorifique tangente à état de contraintes constant :

$$C_\sigma^{tg} = C_\sigma + \frac{H_T}{H} (L\chi \frac{\partial h}{\partial \zeta}) \frac{T_0}{T} \quad (46)$$

La capacité calorifique tangente diffère de la capacité calorifique élastique car il faut tenir compte de la chaleur résultant de la transformation de l'état d'écrouissage.

La valeur du tenseur de dilatation α^{tg} est fonction de l'importance de l'écrouissage thermique, mais aussi de l'écoulement plastique.

Sur la plupart des matériaux, le coefficient élastique α est de trace positive, on a une augmentation de volume du matériau pour une augmentation de température. En revanche, la trace du coefficient α^{tg} peut être de signe opposé. On aura alors sous charge plastique une diminution de volume lors d'une augmentation de la température.

Considérons par exemple alors un matériau plastique thermorétrécissant ($H_T > 0$), avec écrouissage positif ($H > 0$). Si la trace de $\frac{\partial g}{\partial \sigma}$ est négative (le matériau est plastiquement contractant) on observe alors une diminution de volume irréversible lors d'une augmentation de température à état de contrainte constant.

Cette contraction du matériau résulte d'un écrouissage thermique gêné. C'est ainsi que l'on interprétera le comportement en température des argiles dans le chapitre suivant.

Une étude de l'ensemble des caractéristiques tangentes sous diverses conditions de chargement (isochore, adiabatique) est présentée en Annexe 2.

II.5.5. Stabilité thermodynamique.

1. Condition de stabilité au sens de Lyapunov.

L'idée intuitive de la stabilité d'un ensemble de variables est que de petites perturbations initiales n'engendrent que de petites évolutions de ces variables. Plus précisément, l'on recherche une norme sur des variables du système telle que, si l'on considère un état légèrement perturbé par rapport à l'état d'équilibre, les évolutions de ces variables restent limitées au sens de cette norme. Il s'agit d'une condition de *stabilité au sens de Lyapunov*.

On présente ici une analyse de la stabilité vis-à-vis de petites fluctuations de contraintes et de température pour un comportement plastique avec écrouissage thermique.

Soient T_0 et σ_0 les champs de température et de contraintes à l'équilibre dans un volume Ω . L'équilibre thermique impose un champ de température T_0 uniforme dans le volume Ω . On maintient les forces surfaciques $\sigma_0 \cdot n$ et la température T_0 constantes sur la surface extérieure de ce volume et l'on envisage de petites fluctuations de contraintes et de température à l'intérieur de ce volume.

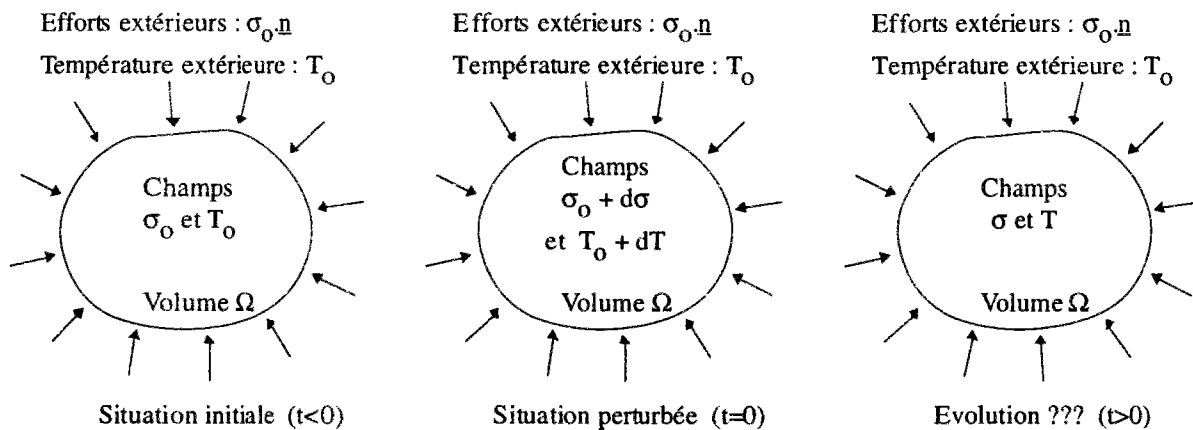


Figure 19 : Situation initiale et situation perturbée

On note T et σ les champs de température et de contraintes après perturbation. On suppose que ces champs restent en équilibre avec la température extérieure T_0 et les efforts extérieurs $\sigma_0 \cdot n$.

Par un raisonnement identique à celui exposé par Mandel [17] (1966) ou Coussy [6] (1991), on montre que la stabilité de l'évolution des quantités contraintes et température est assurée si l'évolution après perturbation vérifie en tout point l'inégalité suivante :

$$\forall t > 0, \quad (\sigma - \sigma_0) \frac{d\varepsilon^p}{dt} \geq \frac{(T - T_0)}{T} \left(\sigma \frac{d\varepsilon^p}{dt} + (\zeta - L\chi) \frac{d\chi}{dt} \right) \quad (47)$$

La démonstration de ce résultat est présentée en Annexe 3.

2. Stabilité à état de contraintes fixé.

On envisage des perturbations en température sans modification de l'état de contraintes. La condition (47) devient :

$$(T-T_0) \frac{L\chi}{T} \frac{d\chi}{dt} \geq (T-T_0) \frac{D_I}{T} \quad (48)$$

On distingue alors deux cas :

Le domaine d'élasticité est thermoextensible : Un écoulement plastique a lieu lorsque la température diminue à état de contrainte constant. Le signe de $T-T_0$ est négatif pour un écoulement plastique. La condition (48) est satisfaite si :

$$L\chi \frac{d\chi}{dt} \leq D_I \quad (49)$$

Cette dernière relation signifie que la plasticité est de nature exothermique : la chaleur absorbée avec l'écrouissage est inférieure à la dissipation intrinsèque du matériau.

Conditions suffisantes de stabilité (type I)

pour des perturbations à état de contraintes constant : (50)

- Stabilité élastique
- Domaine thermoextensible ($H_T < 0$)
- Dissipation supérieure à la chaleur latente d'écrouissage. ($\sigma d\epsilon^P + (\zeta - L\chi) d\chi \geq 0$)

La condition (49) est vérifiée dès que le terme $L\chi \frac{d\chi}{dt}$ est négatif, car la dissipation D_I est positive.

Le domaine d'élasticité est thermorétrécissant. Un écoulement plastique a lieu lors d'une élévation de température, et l'on aboutit aux conclusions suivantes :

Conditions suffisantes de stabilité (type II)

pour des perturbations à état de contraintes constant : (51)

- Stabilité élastique
- Domaine thermorétrécissant ($H_T < 0$)
- Dissipation inférieure à la chaleur latente d'écrouissage. ($\sigma d\epsilon^P + (\zeta - L\chi) d\chi \leq 0$)

Les conditions (50) et (51) s'excluent mutuellement.

La condition de stabilité (50) s'interprète de la manière suivante :

- une diminution de température réduit le domaine d'élasticité (domaine thermoextensible)
- la plasticité est un phénomène exothermique,
- cela tend à augmenter la température du matériau et donc à stabiliser la charge plastique.

Le raisonnement est similaire pour les conditions (51) : dans le cas d'un domaine thermorétrécissant, la plasticité se produit pour une augmentation de température, mais le caractère endothermique limite cette augmentation de température et par conséquent la charge plastique.

Avec les conditions (50) ou (51), la chaleur latente d'écrouissage a un effet stabilisateur qui vient limiter les variations de température. A cet effet, s'ajoute celui de la conduction de la chaleur, que l'on n'a pas pris en compte dans ces équations. La température étant constante sur le bord du volume étudié, la conduction de la chaleur tend à réduire l'écart de température initial. La stabilité vis-à-vis des variations de température sera d'autant meilleure que la diffusivité thermique est élevée.

L'influence de la conductivité thermique dépend de la géométrie du volume Ω et on ne peut pas établir de manière générale une estimation a priori portant sur des termes de conduction. Les conditions (50) et (51) sont les conditions suffisantes les plus générales que l'on puisse présenter.

II.5.6. La détermination expérimentale des variables d'écrouissages.

Les comportements plastiques avec écrouissage thermique viennent d'être présentés dans un cadre général, qui privilégie les aspects thermodynamiques. Cette approche permet de s'assurer de la cohérence générale du modèle avec les équations de la physique.

On ne peut affirmer pour autant que ce cadre est pertinent vis-à-vis des observations expérimentales. Le bien fondé d'un modèle avec écrouissage en température pour rendre compte du comportement de tel ou tel matériau sera examiné dans le chapitre suivant.

Sans attendre une confirmation expérimentale, on peut déjà rechercher si le cadre proposé est cohérent. Peut-on parvenir à une caractérisation complète et sans équivoque de la loi de comportement thermomécanique ?

1. Les observations expérimentales.

L'échelle d'investigation pour les modèles de mécanique des milieux continus est le volume élémentaire représentatif du comportement. On se limite donc aux observations expérimentales faites à cette échelle, sur un échantillon supposé homogène.

Les mesures utiles à l'étude du comportement mécanique sont celles des déplacements dont on déduit les déformations, et de la mesure des forces appliquées au matériau, dont on déduit l'état de contraintes agissant dans le matériau.

Les mesures thermiques portent sur la température de l'échantillon et les échanges de chaleur avec l'extérieur. En revanche, l'entropie du matériau ne peut faire l'objet d'une mesure.

Les quantités observables sont donc :

- les déformations ϵ
- l'état de contraintes σ
- la température absolue T
- la quantité de chaleur fournie à l'extérieur δQ .

Dans ce qui suit, on fait abstraction des difficultés techniques liée à l'obtention de ces mesures, ainsi que des incertitudes qui en résultent.

Certaines de ces mesures sont délicates, en particulier les mesures calorimétriques qui sont très rarement effectuées au cours d'un essai mécanique. En règle générale, les "observations thermomécaniques" se limitent aux mesures de déformations, de contraintes et de température, sans mesure calorimétrique.

2. La détermination du critère de plasticité : un critère expérimental de réversibilité.

De manière générale, on ne peut juger de la réversibilité d'une évolution qu'en tentant de revenir à un état antérieur, en inversant en quelque sorte le cours du temps. Dans une évolution réversible, il est donc possible de revenir à tout moment à l'état initial, en suivant en sens inverse la même succession d'états intermédiaires.

Dans l'étude du comportement thermomécanique d'un matériau, une évolution sera considérée réversible dès lors qu'il n'y a pas de déformation résiduelle après avoir parcouru en sens inverse le trajet de chargement en contrainte et température. La déformation plastique constitue une mesure naturelle des irréversibilités.

Ce faisant, il est ainsi possible de "tester" au cours des essais de laboratoire le caractère réversible ou non d'un chargement thermomécanique.

Dans ce qui précède, on n'utilise pas de mesures calorimétriques. Cela peut sembler étonnant car d'un point de vue thermodynamique la réversibilité est associée à l'absence de dissipation de travail en chaleur.

Les trois remarques suivantes apportent quelques éclaircissements :

A/ Dans une évolution réversible au sens précédent, c'est-à-dire sans déformation plastique, le bilan de travail mécanique $\sigma:d\epsilon$ est toujours nul après une décharge qui respecte la succession des états de contraintes et de température.

B/ Dans une étude du comportement thermomécanique, on admet implicitement que les échanges d'énergie proviennent uniquement :

- du travail mécanique $\sigma:d\epsilon$,
- des échanges de chaleur.

C/ Si expérimentalement, il s'avère que le bilan des échanges thermiques n'est pas nul pour ce cycle thermomécanique, il faut alors rechercher la présence d'autres phénomènes physiques intervenant dans cette expérience (couplages thermochimiques, magnétiques...). On sort du cadre d'étude précédent qui se limite aux phénomènes thermomécaniques.

La déformation plastique permet de juger des irréversibilités dans un cadre d'étude thermomécanique. Lorsque interviennent d'autres phénomènes physiques, il faut effectuer d'autres types de mesures physiques concernant ces phénomènes. Mais de toute façon, les mesures calorimétriques sont insuffisantes pour juger du caractère irréversible d'un processus.

3. Recherche des variables d'écrouissage.

Une difficulté essentielle pour construire un modèle de comportement est de trouver un lien dans les résultats d'essais de laboratoire entre les évolutions du domaine d'élasticité et des variables internes d'écrouissage χ .

Par définition, les variables internes χ n'évoluent que lors des transformations irréversibles. Ces variables sont fonctions de l'histoire des déformations plastiques, ce peut être par exemple la trace des déformations plastiques ou la distorsion plastique cumulée.

Suite à l'analyse fine de nombreux résultats d'essais, supposons que l'on ait réussi à établir un lien entre les écrouissages et les variables χ dont on donne la définition à partir de l'histoire des déformations plastiques. Ce lien est décrit par une relation du type :

$$\zeta = \phi(\chi, T) \quad (52)$$

Il suffit alors de donner l'expression de la fonction critère $f(\sigma, \zeta)$ et des directions d'écoulements plastiques pour définir la loi complémentaire en plasticité.

Cette description est opératoire pour mener des calculs thermomécaniques. Cependant, plusieurs points restent en suspens :

- les potentiels énergétiques sont-ils déterminés de façon unique dans cette description,

- ce modèle satisfait-il à l'ensemble des mesures expérimentales, notamment les mesures calorimétriques,
- vérifie-t-on les restrictions thermodynamiques,

On examine à présent ces différents points.

4. Unicité de la description

A ce stade de la modélisation, toute variable interne définie par une bijection $\hat{\chi} = f(\chi)$ caractérise également l'état d'écrouissage du matériau. De même, tout changement de variables $\hat{\zeta} = g(\zeta)$ donne des paramètres permettant de décrire l'état d'écrouissage.

La valeur du potentiel énergie bloquée doit être insensible à de tels changements de variables. Les paramètres ζ étant les forces thermodynamiques associées aux variables internes χ , tout changement de variables doit satisfaire :

$$\hat{\zeta} d\hat{\chi} = \zeta d\chi \quad (53)$$

Un changement de variables vérifiant (53) est sans incidence sur les bilans thermiques. Pour s'en convaincre, on donne le bilan de la chaleur échangée avec l'extérieur pour un chargement mécanique isotherme suivi d'une décharge :

$$Q = \int ((\sigma : \dot{\epsilon}^p + \zeta \dot{\chi}) - T \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} |_{\chi} \dot{\chi}) dt \quad (54)$$

Le couple de variables (ζ, χ) n'est certes pas unique, mais à toute bijection $\hat{\chi} = f(\chi)$ est associé un seul paramétrage des écrouissages $\hat{\zeta}$ tel que le couple de variables $(\hat{\zeta}, \hat{\chi})$ conduise au même modèle de comportement thermique et mécanique.

5. Détermination de la chaleur latente d'écrouissage.

Dans le bilan (54), la part due à la chaleur latente de transformation de l'état d'écrouissage est donnée par le terme :

$$L = \int T \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} |_{\chi} \dot{\chi} dt \quad (55)$$

Supposons que l'on dispose d'une description des écrouissages du domaine l'élasticité à l'aide de deux variables ζ et χ . L'observation des écrouissages thermiques donne la valeur du terme $\frac{\partial \zeta}{\partial \theta}$. Un calcul de la chaleur latente L peut être fait par l'expression (55), mais il est certainement faux.

En effet, en l'absence de mesures calorimétriques, les forces thermodynamiques réellement associées aux variables internes χ ne sont pas connues. On sait simplement que ces forces sont égales à une fonction des paramètres ζ .

En conclusion :

La valeur de la chaleur latente d'écrouissage est déterminée par des mesures calorimétriques au cours d'un écrouissage. Il n'y a pas d'autres procédés pour obtenir cette quantité.

6. Les restrictions thermodynamiques.

Pour être thermodynamiquement acceptable, la condition suivante de non négativité de la dissipation doit être satisfaite :

$$\sigma : d\mathcal{E}^p + \zeta d\chi > 0$$

En l'absence de mesures calorimétriques au cours d'une évolution plastique, il existe une incertitude sur la valeur du produit $\zeta d\chi$. En effet, la force thermodynamique réellement associée à χ est une fonction de ζ .

Les énergies calorifiques mises en jeu par les phénomènes plastiques et élastiques sont généralement très faibles. Ces mesures calorimétriques sont par conséquent très difficiles à réaliser au cours des essais thermomécaniques.

On admet le plus souvent que les chaleurs provenant de la dissipation intrinsèque et des chaleurs latentes influencent peu les calculs thermomécaniques que l'on compte réaliser. La plupart des modèles plastiques écrouissables sont mis au point sans qu'il y ait de mesures calorimétriques.

Le fait qu'ils vérifient ou non les restrictions thermodynamiques a alors peu d'intérêt. A peu d'effort, en changeant la définition des paramètres d'écrouissage ζ , il est souvent aisé d'aboutir à une formulation qui soit thermodynamiquement acceptable, dès lors que l'on vérifie simplement $\sigma : d\mathcal{E}^p > 0$. Par contre, il faut vérifier que ce terme est effectivement négligeable dans les bilans thermiques pour les calculs que l'on réalise.