Fonctions d'Utilités et Optimisation de Portefeuille

Sommaire

2.1	Introduction	60
2.2	Notations	61
2.3	Le Modèle	62
2.4	Utilité et optimisation de portefeuille	64
2.4.1	Exemples de contraintes sur les portefeuilles	65
2.5	Méthode EDP	67
2.5.1	Hypothèse de recollement des stratégies admissibles	67
2.5.2	Fonction valeur	68
2.6	Cadre markovien	69
2.6.1	Équations de Hamilton-Jacobi-Bellman	69
2.6.2	Modèle à facteur	77
2.7	Approche des équations de Bellman par les solutions de viscosité	79
2.7.1	Définition des solutions de viscosité	80
2.7.2	Principe de comparaison	82
2.7.3	Programmation dynamique et solutions de viscosité	83
2.8	Utilité et changement de numéraire	84

2.1 Introduction

Un des problèmes les plus étudiés en finance est le problème d'optimisation de portefeuille pour un agent qui investit sur le marché financier et tente de trouver la meilleure stratégie qui maximise l'espérance de l'utilité de son portefeuille final à une date T appelée maturité.

Ce problème été étudié, pour la première fois et dans le cadre d'un modèle continu, par Merton dans [81], [82], voir aussi [80] et [101] pour un modèle discret. En utilisant des méthodes de programmation dynamique et de contrôle stochastique, ce dernier a établi une équation aux dérivés partielles non linéaire dite équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). En particulier, pour des utilités exponentielles, logarithmique et puissance, l'auteur établit des formules fermées pour décrire les solutions à ces équations.

Un premier objectif de ce chapitre sera alors d'explicitier cette méthode, dans le cadre d'un marché financier incomplet dans lequel les cours des actifs sont des semimartingales continues et où un investisseur est contraint de choisir ses portefeuilles dans un ensemble convexe fermé $\mathcal{K}$. Nous étudierons un premier cas où les solutions des équations, de type Hamilton-Jacobi-Bellman, sont suffisamment régulières, puis nous introduisons la notion des solutions de viscosité de ces EDP, une notion introduite par Crandall et Lions [12] pour des équations différentielles du premier ordre et généralisées, par la suite, aux équations différentielles du second ordre.

L'objectif final de ce chapitre n'est pas uniquement d'appliquer cette méthode d'équations aux dérivés partielles mais aussi de préparer le terrain pour la partie la plus importante de ce manuscrit où nous considérons le même modèle d'univers d'investissement, avec contraintes $\mathcal{K}$, dans un nouveau cadre où les utilités sont stochastiques avec condition initiale. Le même raisonnement appliqué dans ce chapitre, sera par conséquent repris et des EDP stochastiques, très similaires à celles que nous établirons dans les paragraphes qui suivent, seront établies.

2.2 Notations

- On considère un processus vectoriel ξ de dimension d et dont l'état est gouverné par l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$d\xi_t = b_t dt + \sigma_t dW_t \quad (2.1)$$

où :

- i) b est un processus vectoriel à valeurs dans $\mathbb{R}^d$,
 - ii) W est un m -mouvement brownien,
 - iii) σ est une matrice de variance covariance de $\mathbb{R}^{d \times m}$,
- Soit w une fonction du temps t , d'une variable réelle x et du processus ξ deux fois différentiable par rapport à ces trois variables. Nous notons alors dans toute la suite

$$\begin{aligned} \partial_t w &= \frac{\partial w}{\partial t}, \quad w' = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \partial_i w = \frac{\partial w}{\partial \xi_i} \quad 1 \leq i \leq d \\ w'' &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \partial_t^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \partial_{tx}^2 w &= \partial_{xt}^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}, \quad \partial_{ij}^2 w = \partial_{ji}^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_j \partial \xi_i} \quad 1 \leq i, j \leq d \\ \partial_{ix}^2 w &= \partial_{xi}^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \xi_i}, \quad \partial_{it}^2 w = \partial_{ti}^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \xi_i} \quad 1 \leq i \leq d \end{aligned}$$

et $\mathcal{L}^\xi$ l'opérateur défini par :

$$\mathcal{L}_t^\xi w = b_t \cdot \nabla_\xi w + \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_t \sigma_t' \Delta_\xi w) \quad (2.2)$$

où

- $\nabla_\xi w$ est le gradient de w en ξ , défini comme le vecteur colonne de dimension N donné par $\nabla_\xi w = (\partial_i w)_{1 \leq i \leq N}$.
- $\Delta_\xi w$ est la matrice hessienne de w en ξ de dimension $N \times N$, définie par $\Delta_\xi w = (\partial_{\xi_i \xi_j}^2 w)_{1 \leq i, j \leq N}$.
- tr la fonction qui à toute matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ associe sa trace $\sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

- Nous noterons par $\Delta_{\xi,x}^\sigma$ l'opérateur différentiel suivant

$$\Delta_{\xi,x}^\sigma w = \sum_{i=1}^{i=N} \partial_i w' \sigma^i(t, \xi) \quad (2.3)$$

- Soit $\mathcal{E}$ un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$, nous notons $\Pi_{\mathcal{E}}$ l'opérateur de projection sur $\mathcal{E}$.

2.3 Le Modèle

Le modèle, dans ce chapitre, consiste en un marché financier composé de d actifs risqués $(\xi^i)_{1 \leq i \leq d}$, dont les dynamiques sont données par

$$\frac{d\xi_t^i}{\xi_t^i} = b_t^i dt + (\sigma_t^i)^* dW_t, \text{ pour } 1 \leq i \leq d \quad (2.4)$$

et d'actif ξ^0 sans risque qui obéit à la dynamique

$$\frac{d\xi^0}{\xi^0} = r_t dt$$

où r est le taux court. Le processus $W = (W_1, W_2, \dots, W_d)$ est un mouvement brownien standard de dimension d , défini dans l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour simplifier, on supposera que $\mathcal{F}_t$ coïncide avec la filtration générée par le mouvement brownien $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t)$.

Hypothèse 2.1. Les coefficients b^i et σ^i , $i = 1 \dots d$, sont supposés des processus bornés progressivement mesurables dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Hypothèse 2.2. Notons σ la matrice dont la i ème colonne correspond au vecteur σ^i , $i = 1 \dots d$. Nous supposons que σ est une matrice non-singulière bornée, d'inverse $\sigma_t^{-1}(\omega)$ bornée uniformément en $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$.

Désignons par la suite η la prime de risque ou encore la prime de marché définie par

$$\eta_t = \sigma_t^{-1}(b_t - r_t e) \quad (2.5)$$

dont nous supposons qu'elle satisfait la condition

$$\mathbf{E}\left(\int_0^T \|\eta_t\|^2 dt\right) < +\infty. \quad (2.6)$$

Nous notons aussi $(H_t^{r,\eta} : t \geq 0)$ et $(H_{s,t}^{r,\eta} : t \geq s \geq 0)$ les processus définis par

$$\begin{cases} H_t^{r,\eta} = e^{-\int_0^t (r_s + \frac{1}{2}\|\eta_s\|^2) ds - \int_0^t \eta_s dW_s} \\ H_{s,t}^{r,\eta} = \frac{H_t^{r,\eta}}{H_s^{r,\eta}} \end{cases} \quad (2.7)$$

Ce processus jouera un rôle très important le long de notre étude. Nous notons en particulier que la martingale locale $H^{0,\eta}$ est une martingale sous la condition (2.6).

Avant d'écrire la dynamique des richesses dans ce marché, introduisons la notion de portefeuille.

Définition 2.1. *Un vecteur $\pi \in \mathbb{R}^d$ est appelé un processus de portefeuille si π est un processus à valeurs réelles $\mathcal{F}_t$ -progressivement mesurable et satisfait les hypothèses*

$$\int_0^T |(\pi * \sigma) * \eta_t| dt < +\infty \quad (2.8)$$

$$\int_0^T \|\pi_t * \sigma\|^2 dt < +\infty \quad (2.9)$$

où T désigne l'horizon d'investissement.

Remarque 2.1. *Si (2.6) est satisfaite ainsi que (2.9) alors ceci implique (2.8). En effet, il suffit d'écrire par l'inégalité de Cauchy-Schwartz que*

$$\int_0^T |(\pi * \sigma) * \eta_t| dt \leq \left(\int_0^T \|\pi_t * \sigma\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|\eta_t\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dorénavant π désigne un portefeuille satisfaisant les hypothèses de cette définition. En écrivant que π est un vecteur colonne, dont les composantes sont les montants investis dans les actifs

$$(\xi^i)_{1 \leq i \leq d}$$

alors la richesse, à tout instant t de cet agent est donnée par

$$X_t^\pi = (X_t^\pi - \sum_{i=1..d} \pi_t^i) + \sum_{i=1..d} \pi_t^i \quad (2.10)$$

où $(X_t^\pi - \sum_{i=1..d} \pi_t^i)$ est la quantité investie dans l'actif ξ^0 .

En appliquant la formule d'Itô à l'identité (2.10), alors l'équation d'autofinancement peut s'écrire, dans un premier temps,

$$\begin{aligned} dX_t^\pi &= X_t^\pi \frac{d\xi_t^0}{\xi_t^0} + \sum_{i=1..d} \pi_t^i \left(\frac{d\xi_t^i}{\xi_t^i} - \frac{d\xi_t^0}{\xi_t^0} \right) \\ &= X_t^\pi r_t dt + \sum_{i=1..d} \pi_t^i ((b_t^i - r_t) dt + \sigma_t^i dW_t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

que nous pouvons réécrire en utilisant la notation σ et l'hypothèse 2.2, et en notant x le capital initial de l'investisseur comme suit

$$\begin{cases} dX_t^\pi = r_t X_t^\pi dt + \pi_t^* \sigma_t (dW_t + \eta_t dt) \\ X_0^\pi = x \end{cases} \quad (2.12)$$

2.4 Utilité et optimisation de portefeuille

Dans ce chapitre, nous considérons un agent, de richesse initiale x , qui investit sur le marché financier, supposé incomplet dans le sens où cet investisseur est contraint de choisir ses stratégies dans un ensemble, noté dans toute la suite par $\mathcal{K}$. Comme tout agent financier, cet individu représente ses préférences et son aversion au risque à l'aide d'une fonction d'utilité qu'on notera par U .

Une fois sur le marché, cet agent, investit sa richesse en achetant et en vendant des quantités d'actifs. Son but est alors de trouver la stratégie optimale qu'il doit adopter le long de la gestion de son portefeuille. Cette stratégie l'amènera à la fin à réaliser une richesse qui lui apporte le plus de satisfaction. Par conséquent, ce portefeuille sera déterminé selon le critère dit de l'utilité espérée, ce qui veut dire que cette stratégie maximise l'espérance de l'utilité de sa richesse finale à la date de maturité T .

En d'autres termes, le but de l'investisseur est de trouver la stratégie π^* optimale dans le problème d'optimisation de portefeuille suivant :

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})} \mathbf{E}(U(T, X_T^{x, \pi})) \quad (2.13)$$

où

- les portefeuilles issus de x sont notés $X_T^{x, \pi}$ si l'agent suit la stratégie π_t , $0 < t \leq T$.
- $\mathcal{A}(x, \mathcal{K})$ désigne l'espace des portefeuilles admissibles, de richesse initiale x . Nous reviendrons dans la suite à la définition précise de cet ensemble.

2.4.1 Exemples de contraintes sur les portefeuilles

Comme il est indiqué ci-dessus, pour un numéraire donné, nous supposons que l'agent est contraint de choisir ses stratégies dans un ensemble $\mathcal{K}$, ci-dessus quelques exemples d'espaces de contraintes :

1. Le marché est complet : $\mathcal{K} = \mathbb{R}^d$, l'investisseur a le libre choix d'investissement.
2. Le marché est incomplet $\mathcal{K} = \mathbb{R}^{d-m} \times 0^m$, l'agent ne peut pas investir que dans les $(d - m)$ premiers actifs.
3. Le marché est incomplet : $\mathcal{K}$ est un cône convexe fermé.
4. Le marché est incomplet dans le sens où on a pas le droit d'emprunter de l'argent, $\mathcal{K} = \{\pi \in \mathbb{R}^d, \sum_{i=1..d} \pi_i \leq X^\pi\}$
5. Un second exemple de contrainte sur l'emprunt et qui consiste à ne pas emprunter plus qu'une proportion de la richesse, $\mathcal{K} = \{\pi \in \mathbb{R}^d, \sum_{i=1..d} \pi_i \leq kX^\pi, k > 1\}$
6. Le marché est incomplet dans le sens où l'investisseur est contraint de choisir le montant π^i investi dans le i ème actif dans un intervalle I^i , $\mathcal{K} = I^1 \times I^2 \times \dots \times I^d$.

Notons bien que ces espaces sont fixés pour un numéraire donné. Si on change de numéraire, les contraintes bien évidemment doivent êtres modifiées.

Avant de poursuivre nos investigations, quelques définitions et notations sont nécessaires :

Définition 2.2. On dit qu'un portefeuille π est un portefeuille $\mathcal{K}$ - admissible pour une richesse initiale x et on écrit $\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})$ si le processus de richesse $X^{x,\pi}$ donné par (2.12) pour tout $t \in [0, T]$ et si

$$\begin{cases} X_t^{x,\pi} \geq 0, & \forall t \in [0, T], \text{ p.s.} \\ \pi_t \in \mathcal{K}, & \forall t \in [0, T], \text{ p.s.} \end{cases} \quad (2.14)$$

Nous désignons par

1. $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ l'espace des portefeuilles $\mathcal{K}$ -admissibles
3. $\mathcal{A}$ L'espace des portefeuilles admissibles constants ($\mathcal{A} = \mathcal{K}$).

Si $x \geq 0$ et $\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})$, le processus $H^{r,\eta} X^{x,\pi}$ est une martingale locale positive et donc une sur-martingale. En prenant l'espérance, nous obtenons la contrainte budgétaire

$$\mathbb{E}(H_T^{r,\eta} X_T^{x,\pi}) \leq x. \quad (2.15)$$

Remarque 2.2. Si $\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})$, d'après les hypothèses sur les coefficients du modèle, les processus des richesses $X^{x,\pi}$ sont bornés dans L^2 , c-à-d

$$\mathbb{E}(\sup_{t \in [0, T]} \|X_t^{x,\pi}\|^2) < +\infty \text{ p.s.}$$

Définition 2.3. Pour toute stratégie de portefeuille π , le vecteur $\delta(\pi)$, des proportions investies dans les actifs, est donné par

$$\delta_t(\pi) = \begin{cases} \frac{\pi_t}{X_t^\pi}, & \text{si } X_t^\pi \neq 0 \\ \delta_*, & \text{si } X_t^\pi = 0 \end{cases}$$

où δ_* est un vecteur quelconque mais fixé dans $\mathcal{K}$.

En particulier, la dynamique (2.12) devient

$$\begin{cases} \frac{dX_t^\pi}{X_t^\pi} = r_t dt + \delta_t(\pi) \sigma_t (dW_t + \eta_t dt) \\ X_0^\pi = x \end{cases} \quad (2.16)$$

2.5 Méthode EDP

Dans ce paragraphe, nous montrons comment le principe de programmation dynamique dû à Bellman permet de donner une caractérisation de la fonction valeurs en termes d'équations aux dérivées partielles dites de Hamilton-Jacobi-Bellman ainsi qu'un critère pour déterminer la stratégie optimale. Voir "Contrôle Optimal Stochastique et Applications en Finance" par Huyên PHAM [94].

Nous supposons dans toute la suite que l'ensemble $\mathcal{K}$ des contraintes est un cône convexe fermé. L'avantage de travailler avec des cônes convexes fermés est, bien que l'opérateur de projection sur ces ensembles n'est pas identiquement le projecteur orthogonal, la projection sur un cône possède plusieurs propriétés très utiles dans la suite (voir le lemme B.5 pour les détails). Nous rappelons enfin qu'un cas particulier de cône convexe fermé est le cas où $\mathcal{K}$ est, tout simplement, un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$, par conséquent la projection sur $\mathcal{K}$ n'est autre que la projection orthogonale standard.

2.5.1 Hypothèse de recollement des stratégies admissibles

Pour pouvoir appliquer le principe de la programmation dynamique quelques hypothèses sont indispensables, notamment l'hypothèse, que nous appellerons hypothèse de *recollement*, suivante :

Hypothèse 2.3. *Pour toutes stratégies π^1 admissible entre la date 0 et la date t_1 et π^2 admissible entre la date t_1 et la date t_2 , la stratégie π associée au vecteur de proportions δ défini par $\delta = \delta^1 \mathbb{1}_{[0,t_1]} + \delta^2 \mathbb{1}_{]t_1,t_2]}$ est une stratégie admissible sur l'intervalle $[0, t_2]$ et ce quels que soient t_1 et t_2 tels que $0 \leq t_1 \leq t_2$.*

δ^1 et δ^2 désignent les proportions (définition 2.3) associées aux stratégies π^1 et π^2 .

L'intérêt de faire cette hypothèse est essentiellement de pouvoir appliquer le principe de la programmation dynamique (voir le premier chapitre du cours de Saint Flour [20] de Nicole El Karoui) et aussi pour que, à chaque date intermédiaire $t \in [0, T]$, nous puissions partir d'une richesse x quelconque, il suffit de placer à la date 0 la quantité $x B_{0,t}$ ($B_{0,t}$ désigne le zéro coupon pour une maturité t , c-à-d., le prix que nous payons aujourd'hui pour avoir 1 euros en t).

Nous remarquons en particulier que si π est la stratégie composée, associée au vecteur de proportion $\delta = \delta^1 \mathbb{1}_{[0, t_1]} + \delta^2 \mathbb{1}_{]t_1, t_2]}$, alors la richesse optimale associée vérifie pour tout $t \in [t_1, t_2]$,

$$X_t^{x, \pi} = X_t^{t_1, X_{t_1}^{x, \pi^1}, \pi^2}. \quad (2.17)$$

2.5.2 Fonction valeur

Commençons par introduire la fonction coût J définie pour tout $(t, x, \xi, \pi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{A}(x, \mathcal{K})$ par

$$J(t, x, \pi) = \mathbf{E}(U(T, X_T^{t, x, \pi}) / \mathcal{F}_t) \quad (2.18)$$

à laquelle nous associons le programme d'optimisation suivant

$$v(t, x) = \text{ess sup}_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})} J(t, x, \pi) \quad (2.19)$$

Dans la littérature la fonction v définie ci-dessus est appelée *fonction valeur*.

Comme la fonction d'utilité U est une fonction strictement concave croissante, il est, alors, naturel de se demander si cette fonction valeur v possède les mêmes propriétés que U . Nous considérons par conséquent deux réels x et $x' : x > x'$ et π une stratégie admissible quelconque. Notons $X^{x, \pi}$ et $X^{x', \pi}$ les richesses issues de x et x' de même stratégie π . Nous pouvons alors écrire que $X^{x, \hat{\pi}} = X^{x', \hat{\pi}} + X^{x-x', \hat{\pi}}$, en remarquant que $x - x' > 0$ et que par définition 2.2 équation (2.14) $\hat{\pi}$ est une stratégie admissible implique $X^{x-x', \hat{\pi}} \geq 0$, il s'en suit par monotonie de U que

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \text{ess sup}_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})} \mathbb{E}(U(T, X_T^{x, \pi}) / \mathcal{F}_t) \geq \mathbb{E}(U(T, X_T^{x', \hat{\pi}} + X_T^{x-x', \hat{\pi}}) / \mathcal{F}_t) \\ &\geq \mathbb{E}(U(T, X_T^{x', \hat{\pi}}) / \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute stratégie admissible $\hat{\pi}$, en prenant le supremum à droite de cette inégalité, nous montrons que v est croissante.

Nous nous intéressons maintenant à la concavité de la fonction valeur. Rappelons d'abord que, comme U est strictement concave, pour toutes stratégies

admissibles π^1 et π^2 et pour toutes richesses initiales x^1 et x^2 et $\lambda \in]0, 1[$ nous avons l'inégalité suivante,

$$U(T, \lambda X_T^{x^1, \pi^1} + (1 - \lambda) X_T^{x^2, \pi^2}) > \lambda U(T, X_T^{x^1, \pi^1}) + (1 - \lambda) U(T, X_T^{x^2, \pi^2}) \quad (2.20)$$

Pour pouvoir conclure il suffit de prouver que la richesse $\lambda X_T^{x^1, \pi^1} + (1 - \lambda) X_T^{x^2, \pi^2}$ est une richesse admissible. Pour cela nous notons $x_\lambda = \lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2$, $\pi^\lambda = \lambda \pi^1 + (1 - \lambda) \pi^2$ et $X_T^{x_\lambda, \pi^\lambda} = \lambda X_T^{x^1, \pi^1} + (1 - \lambda) X_T^{x^2, \pi^2}$. Comme l'ensemble des stratégies admissibles est un ensemble convexe il s'en suit que π^λ est une stratégie admissible et par la suite la richesse $X_T^{x_\lambda, \pi^\lambda}$ est une richesse atteignable issue du capital initiale x_λ . En prenant le supremum sur toutes les stratégies π^1 et π^2 dans (2.20), il s'en suit

$$\begin{aligned} \text{ess sup}_{\pi^\lambda \in \mathcal{A}(x_\lambda, \mathcal{K})} \mathbb{E}(U(T, X_T^{x_\lambda, \pi^\lambda}) / \mathcal{F}_t) &> \lambda \text{ess sup}_{\pi^1 \in \mathcal{A}(x^1, \mathcal{K})} \mathbb{E}(U(T, X_T^{x^1, \pi^1}) / \mathcal{F}_t) \\ &+ (1 - \lambda) \text{ess sup}_{\pi^2 \in \mathcal{A}(x^2, \mathcal{K})} \mathbb{E}(U(T, X_T^{x^2, \pi^2}) / \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

ou encore,

$$v(t, x_\lambda) = v(t, \lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2) > v(t, x^1) + (1 - \lambda) v(t, x^2), \quad \lambda \in]0, 1[$$

ce qui prouve que v est strictement convexe. Pour récapituler, nous avons le théorème suivant.

Théorème 2.1. *La fonction valeur v , du problème d'optimisation de portefeuille, définie dans (2.19) et croissante strictement concave.*

La régularité de v ne peut être démontré en raisonnant uniquement en terme de la fonction d'utilité U , comme nous l'avons fait pour la monotonie et la concavité. En effet nous verrons dans les paragraphes qui suivent qu'en général v n'est pas régulière. Par contre, sous certaines conditions, nous montrons, dans le chapitre 3, la continuité et la dérivabilité de v .

2.6 Cadre markovien

2.6.1 Équations de Hamilton-Jacobi-Bellman

Dans ce paragraphe, nous traitons le cas markovien où nous supposons que tous les paramètres du modèle sont des fonctions du *temps* et de l'état du

système, c-à-d nous supposons que l'hypothèse suivante est satisfaite.

Hypothèse 2.4. *Les paramètres du modèle, b^i , σ^i , $i = 1..d$ sont des fonctions mesurables régulières de $[0, T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ (respectivement de $[0, T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$).*

Dans toute la suite et dans ce cadre Markovien, nous supposons que v est une fonction du temps t de la richesse x et du cours des actifs ξ . Nous rappelons enfin que la solution du problème d'optimisation de portefeuille (2.13) est égale à $v(0, x, \xi)$.

Le but dans la suite est alors de montrer l'existence d'une stratégie optimale admissible que nous noterons par π^* . Dans le cas où cette stratégie peut être exprimée comme une fonction mesurable du temps et de l'état du système, π^* est appelée un contrôle optimal Markovien pour (2.19).

Comme il est déjà indiqué le problème que nous considérons ici est un problème à horizon fini T . Soit alors $0 < h < T - t$, et supposons que nous suivons la stratégie π dans l'intervalle $[t, t + h]$. À l'instant $t + h$, l'état du système est alors $X_{t+h}^{t,x,\pi}$ et nous l'observons cette date. Supposons de plus qu'à partir de $t + h$, la politique optimale π_s^* , $t + h \leq s \leq T$ est connue et notons $\tilde{\pi}$ la stratégie définie entre t et T par $\tilde{\pi} = \pi \mathbb{1}_{[t,t+h]} + \mathbb{1}_{[t+h,T]}$. Le principe de Bellman dit que, si l'on choisit π_s sur $[t, t + h]$ de façon à maximiser l'expression $J(t, x, \xi, \tilde{\pi})$, on obtient ainsi le contrôle π^* optimal sur la période $[t, t + h]$. Ceci signifie que le contrôle optimal sur $[t, T]$ peut être décomposé en π_s^* , $s \in [t, t + h]$, et π_s^* , $s \in [t + h, T]$, cette dernière étant la politique optimale démarrant en $t + h$ dans l'état X_{t+h}^{t,x,π^*} . Ceci n'est pas si évident sans l'hypothèse 2.3. Par la loi des espérances conditionnelles itérées et par l'hypothèse 2.3.

$$\begin{aligned} v(t + h, x, \xi) &= J(t + h, x, \xi, \pi^*) \\ &= \mathbf{E}(U(T, X_T^{t,x,\pi^*}) / \mathcal{F}_{t+h}) \end{aligned} \tag{2.21}$$

Considérons la stratégie :

$$\tilde{\pi} = \begin{cases} \pi_s, & t \leq s \leq t + h \\ \pi_s^*, & t + h \leq s \leq T \end{cases}$$

D'après l'hypothèse 2.3 ci-dessus, cette stratégie est encore une stratégie admissible et par conséquent nous pouvons écrire que

$$J(t, x, \xi, \tilde{\pi}) = \mathbf{E}(U(T, X_T^{t,x,\tilde{\pi}})/\mathcal{F}_t) \quad (2.22)$$

En utilisant par la suite l'identité (2.17), nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned} J(t, x, \xi, \tilde{\pi}) &= \mathbf{E}(U(T, X_T^{t+h, X_{t+h}^{t,x,\tilde{\pi}}, \pi^*})/\mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{E}(U(T, X_T^{t+h, X_{t+h}^{t,x,\tilde{\pi}}, \pi^*})/\mathcal{F}_{t+h})/\mathcal{F}_t) \\ &= \mathbf{E}(J(t+h, X_{t+h}^{t,x,\tilde{\pi}}, \xi, \pi^*)/\mathcal{F}_t) \\ &= \mathbf{E}(v(t+h, X_{t+h}^{t,x,\tilde{\pi}}, \xi)/\mathcal{F}_{t+h}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Nous avons donc :

$$v(t, x, \xi) = \text{ess sup}_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})} \mathbf{E}(v(t+h, X_{t+h}^{t,x,\pi}, \xi)/\mathcal{F}_{t+h}) \quad (2.24)$$

Nous dérivons maintenant, d'une manière formelle, l'équation de la programmation dynamique obtenue à partir de (2.24). Considérons la stratégie constante $\pi_s = \pi \in \mathcal{A}$ sur $[t, t+h]$. $\mathcal{A}$ étant l'ensemble des stratégies admissibles constante de $\mathcal{A}(x, \mathcal{K})$. Alors d'après (2.24), on a :

$$v(t, x, \xi) \geq \mathbf{E}(v(t+h, X_{t+h}^{t,x,\pi}, \xi)/\mathcal{F}_{t+h})$$

Si nous faisons maintenant l'hypothèse suivante

Hypothèse 2.5. *La fonction valeur v est dans la classe $\mathcal{C}^{1,2}([0, T[, \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$*

alors en appliquant le formule d'Itô entre la date t et $t+h$, il est facile d'écrire

$$\begin{aligned} v(t+h, X_{t+h}^{t,x,\pi}, \xi) &= v(t, x, \xi) + \int_t^{t+h} [\partial_t v + \mathcal{L}^{\xi, X^{x,\pi}} v] ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} \left[v' \pi \sigma_s + \sum_{i=1}^{i=d} v_i \xi_s^i \sigma_s^i \right] dW_s \end{aligned} \quad (2.25)$$

où $\mathcal{L}^{\xi, X}$ est l'opérateur défini dans (2.2) par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t^{\xi, X^\pi} w &= b(t, \xi) \cdot \nabla_\xi w + \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma(t, \xi) \sigma'(t, \xi) \Delta_\xi w) + r_t x w' \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\pi \sigma\|^2 w'' + \langle \Delta_{\xi, x}^\sigma w, \pi \sigma \rangle \end{aligned} \quad (2.26)$$

et $\Delta_{\xi,x}^\sigma$ est l'opérateur donné dans (2.3) par :

$$\Delta_{\xi,x}^\sigma w = \sum_{i=1}^{i=d} \partial_{\xi^i} w' \sigma^i(t, \xi). \quad (2.27)$$

En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_t$, il s'en suit l'identité :

$$\mathbf{E}(v(t+h, X_{t+h}^{t,x,\pi}, \xi) / \mathcal{F}_t) = v(t, x, \xi) + \mathbf{E}\left(\int_t^{t+h} \left[\partial_t v + \mathcal{L}_t^{\xi, X^{x,\pi}} v\right] ds / \mathcal{F}_t\right) \quad (2.28)$$

d'où en substituant dans (2.24) :

$$\mathbf{E}\left(\int_t^{t+h} \left[\partial_t v + \mathcal{L}_t^{\xi, X^{x,\pi}} v\right] ds / \mathcal{F}_t\right) \leq 0 \quad (2.29)$$

Vu les hypothèses de régularités portées sur v et les paramètres du modèle, nous pouvons diviser par h et le faire tendre h vers 0, nous obtenons par conséquent,

$$\partial_t v + \mathcal{L}_t^{\xi, X^{x,\pi}} v \leq 0 \quad (2.30)$$

Ceci étant valable quel que soit $a \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})$, il s'en suit,

$$\partial_t v + \sup_{\pi \in \mathcal{A}} \mathcal{L}_t^{\xi, X^{x,\pi}} v \leq 0$$

Si de plus, nous supposons que π^* est une stratégie optimale. Alors (2.24) est simplement :

$$v(t, x, \xi) = \mathbf{E}(v(t+h, X_{t+h}^{t,x,\pi^*}, \xi) / \mathcal{F}_{t+h}) \quad (2.31)$$

Par des arguments similaires et avec des conditions de régularités sur v , nous obtenons l'égalité suivante :

$$\partial_t v(t, x, \xi) + \sup_{\pi \in \mathcal{A}} \mathcal{L}_t^{\xi, X^{x,\pi}} v(t, x, \xi) = 0. \quad (2.32)$$

Soit $(t, x, \xi, \pi, u, p, w) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$.

Notons $\mathcal{P}$ l'opérateur défini par

$$\mathcal{P}(t, x, \xi, \pi, u, p, w) = \frac{1}{2} \|\pi \sigma\|^2 w + \langle \pi \sigma, \eta u + p \rangle \quad (2.33)$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$.

Écrivons que

$$\mathcal{L}_t^{\xi, X^x, \pi} v = \mathcal{L}_t^\xi v + r_t x v' + P(t, x, \xi, \pi, v, \Delta_{\xi, x}^\sigma v, v'')$$

et injectons ceci dans l'équation (2.32). Nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 2.2. *Si v est la fonction valeur du problème d'optimisation de portefeuille, définie dans (2.19) satisfait l'hypothèse 2.5 de régularité, alors v est solution de l'équation de HJB suivante :*

$$\begin{aligned} \partial_t v(t, x, \xi) + \mathcal{L}_t^\xi v(t, x, \xi) + r_t x v'(t, x, \xi) \\ + \sup_{\pi \in \mathcal{A}} \mathcal{P}(t, x, \xi, \pi, v, \Delta_{\xi, x}^\sigma v, v'') = 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

avec comme condition terminale $v(T, x, \xi) = U(T, x)$ pour tout x .

Nous réécrivons souvent ce théorème sous forme :

Corollaire 2.1. *La fonction valeur v du problème d'optimisation de portefeuille défini dans (2.19) satisfait l'hypothèse 2.5 de régularité, alors v est solution de l'équation de HJB suivante :*

$$\begin{cases} \partial_t v(t, x) + r_t x v'(t, x, \xi) + \mathcal{L}_t^\xi v(t, x, \xi) + \mathbf{H}(t, x, \xi, v', \Delta_{\xi, x}^\sigma v, v'') = 0 \\ v(T, x, \xi) = U(T, x) \end{cases} \quad (2.35)$$

où pour $(t, x, \xi, u, p, w) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$:

$$\mathbf{H}(t, x, \xi, u, p, w) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}} \mathcal{P}(t, x, \xi, \pi, u, p, w). \quad (2.36)$$

Cet opérateur $\mathbf{H}$ est appelé hamiltonien du problème de contrôle considéré.

L'équation (2.35) est alors appelée équation de la programmation dynamique ou équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB).

Remarque 2.3. *Lorsque l'ensemble des stratégies (contrôles) est réduit à un élément π , l'équation d'HJB se réduit à une EDP linéaire :*

$$\begin{aligned} \partial_t v(t, x, \xi) + \mathcal{L}_t^\xi v(t, x, \xi) + r_t x v'(t, x, \xi) + P(t, x, \xi, \pi, v', \Delta_{\xi, x}^\sigma v, v'') = 0 \\ v(T, x, \xi) = U(T, x) \end{aligned} \quad (2.37)$$

correspondant à la fonction valeur :

$$v(t, x, \xi) = \mathbf{E}(U(T, X_T^{x, \pi})) \quad (2.38)$$

C'est la représentation de Feynman-Kac du problème de Cauchy.

Dans le cas contraire (l'ensemble des contrôles n'est pas réduit à un singleton) nous montrons que l'EDP vérifiée par la fonction valeur est une EDP non linéaire. En effet,

Proposition 2.1. *L'hamiltonien $\mathbf{H}$ du corollaire 2.1, équation (2.36), est donné par*

$$\mathbf{H}(t, x, \xi, u, p, w) = -\frac{1}{2w} \left\| \prod_{\mathcal{K}_\sigma} [\eta_t u + p] \right\|^2. \quad (2.39)$$

Démonstration.

L'idée de cette démonstration consiste à montrer que le maximum dans (2.36) est atteint en un processus optimal que nous expliciterons.

Le problème d'optimisation de portefeuille qui nous intéresse est alors, d'après le corollaire précédent, le suivant

$$\sup_{\pi \in \mathcal{K}} \mathcal{P}(t, x, \xi, \pi, u, p, w) = \frac{1}{2} \left\| \pi_t \sigma_t \right\|^2 w + \langle \pi_t \sigma_t, \eta_t u + p \rangle \quad (2.40)$$

Nous commençons d'abord par écrire que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t, x, \xi, \pi, v', v'', \Delta_{\xi, x}^\sigma v) &= \left\| \pi_t \sigma_t \right\|^2 v'' + \langle \pi_t \sigma_t, v' \eta_t + \Delta_{\xi, x}^\sigma v \rangle \\ &= \frac{1}{2} v'' \left\| \pi_t \sigma_t + \frac{v' \eta_t + \Delta_{\xi, x}^\sigma v}{v''} \right\|^2 - \frac{1}{2} v'' \left\| \frac{v' \eta_t + \Delta_{\xi, x}^\sigma v}{v''} \right\|^2 \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sup_{\pi \in \mathcal{K}} \left(\frac{1}{2} \left\| \pi_t \sigma_t \right\|^2 v'' + 2 \langle \pi_t \sigma_t, v' \eta_t + \Delta_{\xi, x}^\sigma v \rangle \right) \\ &= -\frac{1}{2} v'' \left\| \frac{v' \eta_t + \Delta_{\xi, x}^\sigma v}{v''} \right\|^2 + \frac{1}{2} v'' \inf_{\pi \in \mathcal{K}} \left\| \left(-\frac{v' \eta_t + \Delta_{\xi, x}^\sigma v}{v''} \right) - \pi_t \sigma_t \right\|^2. \end{aligned}$$

Le passage du sup à l'inf est uniquement dû au théorème 2.1, où nous avons montré la stricte concavité de v ($v'' < 0$). Enfin pour conclure, il suffit juste de remarquer que le terme en inf, n'est autre que la définition même de la distance

de $\frac{-v'\eta + \Delta_{\xi,x}^\sigma v}{v''}$ à l'ensemble convexe $\mathcal{A}\sigma = \mathcal{K}\sigma$. D'après les résultats du lemme B.5, nous rappelons que l'inf est atteint en un unique point (stratégie optimale) de $\mathbb{R}^d$ que nous noterons

$$\pi_t^*(x) = \prod_{\mathcal{K}\sigma} \left(- \frac{v'\eta_t + \Delta_{\xi,x}^\sigma v}{v''} \right) (t, x).$$

Par la suite, $-v'' > 0$ et comme $\mathcal{K}\sigma$ est un cône il est donc positivement homogène d'après lemme assertion (a3), il s'en suit que

$$\pi_t^*(x) = -\frac{1}{v''} \prod_{\mathcal{K}\sigma} \left(v'\eta_t + \Delta_{\xi,x}^\sigma v \right) (t, x)$$

Il suffit par la suite d'injecter cette identité dans (2.33) pour conclure.

□

D'après ce dernier résultat, la proposition suivante est immédiate

Proposition 2.2.

Si la fonction valeur v du problème d'optimisation de portefeuille (2.19) est dans la classe $\mathcal{C}^{1,2}([0, T[, \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, alors

(i) *v est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :*

$$\begin{cases} (\partial_t v + \mathcal{L}_t^\xi v + r_t x v')(t, x, \xi_t) - \frac{1}{2v''} \left\| \prod_{\mathcal{K}\sigma} [v'\eta_t + \Delta_{\xi,x}^\sigma v] \right\|^2 (t, x, \xi_t) = 0 \\ v(T, x, \xi) = U(T, x) \end{cases} \quad (2.41)$$

(ii) *La stratégie optimale, est donnée par*

$$\pi_t^*(x) = -\frac{1}{v''} \prod_{\mathcal{K}\sigma} \left(v'\eta_t + \Delta_{\xi,x}^\sigma v \right) (t, x). \quad (2.42)$$

(iii) *La richesse optimale que nous noterons par $X^{x,*}$ obéit à la dynamique suivante*

$$\begin{cases} dX_t^{x,*} = r_t X_t^{x,*} ds - \frac{1}{v''} \prod_{\mathcal{K}\sigma} \left(v'\eta_t + \Delta_{\xi,x}^\sigma v \right) (t, X_t^{x,*}) (dW_t + \eta_t dt) \quad , \quad 0 \leq t \leq T \\ X_0^{x,*} = x. \end{cases}$$

Remarque 2.4. *Il est important de rappeler que la stricte concavité de v a jouer un rôle très important pour établir ce résultat, car, dans le cas contraire, l'Hamiltonien $\mathbf{H}$ peut exploser.*

À ce stade, nous avons supposé que la fonction valeur est suffisamment régulière pour pouvoir appliquer le lemme d'Itô et établir l'équation de HJB (2.41) que doit satisfaire v . En pratique l'approche est un peu différente, car nous ne pouvons montrer en général cette propriété de régularité. L'idée est de procéder par vérification dans le sens suivant : supposons qu'il existe une solution w régulière de l'équation (2.41), alors sous quelles hypothèses cette fonction w coïncide-t-elle avec la fonction valeur v ?

Le résultat qui nous permet de déduire l'égalité entre ces deux fonctions w et v est appelé le théorème de vérification et dont voici une version, adaptée au problème que nous étudions.

Théorème 2.3. *Soit $w \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^0([0, T] \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d))$, à croissance quadratique c'est à dire qu'il existe une constante $k > 0$ tel que*

$$|w(t, x, \xi)| \leq k(1 + |x|^2), \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \quad (2.43)$$

(a) *Si w satisfait $\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$*

$$\begin{cases} (\partial_t w + \mathcal{L}^\xi w + r_t x w')(t, x, \xi_t) + \sup_{\pi \in \mathcal{K}} \mathcal{P}(t, x, \xi, \pi, w', w'', \Delta_{\xi, x}^\sigma w) \leq 0 \\ w(T, x, \xi) \leq U(T, x) \end{cases} \quad (2.44)$$

alors $w \leq v$ sur $[0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

(b) *Si de plus $w(T, \cdot) = U(T, \cdot)$ et il existe une stratégie π^* telle que les inégalités (2.44) sont des égalités et telle que l'EDS*

$$dX_t^{\pi^*} = r_t X_t^{\pi^*} dt + \pi_t^* \sigma_t (dW_t + \eta_t dt) \quad (2.45)$$

admet une solution, alors $w = v$.

Une version plus générale de ce théorème ainsi qu'une démonstration sont données au paragraphe 3.5 dans [94]. Une conséquence directe de ce théorème de vérification est donnée dans le résultat suivant.

Théorème 2.4. *Si $w \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^0([0, T] \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d))$ est solution de (2.41), alors cette solution est unique.*

2.6.2 Modèle à facteur

Motivés par le fait qu'en réalité les paramètres du modèle sont très sensibles aux informations disponibles sur le marché, nous allons supposer, toujours dans le cadre markovien, que les paramètres de diffusions des actifs : b^i, σ^i , $i = 1..d$ dépendent, outre les cours des actifs, d'un ensemble de facteurs supplémentaires. La question est alors la suivante :

Sachant qu'on n'investit pas dans ces processus, comment la fonction valeur, d'un investisseur, peut-elle être modifiée ?

Comment faut-il tenir compte de ces informations dans la description de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman ?

Sans perte de généralité, nous supposons, pour simplifier, que le nouveau facteur ζ est un processus dans $\mathbb{R}$, les calculs étant identiques dans le cas vectoriel. Nous supposons de plus que

Hypothèse 2.6. ζ suit la dynamique :

$$\frac{d\zeta_t}{\zeta_t} = \mu_t dt + \gamma_t dW_t. \quad (2.46)$$

Désignons par $\bar{\xi}$ le vecteur $((\xi^i)_{i=1..d}, \zeta) \in \mathbb{R}^{d+1}$ et par $\bar{\sigma}$ la matrice variance covariance donnée par $\bar{\sigma} \stackrel{def}{=} ((\sigma^i)_{i=1..d}, \gamma)$.

Toujours dans le cadre markovien, nous supposons que la fonction valeur v est une fonction du temps t , x et $\bar{\xi}$,

L'idée, comme nous l'avons expliqué, est de considérer des nouveaux facteurs dans le modèle, sans toutefois les considérer comme des actifs c-à-d on n'y investit pas de l'argent. Ainsi le nombre d'actifs ne change pas, ni les paramètres du marché :

$$(r, \eta).$$

Nous remarquons, de même, que l'équation de la dynamique des richesses (2.12) est à son tour invariante.

Supposons que v satisfait la nouvelle hypothèse de régularité suivante.

Hypothèse 2.7. La fonction valeur v est dans la classe $\mathcal{C}^{1,2}([0, T[, \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d+1})$.

Alors en appliquant la formule d'Itô entre t et $t+h$ à $v(s, X_s^{t,x,a}, \bar{\xi}_s)$, l'équation (2.25) est remplacée par :

$$\begin{aligned} v(t+h, X_{t+h}^{t,x,\pi}, \bar{\xi}_{t+h}) &= v(t, x, \bar{\xi}) + \int_t^{t+h} \left[\partial_t v + \mathcal{L}_s^{\bar{\xi}, X^{x,\pi}} v \right] ds \\ &+ \int_t^{t+h} \left[v' \pi_s \sigma_s + \langle \nabla_{\bar{\xi}}, \bar{\sigma}_s \rangle \right] dW_s \end{aligned} \quad (2.47)$$

où nous rappelons que $\nabla_{\bar{\xi}}$ n'est autre que le gradient de v en $\bar{\xi}$ et par conséquent $\langle \nabla_{\bar{\xi}}, \bar{\sigma}_s \rangle = \sum_{i=1}^{d+1} v_i \bar{\xi}_s^i \sigma_s^i$.

Nous voyons, clairement que l'équation (2.47) est très analogue à (2.25). Il suffit de remplacer $\mathcal{L}^{\xi, X^{x,\pi}}$ par $\mathcal{L}^{\bar{\xi}, X^{x,\pi}}$ et $\langle \nabla_{\xi}, \sigma \rangle$ par $\langle \nabla_{\bar{\xi}}, \bar{\sigma} \rangle$, dans (2.25) pour obtenir (2.47).

En se basant sur cette analogie, nous pouvons donc déduire de la proposition 2.2, sans faire de calcul, le résultat suivant.

Proposition 2.3.

Si $v(t, \cdot)$ est la fonction valeur du problème d'optimisation de portefeuille, définie dans (2.19) est dans la classe $\mathcal{C}^{1,2}([0, T[, \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d+1})$, alors

(i) Elle est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \partial_t v + \mathcal{L}_t^{\bar{\xi}} v + r_t x v' - \frac{1}{2v''} \left\| \prod_{\mathcal{K}\sigma} \left[\eta_t v' + \Delta_{\bar{\xi}, x}^{\bar{\sigma}} v \right] \right\|^2 = 0 \\ v(T, x, \bar{\xi}) = U(T, x) \end{cases} \quad (2.48)$$

(ii) La stratégie optimale, est donnée par

$$\bar{\pi}_t^*(x) = -\frac{1}{u''} \prod_{\mathcal{K}\sigma} \left(u' \eta_t + \Delta_{\bar{\xi}, x}^{\bar{\sigma}} u \right) (t, x). \quad (2.49)$$

(iii) La richesse optimale que nous noterons $\bar{X}^{x,*}$ obéit à la dynamique suivante

$$\begin{cases} d\bar{X}_t^{x,*} = r_t \bar{X}_t^{x,*} dt - \frac{1}{u''} \prod_{\mathcal{K}\sigma} \left(u' \eta_t + \Delta_{\bar{\xi}, x}^{\bar{\sigma}} u \right) (t, X_t^{x,*}) (dW_t + \eta_t dt) \quad , \quad 0 \leq t \leq T \\ \bar{X}_0^{x,*} = x. \end{cases}$$

Remarque 2.5. Dans le cadre de ce paragraphe, nous voyons bien que ζ peut être interprété comme un $(d+1)$ ème actif, et le fait de ne pas investir en cet actif revient à considérer des nouvelles stratégies $\bar{\pi} = (\pi, \bar{\pi}^d = 0) \in \bar{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$.

Par contre, le fait que nous n'investissons pas dans cet actif apparaît au niveau du projecteur $\prod_{\mathcal{K}\sigma}$, où nous n'avons pas remplacé σ par $\bar{\sigma}$, contrairement aux deux opérateurs $\mathcal{L}^{\bar{\xi}}$ et $\Delta_{\bar{\xi},x}^{\bar{\sigma}}$ où nous avons fait les remplacements nécessaires, car c'est à ce niveau qu'apparaît l'impact d'une nouvelle information ζ sur la fonction valeur v . Cet impact est mesuré en terme de dérivée de v par rapport à cette variable.

À partir de cette remarque, tous les résultats du paragraphe précédent 2.5 peuvent alors être généralisés dans le contexte de cette section.

2.7 Approche des équations de Bellman par les solutions de viscosité

Nous avons vu dans le paragraphe précédent, comment le principe de programmation dynamique permet d'étudier le problème d'optimisation de portefeuilles. Ce principe est un outil très puissant mais, dans son approche, il suppose a priori que la fonction valeur soit suffisamment régulière, ce qui n'est pas forcément toujours vrai.

Une méthode plus générale est donc nécessaire, cette méthode est la méthode des solutions de viscosité introduite au début par Crandall et Lions [12] pour des équations différentielles du premier ordre. Cette méthode a été, par la suite, généralisée aux équations différentielles du second ordre, et c'est plutôt ces dernières qui nous intéressent dans notre étude.

Ce paragraphe sera alors consacré à l'introduction de la notion de solutions de viscosité, et aux outils nécessaires pour aborder les problèmes de contrôle stochastique de manière générale, notamment la notion de sursolution (sous-solution) de viscosité et le principe de comparaison pour des équations aux

dérivés partielles non-linéaire du second ordre, s'écrivant sous la forme,

$$F(t, y, u(t, y), \partial_t u(t, y), u'(t, y), u''(t, y)) = 0, \quad (t, y) \in [0, T] \times \mathcal{I} \quad (2.50)$$

où $\mathcal{I}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{d+1}$, et u' (respectivement u'') est le gradient (respectivement la matrice jacobienne) de u par rapport à y .

Dans le problème qui nous intéresse, il faut comprendre un point y de $\mathbb{R}^{d+1}$ comme un vecteur dont la première composante est la richesse x et les d dernières composantes coïncident avec celle du cours des actifs $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Nous donnerons, dans un premier temps, les définitions et les premiers résultats de manière générale, et ce pour rappeler le principe de cette approche. Nous reviendrons par la suite au cadre précis qui nous intéresse, c-à-d le cas des équations de HJB étudiées dans le paragraphe précédent correspond à :

$$-F(t, (x, \xi), u, v, p, w) = v + r_i p_1 + \mathcal{L}^\xi u + \mathbf{H}(t, (x, \xi), p_1, (p_i)_{i=2}^{d+1}, \sigma, w_{11}) \quad (2.51)$$

Le signe moins que nous rajoutons devant F ne change en aucun cas ni la nature du problème ni les résultats, mais sert uniquement à ce que F , ainsi définie, vérifie les conditions d'ellipticité et de parabolicité dans la suite. Les résultats que nous énoncerons sont démontrés rigoureusement par Huyên Pham dans le chapitre 4 de son livre [94].

2.7.1 Définition des solutions de viscosité

Nous supposons que la fonction F ci-dessus est une fonction continue de $[0, T] \times \mathcal{I} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d+1} \times \mathcal{M}_{d+1}$ dans $\mathbb{R}$, où $\mathcal{M}_{d+1}$ est l'ensemble des matrices carrées de dimension $d + 1$.

Nous supposons de plus que cette fonction satisfait les deux conditions de parabolicité et d'ellipticité suivantes :

Condition de parabolicité

F satisfait la Condition de parabolicité, si pour tout $t \in [0, T]$, $x \in \mathcal{I}$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^{d+1}$, $w, w' \in \mathcal{M}_{d+1}$,

$$w \leq w' \Rightarrow F(t, y, u, v, p, w) \geq F(t, y, u, v, p, w').$$

Condition d'ellipticité

2.7. Approche des équations de Bellman par les solutions de viscosité

F satisfait la Condition d'ellipticité, si pour tout $t \in [0, T]$, $x \in \mathcal{I}$ $u \in \mathbb{R}$ $v, v' \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^{d+1}$, $w \in \mathcal{M}_{d+1}$,

$$v \leq v' \Rightarrow F(t, y, u, v, p, w) \geq F(t, y, u, v', p, w).$$

Remarque 2.6. Dans le cadre qui nous intéresse, il est facile de vérifier que la condition de parabolicité est satisfaite pour F . En remarquant la propriété suivante, de l'opérateur de projection sur un cône :

$$v \leq v' \Rightarrow \left\| \prod_{\mathcal{K}_\sigma} (v + a) \right\| \geq \left\| \prod_{\mathcal{K}_\sigma} (v' + a) \right\|, \forall a \in \mathbb{R}^d$$

alors la condition d'ellipticité est aussi facilement vérifiée.

Définition 2.4. Soit v une fonction localement bornée de $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}$ (c-à-d pour tout voisinage de $y \in \mathcal{I}$ il existe un voisinage compact $U(y)$ tel que u soit bornée sur ce voisinage, on définit alors

- son enveloppe semicontinue supérieure (la plus petite fonction semicontinue supérieurement (s.c.s) majorant v sur $\mathcal{I}$) $v^* : \bar{\mathcal{I}} \rightarrow \mathbb{R}$, par :

$$v^*(a) = \limsup_{x \rightarrow a} v(y)$$

- son enveloppe semicontinue inférieure v_* (la plus grande fonction semicontinue inférieurement (s.c.i) minorant v sur $\mathcal{I}$) par,

$$v_*(a) = \liminf_{y \rightarrow a} v(y)$$

Remarque 2.7. Notons qu'une fonction v localement bornée sur $\mathcal{I}$ est

- semicontinue supérieurement (respectivement inférieurement) si et seulement si $v = v^*$ (respectivement $v = v_*$) sur $\mathcal{I}$.
- est continue si et seulement si elle est à la fois semicontinue supérieurement et semicontinue inférieurement, c-à-d $v = v^* = v_*$ sur $\mathcal{I}$.

Définition 2.5. Soit $v : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement bornée,

- (1) On dit que v est une sursolution de viscosité (discontinue) de (2.50) si

$$F(t, y_{min}, v_*, \partial_t \phi(y_{min}), \phi'(y_{min}), \phi''(y_{min})) \geq 0$$

pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^2([0, T] \times \mathcal{I})$ et pour tout $y_{min} \in \mathcal{I}$ tel que y_{min} est un minimum local de $v_* - \phi$.

(2) On dit que v est une sous-solution de viscosité (discontinue) de (2.50)

$$F(t, y_{max}, v^*, \partial_t \phi(y_{max}), \phi'(y_{max}), \phi''(y_{max})) \leq 0$$

pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^2([0, T] \times \mathcal{I})$ et pour tout $y_{max} \in \mathcal{I}$ tel que y_{max} est un maximum local de $v^* - \phi$.

(3) On dit que v est une solution de viscosité (discontinue) de (2.50) si et seulement si elle est à la fois une sursolution et une sous-solution de viscosité de (2.50).

Remarque 2.8. Si v est une sursolution (respectivement sous-solution) de viscosité de (2.50) alors v_* (respectivement v^*) est une sursolution (s.c.i) (respectivement sous-solution (s.c.s)) de viscosité de (2.50).

En particulier d'après la remarque 2.7, nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.4. Soit $v \in \mathcal{C}^2([0, T] \times \mathcal{I})$. Alors v est une sursolution (respectivement sous-solution) de viscosité de (2.50) si et seulement si v est une sursolution (respectivement sous-solution) classique de (2.50).

2.7.2 Principe de comparaison

Une des questions fondamentales que nous pouvons nous poser à ce niveau est la suivante :

Supposons qu'il existe une solution de viscosité de (2.50), étant données des conditions aux bords, cette solution est-elle unique ?

Comme pour les principes de comparaison classiques (pour les solutions régulières), il existe un principe de comparaison dit fort qui permet de comparer une sous-solution de viscosité de (2.50) et une sursolution de viscosité à partir de leur comparaison sur le bord du domaine $\mathcal{I}$ noté par $\partial\mathcal{I}$. Ce principe est le suivant :

Si v est une sous-solution de viscosité s.c.s. de (2.50) et u une sursolution s.c.i. de viscosité de (2.50) telle que $v^* \leq u_*$ sur $\partial\mathcal{I}$ alors

$$v \leq u \text{ sur } \bar{\mathcal{I}} \stackrel{def}{=} \mathcal{I} \cup \partial\mathcal{I}.$$

Un des résultats immédiats de ce principe de comparaison est le lemme suivant.

2.7. Approche des équations de Bellman par les solutions de viscosité

Lemme 2.1. *Considérons l'EDP (2.50) avec une condition au bord f , alors s'il existe une solution (de viscosité) v vérifiant $v = f$ sur le bord $\partial\mathcal{I}$ alors elle est unique.*

Démonstration. Supposons qu'il existe deux solutions de viscosité u et v de (2.50) avec la même condition au bord, alors on aura à la fois $v^* \leq u_*$ et $u^* \leq v_*$ sur $\partial\mathcal{I}$, en appliquant le principe de comparaison fort on obtient :

$$v^* \leq u_* \text{ et } u^* \leq v_* \text{ sur } \mathcal{I}$$

Ceci d'une part, mais d'autre part par définition $v_* \leq v^*$ et $u_* \leq u^*$, en combinant avec ce qui précède on déduit les égalités suivantes :

$$v_* = v^* = u_* = u^* \text{ sur } \mathcal{I}$$

ce qui est équivalent à $u = v$ sur $\mathcal{I}$, mais aussi $u = u^* = u_*$ d'où la continuité de la solution sur $\mathcal{I}$. □

Remarque 2.9. *Il est très évident que ce principe de comparaison fort est un outil très puissant qui permet de montrer l'unicité, la continuité et de comparer une sous-solution et une sursolution. Mais il faut faire attention quant à son application et surtout dans le cadre où $\partial\mathcal{O} = \emptyset$ qui nécessite des conditions supplémentaires. Mais ceci n'est pas notre cas car à la date de maturité T la fonction valeur est donnée.*

2.7.3 Programmation dynamique et solutions de viscosité

Nous nous plaçons dans ce paragraphe dans le cadre du problème d'optimisation qui nous intéresse, c-à-d le problème (2.19). Nous donnerons les principaux résultats qui montrent comment le principe de la programmation dynamique, sous certaines hypothèses faibles sur la régularité de la fonction valeur v (2.19), nous permet encore une fois de montrer que cette fonction valeur est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman au sens de la viscosité. Nous ne démontrons pas les résultats dans cette section, toutes les preuves rigoureuses sont fournies dans le paragraphe 4.4 de [94].

Pour cela nous commençons par le premier résultat.

Proposition 2.5. *Supposons que la fonction valeur v est localement bornée sur le domaine $[0, T[\times \mathcal{I}$, alors v est une sous-solution de viscosité de (2.35) c-à-d*

$$\partial_t v(t, x) + q_t x v'(t, x, \cdot) + \mathcal{L}^\xi v(t, x, \xi) + \mathbf{H}(t, x, \xi, v', \Delta_{\xi, x}^\sigma v, v'') = 0.$$

Proposition 2.6. *Supposons que la fonction valeur v est localement bornée sur le domaine $[0, T[\times \mathcal{I}$, alors v est une sursolution de viscosité de (2.35) c-à-d*

$$\partial_t v(t, x) + q_t x v'(t, x, \cdot) + \mathcal{L}^\xi v(t, x, \xi) + \mathbf{H}(t, x, \xi, v', \Delta_{\xi, x}^\sigma v, v'') = 0.$$

Nous notons que la démonstration de ce dernier résultat est légèrement différente de celle de la proposition qui précède, car elle n'est obtenue que sous une condition supplémentaire qui tient compte du fait que le hamiltonien $\mathbf{H}$ peut exploser, très particulièrement lorsque l'ensemble des stratégies admissibles est non-borné. Or nous avons montré dans la section 2.5 que l'opérateur à maximiser $\mathcal{P}$ (donnée par 2.33) est strictement convexe en π , vu la stricte convexité de la fonction d'utilité U et par conséquent celle de v (théorème 2.20), ce qui a induit que l'hamiltonien dans le problème, défini dans 2.36, est fini. C'est pour cette raison que l'énoncé de cette dernière proposition est différent de celui de la proposition 4.4.3 dans [94].

En combinant les deux derniers résultats, nous avons alors le résultat général suivant.

Théorème 2.5. *Supposons que la fonction valeur v est localement bornée sur le domaine $[0, T[\times \mathcal{I}$, alors v est une solution de viscosité de (2.35) c-à-d*

$$\partial_t v(t, x) + q_t x v'(t, x, \cdot) + \mathcal{L}^\xi v(t, x, \xi) + \mathbf{H}(t, x, \xi, v', \Delta_{\xi, x}^\sigma v, v'') = 0.$$

2.8 Utilité et changement de numéraire

Avant d'exposer l'idée générale de ce travail, rappelons la définition d'un numéraire.

Définition 2.6. *Un numéraire est une référence monétaire, c-à-d un processus d'Itô continu, adapté et strictement positif.*

Le but de ce paragraphe est le suivant : nous supposons que l'agent veut investir dans un second marché $\mathcal{M}^Y$ dont le numéraire est noté par $(Y_t)_{t \geq 0}$ (par exemple Y peut représenter le taux de change Euros/Dollars). Par conséquent, il va redéfinir son portefeuille et tentera naturellement, comme dans le cadre du marché initial, de trouver la meilleure stratégie qu'il doit suivre. A ce stade, et afin de trouver le critère d'optimalité dans ce nouveau marché financier, l'agent doit répondre aux questions suivantes :

- Dans ce nouveau problème d'optimisation, l'agent doit-il garder la même fonction d'utilité U ?
- Si non, quelle utilité U^Y doit-il définir, et quel est lien avec la fonction d'utilité initiale U ?
- Le numéraire étant lui-même une source de risque, comment cette utilité doit-elle en tenir compte ?

L'idée dans la suite est de raisonner comme si le numéraire était une simple constante (non risquée) et ce en raisonnant en terme de fonctions valeurs u et u^Y dans les deux marchés, fonctions définies

$$\begin{cases} u(x) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})} \mathbf{E}(U(T, X_T^{x, \pi})) \\ u^Y(z) = \sup_{\hat{\pi} \in \mathcal{A}(z, \hat{\mathcal{K}})} \mathbf{E}(U^y(T, \hat{X}_T^{z, \hat{\pi}})) \end{cases} \quad (2.52)$$

où nous avons noté

- i) $\hat{\pi}$ les stratégies de portefeuilles dans le nouveau marché,
- ii) $\hat{\mathcal{K}}$ le nouveau espace de contraintes,
- iii) $\hat{X}^{z, \hat{\pi}}$ le processus de richesse dans $\mathcal{M}^Y$, issu de la richesse z suivant la stratégie $\hat{\pi}$.

L'avantage de raisonner à la date $t = 0$ est que, d'un côté, la valeur du numéraire est une constante connue (non risquée) et d'un autre coté, ces deux fonctions valeurs s'interprètent naturellement comme étant les fonctions d'utilité à la date d'aujourd'hui de l'investisseur dans les deux marchés. Donc en examinant u et u^Y , nous simplifions de manière considérable les questions posées ci-dessus.

En effet, nous savons que z et zy ($Y_0 = y$) représentent la même richesse exprimée dans deux monnaies différentes. Par conséquent, il est naturel de supposer

que l'agent leur associe la même satisfaction dans les deux marchés, donc la même utilité, c-à-d $u^Y(z) = u(zY)$,

ce qui implique que

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})} \mathbf{E}(U(T, X_T^{x, \pi})) = \sup_{\hat{\pi} \in \mathcal{A}(\frac{x}{y}, \hat{\mathcal{K}})} \mathbf{E}\left(U^y(T, \hat{X}_T^{\frac{x}{y}, \hat{\pi}})\right). \quad (2.53)$$

Ceci traduit alors une condition initiale à la date $t = 0$ que doit satisfaire la nouvelle utilité.

Comme la propriété d'autofinancement est invariante par changement de numéraire, cela implique que les portefeuilles dans le nouveau marché $\hat{X}_T^{\frac{x}{y}, \hat{\pi}}$, multipliés par Y sont encore des portefeuilles dans le marché initial. Par conséquent, il existe $\pi \in \mathcal{K}$ tel que

$$\hat{X}_T^{\frac{x}{y}, \hat{\pi}} Y_T = X_T^{x, \pi}.$$

Le problème d'optimisation de portefeuille dans le nouveau marché peut donc se transformer en un problème d'optimisation dans le marché initial. Ainsi, l'équation (7.2) devient

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})} \mathbf{E}(U(T, X_T^{x, \pi})) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})} \mathbf{E}\left(U^y\left(T, \frac{X_T^{x, \pi}}{Y_T}\right)\right). \quad (2.54)$$

Remarquons enfin que le terme à gauche de cette identité peut se réécrire, en multipliant et en divisant par Y_T , sous la forme suivante

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})} \mathbf{E}\left(U\left(T, Y_T \frac{X_T^{x, \pi}}{Y_T}\right)\right) \quad (2.55)$$

Ainsi, pour représenter l'utilité de l'investisseur dans le nouveau univers, un candidat naturel s'impose et est donné simplement par $U^Y(T, z) = U(T, Y_T z)$.

Pour conclure, il est important de noter que, par le simple raisonnement que nous venons de faire et en partant d'une utilité déterministe dans un marché initial, nous aboutissons à une seconde utilité dans un nouveau numéraire, une utilité qui est bien un processus stochastique, d'où encore une fois l'intérêt que nous porterons de manière générale à des utilités stochastiques qui à priori sont mieux adaptées à intégrer les données du marché dans lequel nous nous plaçons ainsi que son évolution au cours du temps (par exemple l'évolution du numéraire et le risque qu'il génère).

Il est important de mentionner que dans ce qui précède, nous ne montrons pas que $z \mapsto U(T, Y_T z)$ est l'unique utilité, vérifiant la condition (7.2), que l'investisseur peut considérer pour représenter ses préférences. Il est possible qu'il en existe d'autres. Donc, l'unicité reste à étudier. Ainsi, il est inévitable de poser les quelques questions qui suivent :

- Sachant que ces utilités vérifient la même condition (7.2), sont-elles liées ?
- Est-ce que cette condition initiale détermine complètement l'utilité ?
- Plus général, connaissant la fonction d'utilité d'un agent à une date t , pouvons-nous la décrire dans le futur ?

Pour répondre à ces interrogations, il est important de noter que à priori ces utilités dépendent forcément, outre de la richesse z dans ce monde, du cours du numéraire (taux de change). Donc il n'y a aucune raison pour qu'elles soient des vraies fonctions déterministes de la richesse. Ceci nous suggère la piste des utilités stochastiques, et nous verrons dans la deuxième partie de ce manuscrit qu'ainsi posé, notre problème est très semblable à la caractérisation de ce qu'on appelle *forward dynamic utility*, notion introduite récemment par Zariphopoulou et Musiela (voir par exemple [84], [87], [89], [91]...)