

La rupture fragile par clivage

Dans ce chapitre on présentera une étude bibliographique de la rupture fragile par clivage et d'endommagement ductile. La rupture fragile par clivage sera relativement plus détaillée par rapport à l'endommagement ductile. Ce choix est fait en cohérence avec l'objectif de notre étude qui porte principalement sur la description de la partie basse de la zone de transition ductile-fragile.

Dans la première partie de cette étude bibliographique, on introduira dans un premier temps, l'approche locale de la rupture par clivage qui permet une description fine des mécanismes de rupture. Ces mécanismes seront alors détaillés dans un deuxième temps. Ensuite, on s'intéressera à la contrainte de clivage et montrera l'importance de la présence des concentrateurs de contraintes permettant de déclencher la rupture. Plusieurs définitions de la contrainte de clivage seront alors proposées. En particulier, le modèle de Beremin basé sur une contrainte de clivage de type *Griffith* sera présenté. Ce modèle permet de calculer la probabilité de rupture à partir la contrainte de Weibull. On détaillera brièvement quelques modifications de ce modèle. Finalement, on s'intéressera au calcul pratique de la contrainte de Weibull pour une fissure stationnaire puis en présence d'une déchirure ductile et on terminera sur la prise en compte de l'effet de température et de la taille des défauts pour modéliser le clivage dans la zone de transition ductile-fragile.

Dans la deuxième partie, on présentera brièvement les mécanismes de l'endommagement ductile aussi bien que certains modèles les plus utilisés pour décrire l'endommagement ductile. Ensuite, on présentera un cadre général dit « non local » de la simulation de l'endommagement ductile. Ce cadre nous permettra d'introduire les éléments à 5 champs récemment développés (Zhang *et al.*, 2018; Chen, 2019). Ces éléments permettent de traiter le problème de la dépendance au maillage et du verrouillage volumique. Finalement, on évoquera l'utilité de ces éléments pour la simulation de la rupture fragile également.

La rupture fragile par clivage

2.1.1 Approche globale et approche locale

L'approche globale de la rupture est une approche très utile et largement utilisée dans le domaine de l'ingénierie. Cette approche suppose que la résistance à la rupture puisse être quantifiée à l'aide des paramètres macroscopiques : la ténacité K_{IC} , l'intégrale J (Rice and Rosengren, 1968), le COD (*Crack Opening Displacement*) (Wells, 1963). A l'aide de ces paramètres, On peut décrire les champs de contraintes au voisinage de la pointe de fissure dans certains régimes de rupture. On distingue trois régimes de rupture : le régime linéaire (*LEFM*), le régime de la plasticité confinée (*SSY*) et le régime de la plasticité généralisée (*LSY*) (voir Figure 3).

La mécanique linéaire de la rupture (*LEFM Linear Elastic Fracture Mechanics*) décrit les champs mécaniques lorsque l'éprouvette rompt dans le domaine élastique linéaire de l'éprouvette. Les contraintes et les déformations dans la pointe de fissure sont décrites par les paramètres K_I et T (Irwin, 1957; Williams, 1957). Les contraintes en mode I peuvent être représentées sous la forme :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta) + T \delta_{1i} \delta_{1j} + \dots \quad (2.1)$$

Lorsque la rupture a lieu au début de la non linéarité de la courbe force-déplacement, on parle du régime de plasticité confinée (*SSY : Small Scale Yielding*). La taille de la zone plastique développée est négligeable par rapport aux dimensions de l'éprouvette (Figure 4). Les contraintes peuvent être reliées dans ce régime également aux paramètres J et Q (Rice and Rosengren, 1968; Anderson *et al.*, 1995) On consacrera une partie pour détailler ce régime plus tard (§2.1.6).

Finalement, lorsque l'éprouvette rompt après avoir développée une zone plastique large dont la taille est comparable aux dimensions de l'éprouvette (Figure 4), on parle d'un régime de plasticité généralisée (*LSY : Large Scale Yielding*). La description des champs mécaniques dans ce régime est plus complexe car il y a une interaction forte avec les surfaces libres des éprouvettes/structures.

Dans tous les cas, très proche de la pointe de fissure, une zone très sollicitée communément désignée par « la zone d'élaboration » ou « la *Process Zone* » en anglais apparaît. Dans la zone d'élaboration, Les déformations sont très élevées et la pointe de la fissure initialement très aiguë s'émousse. Cet émoussement fait que les contraintes ne deviennent pas infinies comme dans les solutions de Williams en élasticité ou les solutions *HRR* (Hutchinson, 1968; Rice and Rosengren, 1968) en élasticité non linéaire permettant de reproduire la plasticité en chargement monotone. Même pour un cas *SSY*, la zone d'élaboration se développe. Le détail des contraintes et déformations est par contre dépendant du régime de plasticité. Cela peut rendre difficile l'emploi de l'approche globale de la rupture pour décrire les cas de *LSY* les plus extrêmes.

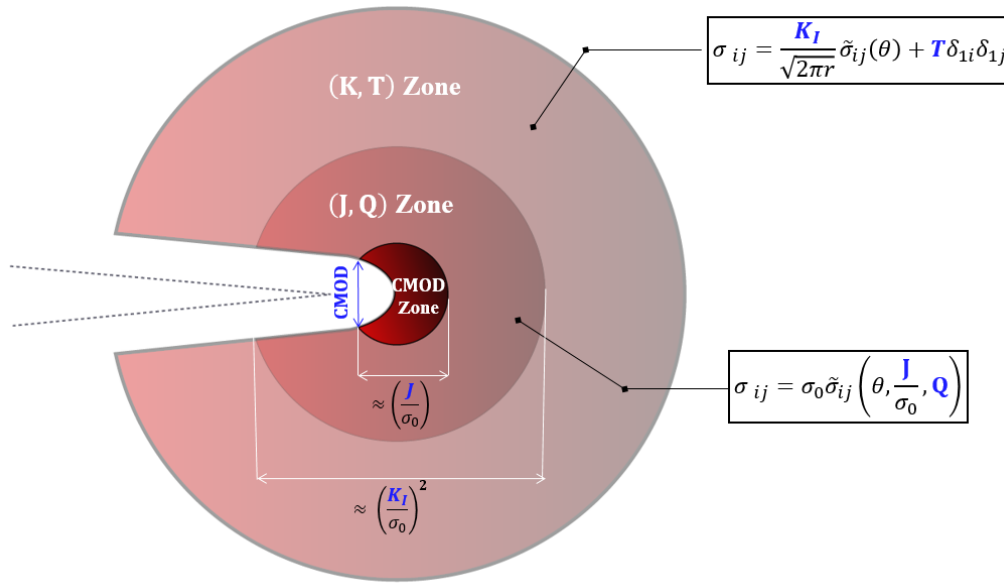


Figure 3 : Champ de contraintes en amont de la pointe d'une fissure en fonction du régime de chargement

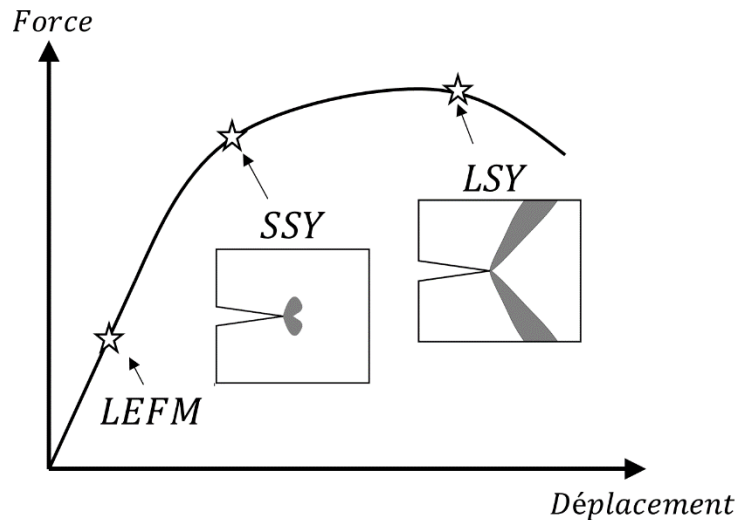


Figure 4 : Comportement global d'une structure fissurée. La zone plastique est représentée en gris.

L'approche globale est nécessaire dans la description de la rupture et très pratique à exploiter dans les applications industrielles mais présente aussi quelques limitations. En effet, il est maintenant établi que la ténacité est une grandeur qui dépend de la taille de l'éprouvette (*Size effect*) principalement dans la zone de transition ductile-fragile. Cette dépendance à la géométrie soulève le problème de la transférabilité des mesures de ténacité sur éprouvettes aux structures industrielles. En outre, les

dimensions des éprouvettes nécessaires pour pouvoir mesurer sa ténacité selon les normes en vigueur sont parfois très grandes de sorte qu'elles deviennent impraticables. En effet, dans le régime de plasticité généralisée, les mesures classiques $K_{I,J}$ ne sont plus valides et ne peuvent pas être interprétées comme la ténacité du matériau.

Une nouvelle approche dite approche locale de rupture est développée à la fin des années 80. Cette approche permet de quantifier la rupture à partir d'une échelle plus fine du matériau. Dans le cadre de cette approche, la modélisation de la ténacité est basée sur un critère local de rupture déduit des résultats expérimentaux. Un modèle à bases micromécaniques est proposé à partir de ce critère local et utilise des paramètres qui ne dépendent a priori que du matériau. Ces paramètres dits locaux nécessitent une approche hybride entre simulation et expérimentation pour pouvoir les identifier. Par conséquent, une approche locale nécessite deux ingrédients : (i) Un modèle micromécanique décrivant les phénomènes de rupture mis en jeu (ii) La connaissance parfaite du champ de contraintes et de déformations devant une fissure stationnaire ou une fissure qui se propage. L'utilisation de cette approche est devenue populaire pour l'étude de l'influence de certains phénomènes sur la ténacité e.g. l'effet de la géométrie sur la transférabilité de la ténacité (Sumpter, 1993) et l'effet de préchargement à chaud (Roos *et al.*, 1998; Moinereau *et al.*, 2003, 2006; Bordet *et al.*, 2006).

Dans le cadre de ce chapitre, on s'intéresse à la rupture fragile par clivage i.e. rupture transgranulaire. Le clivage transgranulaire est caractérisé par une séparation des plans atomiques les plus denses dans les grains contrairement à la rupture intergranulaire qui est caractérisée essentiellement par la séparation des grains entre eux qui est souvent causée par la ségrégation de certaines impuretés le long des joints de grains. Les deux types de rupture conduisent à des vitesses de propagation très grandes : 1660 m/s. La rupture intergranulaire est considérée comme le mode naturel de rupture dans les métaux purs (Cottrell, 1989) (Cottrell, 1990a, 1990b) tandis que le clivage est le mode préférentiel dans les aciers ferritiques aux basses températures.

2.1.2 Description du clivage

La rupture par clivage est un mode de rupture fragile brusque qui conduit à une ruine extrêmement rapide des structures. Le clivage se manifeste par une séparation des plans atomiques du réseau cristallin préférentiellement dans les plans les plus denses e.g. {100} pour les aciers ferritiques. Chaque séparation fait apparaître un plan de clivage. Sur le faciès de rupture, les plans de séparations forment des marches car le clivage traverse des grains et des obstacles microstructuraux localement désorientés. Finalement, le faciès de clivage est caractérisé par un aspect brillant et s'oxyde vite à l'air ambiant.

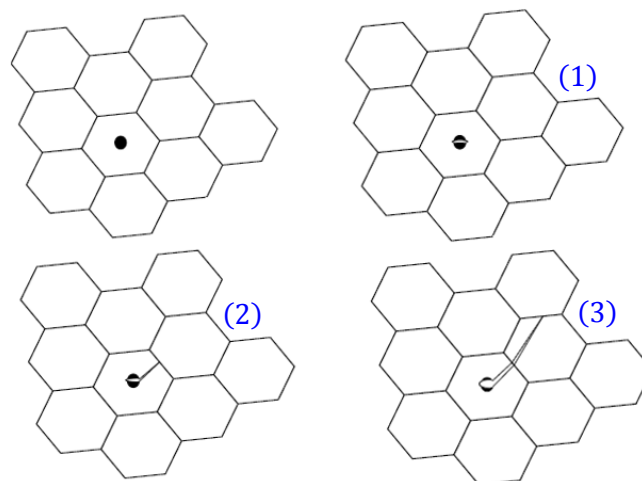


Figure 5 : Schématisation des étapes de clivage dans les aciers ferritiques dans le bas de la transition (Lower Shelf DBT)

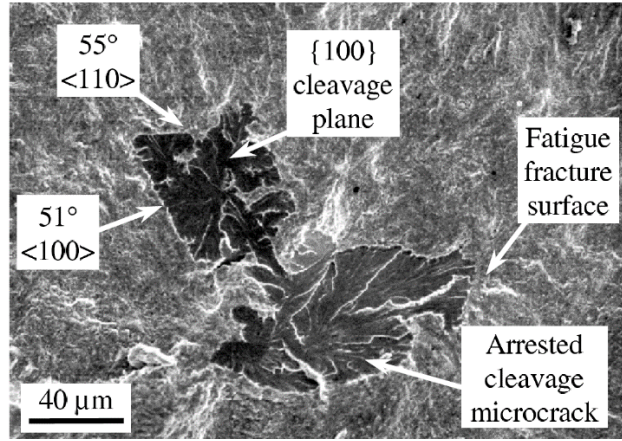


Figure 6 : Fissure de clivage arrêté obtenue sur d'essais arrêtés sur des éprouvettes entaillées (Lambert-Perlade et al. 2004)

Pour la plupart des aciers de construction dans la zone de transition ductile-fragile, le clivage peut être amorcé à partir des défauts microstructuraux et souvent à partir des inclusions dures (Rosenfield *et al.*, 1983). Le clivage peut être décrit en trois étapes (Curry and Knott, 1978; Knott, 1980, 1989). La première étape est l'apparition d'une microfissure suite à la rupture d'une particule dure (carbures de quelques microns) (*slip-induced cracking*). Ensuite la microfissure se propage selon le plan du clivage de la matrice en traversant l'interface particule/matrice, et finalement la microfissure se propage dans le grain voisin en traversant l'interface grain/grain. La première étape est appelée germination, la deuxième est appelée la propagation particule/grain et la dernière est appelée propagation grain/grain (Figure 5). On désigne souvent par l'évènement critique du clivage, l'étape parmi ces trois dernières étapes qui peut déclencher la rupture de la structure. La contrainte associée à un évènement critique est appelée la contrainte de clivage. De nombreux auteurs ont montré que la germination est l'évènement critique à des basses températures tandis que la propagation est l'évènement critique pour des températures élevées (Martin-Meizoso *et al.*, 1994; Lambert-Perlade *et al.*, 2004). Par ailleurs, la fissure amorcée peut tout à fait être arrêtée par un obstacle microstructural comme illustré pour l'étape (3). On parle alors d'un arrêt de fissure de clivage (Figure 6). Dans la suite on s'intéressera aux différents modèles de la littérature qui permettent de calculer la contrainte de clivage.

2.1.3 La contrainte de clivage

2.1.3.1 La contrainte de séparation

Dans un réseau cristallin parfait, une manière de quantifier la contrainte nécessaire pour séparer deux plans atomiques est basée sur un critère énergétique. En effet, il suffit pour cela que le travail effectué par la contrainte locale durant cette séparation soit supérieur au travail nécessaire pour rompre la liaison entre les atomes de ces deux plans (Figure 7). Cette énergie représente l'énergie de cohésion atomique (*Bond energy*) communément appelée : l'énergie de surface γ_s ($\sim 1\text{J}/\text{m}^2$). On peut exprimer alors :

$$\sigma_{separation} = \sqrt{\frac{E\gamma_s}{b_0}} \approx E \sqrt{\frac{\gamma_s}{E \cdot b_0}} \approx E \sqrt{\frac{1}{10^{11} \cdot 10^{-9}}} \approx \frac{E}{10} \quad (2.2)$$

Avec b_0 la distance interatomique (quelques nanomètres) et E le module de Young. On présente une démonstration de cette équation dans l'annexe A (§A. La contrainte de clivage).

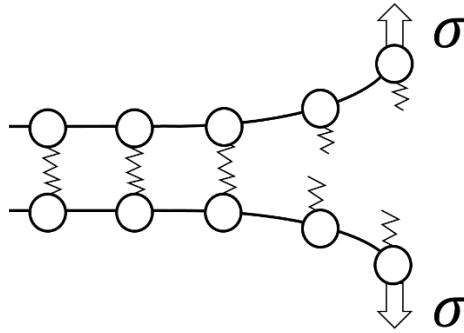


Figure 7 : Contrainte de séparation des deux plans atomiques

Cette formule prédit un niveau de contrainte de séparation de plans atomiques très élevé (environ 20 GPa pour les aciers) par rapport à la contrainte de clivage mesurée dans les essais (de 1000 à 3000 MPa pour les aciers). En effet, il est inévitable pour créer le clivage de rompre des liaisons atomiques des grains. Or cette liaison est extrêmement solide et nécessite des contraintes énormes pour la rompre. L'équation (2.2) exprime le fait qu'il est très improbable que seul le chargement extérieur puisse engendrer ce niveau de contrainte afin de déclencher le clivage. Par conséquent, le clivage nécessite la présence des concentrateurs de contraintes dans le matériau. Un mécanisme possible concentrateur de contraintes est l'empilement des dislocations sur un obstacle microstructural e.g. précipité, joint de grain ou la présence de microfissures. Autrement dit, à cause de mécanismes irréversibles très hétérogènes à l'échelle microscopique, des microfissures sont engendrées dans le matériau et peuvent se propager lorsque la contrainte locale atteint une valeur critique (Mudry, 1987).

2.1.3.2 La contrainte de clivage

En élasticité linéaire, (Inglis, 1913) a montré qu'un trou elliptique, dans une plaque fine sans épaisseur (i.e. en contraintes planes) et infinie dans le plan, joue le rôle d'un concentrateur (amplificateur) de contrainte. En effet, son analyse lui a permis de calculer la contrainte dans la pointe A du grand axe de l'ellipse (Figure 8) et de montrer qu'une fissure ($\rho = b^2/a \rightarrow 0$) conduit à un champ de contrainte infinie sur cette pointe.

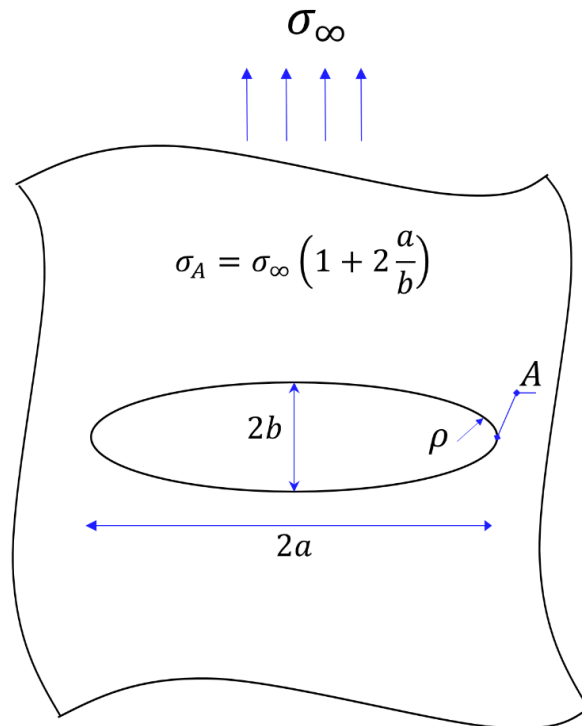


Figure 8 : la singularité du champ de contrainte à la pointe A d'une ellipse selon (Inglis 1913)

Ce résultat montre que la rupture d'une structure fissurée est automatique puisque aucun matériau ne peut supporter une contrainte infinie. Ceci contredit la réalité expérimentale qui montre qu'une fissure s'émousse en plasticité et n'est jamais infiniment aiguë comme on l'a supposé dans le modèle. Néanmoins, supposons que la fissure soit émoussée à un certain rayon de l'ordre de la distance interatomique b_0 de l'équation (2.2). Sous l'hypothèse $a \gg b$ on peut écrire :

$$\sigma_A = \sigma_\infty \left(1 + 2 \frac{a}{b}\right) \approx 2\sigma_\infty \frac{a}{b} = 2\sigma_\infty \sqrt{\frac{a}{\rho}} = 2\sigma_\infty \sqrt{\frac{a}{b_0}} \quad (2.3)$$

Afin de déclencher le clivage, il suffit que $\sigma_A = \sigma_{separation}$. En remplaçant dans l'équation (2.3), la contrainte σ_{∞_f} nécessaire à appliquer est donnée par :

$$\sigma_{\infty_f} = \sqrt{\frac{E\gamma_s}{4a}} \quad (2.4)$$

En ce sens σ_{∞_f} est une contrainte de clivage et la formule précédente (2.4) est une approximation de cette contrainte. Malgré le fait que l'analyse précédente semble, jusqu'à un certain point simplifiée et approximative, les simulations utilisant un modèle atomistique de (Gehlen and Kanninen, 1969) ont conclu à une contrainte de clivage qui a une forme très proche de l'équation (2.4). Dans ce qui suit on présente la méthode de Griffith qui permet de retrouver la même forme que l'équation précédente d'Inglis.

(Griffith, 1921) s'inspire des travaux d'Inglis et calcule une formule théorique de la contrainte nécessaire à la propagation d'une fissure de taille $2a$ dans une plaque infinie dans le plan et d'épaisseur B (Figure 9). Griffith considère la conservation des énergies mises en jeu lors d'une avancée hypothétique incrémentale da de la fissure. Plus précisément, pour que la fissure avance, il est nécessaire que la variation de l'énergie élastique stockée dE_e pendant cette avancée soit supérieure ou égale au travail dW_s nécessaire à la création de deux surfaces $2Bda$.

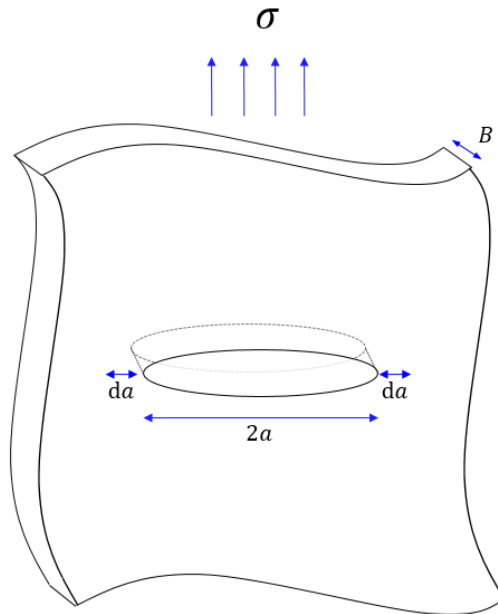


Figure 9 : schéma d'une fissure de taille $2a$ dans une plaque infinie d'épaisseur B . Dans la suite on établit la condition de la propagation da symétrique de la fissure.

Griffith a montré que :

$$W_s = 2 \times (2Ba)\gamma_s \quad E_e = E_0 - \frac{\pi\sigma^2 a^2 B}{E} \quad (2.5)$$

Avec E_0 l'énergie stockée dans la structure sans fissure. A l'équilibre, l'énergie des surfaces créées est intégralement compensée par la variation de l'énergie potentielle. De cette égalité on déduit la contrainte critique de Griffith σ_f :

$$|dW_s| = |dE_e| \rightarrow \sigma_f = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}} \quad (2.6)$$

Ce résultat peut s'écrire d'une manière plus générale :

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\alpha a}} \quad (2.7)$$

Avec α un paramètre dépendant de la géométrie de la fissure et du coefficient de poisson. Pour une fissure *Penny-shaped* circulaire de rayon a on a :

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{\pi E\gamma_s}{2(1-\nu^2)a}} \quad (2.8)$$

L'usage de la contrainte critique de Griffith est devenu de plus en plus populaire après sa modification (Irwin, 1948; Orowan, 1949), consistant à ajouter la part de l'énergie de dissipation plastique nécessaire pour faire propager la fissure dans l'équation de conservation totale (2.6) : le travail fourni lors de la propagation de la fissure correspond à la création des surfaces mais également au travail plastique que cette propagation aura dissipée w_p :

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{E(2\gamma_s + w_p)}{\alpha \cdot a}} = \sqrt{\frac{2E\gamma_p}{\alpha a}} \quad (2.9)$$

$\gamma_p = 2\gamma_s + w_p$ est de l'ordre de 14 J/m^2 pour les aciers ferritiques (Wallin, Saario, et Törrönen 1984; Mathieu et al. 2010)

A partir de l'équation précédente (2.9) on peut voir que la contrainte macroscopique σ_f nécessaire pour faire amorcer un défaut de taille a_0 est décroissante en fonction de a_0 . Par conséquent σ_f sera suffisante pour faire amorcer tous les défauts qui ont une taille $a \geq a_0$. Autrement dit, le fait d'appliquer une contrainte macroscopique σ_f garantit non seulement l'amorçage du défaut a_0 mais également sa propagation jusqu'à la ruine totale. En ce sens, la contrainte σ_f est une contrainte de clivage.

Plusieurs autres tentatives pour lier la contrainte de clivage à la contrainte de séparation sont proposées dans la littérature. La théorie des dislocations est utilisée pour mettre en évidence l'intensification de la contrainte causée par un empilement de dislocations. Zener et Stroh ont étudié un empilement de dislocations de taille $2L$ dans un grain de diamètre d avec $d \approx 2L$ (Zener, 1948; Stroh, 1954). Ces dislocations sont émises à partir d'une source et peuvent propager sous l'effet de la contrainte de cisaillement. Leur modèle calcule ainsi la contrainte induite par cet empilement sur les grains voisins. Les dislocations émises et propagées sont progressivement bloquées au niveau du joint de grain et forment un empilement. Chaque dislocation de cet empilement exerce un champ de contrainte sur le

joint. La contrainte σ qu'exerce l'empilement à une distance r du joint dans la direction θ est exprimée par (voir Figure 10) :

$$\sigma_{2L}(r, \theta) = (\tau - \tau_i) \sqrt{\frac{L}{2r}} f(\theta) \quad (2.10)$$

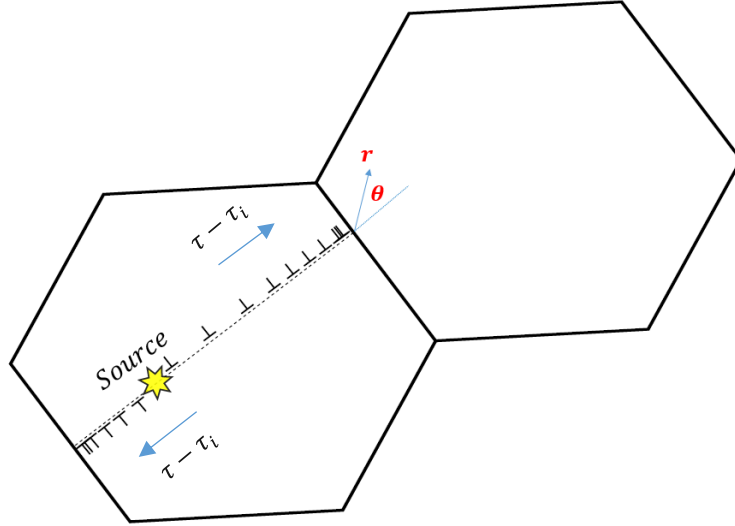


Figure 10 : Empilement de dislocations coins émises par une source de Frank-Read et bloquées au niveau du joint entre deux grains adjacents.

τ est la contrainte de cisaillement, τ_i est la friction du réseau (*Lattice friction*) et f une fonction de θ . Lorsque $\sigma_{2L} = \sigma_{separation}$ on commence à rompre les liaisons atomiques voisines. Le modèle suppose que l'événement critique est la germination, la contrainte de clivage n'est rien d'autre que la contrainte de cisaillement τ_f suffisante pour conduire à $\sigma_{2L} = \sigma_{separation}$. En tête d'empilement, la contrainte tend vers l'infini et il convient donc d'évaluer celle-ci à une distance X_c suffisamment grande mais supposée indépendante de la taille de grain.

La contrainte de clivage τ atteint une valeur critique de clivage τ_f sur la distance X_c tel que :

$$(\tau - \tau_i)_f = \frac{\sigma_{separation}}{f(\theta)} \sqrt{\frac{2X_c}{L}} \approx \frac{E}{10} \sqrt{\frac{X_c}{d}} \quad (2.11)$$

Cette formule montre que la contrainte nécessaire au clivage est inversement proportionnelle à la taille de grain d . Cette contrainte dépend de la température car τ_i dépend fortement de la température. Ceci est en contradiction avec le fait que la contrainte de clivage des aciers est a priori indépendante de la température. Ceci suggère que le clivage est plutôt contrôlé par la propagation et non pas par l'amorçage. En revanche, la même dépendance en taille de grain est démontrée dans le modèle de clivage contrôlé en propagation de (Cottrell, 1958). Son modèle suppose que le clivage est induit par la propagation des microfissures au niveau de l'intersection de deux plans d'empilement de dislocations.

2.1.4 Cadre général du clivage

La description du clivage en tant que phénomène statistique basé sur la théorie de Weibull est développé tardivement par rapport à la théorie de base de Weibull. (Curry and Knott, 1978) furent les premiers à affirmer que le clivage dans les aciers ferritiques est de nature statistique. En plus, les mêmes auteurs ont développé une méthode pour estimer la valeur de K_{IC} en fonction des champs de contraintes en amont de la fissure et de la distribution des tailles des carbures. Ce modèle cependant, ne permet pas d'expliquer la dispersion de la ténacité ni l'effet de taille des éprouvettes sur les valeurs moyennes

mesurées (Sanz, 1980). Le modèle nommé *RKR* (Ritchie *et al.*, 1973) est un modèle de base qui a établi une formule analytique pour K_{Ic} en utilisant les champs asymptotiques *HRR* (Hutchinson, 1968; Rice and Rosengren, 1968) en avant de la pointe d'une fissure. La nouveauté de ce modèle consiste dans le fait d'inclure un critère de taille pour permettre le clivage : la contrainte critique de clivage doit être atteinte sur une distance caractéristique ($\sim$ taille de 2 grains adjacents), donc sur un volume caractéristique, pour que le clivage puisse avoir lieu. Le modèle *RKR* prédit une dépendance de la ténacité d'amorçage par rapport à la limite d'écoulement et donc par rapport à la température.

Le clivage est de nature statistique à cause du fait que les matériaux sont en général hétérogènes à l'échelle microscopique. Cette nature sera traduite par une hypothèse fondamentale dans les modèles physiques développés dans la littérature, qui est l'hypothèse du maillon le plus faible (*the weakest link assumption*). Dans la suite on présentera une description statistique du clivage.

Considérons un volume V_0 du matériau (Figure 11) qui contient une certaine densité d'initiateurs¹ de clivage c.à.d. des défauts distribués dans le volume V_0 dont la taille a dépasse une certaine taille critique a_c . Chacun d'entre eux a une certaine probabilité d'être critique c.à.d. d'induire la ruine totale du volume V_0 .

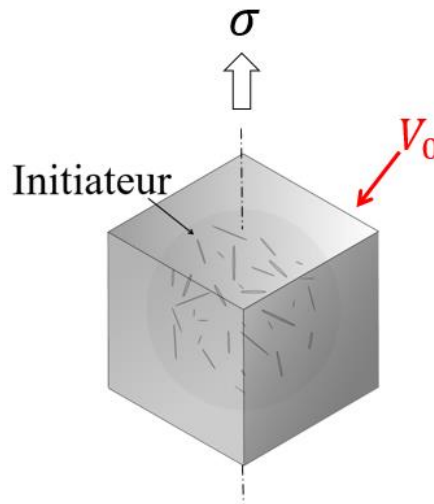


Figure 11 : Élément de volume représentatif du clivage dans le matériau, qui contient une certaine densité de défauts.

Cette probabilité notée $p(a \geq a_c)$ est une fonction complexe qui dépend de plusieurs variables dont :

- Le niveau de contrainte : le critère de Griffith indique que la contrainte critique de propagation varie inversement avec la taille de défaut dans l'équation (2.7). Pour un niveau de contrainte σ appliqué au volume V_0 , seuls les défauts dont la taille dépasse une taille critique a_c peuvent devenir critiques. La criticité d'un défaut donné dépend de la contrainte σ appliquée sur le volume V_0 .
- Le niveau de déformation : pour un état de contrainte donné, le nombre de défaut peut augmenter avec la déformation plastique (Kaeghele and Tetelman, 1969) quand la température est basse. D'autres observations (McMahon and Cohen, 1965; Lindley *et al.*, 1970; Gurland, 1972) ont montré que les fissures arrêtées au niveau des joints de grains s'émoussent avec plus de déformations plastiques et ne peuvent plus se propager.
- La température, la taille des grains, la distribution des tailles des initiateurs, etc.

Les initiateurs peuvent interagir localement mais aucune interaction à l'échelle du volume V_0 n'est permise. Cette hypothèse implique que : les initiateurs ne peuvent pas former un grand initiateur qui traverse le volume V_0 . Autrement dit, la survie du volume V_0 exige la non criticité de tous les initiateurs.

³Clivage Initiator : terme emprunté de Wallin 1991

Sous cette hypothèse, on peut alors calculer la probabilité de rupture de ce volume V_0 directement à partir de la fonction $\mathbf{p}(a \geq a_c)$ par la relation :

$$\mathbf{P}_{V_0} = 1 - (1 - \mathbf{p}(a \geq a_c))^{N \times V_0} \quad (2.12)$$

N est le nombre d'initiateurs dans un volume d'unité. Cette relation n'est pas approximative et aucune autre hypothèse n'est émise pour la démontrer. D'autre part, pour déterminer la probabilité de survie d'une structure soumise à un champ de contraintes, il suffit de découper la structure en un ensemble de n volumes V_0 reliés par l'hypothèse du maillon faible. Cette idée est le fondement du modèle Beremin qu'on présente dans le paragraphe suivant.

2.1.5 Le modèle de Beremin et au-delà

Le modèle de Beremin 1983 (Beremin *et al.*, 1983) est un modèle statistique qui définit la probabilité de rupture à partir de la distribution des tailles de défauts dans le volume V_0 notée $\mathbf{p}(a)$. La taille critique a_c est liée à la contrainte principale de traction σ sur le volume V_0 par la relation de Griffith de l'équation (2.7) :

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi(1-\nu^2)a_c}} \rightarrow a_c = \frac{2E\gamma_s}{\pi(1-\nu^2)\sigma^2} \quad (2.13)$$

Le volume V_0 doit être suffisamment grand pour contenir un nombre suffisant d'initiateurs, car sinon une série de volumes parfaits sans défauts ne satisfait pas l'hypothèse du maillon faible. La taille du volume V_0 doit également être suffisamment petite pour voir un champ de contrainte homogène. Ce modèle postule pour V_0 une taille de quelques grains adjacents. La probabilité $\mathbf{P}_{V_0}$ de rupture du volume V_0 est identique à la probabilité de trouver un défaut de taille $a \geq a_c$ dans le volume V_0 . On peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{V_0}(\sigma) &= \int_{a_c}^{+\infty} \mathbf{p}(a) da = \int_{a_c}^{+\infty} \frac{\delta}{a^\beta} da = \frac{2\delta}{2\beta - 2} \left(\sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi(1-\nu^2)}} \right)^{2-2\beta} \sigma^{2\beta-2} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_u} \right)^m \\ m &= 2\beta - 2 \quad \sigma_u = \left(\frac{m}{2\delta} \right)^{\frac{1}{m}} \cdot \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi(1-\nu^2)}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

m est un paramètre caractérisant la dispersion, lorsque sa valeur devient importante, on tend vers une description déterministe du clivage i.e. :

$$\sigma > \sigma_u \rightarrow \text{clivage} \quad \sigma < \sigma_u \rightarrow \text{pas de clivage.}$$

σ_u est a priori indépendante de la température en première approximation et $\sigma_u^m V_0$ est une constante du modèle qui représente un facteur d'échelle (*Scale factor*). La forme de la loi de distribution $\mathbf{p}(a)$ utilisée dans l'équation (2.14) est un choix et ses paramètres peuvent être identifiés expérimentalement (Jayatilaka and Trustrum, 1977). Moyennant l'hypothèse du maillon faible sur une structure composée de n volumes V_0 (Figure 12) la probabilité de survie de la structure $1 - \mathbf{P}_f$ est le produit des probabilités de survie des volumes V_0 tel que :

$$1 - \mathbf{P}_f = \prod_{i=1}^n (1 - \mathbf{P}_{V_0}(\sigma_i)) = \exp \left(\sum_{i=1}^n \ln[1 - \mathbf{P}_{V_0}(\sigma_i)] \right) \approx \exp \left(\sum_{i=1}^n -\mathbf{P}_{V_0}(\sigma_i) \right) \quad (2.15)$$

D'autre part, puisque la contrainte σ_i est constante dans chacun des volumes V_0 , les sommes de Darboux inférieures et supérieures sont égales. On peut alors transformer la somme de l'équation (2.15) en une intégrale :

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_{V_0}(\sigma_i) = \frac{1}{V_0} \sum_{i=1}^n V_0 \cdot \mathbf{P}_{V_0}(\sigma_i) = \frac{1}{V_0} \int_V \mathbf{P}_{V_0}(\sigma_I) dV = \frac{1}{V_0} \int_V \left(\frac{\sigma_I}{\sigma_u} \right)^m dV \quad (2.16)$$

La probabilité de rupture $\mathbf{P}_f$ d'une structure composée de n volumes V_0 est alors exprimée par :

$$\mathbf{P}_f = 1 - \exp \left(- \left(\frac{\sigma_w}{\sigma_u} \right)^m \right) \quad \sigma_w = \left(\frac{1}{V_0} \int_V \sigma_{\text{eff}}^m dV \right)^{\frac{1}{m}} \quad (2.17)$$

Dans le modèle initial σ_{eff} est prise égal à la plus grande contrainte principale σ_I comme indiqué ci-dessus. Pour tenir compte des effets d'histoire (Rossoll, 1998; Lefevre *et al.*, 2002), il convient d'employer une contrainte σ_{eff} définie comme étant la plus grande valeur de la contrainte principale maximale au cours du chargement :

$$\sigma_{\text{eff}}(\mathbf{x}, t) = \max_{[0, t]} \sigma_I(\mathbf{x}, t) \quad (2.18)$$

Le maximum est évalué entre l'instant initial ($\sigma = \mathbf{0}$) de l'application du chargement et un instant t du chargement. Cette prise en compte est particulièrement importante dans les cas où la rupture fragile est précédée d'une rupture ductile. Dans ce cas, la contrainte décroît là où s'est propagée la fissure. La prise en compte des grandes déformations et de l'émoussement de la fissure peut également induire une baisse locale de la plus grande contrainte principale car la position du maximum de contrainte change lors du chargement.

Le choix de la contrainte σ_I suppose implicitement que tous les défauts critiques dans le volume V_0 sont perpendiculaires à la direction de la contrainte principale maximale. Le maximum sur l'historique de cette contrainte permet d'avoir une dépendance croissante de la contrainte σ_w au chargement. Par conséquent, la probabilité de rupture $\mathbf{P}_f$ dans le volume élémentaire V_0 ne peut pas décroître bien que σ puisse diminuer au cours du chargement.

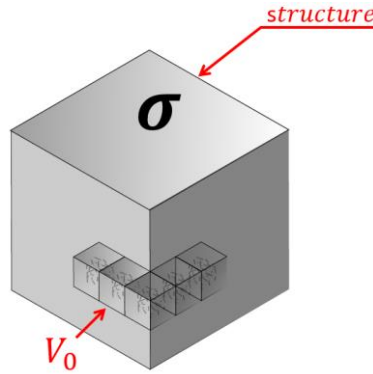


Figure 12 : Schéma d'une structure composée de n volume V_0 et soumise à un champ de contrainte σ

σ_w est la contrainte de Weibull qui représente une semi-norme du champ de contraintes intégrée sur toute la structure. En fait, plusieurs observations ont montré que le nombre des défauts amorcés est une fonction croissante de la déformation plastique (Kaeghele and Tetelman, 1969; Gurland, 1972; Bordet *et al.*, 2005a). Le modèle de Beremin suppose que tous les défauts apparaissent indépendamment de la déformation plastique macroscopique et restent actifs vis-à-vis du clivage tout le long du chargement. En réalité, certains défauts propagés et arrêtés aux joints de grains s'émoussent du fait de la déformation (à basses températures) et se désactivent vis-à-vis du clivage. Par conséquence, un défaut est actif juste après son apparition, sinon il sera émoussé et ne propagera probablement jamais (Bordet *et al.*, 2005a)(Bordet *et al.*, 2005b)

A la base de ces deux observations, d'autres corrections ont été proposées pour tenir compte de ces effets. La plasticité étant le moteur du clivage, il suffit d'évaluer la contrainte de Weibull exprimée par l'intégrale dans la formule (2.17) uniquement dans les zones plastifiées de la structure notée V_p :

$$P_f = 1 - \exp\left(-\left(\frac{\sigma_w}{\sigma_u}\right)^m\right) \quad V_0 \sigma_w^m = \int_{V_p} \sigma_{\text{eff}}^m dV \quad (2.19)$$

D'autres parts, il a été expérimentalement démontré dans (Beremin *et al.*, 1983) que la contrainte de rupture est une fonction qui croît avec la déformation plastique équivalente. Ceci peut être expliqué par l'allongement des grains dans la direction de la contrainte principale maximale à de grandes déformations. Pour un niveau de déformation plastique donné ε , un défaut de taille initiale a aura une taille apparente $\bar{a} = a \exp(-\varepsilon/2)$.

A partir de l'équation (2.7) on peut remarquer que la contrainte de clivage corrigée croît d'un facteur de $\exp(\varepsilon/4)$:

$$\bar{\sigma}_f = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi(1-\nu^2)a_c \exp(-\varepsilon/2)}} = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi(1-\nu^2)a_c}} \exp(\varepsilon/4) = \sigma_f \exp(\varepsilon/4) \quad (2.20)$$

Les formules (2.14), (2.17) nous permettent de tenir compte de cet effet, en appliquant le même raisonnement :

$$P_{V_0}(\sigma) = \int_{\frac{\bar{a}_c}{a_c}}^{+\infty} p(a) da = \left(\frac{\sigma}{\sigma_u} \exp(-\varepsilon/4)\right)^m \quad (2.21)$$

$$P_f = 1 - \exp\left(-\left(\frac{\sigma_w}{\sigma_u}\right)^m\right) \quad V_0 \sigma_w^m = \int_{V_p} \sigma_{\text{eff}}^m dV \quad (2.22)$$

$$\sigma_{\text{eff}} = \max_{[0,t]} \sigma_I \cdot \exp(-\varepsilon_I/4)$$

La taille, le type et la pré-déformation des éprouvettes d'essais peuvent affecter la correction de la contrainte de Weibull dans l'équation (2.22). D'une manière générale, on peut exprimer la contribution des déformations plastiques dans le processus de clivage par la correction :

$$P_f = 1 - \exp\left(-\left(\frac{\sigma_w}{\sigma_u}\right)^m\right) \quad V_0 \sigma_w^m = \int_{V_p} \left[\max_{[0,t]} \{\sigma_I \exp(-\varepsilon_I/k)\}\right]^m dV \quad (2.23)$$

ε_I est la déformation plastique dans la direction de σ_I et k est une constante à identifier (~ 2 dans (Beremin *et al.*, 1983)).

Pour tenir compte du nombre d'initiateurs actifs qui peuvent devenir critiques en fonction des déformations plastiques, (Bordet *et al.*, 2005a)(Bordet *et al.*, 2005b) ont proposé d'évaluer l'incrément de probabilité de rupture pour un incrément de défauts amorcés au fur et à mesure que la déformation plastique augmente. Ce modèle considère qu'uniquement les nouveaux défauts amorcés peuvent devenir critiques et déclencher le clivage. Un point de vue similaire est considéré dans (Ruggieri *et al.*, 2015) qui proposent une distribution de type Poisson des défauts amorcés qui peuvent devenir critiques pour chaque incrément de déformation plastique cumulée. En effet, le modèle introduit un terme supplémentaire dans la fonction $p(a)$ tel que :

$$P_{V_0}(\sigma) = \int_{a_c}^{+\infty} p(a) \cdot (1 - \exp(-\lambda p)) da \quad (2.24)$$

L'hypothèse principale de cette modification consiste à supposer que la proportion des défauts éligibles à devenir critiques dans le volume V_0 parmi tous les défauts amorcés suit un processus de Poisson (Feller, 1968). λ est un paramètre adimensionnel interprété comme la proportion des défauts qui peuvent devenir critiques parmi les défauts apparus par unité de déformation plastique. Lorsque $\lambda \rightarrow \infty$ le modèle est équivalent au modèle de Beremin précédent. On note également que $p = 0 \rightarrow P_{V_0} = 0$ ce qui signifie qu'il est nécessaire d'avoir un certain niveau de déformation pour déclencher le clivage. Cet effet n'est pas pris en compte dans le modèle de Beremin. Sa mise en œuvre réduit la probabilité de rupture pour des paramètres de Weibull fixes. En appliquant le même raisonnement que précédemment :

$$P_f = 1 - \exp\left(-\left(\frac{\sigma_w}{\sigma_u}\right)^m\right) \quad V_0 \sigma_w^m = \int_{V_p} \left[\max_{[0,t]} \{\sigma_I (1 - \exp(-\lambda p))\} \right]^m dV \quad (2.25)$$

Ce modèle est utilisé pour prédire l'effet de différentes géométries sur le clivage i.e. différents états de confinement (*Constraint effect*). Dans notre étude on s'intéressera principalement à modéliser le clivage dans la partie basse de la transition sur différentes géométries. Vu la simplicité que présente le modèle de Beremin modifié donné par l'équation précédente (2.25) et la facilité de son implémentation, on fait le choix d'exploiter ce modèle dans le chapitre (§6).

Plusieurs autres modèles proposent autres formes pour la fonction $p(a)$ exprimée comme une loi de puissance ou à la base d'une exponentielle (Carassou et al., 1998; Lee et al., 2002; Ruggieri et al., 2015). Plusieurs autres modifications ont été proposées dans la littérature à la base de l'équation (2.19) en proposant une contrainte seuil σ_{wth} à partir de laquelle le clivage est possible (Bakker A., 1991; Xia and Cheng, 1997; Gao et al., 1999). L'effet des déformations plastiques sur la nucléation et sur la désactivation des initiateurs été inclus également dans (Bernauer et al., 1999).

(Lee et al., 2002) proposent une expression de $p(a)$ qui permet d'introduire un seuil sur la contrainte de Weibull. La probabilité de trouver un carbure de taille supérieure à une taille donnée a est donnée par :

$$p(a) = \exp\left(-\left(\frac{a - a_u}{a_0}\right)^n\right) \quad (2.26)$$

La probabilité de rupture cumulée qui en résulte peut s'écrire sous la forme (Tanguy et al., 2003):

$$P_f = 1 - \exp\left(-\frac{V}{V_0} \exp\left\{-\left(\frac{1/\sigma^2 - 1/\sigma_u^2}{1/\sigma_0^2}\right)^m\right\}\right) \quad (2.27)$$

σ_u, σ_0 sont deux paramètres à identifier et V est un volume soumis à la contrainte σ . Une formule similaire à l'équation (2.26) est proposée dans (Lin et al., 1986; Kroon and Faleskog, 2002) de la forme :

$$p(a) = \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{a}{\alpha}\right) \quad (2.28)$$

(Gao et al., 1998; Petti and Dodds, 2004; Wasiluk et al., 2006) propose une modification afin de tenir compte de différents états de confinement qui résultent de différents a_0/W . Les auteurs ont introduit un seuil σ_{wmin} dans le dénominateur tel que :

$$P_f = 1 - \exp\left(-\left(\frac{\sigma_w^{m/4} - \sigma_{wmin}^{m/4}}{\sigma_u^{m/4} - \sigma_{wmin}^{m/4}}\right)^4\right) \quad (2.29)$$

Avec $\sigma_{wmin} = \sigma_w(K = K_{min})$ la contrainte de Weibull au-delà de laquelle le clivage est possible. σ_{wmin} dépend de a_0/W et potentiellement de l'état du confinement. En revanche, σ_u telle que définie

dans cette expression reste pratiquement constant et ne dépend que du matériau. (Gao *et al.*, 1998) utilise une autre expression similaire à l'équation précédente donnée par :

$$P_f = 1 - \exp \left(- \left(\frac{\sigma_w - \sigma_{wmin}}{\sigma_u - \sigma_{wmin}} \right)^m \right) \quad (2.30)$$

(Hausild, 2002) et d'autres auteurs ont utilisé un modèle avec seuil de la forme :

$$P_f = 1 - \exp \left(- \left(\frac{\sigma_w - \sigma_{th}}{\sigma_u} \right)^m \right) \quad (2.31)$$

L'introduction du seuil σ_{th} permet de réduire la valeur de m identifiée. Cette contrainte était fixée à $\sigma_{th} = 1400 MPa$ à partir de la contrainte estimée sur les sites d'amorçage (Rossoll, 1998).

Les modèles statistiques à basses températures produisent plus ou moins des résultats semblables macroscopiquement malgré les hypothèses qui peuvent varier d'un modèle à l'autre. Ce n'est pas le cas concernant la zone de température de transition ductile-fragile. La déchirure ductile qui précède la rupture fragile aussi bien que la condition de la plasticité généralisée (LSY) peuvent compliquer la réalité du clivage.

Dans la partie suivante, on s'intéressera au régime SSY et aux différentes simplifications de ce régime sur la modélisation du clivage.

2.1.6 Calcul de σ_w dans le régime de la plasticité confinée : SSY

La plasticité est dite confinée lorsque la taille de la zone plastique est négligeable devant la taille caractéristique de la structure $\hat{L}$. (Brown and Srawley, 1967) ont proposé la limite suivante pour décrire le régime de plasticité confinée en mode I :

$$2.5 \left(\frac{K_I}{\sigma_0} \right)^2 \leq \hat{L} = \min\{W - a_0, a_0, B\} \quad (2.32)$$

a_0, W, B sont respectivement la taille de la fissure, la largeur de l'éprouvette et son épaisseur. σ_0 est la limite d'élasticité. La taille de la zone plastique devant une fissure est calculée à partir des relations classiques :

$$D_p = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_0} \right)^2 & \sigma - plane \\ \frac{1}{3\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_0} \right)^2 & \varepsilon - plane \end{cases} \quad (2.33)$$

Sous l'hypothèse des déformations planes, on remarque que la taille de la zone plastique est de l'ordre du terme $(K_I/\sigma_0)^2 \sim (JE/\sigma_0^2) \gg J/\sigma_0$ qui a l'unité d'une longueur. L'équation (2.32) signifie que le chargement appliqué K_I (Figure 13) doit développer une zone plastique dont la taille ne doit pas dépasser le 1/24 de la taille de la structure :

$$D_p \leq \frac{\hat{L}}{24} \quad (2.34)$$

En se plaçant maintenant dans le domaine de plasticité confinée, une analyse adimensionnelle des paramètres $(r, \theta, J/\sigma_0)$ permet de proposer une expression générale des contraintes au voisinage de la pointe d'une fissure par :

$$\frac{\sigma_{ij}(r, \theta)}{\sigma_0} = f\left(\frac{r}{\left(\frac{J}{\sigma_0}\right)}\right) \cdot \tilde{\sigma}_{ij}(\theta) \quad (2.35)$$

A partir de l'analyse d'Irwin, la zone plastique S_p peut être définie par :

$$S_p = \left\{ (r, \theta) ; \frac{r}{\left(\frac{J}{\sigma_0}\right)} \leq \psi(\theta) \right\} \quad (2.36)$$

ψ est une fonction qui dépend de θ (Figure 13). L'équation précédente traduit le fait que la zone plastique ne change pas de forme mais change uniquement de taille lorsque J augmente. La taille de la zone plastique varie dans les mêmes proportions que le terme J/σ_0 . Le modèle *HRR* (Hutchinson, 1968; Rice and Rosengren, 1968) permet de donner la forme de la fonction f de l'équation (2.35) pour un écouissage en exposant de type *Ramberg-Osgood* :

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) = \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{\frac{1}{N}} \quad (2.37)$$

Avec α un paramètre adimensionnel, N l'exposant de l'écrouissage et $\sigma_0 = E\varepsilon_0$. Les contraintes du modèle *HRR* sont :

$$\frac{\sigma_{ijHRR}(r, \theta)}{\sigma_0} = \left(\frac{1}{\varepsilon_0 I_N} \frac{1}{\frac{r}{\left(\frac{J}{\sigma_0}\right)}} \right)^{\frac{N}{N+1}} \cdot \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, N) \quad (2.38)$$

I_N Est une constante d'intégration. L'équation (2.38) et l'équation (2.35) montrent que le champ σ est un champ auto similaire du paramètre adimensionnel $r/(J/\sigma_0)$. Ceci signifie que la forme du profil des contraintes en fonction de $r/(J/\sigma_0)$ est indépendante du chargement J . Ce profil s'étire en fonction de r –loin de la pointe de fissure– lorsque J augmente mais les valeurs des contraintes restent inchangées (voir Figure 14).

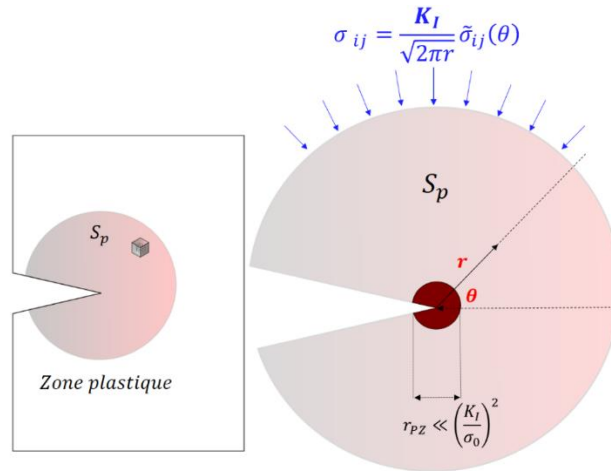


Figure 13 : Epreuve fissurée étudiée sous l'hypothèse de déformations planes dans le domaine de plasticité confinée SSY. La taille de la zone d'élaboration r_{pz} –zone de couleur foncée– est négligeable devant la taille de zone plastique en SSY.

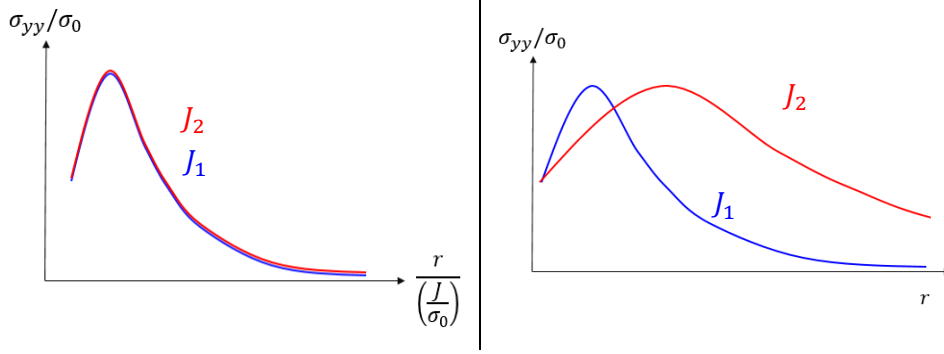


Figure 14 : Illustration de l'auto similarité de la contrainte d'ouverture. A gauche, le profil de la contrainte est présenté en fonction de $r/(J/\sigma_0)$. Ce profil ne dépend pas de J . Les courbes à droite représentent la contrainte en fonction de r à J_1 et à J_2 tel que $J_1 < J_2$. Ces deux courbes correspondent à un étirement de la courbe maitresse de gauche.

La propriété précédente nous permettra d'avoir une formule analytique de la contrainte σ_w de l'équation (2.19). En effet, à partir de la définition de σ_w et de l'équation (2.35) on a :

$$V_0 \sigma_w^m = \int_{V_p} \sigma_I^m(r, \theta) dV = \int_{z=0}^B \int_{(r, \theta) \in S_p} \sigma_I^m(r, \theta) r dr d\theta dz = B \int_{(r, \theta) \in S_p} \sigma_I^m(r, \theta) r dr d\theta \quad (2.39)$$

En effectuant un changement de paramètre $\hat{r} = r/(J/\sigma_0)$:

$$\int_{(r, \theta) \in S_p} \sigma_I^m(r, \theta) r dr d\theta = B \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\hat{r}=0}^{\hat{r}=\psi(\theta)} \left(\frac{J}{\sigma_0}\right)^2 \sigma_I^m(\hat{r}, \theta) \hat{r} d\hat{r} d\theta \stackrel{\text{def } Q}{=} B \left(\frac{J}{\sigma_0}\right)^2 Q \quad (2.40)$$

L'intégrale Q est une quantité finie positive qui dépend de la géométrie, de l'écroissage et de m mais pas du chargement J (ou K_I). En effet, le champ HRR présente une forte singularité en $1/r^{\frac{N}{N+1}}$ ce qui se traduit par des contraintes infinies dans la pointe de fissure (équation (2.38)). L'intégrale précédente est donc logiquement infinie. En réalité, ce n'est pas tout à fait le cas car le modèle HRR ne tient pas compte de l'émoussement de la fissure et l'équation (2.38) est uniquement valide loin de la zone d'élaboration PZ (Figure 14). La réalité expérimentale montre que la fissure s'émoussera et supprimera la singularité précédente (contraintes bornées dans la zone émoussée). L'intégrale Q est nécessairement une intégrale finie. Finalement on a :

$$V_0 \sigma_w^m = B \left(\frac{J}{\sigma_0}\right)^2 Q \quad (2.41)$$

L'équation (2.19)(2.23) permet d'écrire la probabilité de rupture P_f sous la forme :

$$P_f = 1 - \exp(-BK_I^4 \hat{Q}) ; \hat{Q} \geq 0 \quad (2.42)$$

Sous les conditions de plasticité confinée, la probabilité de rupture résultante dépend de BK_I^4 . A 50% de probabilités de rupture cumulée, la quantité BK_{Ic}^4 est constante. Entre deux épaisseurs différentes B_1, B_2 :

$$B_1 K_{Ic}^4(B_1) = B_2 K_{Ic}^4(B_2) \quad (2.43)$$

Cette formule est souvent utilisée pour corriger la ténacité entre deux épaisseurs différentes à condition que l'état de contrainte ne soit pas modifié.

L'équation (2.42) prédit une probabilité de rupture non nulle lorsque le chargement K_I appliqué est infinitésimale. Ceci paraît contradictoire avec la réalité expérimentale qui montre qu'il est impossible de déclencher le clivage sans niveau suffisant de plasticité. Le clivage n'est alors possible qu'à partir

d'un certain seuil de chargement noté K_{min} (Wallin, 1991). Wallin a proposé une formule analytique similaire à (2.42) avec un seul paramètre T_0 :

$$P_f = 1 - \exp\left(-\left(\frac{K_{JC} - K_{min}}{K_0 - K_{min}}\right)^4\right) \quad (2.44)$$

$$K_0 = 30 + 70 \exp(0.019(T - T_0)), K_{min} = 20 \text{ MPa}\sqrt{m}$$

Sa formule connue sous le nom de la *Master-Curve* ou la courbe maîtresse est une expression de la ténacité sous une forme générale pour tous les aciers ferritiques indépendamment de la composition et de la limite d'écoulement de l'acier. Cette formule vaut pour une épaisseur de référence donnée (25mm) ; on applique la correction d'épaisseur déduite de (2.43) si les épaisseurs sont différentes. La norme ASTM (ASTM-E1921) propose une méthodologie d'identification de la température de référence T_0 pour les aciers ferritiques à la base de l'équation (2.44).

Dans la suite on présentera un aperçu global et sélectifs des aspects importants liés au calcul de la contrainte de Weibull dans la zone de transition ductile-fragile et particulièrement la prise en compte de l'effet de la déchirure ductile et de la température dans le calcul de σ_w .

2.1.7 Calcul pratique de σ_w pour une fissure stationnaire

Avant d'entamer la transition ductile-fragile, le calcul de la contrainte de Weibull pour une fissure ne se propageant pas mais s'émoussant pourra présenter quelques difficultés. En petites déformations, la présence d'une fissure aiguë conduit à une singularité des champs de contraintes et de déformations comme on a pu le constater dans le paragraphe précédent dans l'équation (2.29) (Hutchinson, 1968; Rice and Rosengren, 1968). Cette singularité conduit à une forte dépendance à la taille de maille de la contrainte de Weibull. En réalité, les champs ne sont pas singuliers parce que la fissure s'émousse. Ils présentent néanmoins un fort gradient. Le calcul de la contrainte de Weibull en hypothèse de grandes déformations pour tenir compte de l'émoussement, nécessite alors l'utilisation d'éléments suffisamment petits pour capter ce gradient des champs de contraintes et de déformations. Il est typique de choisir des tailles fixes des éléments (Bakker A., 1991; Minami et al., 1992; Xia and Shih, 1996; Renevey, 1997; Gao et al., 1999). Une grande taille de maille conduit à une valeur plus réduite de la contrainte principale et du gradient. De même, la déformation plastique et son gradient sont très sensibles à la taille de maille. Un exemple de cette dépendance est présenté dans (Renevey, 1997). Il montre en particulier (en annexe F) que plus la taille de maille est grande plus faible est le maximum de contrainte évalué par le calcul éléments finis. Il est proposé également dans (Beremin et al., 1983) de choisir V_0 tel qu'il représente environ quelques grains et que la taille soit alors prise égale à $(V_0)^{1/3}$. Cependant, le choix du volume V_0 n'a pas de conséquences pratiques sur la σ_w et ne devrait pas affecter le clivage en aucune manière possible comme remarqué dans (Xia and Cheng, 1997). Bien que V_0 ait dans le modèle le sens d'un volume élémentaire, cet aspect disparaît en pratique dans le calcul de σ_w . En effet cette contrainte reste inchangée tant que le produit $V_0 \sigma_u^m$ est constant.

Certains auteurs ont modélisé une entaille à la place d'une fissure (Ruggieri and Dodds, 1996; Gao et al., 1998; Kroon and Faleskog, 2002; Ruggieri et al., 2015). Ces auteurs proposent une taille fixée du rayon d'entaille suffisamment petit pour limiter l'effet du rayon initial sur la contrainte de Weibull. Ces auteurs utilisent également une formulation dite : formulation $\bar{B}$ (Hughes, 1980) pour éviter le verrouillage volumique des éléments. Comme remarqué dans (Gao et al., 1998), le raffinement du maillage devient un point clé dans le processus d'identification des paramètres du modèle de Beremin à savoir les paramètres m, σ_u . En plus, les grandes valeurs de m accentuent l'effet des petites variations parasites (convergence du calcul) du champ de contraintes sur la contrainte de Weibull. On notera également que si on tient compte des grandes déformations et d'un émoussement initial faible, les contraintes ne sont plus singulières et que l'intégrale conduisant au calcul de σ_w est alors nécessairement convergente. Des problèmes purement numériques (verrouillage, déformation excessive des éléments...) peuvent toutefois en rendre le calcul difficile. La prise en compte de la déchirure ductile

pourra introduire d'autres problèmes tant du point de vue de la modélisation que du point de vue du calcul pratique de σ_w . Dans le paragraphe suivant, on s'intéressera aux aspects liés à la prise en compte la déchirure ductile dans la zone de transition

2.1.8 Calcul de la contrainte de Weibull en présence de la déchirure ductile

Dans la zone de transition ductile fragile, le clivage est souvent précédé par une déchirure ductile limitée de la fissure. Ce mécanisme peut être modélisé par le couplage entre un modèle d'endommagement ductile et le modèle de Beremin. Plusieurs auteurs (Tahar, 1998; Tanguy, 2001; Hausild, 2002; Rossoll et al., 2002b) et d'autres ont adopté cette approche pratique dans la description du clivage dans la zone de transition ductile-fragile et notamment dans la prédiction du passage résilience-ténacité à partir des éprouvettes dynamiques et quasi-statiques.

Plus ancien, (Xia and Shih, 1996) ont proposé de calculer la probabilité de rupture dans la présence de la déchirure ductile par un couplage entre le modèle de Gurson (Gurson, 1975) et le modèle de Beremin avec trois paramètres (2.31). Le modèle de Gurson est exploité pour définir une probabilité d'apparition des cavités P_{void} dans un volume élémentaire V_i soumis à une contrainte σ_I^i . La contrainte de Weibull est donnée par :

$$V_0 \sigma_w^m = \sum_{i=1}^n (1 - P_{void}^i) (\sigma_I^i - \sigma_{th})^m V_i ; \text{ avec } V_i \text{ tel que } \sigma_I^i \geq \sigma_{th} \text{ and } \sigma_I \geq \lambda \sigma_0 \quad (2.45)$$

σ_0 la limite d'élasticité et $\lambda = 3.5$ un paramètre permettant de définir la zone d'élaboration de la rupture par la condition : $\sigma_I \geq \lambda \sigma_0$. Lorsque la déchirure ductile n'est pas prise en compte i.e. $P_{void} = 0$ on retrouve le modèle classique de Beremin de l'équation (2.31). La déchirure ductile est simulée à partir d'un raffinement de cellules de taille D de l'ordre de la distance moyenne entre les grandes inclusions. Il a été proposé également de lier cette taille D au $CTOD$ afin de bien représenter le gradient des champs de contraintes pour le calcul de la contrainte de Weibull. Les auteurs confirment que la taille de la zone d'élaboration croît en taille en fonction de l'avancée ductile de la fissure. En effet, Il a été affirmé par (Varias and Shih, 1993; O'Dowd et al., 1995) et d'autres que le niveau de la contrainte principale maximale est constant en fonction de la déchirure ductile et que la taille de la zone d'élaboration augmente signifiant que la zone d'échantillonnage (*Sampling zone*) s'élargit. Par conséquent, la probabilité de trouver un défaut critique pouvant déclencher le clivage augmente. En plus, la triaxialité augmente significativement en fonction de la déchirure ductile ce qui modifie l'état du confinement de l'éprouvette (*Constraint effect*). En comparant la contrainte de Weibull avec et sans prise en compte de la déchirure ductile, (Ruggieri and Dodds, 1996) ont montré que la contrainte de Weibull sans avancée ductile atteint une valeur stationnaire tandis qu'elle continue de croître en fonction de l'avancée ductile.

(Koers et al., 1995) applique une démarche similaire sur des éprouvettes *SENB* à -40°C avec un modèle de Beremin à trois paramètres (équation (2.31)) ajusté sur des éprouvettes *AE* à -170°C . Les probabilités de rupture simulées sont surestimées par rapport aux probabilités expérimentales. Pour expliquer ces écarts, les auteurs avancent l'hypothèse que les paramètres identifiés à -170°C ne peuvent pas être représentatif du mécanisme de rupture à -40°C . (Bernauer et al., 1999) se base sur un modèle de Beremin standard à 2 paramètres en plus d'une modification liée à la probabilité d'apparition des cupules P_{void} dans l'équation (2.45). Ils constatent que les cupules germinées sur les carbures par un mécanisme de déchirure ductile ne doivent pas faire partie des sites de clivage. Ces cupules sont exclues à l'aide d'un critère de déformation plastique : au-delà d'un seuil de déformation plastique ϵ_{lim}^p , les inclusions à l'origine des cavités créées ne contribuent plus au clivage. Les auteurs constatent une bonne représentation des probabilités expérimentales lorsque le niveau de la déchirure ductile est limité.

(Eripret et al., 1996) calcule la contrainte de Weibull par un modèle de Beremin classique à 2 paramètres en simulant la déchirure ductile avec un modèle de Rousselier (Rousselier, 2001). Ce modèle ne permet pas de décrire la transition et sous-estime les valeurs des ténacités dans cette zone. (Renevey, 1997) propose un modèle *MnS* qui tient en compte l'effet de la déchirure ductile sur le clivage. Plus précisément, l'auteur montre que le clivage peut être déclenché à partir des amas d'inclusions *MnS* dans

l'acier 16MND5 et montre l'importance de ces amas en tant que des concentrateurs de contraintes. (Carassou *et al.*, 1998) étudie numériquement l'effet des microfissures ductiles sur la probabilité de rupture et montre que l'apparition des cupules à partir des amas MnS permet d'augmenter la probabilité de rupture. La déchirure ductile est modélisée par un modèle de Rousselier dans son modèle.

Cependant, à notre connaissance, l'ensemble des modèles permettant de décrire la transition ductile-fragile à partir du couplage ne permettent pas de décrire systématiquement les résultats expérimentaux pour différents types de géométries à différentes températures de la zone de transition. La dépendance à la température de la contrainte de clivage semble être privilégiée par plusieurs auteurs.

2.1.9 Prise en compte de l'effet de température dans la zone de transition ductile-fragile

La dispersion des valeurs de ténacité croît en fonction de la température dans la zone de transition ductile-fragile. Les paramètres du modèle de Beremin identifiés dans la plage des températures pour lesquelles la rupture est fragile conduisent souvent à une sous-estimation des valeurs de ténacités dans la zone de transition ductile-fragile (Haušild *et al.*, 2002; Pineau, 2008). Plusieurs auteurs ont alors proposé une dépendance à la température de ces paramètres pour modéliser la transition. (Petti and Dodds, 2004; Wasiluk *et al.*, 2006) montrent à partir de la calibration du modèle de Beremin à trois paramètres (équation (2.29)) que le paramètre m est en pratique peu sensible à la température dans la zone de transition ductile-fragile tandis que σ_u croît avec la température dans cette zone. (Wallin *et al.*, 1984) propose également une dépendance à la température de la contrainte de clivage en incluant un terme supplémentaire $w_p(T)$ dans l'énergie de surface γ_s comme précédemment formulé dans l'équation (2.9). Le terme $w_p(T)$ est le travail plastique nécessaire pour créer des dislocations à la pointe de la fissure. Wallin considère qu'une densité critique de dislocations doit être atteinte pour causer la propagation d'une fissure. Par conséquent, pour maintenir une densité critique des dislocations en pointe de fissure, il faut un travail plastique plus important lorsque la température augmente (du fait de la grande capacité des dislocations à se déplacer lorsque la température augmente). Il propose alors une dépendance de la forme :

$$w_p(T) = w_0 + (w_p(0) - w_0) \exp(\alpha T) \quad (2.46)$$

$w_p(0) = w_p(T = 0 \text{ K})$, w_0 un terme supplémentaire et α une constante. A notre connaissance, on ne trouve pas de preuves expérimentales à cette hypothèse pour les aciers ferritiques. L'hypothèse de Wallin a été considérée dans les travaux de (Renevey, 1997; Mathieu *et al.*, 2010). (Haušild *et al.*, 2002) proposent une dépendance exponentielle du paramètre σ_u à la température de la forme :

$$\sigma_u(T) = A \exp\left(\frac{B}{T(^{\circ}\text{K})}\right) \quad (2.47)$$

σ_u est identifiée sur des éprouvettes CVN (Charpy V-notch). La transition est modélisée par un couplage entre le modèle GTN (Gurson, 1975; Tvergaard and Needleman, 1984) et le modèle de Beremin à 3 paramètres tel qu'il est donné dans l'équation (2.31). σ_u est croissant en fonction de la température comme affirmé également dans (Rossoll *et al.*, 2002b; Tanguy *et al.*, 2005). Plus récemment, (Samal *et al.*, 2008) ont considéré un paramètre σ_u indépendant de la température identifiée à -100°C sur une éprouvette CT₂₅. Les résultats sont en assez bon accord avec les données expérimentales mais uniquement sur un seul type de géométrie.

Le fait de varier les paramètres de Beremin avec la température est similaire à considérer une contrainte critique de clivage qui dépend de la température (Carassou *et al.*, 1998; Margolin and Kostylev, 1999; Rossoll *et al.*, 2002a). Cette dépendance à la température est probablement liée au changement de la nature de l'amorçage fragile démontré par plusieurs auteurs. (Haušild, 2002; Le Corre, 2006) observent que le mécanisme de rupture change à température élevée : le clivage semble s'amorcer par un mécanisme de déformations plastiques liée à l'interaction des dislocations et non pas sur des carbures comme dans le cas des températures fragiles (Wallin, 1984; Wallin *et al.*, 1984). Une large étude fractographique des sites de clivage en fonction de la température est conduite par (Mäntylä *et al.*, 1999). Il a été montré que d'une part, le nombre de sites de clivage décroît en fonction de la température et

d'une autre part, le type des sites de clivage dépend fortement de la température. Les sites d'amorçage sont majoritairement classés en deux catégories : (1) Amorçage sur des petites inclusions (2-3µm) sphériques composées de *MnS*, Oxydes, ou *TiC*. (2) Amorçage sur de grandes inclusions de type *MnS* (100µm) ou sur un amas de ces inclusions (*cluster*). Le deuxième mécanisme est observée dans (Renevey, 1997; Rossoll *et al.*, 2002b). On notera que dans l'acier de cette étude la teneur en soufre est beaucoup plus faible de sorte que ces amas sont absents (§3.1). Ces observations font émerger l'importance des grandes inclusions de type *MnS* dans le processus de clivage et pourra mettre en question l'hypothèse des volumes infinitésimaux dans le modèle de Beremin étant donné que des défauts de tailles finis pourront jouer un rôle important à amorcer le clivage dans la zone de transition ductile-fragile.

2.1.10 Prise en compte de la taille finie des défauts : approche non locale

Les modèles statistiques précédents ne tiennent pas compte de la taille finie des défauts à l'échelle macroscopique. En effet, les volumes élémentaires V_0 et les défauts qu'il contiennent sont représentés macroscopiquement par des points matériels ce qui est sous-entendu dans l'hypothèse d'une contrainte constante par volume élémentaire. Cependant, lorsque le gradient du champ de contraintes est très fort, cette hypothèse pourra influencer la condition du clivage.

Plus précisément, Il a été démontré que l'étape de la propagation du défaut (Figure 5) est contrôlée par le niveau de contrainte (Curry and Knott, 1978). Cette propagation devrait être maintenue par un niveau élevé de contrainte sur une distance caractéristique de quelques grains (Ritchie *et al.*, 1973; Bowen *et al.*, 1987). La contrainte locale seule n'est pas suffisante pour intégrer ce critère dans le voisinage du défaut lorsque le champ de contrainte présente une variation forte sur une échelle comparable à l'échelle des grains. Pour pallier cette difficulté, (Kroon and Faleskog, 2002) ont proposé un critère de propagation en utilisant la moyenne de la contrainte locale sur une sphère V_L de rayon L qui est considéré comme un paramètre matériau. On peut écrire la contrainte lissée comme :

$$\bar{\sigma}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_L} \int_{V_L} \sigma(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{V}} \quad (2.48)$$

Bien sûr le champ lissé $\bar{\sigma}(\mathbf{x})$ ne vérifie pas les conditions d'équilibre. On peut alors considérer deux cas extrêmes. Si $L \gg J/\sigma_Y$ le pic de contrainte existant dans la « process zone » est totalement effacé et les contraintes utilisées dans le critère sont faibles ; la rupture est alors exclue. Si $L \ll J/\sigma_Y$ le lissage ne modifie pas les contraintes et le modèle reste inchangé (quel qu'il soit). Ce modèle statistique permet de bien représenter les probabilités de rupture pour différents états de contraintes et de déformations. Une manière plus générale d'introduire le caractère « non local » dans la description du clivage, est déduite de la théorie des champs aléatoires, qui est basée sur la définition d'un volume local $\mathcal{D}$ critique à chaque point matériel permettant de capter uniquement les potentiels sites de clivage i.e $\sigma_I > \sigma_c$ avec σ_c la contrainte de clivage de chaque défaut (Jeulin, 1990; Berdin *et al.*, 1996).

2.1.11 Conclusion

Dans cette étude bibliographique sur la rupture fragile, on a présenté la description du clivage à l'échelle microscopique, puis on s'est intéressé à la définition de la contrainte de clivage. Le critère de clivage basé sur la contrainte de clivage de Griffith est retenu (équation (2.9)). Ensuite, en se servant de ce critère et de l'hypothèse du maillon faible, on évalue la probabilité de rupture cumulée d'une structure soumise à un champ de contraintes (équation (2.19)). Le modèle de Beremin ne tient pas compte suffisamment de l'effet des déformations plastiques sur la proportion des sites éligibles au clivage. Ce modèle est alors modifié par l'introduction de l'effet des déformations plastiques dans la probabilité de rupture (équations (2.24)(2.25)).

Le régime de la plasticité confinée permet de simplifier l'expression du calcul de σ_w et montre que la probabilité de rupture dépend du terme KB^4 . Cette dépendance est utilisée pour corriger la ténacité entre deux épaisseurs différentes qui ont le même état de contrainte. La formule simplifiée de la probabilité

de rupture en régime de plasticité confinée prévoit un risque de rupture par clivage pour des ténacités infinitésimales ce qui est en désaccord avec l'expérience. L'introduction d'un seuil inférieur K_{min} est alors nécessaire. La *Master-Curve* (équation (2.44)) propose une formule plus générale pour les aciers ferritiques en tenant compte de ce seuil.

Un aperçu général du calcul de la contrainte de Weibull dans la zone de transition ductile-fragile est présenté. D'abord, le calcul de σ_w pour une fissure aiguë peut montrer une forte dépendance au maillage à cause de la singularité des champs. L'émoussement de la fissure permet de supprimer la singularité des champs en avant d'une fissure. Toutefois, une fissure émoussée présente un fort gradient des champs de contraintes et de déformations et il est nécessaire d'adapter la taille des éléments pour capter ce gradient et utiliser une formulation éléments finis permettant d'éviter les problèmes de verrouillage volumique (Ruggieri and Dodds, 1996; Gao *et al.*, 1998; Kroon and Faleskog, 2002; Ruggieri *et al.*, 2015).

Le calcul de σ_w en présence d'une déchirure ductile est indispensable pour décrire la zone de transition. Il a été montré que la taille de la zone d'élaboration de la rupture augmente en fonction de la déchirure ductile signifiant que la zone d'échantillonnage (*Sampling zone*) s'élargit. Par conséquent, la probabilité de trouver un défaut critique pouvant déclencher le clivage augmente (Xia and Shih, 1996) (Ruggieri and Dodds, 1996). En présence d'endommagement ductile, les petites inclusions de carbure de fer sur lesquelles certaines cupules ductiles ont germé ne devraient plus être considérées comme des sites possibles de clivage ce qui pourrait conduire à une surestimation de la probabilité de rupture (Koers *et al.*, 1995) (Bernauer *et al.*, 1999). L'effet des grandes inclusions de type *MnS* sur le clivage est étudié par (Renevey, 1997; Carassou *et al.*, 1998). La prise en compte de l'effet de la présence des amas d'inclusions *MnS* sur le clivage est alors modélisée par (Renevey, 1997) et est utilisé par (Carassou *et al.*, 1998) pour simuler la transition.

Ce changement de la nature de l'amorçage dans la zone de transition a conduit plusieurs auteurs à proposer une dépendance à la température de la contrainte de clivage et par conséquent des paramètres de Beremin. Il a été démontrée par plusieurs auteurs (Renevey, 1997; Mäntylä *et al.*, 1999; Hausild, 2002; Rossoll *et al.*, 2002b; Tanguy *et al.*, 2005; Le Corre, 2006) que le mécanisme d'amorçage fragile change en fonction de la température en faisant émerger l'importance des grandes inclusions dans le processus de clivage. Ceci pourra avoir une conséquence sur l'hypothèse consistant à considérer des volumes infinitésimaux. Par conséquent, la prise en compte de la taille finie des défauts dans la modélisation du clivage pourra avoir une grande importance dans la zone de transition ductile-fragile. Cet effet a été pris en compte par plusieurs auteurs (Jeulin, 1990; Berdin *et al.*, 1996; Kroon and Faleskog, 2002) en proposant un modèle dit « non local ».

Dans la suite de notre étude on s'intéressera principalement à modéliser le clivage dans la partie basse de la transition sur deux géométries d'éprouvettes (*CT* et *SENT*). On fait le choix d'exploiter le modèle de Beremin modifié donné par l'équation précédente (2.25) étant donnée la simplicité que présente ce modèle et la facilité de son implémentation.

2.2 L'endommagement ductile

2.2.1 Présentation de l'endommagement ductile

L'endommagement ductile désigne la dégradation de la matière par un processus irréversible conduisant à la rupture. Ce processus présente un caractère nettement plus irréversible en comparaison avec l'irréversibilité – macroscopique – partielle de la plasticité (on peut très bien re-déformer le matériau pour lui donner sa forme initiale).

Les premiers concepts d'endommagement ont été introduits par *Kachanov* ([Kachanov L. M., 1958](#)) et *Rabotnov* ([Rabotnov, 1969](#)) et ce n'est qu'au début des années 80 que le domaine de la mécanique d'endommagement a été reconnu comme un domaine à part entière de la mécanique.

La rupture ductile constitue un grand axe de la mécanique d'endommagement. Ce mode de rupture peut schématiquement être décrit comme la succession de trois étapes principales : la germination des cavités, la croissance de ces cavités et leur coalescence ([Weck et al., 2008](#)). Les cavités dans les matériaux se créent dans l'étape de la germination à partir des inclusions primaires (des inclusions *MnS* principalement pour les aciers et en particulier l'acier de notre étude) rompues ou séparées de la matrice en laissant des vides (Figure 15, Figure 16) ([Kanetake et al., 1995](#)). Les cavités ainsi créées croissent en taille avec une certaine vitesse. La vitesse de croissance dépend de la triaxialité du chargement et de la déformation plastique du matériau ([Rice and Tracey, 1969](#)). La triaxialité est définie comme le rapport entre la contrainte moyenne $\sigma_m = \sigma_{kk}/3$ et la contrainte équivalente de von Mises σ_{eq} .

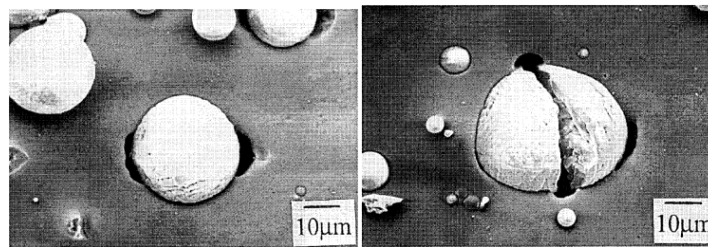


Figure 15 : Germination des cavités dans l'aluminium : par décohésion de la matrice à gauche et par rupture de l'inclusion à droite ([Kanetake et al., 1995](#))

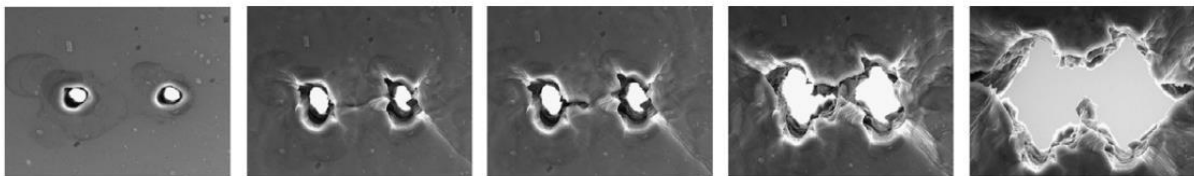


Figure 16 : croissance et coalescence des cavités ([Weck et al., 2008](#))

Une triaxialité élevée favorise une croissance rapide des microvides créés qui auront tendance à suffisamment grossir pour se rejoindre et former une amorce de fissure dans l'étape de coalescence. On parle alors d'une coalescence par striction interne (*Internal Necking*) ([Thomason, 1968](#)). En revanche, une faible triaxialité ne permet qu'une croissance limitée des microvides et leur coalescence nécessite l'intermédiaire d'un autre phénomène qui est la localisation des déformations. Plus précisément, une bande très locale à fort gradient de déformation plastique va apparaître entre les vides ce qui conduit à la germination des vides de petite taille sur des inclusions dures (carbures Fe_3C dans les aciers). Cette bande conduit à une coalescence par cisaillement entre les microvides créés (*Void sheeting*) ([Stone et al., 1985](#)) (voir l'exemple d'illustration en Figure 17).

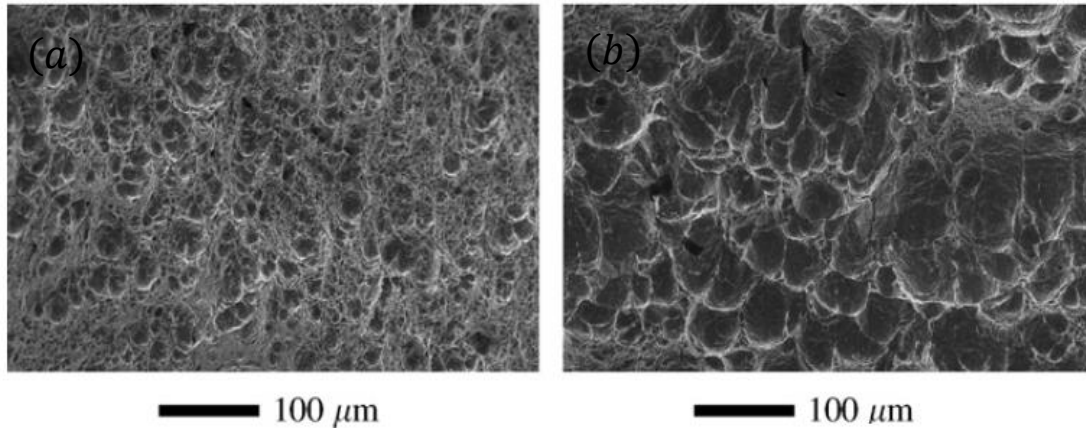


Figure 17 : Illustration des deux modes de coalescence : (a) Coalescence par le mécanisme du cisaillement (*Void Sheeting*). (b) Coalescence par striction interne (*Internal Necking*). (Tanguy *et al.*, 2008)

2.2.2 Les modèles de rupture ductile

2.2.2.1 Le modèle de Rice et Tracey

Parmi les modèles les plus simples décrivant la rupture ductile on trouve le modèle développé par Rice et Tracey (Rice and Tracey, 1969). Ce modèle simple permet de calculer la vitesse de croissance d'un vide dans un milieu infini rigide et parfaitement plastique :

$$\frac{\dot{R}}{R} = \alpha \exp\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m^\infty}{\sigma_{eq}^\infty}\right) \dot{p}^\infty ; \alpha = 0.283 \quad (2.49)$$

$\sigma_m^\infty, \sigma_{eq}^\infty$ sont respectivement la contrainte moyenne et la contrainte équivalente de von Mises du tenseur des contraintes σ^∞ appliquée à l'infini (condition aux limites en contrainte). Ce modèle montre que la déformation plastique n'est pas la seule responsable de la détérioration du matériau mais également la triaxialité : $\tau_\infty = \sigma_m^\infty / \sigma_{eq}^\infty$ qui a un effet significatif sur la vitesse de la croissance des vides (variation en exponentielle dans l'équation (6.18)).

Le modèle de Rice et Tracey découple la plasticité de l'endommagement i.e. l'endommagement n'affecte pas l'écoulement du matériau et peut être utilisé en post traitement d'un calcul élastoplastique pour des fins de pré-dimensionnement d'une structure par exemple. Pour cela, il suffit de calculer la variable d'endommagement D définie par :

$$\dot{D} = \alpha \exp\left(\gamma \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) \dot{p} ; D = \int_{p=p_c}^p \alpha \exp\left(\gamma \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) dp \quad (2.50)$$

Le calcul est fait en chaque point matériel de la structure. On utilise la variable D pour définir un critère de rupture. Le modèle stipule alors l'existence d'une limite D_c ou $(R/R_0)_c$ qui ne dépend que du matériau et pour laquelle, la condition $D = D_c$ implique l'amorçage de la rupture.

La condition de germination quant à elle peut également être incluse grâce au terme : $p \geq p_c$ de l'équation précédente. Cette condition traduit le fait que la germination ne peut avoir lieu qu'au-delà d'un certain seuil en déformation plastique p_c qui dépend uniquement du matériau.

Finalement, le modèle de Rice et Tracey contient tous les ingrédients permettant la description des trois étapes phénoménologiques de la rupture ductile : la germination, la croissance et la coalescence.

2.2.2.2 Le modèle de Gurson-Tvergaard-Needleman

Gurson (Gurson, 1975) reprend les idées du modèle précédent et adopte une approche micromécanique dans la description de l'endommagement. Le point de départ de cette approche consiste à homogénéiser

une sphère creuse parfaitement plastique qui obéit à un critère de von Mises. Le modèle de *Gurson* s'intéresse à l'expression de la surface de plasticité de la sphère creuse homogénéisée qui dépend de la porosité de la sphère ([Leblond, 1998](#)). Par conséquent, le modèle tient compte naturellement de l'endommagement à travers la variable de porosité f .

Gurson a démontré qu'une borne supérieure de la surface de plasticité de la sphère homogénéisée peut se présenter sous la forme :

$$\Phi = \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 + 2f \cosh\left(\frac{3}{2}\frac{\sigma_{kk}}{\sigma_0}\right) - 1 - f^2 = 0 \quad (2.51)$$

Avec σ_0 la limite d'écoulement du matériau. La normalité implique :

$$\dot{\epsilon}_p = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \quad (2.52)$$

λ est le multiplicateur plastique. L'évolution de la variable d'endommagement f peut être déduit à partir de la conservation de la masse de la matrice en négligeant les déformations élastiques. On peut écrire :

$$\dot{f} = (1 - f)\text{tr}(\dot{\epsilon}_p) \quad (2.53)$$

Cette égalité permet de décrire l'évolution de f sans avoir à introduire une loi d'évolution phénoménologique comme dans les approches thermodynamiques ([Lemaitre, 1985, 1996](#)). A partir de l'équation (2.51) on peut montrer que la porosité affecte le domaine d'élasticité de la sphère homogénéisée : plus f diminue et plus on s'approche de la surface de plasticité de von Mises (lorsque $f = 0$ i.e. la sphère est pleine)

Une limitation de ce modèle apparait lorsqu'on prédit la rupture. En effet, la rupture d'un élément de volume signifie que sa contrainte est nulle : $\sigma = \mathbf{0}$. En même temps, σ appartient à la surface de plasticité de l'équation (2.51) c.à.d. : $\Phi = -(1 - f)^2 = 0 \rightarrow f = 1$. Autrement dit, le modèle prévoit que la rupture aura lieu uniquement lorsque la matrice disparaît complètement ! Le modèle de *Gurson* est uniquement un modèle de croissance.

Plusieurs modifications phénoménologiques ont été proposées dans la littérature afin de contourner les limitations du modèle de *Gurson* de base. La modification la plus employée est celle de *Tvergaard* et *Needleman* ([Chu and Needleman, 1980](#); [Tvergaard, 1982](#); [Tvergaard and Needleman, 1984](#)) qui a permis de développer le modèle dit *GTN* (*Gurson-Tvergaard-Needleman*). Ce modèle est actuellement le modèle le plus largement utilisé dans les applications industrielles.

La surface de plasticité modifiée par *Tvergaard* et *Needleman* s'écrit :

$$\Phi = \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_f}\right)^2 + 2q_1 f_* \cosh\left(\frac{3q_2}{2}\frac{\sigma_{kk}}{\sigma_f}\right) - 1 - q_1^2 f_*^2 = 0 \quad (2.54)$$

Pour un matériau qui a dorénavant un comportement élastoplastique et qui obéit à un écrouissage isotrope. σ_f est la contrainte d'écoulement de la matrice et q_1, q_2 sont deux paramètres matériaux qui traduisent la vitesse de la croissance des cavités et qui sont ajustés sur des expériences. Les valeurs $q_1 = 1.5$; $q_2 = 1$ sont communément utilisées. f_* est la porosité effective (équation (2.57)). En appliquant le même raisonnement que précédemment, la condition de rupture devient $1 - q_1^2 f_*^2 = 0 \rightarrow f_* = 1/q_1$.

Le modèle *GTN* contrairement au modèle de *Gurson*, prend en compte les deux autres étapes de la rupture ductile à savoir la germination et la coalescence. La germination est décrite par un terme supplémentaire dans l'évolution de la porosité f telle que :

$$\dot{f} = (1 - f)\text{tr}(\dot{\epsilon}_p) + \dot{f}_n ; \dot{f}_n = A_n \dot{p} \quad (2.55)$$

f_n est la porosité de la germination et son évolution $\dot{f}_n$ est proportionnelle à $\dot{p}$. Le facteur de proportionnalité A_n dépend lui-même des déformations plastiques et éventuellement de l'état de contrainte (Chu and Needleman, 1980). La distribution en loi normale de A_n en fonction p est souvent utilisée dans la littérature pour modéliser la cinétique de la germination :

$$A_n(p) = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\frac{1}{2}(p - p_N)^2}{s_N^2}\right) \quad (2.56)$$

Cette loi correspond à une loi Gaussienne décrivant la vitesse de germination en fonction de la déformation plastique p . Elle est centrée en p_N avec un écart type de s_N . f_N correspond à la porosité maximale pouvant être créée par germination. Ces trois paramètres sont à identifier à partir des essais expérimentaux ce qui augmente le nombre total de paramètres à identifier.

Quant à la coalescence et la rupture, le modèle *GTN* les décrit grâce à l'emploi d'une porosité effective f_* donnée par l'équation suivante :

$$f_* = \begin{cases} f & \text{si } f < f_c \\ f_c + \delta(f - f_c) & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.57)$$

f_c est la porosité de coalescence et δ représente la vitesse de coalescence jusqu'à la rupture. Cette dernière aura lieu lorsque $f_* = 1/q_1$ et donc $f = f_R$ avec f_R la porosité à la rupture. On peut déduire l'expression de δ à partir de l'équation (2.57) :

$$f_c + \delta(f_R - f_c) = \frac{1}{q_1} \rightarrow \delta = \left(\frac{1}{q_1} - f_c\right) / (f_R - f_c) \quad (2.58)$$

Par ailleurs d'autres modifications du modèle *GTN* ont été proposés dans la littérature : une meilleur prise en compte d'une basse triaxialité et l'effet du paramètre de Lode (Nahshon and Hutchinson, 2008) (Xue, 2008). Une prise en compte des déformations et des rotations des cavités est étudiée dans (Cao et al., 2015). Finalement, l'introduction d'une contrainte effective scalaire dans le modèle *GTN* est proposée dans (Besson et al., 2001; Besson, 2010).

2.2.3 Simulation de la rupture ductile

2.2.3.1 Traitement de la non localité : cadre général

La localisation des déformations peut être décrite comme une instabilité expérimentée par le matériau où la rupture se caractérise par l'apparition d'une bande très locale d'une certaine largeur l_b et un gradient élevé des déformations plastiques (évidences expérimentales dans (Desrues and Chambon, 1986)). Cette localisation est responsable de la réduction du domaine d'élasticité au fur et à mesure que l'endommagement augmente. Du point de vue la simulation, le gradient important des déformations dans cette bande conduit uniquement à l'endommagement des éléments de petites tailles les plus sollicités dans la bande. En effet, la simulation de l'endommagement avec des éléments classiques montre que plus la taille des éléments diminue, plus la bande de localisation diminue de largeur également. Dans le cas limite où la taille des éléments tend vers 0 l'énergie dissipée dans la bande de localisation tend vers 0 également i.e. pas de convergence vers l'énergie de dissipation expérimentalement observée. L'utilisation des éléments classiques n'est donc pas adaptée et un nouveau cadre pour la simulation est alors à proposer. La formulation éléments finis dite « non locale » permet de dépasser cette dépendance au maillage en introduisant la longueur l_b comme une donnée intrinsèque reliée au matériau dans la formulation éléments finis.

La dépendance de la solution éléments finis aux tailles des éléments est un problème dû au comportement adoucissant i.e. réduction du domaine d'élasticité. Ce comportement pose le problème

d'existence et d'unicité de la solution éléments finis et donc un recours aux différentes méthodes de régularisation des variables conduisant à l'adoucissement est indispensable. Il existe de nombreuses méthodes (méthode de gradient implicite (Peerlings *et al.*, 1996, 2001), méthode d'intégration non-locale (Bazant and Pijaudier-Cabot, 1988), approches micromorphes (Forest, 2009)) et dans cette partie on s'intéressera uniquement à la méthode de régularisation des déformations plastiques par l'enrichissement de l'énergie libre i.e. l'ajout d'un gradient à l'énergie libre comme décrit dans (Zhang *et al.*, 2018). Les éléments mixtes développés à partir de cette formulation seront utilisés dans la suite de la thèse pour toutes les simulations.

Une formulation « non locale » signifie que les équations constitutives sont déduites à l'échelle de la structure et non pas par point matériel. Ceci signifie que les équations constitutives tiennent compte de l'environnement de chaque point matériel alors que pour un modèle strictement local l'évolution de l'état d'un point matériel ne dépend que de l'état de ce point.

On commence par introduire la définition des déformations et des contraintes dans le cadre d'une formulation logarithmique (Miehe and Lambrecht, 2001; Miehe *et al.*, 2002) par :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{C}) \quad (2.59)$$

Avec $\mathbf{F}$ est le tenseur de transformation et $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ est le tenseur de déformation Cauchy-Green. Le tenseur de contrainte $\mathbf{T}$ est le dual de $\mathbf{E}$ définit par :

$$\mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{C}}, \forall \dot{\mathbf{F}} \quad (2.60)$$

Avec $\mathbf{S}$ est le second tenseur de Piola-Kirchhoff.

La méthode du gradient enrichie proposée par (Lorentz, 1999; Lorentz and Benallal, 2005; Lorentz and Godard, 2011; Zhang *et al.*, 2018; Chen, 2019) consiste à ajouter un terme supplémentaire à l'énergie libre $\mathcal{F}$ non locale définie par :

$$\mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbf{E}_p, \underline{\alpha}, p) = \int_{\Omega_0} \left(\phi(\mathbf{E}, \mathbf{E}_p, \underline{\alpha}, p) + \frac{1}{2} c \nabla p \cdot \nabla p \right) d\Omega_0 ; c = \sigma_0 l_b^2 \quad (2.61)$$

c est un paramètre matériau en (N) qui peut éventuellement être lié avec la longueur de la bande de localisation l_b . ϕ l'énergie libre locale d'un point matériel, $\underline{\alpha}$ l'ensemble des variables internes qui ne nécessitent pas une régularisation et p la déformation plastique cumulée. L'inégalité de Clausius-Duhem impose que la dissipation non locale $\mathcal{D}$ soit positive. On peut écrire :

$$\mathcal{D}(\mathbf{E}, \mathbf{E}_p, \underline{\alpha}, p) = \int_{\Omega} (\mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}) d\Omega - \dot{\mathcal{F}} \geq 0 \quad (2.62)$$

On désigne par $(\mathbf{T}, \underline{A}, A_{p_{nl}})$ les variables associées aux variables internes $(\mathbf{E}_p, \underline{\alpha}, p)$. La positivité de la dissipation pour toutes transformations thermodynamiques irréversibles conduit à :

$$\mathbf{T} = - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{E}_p} ; \underline{A} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\alpha}} ; A_{p_{nl}} = \frac{\partial \phi}{\partial p} + \text{div}(c \nabla p) = A_p + c \Delta p \quad (2.63)$$

$A_{p_{nl}} = A_p + c \Delta p$ est donc la variable associée à la déformation plastique p . A l'aide de la condition supplémentaire (Sicsic *et al.*, 2014): $\nabla p \cdot \underline{n} = 0$ sur $\partial\Omega_0$, les équations (2.62) et (2.63) conduisent à :

$$\mathcal{D}(\mathbf{E}, \mathbf{E}_p, \underline{\alpha}, p) = \int_{\Omega_0} (\mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}_p + \underline{A} \cdot \dot{\underline{\alpha}} + A_{p_{nl}} \dot{p}) d\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_0} (-c \nabla p \cdot \underline{n}) \cdot \dot{p} dS_0 \quad (2.64)$$

Et finalement, la dissipation $\mathcal{D}$ devient :

$$\mathcal{D}(\mathbf{E}, \mathbf{E}_p, \underline{\alpha}, p) = \int_{\Omega_0} (\mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}_p + \underline{A} : \dot{\underline{\alpha}} + A_{p_{nl}} \dot{p}) d\Omega_0 \geq 0 \quad (2.65)$$

la normalité impose l'existence d'un potentiel F convexe des variables associées $(\mathbf{T}, \underline{A}, A_{p_{nl}})$ tel que :

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{T}} ; \dot{p} = \lambda \frac{\partial F}{\partial A_{p_{nl}}} \quad (2.66)$$

Avec λ le multiplicateur plastique, $F = N(\mathbf{T}) + A_{p_{nl}} - \sigma_0$, N est une fonction de la contrainte $\mathbf{T}$ et $J = \det \mathbf{F}$ et $\mathbf{F}$ est le gradient la transformation (Zhang et al., 2018).

2.2.3.2 Traitement de la non localité : forme discrétisée

La forme discrétisée de l'équation (2.61) (méthode de décomposition et coordination (Fortin and Glowinski, 1983)) introduit deux variables internes a, κ représentant le même champs continu p . Puisque ces deux champs représentent la même variable interne p ils sont par conséquent égaux. La forme faible de l'énergie libre de l'équation (2.61) s'écrit :

$$\mathcal{F}_{nl}(\mathbf{E}, \mathbf{E}_p, \kappa, a, l) = \int_{\Omega_0} \phi(\mathbf{E}, \mathbf{E}_p, \kappa) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \left(\frac{1}{2} c \nabla a \cdot \nabla a + l(a - \kappa) + \frac{1}{2} r_{nl}(a - \kappa)^2 \right) d\Omega_0 \quad (2.67)$$

Les deux termes l, r_{nl} sont respectivement le multiplicateur de *Lagrange* associé à la contrainte $a = \kappa$ et le paramètre de pénalisation introduit pour faciliter la convergence. En effet, le terme supplémentaire $r_{nl}(a - \kappa)^2$ renforce l'égalité de a et κ en augmentant le Lagrangien. a est une variable définie aux nœuds (globalement) tandis que κ est définie aux points de *Gauss* et intervient dans les lois de comportement comme une variable locale.

En écrivant la dissipation non locale $\mathcal{D}$ comme dans l'équation (2.65) précédente, la variable associée $A_{p_{nl}}$ devient :

$$A_{p_{nl}} = A_\kappa + l + r_{nl}(a - \kappa) ; F = N(\mathbf{T}) + A_\kappa + l + r_{nl}(a - \kappa) - \sigma_0 \quad (2.68)$$

Il est important de noter que r_{nl} ne devrait pas être trop faible au risque de rencontrer des difficultés numériques. En revanche aucune limite supérieure n'est imposée : $r_{nl} \geq 10\sigma_0$ est toutefois recommandé dans (Chen, 2019)

2.2.3.3 Traitement du verrouillage volumique

Le verrouillage volumique (Al Akhrass et al., 2014) est traité dans la cadre précédent en ajoutant cette fois-ci une contrainte sur la part volumétrique du tenseur des déformations $\mathbf{E}$: $\text{tr}(\mathbf{E}) = \ln(J)$ (responsable du verrouillage) en formulation logarithmique. Plus précisément, une variable interne supplémentaire θ représentant la partie volumique du tenseur de déformation au même titre que $\ln(J)$, est introduite. $\ln(J)$ et θ sont par ailleurs égales parce qu'ils représentent la même variable $\text{tr}(\mathbf{E})$. Pour assurer cette égalité, un multiplicateur de *Lagrange* P est introduit pour assurer la réalisation de contrainte : $\ln(J) - \theta = 0$.

$$\mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbf{E}_p, \kappa, a, l, P, \theta) = \mathcal{F}_{nl}(\bar{\mathbf{E}}, \mathbf{E}_p, \kappa, a, l) + \int_{\Omega_0} \left(P(\ln(J) - \theta) + \frac{1}{2} r_{inco}(\ln(J) - \theta)^2 \right) d\Omega_0 \quad (2.69)$$

r_{inco} est un terme supplémentaire de pénalisation introduit dans (Chen, 2019) pour renforcer la contrainte précédente (Analogie avec l'équation (2.67) précédente) et $\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{E} + (\theta - \ln(J))\mathbf{I}/3$ le tenseur de déformation relaxé utilisé dans $\mathcal{F}_{nl}$. Le paramètre de pénalisation r_{inco} ne doit pas prendre d'une part, des valeurs faibles sinon des oscillations parasites de la plasticité apparaissent et d'une autre part, ne doit pas être très grand sinon des problèmes de convergence apparaissent. $r_{inco} = 10\sigma_0$ est l'ordre de grandeur recommandé dans (Chen, 2019).

2.2.4 Conclusion

Dans cette étude bibliographique, on a décrit les mécanismes de la rupture ductile dans les aciers. Puis on a détaillé quelques modèles les plus utilisés d'endommagement ductile et plus particulièrement le modèle *GTN*. Puis, on a présenté le cadre général de la modélisation dit non local. Ce cadre permet une formulation éléments finis Permettant le traitement de la non localité et du verrouillage volumique. Ce cadre est appliqué à la simulation de la plasticité et d'endommagement dans notre travail.

Cette étude bibliographique en rupture ductile est loin d'être exhaustive. En effet, après avoir décrit les mécanismes de la rupture ductile dans les aciers, seuls les outils qui ont été utilisés dans notre travail ont été présentés. Par ailleurs, pour un état d'art complet sur les modèles d'endommagements, le lecteur pourra se référer à (Besson, 2010; Pineau *et al.*, 2016).

Finalement, vu leur efficacité à traiter la dépendance au maillage causée par la localisation de la déformation et le verrouillage volumique, on fait le choix d'utiliser les éléments à 5 champs : $(\underline{u}, a, l, P, \theta)$, afin de modéliser le clivage dans la partie basse de la zone de transition ductile-fragile. Ils seront également employés pour simuler des éprouvettes axisymétriques entaillées dans le domaine ductile.