La construction d'Abbes et Saito pour les connexions méromorphes le cas d'une connexion à pôles le long d'un hyperplan de l'espace affine

Sommaire

Dans cette partie, on généralise au cas d'une connexion méromorphe le long d'un hyperplan de l'espace affine l'observation conséquente de 2.2.4 que sur un corps algébriquement clos, les modules produits par la construction d'Abbes et Saito sont linéaires. Il s'agit de résultats analogues aux résultats d'additivité obtenus dans [49] [4].

Après une première section consacrée aux sorites sur les modules linéaires, on présente le théorème principal 8.1.3 de cette partie. Pour prouver ce théorème, l'idée est d'introduire une condition 7.2.1 plus forte que la linéarité ponctuelle 7.1.6 que l'on cherche à montrer, et qui a la vertu de bien se comporter vis-à-vis des sous-objets et des cycles proches. L'analyse de cette interaction est traitée en 9.3.1 et 9.3.4.

Le fait que le module produit par la construction d'Abbes et Saito possède bien cette propriété est une application de l'existence des réseaux de Malgrange. Elle fait l'objet de 10.2.1 et 10.2.2.

Enfin, on calcule à titre d'exemple ce que donne la construction d'Abbes et Saito dans un cas particulier de bonne décomposition formelle. Tout comme en dimension 1, le support obtenu rend compte des parties les plus polaires des formes de la décomposition de Levelt-Turrittin.

6 Notations et rappels

1. Soit $\mathcal{M}$ une connexion méromorphe sur une variété algébrique affine lisse X. On note D le lieu des pôles de $\mathcal{M}$, supposé irréductible lisse de point générique η et donné par l'équation $z = 0$. Par théorème de Levelt-Turrittin [5, 2.3.1], on peut trouver un entier e et une extension galoisienne K' du corps de fonction K de D tel que
$$K'((z^{1/e})) \otimes_{\mathcal{O}_{X,\eta}} \mathcal{M}_\eta \simeq \bigoplus_{\phi \in z^{-1/e}K'[z^{-1/e}]} \mathcal{E}^\phi \otimes \mathcal{R}_\phi \tag{6.0.2}$$
avec $\mathcal{E}^\phi = (K'((z^{1/e})), d + \phi dz^{1/e})$, et $\mathcal{R}_\phi$ un $K'((z^{1/e}))$-module à singularité régulière. Si les (ϕ_i) constituent la collection des ϕ intervenant dans (6.0.2), alors on peut toujours supposer que pour $i \neq j$ on a $\phi_i \neq \phi_j$. En particulier, il existe au plus un indice i pour lequel ϕ_i est nul. Notons i_0 cet indice.
Soit D' la normalisation de D dans K' et A' son anneau de fonction. On appellera *lieu non-tournant* de $\mathcal{M}$, où encore *lieu de bonne décomposition formelle* de $\mathcal{M}$ l'ouvert de D des points P au-dessus desquels les parties les plus polaires des $(\phi_i)_{i\neq i_0}$ et $(\phi_i - \phi_j)_{i\neq j}$ sont des inversibles du semi-localisé A'_P et la décomposition (6.0.2) descend à $A'_P((z^{1/e}))$.
D'après un théorème dû à Malgrange [37, 3.2.1] dans le cas analytique, et André [5, 3.4.3] dans le cas algébrique, le lieu non tournant de $\mathcal{M}$ est non vide.

2. Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de variétés algébriques complexes lisses. Pour tout module holonome $\mathcal{M}$ sur X, le faisceau quasi-cohérent $f^*\mathcal{M}$ est canoniquement muni d'une structure de module $\mathcal{D}_Y$-module holonome. On dispose donc d'un foncteur de la catégorie des modules holonomes sur X vers la catégorie des modules holonomes sur Y. On note dans ce texte f^+ son foncteur dérivé. On prendra garde que f^+ est noté $f^!$ dans [8, VI], et $\mathbb{L}f^*$ dans [34].

3. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}$-module cohérent sur une variété lisse X, alors on définit le support $\mathrm{Supp}(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ par l'ensemble des points $x \in X$ pour lesquels le germe $\mathcal{M}_x$ est

non nul. Comme conséquence immédiate de la relation

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{M}) = \mathrm{Char}(\mathcal{M}) \cap T^*_X X$$

où $\mathrm{Char}(\mathcal{M})$ désigne la variété caractéristique de $\mathcal{M}$, $\mathrm{Supp}(\mathcal{M})$ est automatiquement un fermé de X.

7 Modules linéaires

7.1 Généralités

Définition 7.1.1. Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, on appelle *module linéaire sur* E tout module somme directe finie de modules du type $\mathcal{E}^\varphi := (\mathcal{O}_E, d + d\varphi)$ où $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}$ est une forme linéaire sur E.

Lemme 7.1.2. *Si $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont deux modules linéaires sur $\mathbb{A}^n$, alors*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_{\mathbb{A}^n}}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \simeq 0.$$

Démonstration. On se ramène par somme directe au cas où les $\mathcal{E}_i$ sont de rang 1. Par tensorisation, on peut aussi supposer que $\mathcal{E}_1$ est trival. Il faut donc montrer la nullité du premier groupe de cohomologie de De Rham algébrique de $\mathcal{E} := \mathcal{E}_1$ avec $\mathcal{E}$ donné par la 1-forme $a_1dx_1 + \cdots + a_ndx_n$ où $a_i \in \mathbb{C}$. Si $n = 1$, c'est un calcul immédiat. Supposons donc $n > 1$.

Si tous les a_i sont nuls, le complexe de De Rham de $\mathcal{E}$ est le complexe de Koszul $\mathcal{K}(\partial_1, \dots, \partial_n)$ pour le module $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ sur l'anneau commutatif $\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_n]$. Il est en particulier acyclique en degré > 0.

Si l'un des a_i est non nul, mettons a_1 on peut toujours supposer quitte à faire le changement de coordonnées linéaire $y_1 = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n, y_2 = x_2, \dots, y_n = x_n$ que $a_2 = \cdots = a_n = 0$. Dans ce cas, $\mathrm{DR}\,\mathcal{E}$ est le complexe de Koszul $\mathcal{K}(\partial_1 + 1, \partial_2, \dots, \partial_n)$ de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Or ce dernier complexe est quasi-isomorphe au cône du morphisme de complexe

$$\mathcal{K}(\partial_2, \dots, \partial_n) \xrightarrow{(\partial_1+1)\cdot} \mathcal{K}(\partial_2, \dots, \partial_n)$$

avec $\mathcal{K}(\partial_2, \dots, \partial_n)$ quasi-isomorphe à $\mathbb{C}[x_1]$ placé en degré 0, d'où l'annulation voulue. □

Corollaire 7.1.3. *Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel algébrique à connexion sur l'espace affine $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ muni des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$. On suppose l'existence d'une trivialisation globale de $\mathcal{E}$ sur laquelle les ∂_{x_i} agissent via des matrices à coefficients constants. Alors $\mathcal{E}$ est une connexion linéaire sur $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le rang de $\mathcal{E}$, le cas où $\mathcal{E}$ est de rang 1 étant trivial. Notons $\mathbf{e}$ une base ayant la propriété de l'énoncé. Par intégrabilité de $\mathcal{E}$, les matrices des ∂_{x_i} commutent deux à deux, donc la considération d'une base de triangularisation simultanée assure l'existence d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}_2 \longrightarrow 0$$

avec $\mathcal{E}_1$ linéaire de rang 1 et $\mathcal{E}_2$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Par récurrence, les $\mathcal{E}_i$ sont linéaires et 7.1.3 se déduit de 7.1.2. □

Corollaire 7.1.4. *Tout sous-objet d'un module linéaire*

$$\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}^{\omega_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}^{\omega_n} \tag{7.1.5}$$

est isomorphe à une somme directe de certains $\mathcal{E}^{\omega_i}$ intervenant dans (7.1.5). *En particulier, tout sous-quotient d'un module linéaire est linéaire.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M}$ un sous-module de $\mathcal{E}$. Du fait de l'inclusion $\mathrm{Char}(\mathcal{M}) \subset \mathrm{Char}(\mathcal{E}) = T^*_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$, on a $\mathrm{Char}(\mathcal{M}) = T^*_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$, donc $\mathcal{M}$ est une connexion algébrique.

Raisonnons par récurrence en supposant 7.1.4 acquis pour tous les couples $(\mathcal{M}', \mathcal{E}')$ avec $\mathcal{M}'$ sous-module de $\mathcal{E}'$ satisfaisant à $\mathrm{rg}\,\mathcal{E}' < \mathrm{rg}\,\mathcal{E}$ ou ($\mathrm{rg}\,\mathcal{E}' = \mathrm{rg}\,\mathcal{E}$ et $\mathrm{rg}\,\mathcal{M}' < \mathrm{rg}\,\mathcal{M}$).

Si $\mathcal{M}$ est simple et non nul, alors la restriction de l'un des $p_i : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^{\omega_i}$ à $\mathcal{M}$ est nécessairement un isomorphisme. Sinon, $\mathcal{M}$ admet un sous-objet propre $\mathcal{N}$. Par hypothèse de récurrence appliquée à $(\mathcal{N}, \mathcal{E})$, on obtient que $\mathcal{N}$ est linéaire. Quitte à n'en considérer qu'un facteur de rang 1, on peut supposer par ce qui précède que $\mathcal{N}$ est l'un des $\mathcal{E}^{\omega_i}$ de (7.1.5). Par hypothèse de récurrence appliquée à $(\mathcal{M}/\mathcal{N}, \mathcal{E}/\mathcal{N})$, on obtient que $\mathcal{M}$ est une extension de deux modules linéaires. D'après 7.1.2, $\mathcal{M}$ est linéaire et en regardant les restrictions de chaque p_i aux facteurs de rang 1 de $\mathcal{M}$, on voit que ces derniers sont des facteurs intervenant dans la décomposition (7.1.5). □

Dans la définition qui suit, on considère un fibré vectoriel E sur une variété algébrique complexe lisse X et un point x de X. Pour tout couple (Y, Z) de sous-variétés de X tel que Z est inclus dans Y, on note $i_{Z,Y}$ l'inclusion canonique de E_Z dans E_Y. Enfin, on se donne un $\mathcal{D}$-module holonome $\mathcal{M}$ sur E.

Définition 7.1.6. On dit que $\mathcal{M}$ est *$\mathcal{H}^0$-linéaire au-dessus de x* si le module $\mathcal{H}^0 i^+_{x,X}\mathcal{M}$ est linéaire. On dit que $\mathcal{M}$ est *$\mathcal{H}^0$-ponctuellement linéaire* si $\mathcal{M}$ est $\mathcal{H}^0$-linéaire au-dessus de tout point de X.

7.2 La propriété $L(x)$

On aura à considérer la notion locale voisine suivante : soit M un $\mathcal{D}$-module holonome sur un fibré E de rang l sur $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\![t_1, \dots, t_n]\!]$, et O le point fermé de $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\![t_1, \dots, t_n]\!]$.

Définition 7.2.1. On dira que M *vérifie la propriété $L(O)$* si M admet une famille génératrice $\mathbf{e} := (e_1, \dots, e_m)$ vérifiant

$$\partial_{y_i} e_j = \sum_{u=1}^{m} f_{iju}(t_1, \dots, t_n, y_1, \dots, y_l) e_u \tag{7.2.2}$$

où dans cette écriture, les y_i sont des coordonnées sur E, et les f_{iju} sont des éléments de $\mathbb{C}[\![t_1, \dots, t_n]\!][y_1, \dots, y_l]$ ayant la propriété que dans la décomposition

$$f_{iju} = \sum_{\nu} P_\nu(y_1, \dots, y_l) t_1^{\nu_1} \cdots t_n^{\nu_n}$$

le degré total $\deg_y P$ de $P_\nu(y_1, \dots, y_l)$ est plus petit que $\nu_1 + \cdots + \nu_n$.

Dans la situation globale de 7.1.6, on dira aussi que $\mathcal{M}$ *vérifie la propriété $L(x)$* si pour un choix d'identification $\widehat{\mathcal{O}_{X,x}} \simeq \mathbb{C}[\![t_1, \dots, t_n]\!]$, le changement de base de $\mathcal{M}$ à $\mathrm{Spec}\,\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$ satisfait à la propriété $L(O)$ au sens précédent.

La propriété $L(x)$ est plus forte que la notion d'$\mathcal{H}^0$-linéarité ponctuelle. C'est l'objet du

Lemme 7.2.3. *Si $\mathcal{M}$ vérifie $L(x)$, alors $\mathcal{M}$ est $\mathcal{H}^0$-linéaire au-dessus de x.*

Démonstration. Par définition, $\mathcal{H}^0 i^+_{x,X}\mathcal{M}$ est aussi la restriction à E_x du module $M = \widehat{\mathcal{O}_{X,x}} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{M}_x$. Une famille génératrice de M vérifiant (7.2.2) induit une famille génératrice de $\mathcal{H}^0 i^+_{x,X}\mathcal{M}$ encore notée $\mathbf{e}$ sur laquelle l'action de ∂_{y_i} s'obtient en évaluant les f_{iju} en $t_1 = \cdots = t_n = 0$. Du fait de la forme très particulière des f_{iju}, on a que $f_{iju}(0, \ldots, 0, y_1, \ldots, y_n)$ est constant.

Soit $\mathbf{e}'$ une sous famille maximale de $\mathbf{e}$ n'admettant pas de relations de liaison non triviale à coefficients constants. Une telle famille existe pour peu que M ne soit pas le module nul, et quitte à renuméroter les e_i, on peut toujours supposer $\mathbf{e}' = (e_1, \ldots, e_k)$, $k \leq n$. Par maximalité, tous les e_i sont dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par $\mathbf{e}'$. Donc $\mathbf{e}'$ engendre M comme $\mathcal{D}_{E_x}$-module. En particulier, les relations

$$\partial_{y_i} e_j = a_{ij1}e_1 + \cdots + a_{ijn}e_n, \quad a_{iju} \in \mathbb{C}$$

pour $j = 1, \ldots, k$ donnent des relations

$$\partial_{y_i} e_j = b_{ij1}e_1 + \cdots + b_{ijk}e_k, \quad b_{iju} \in \mathbb{C} \tag{7.2.4}$$

En notant B_i la matrice des $(b_{iju})_{ju}$, on peut écrire les équations (7.2.4) sous la forme

$$\partial_{y_i}\mathbf{e}' = B_i\mathbf{e}'$$

Par application de ∂_{y_j} et commutation de ∂_{y_i} et ∂_{y_j}, on obtient

$$(B_iB_j - B_jB_i)\mathbf{e}' = 0$$

Puisque $\mathbf{e}'$ n'admet pas de relations de liaison non triviale à coefficients constants, il vient $B_iB_j = B_jB_i$. Alors, la connexion $N := (\mathbb{C}[y_1, \ldots, y_l]^k, B_1dy_1 + \cdots + B_ldy_l)$ est une connexion algébrique intégrable bien définie se surjectant sur M. d'après 7.1.3, N est linéaire. Par 7.1.5, le module M est linéaire.

□

La définition 7.2.1 s'introduit naturellement pour palier au mauvais comportement de la linéarité ponctuelle vis-à-vis des sous-objets. On démontrera en 9.3.4 par l'entremise de la théorie des cycles proches que tout sous-objet d'un module vérifiant $L(x)$ est aussi $\mathcal{H}^0$-linéaire au-dessus de x.

8 Le théorème principal

8.1 Enoncé

On commence par rappeler la géométrie sous-jacente à la construction d'Abbes et Saito [4]. Soit X une variété algébrique complexe lisse, D un diviseur à croisements normaux de X et $D_1, \dots, D_m$ les composantes irréductibles de D. On note U le complémentaire de D dans X.

Soit $\widetilde{X \times X}$ l'éclaté de $X \times X$ le long de la réunion des $D_i \times D_i$. On note $X * X$ le complémentaire dans $\widetilde{X \times X}$ des transformées strictes de $D \times X$ et $X \times D$. Localement, si V_1 et V_2 sont deux ouverts de X d'anneaux de fonctions respectifs A_1 et A_2, et si $t_i = 0$ (resp. $s_i = 0$) est l'équation de D_i dans V_1 (resp. V_2), $X * X$ est le schéma d'anneau de fonctions [4, 5.22]

$$\frac{A_1 \otimes_{\mathbb{C}} A_2[u_1^{\pm 1}, \dots, u_m^{\pm 1}]}{(t_i \otimes 1 - u_i(1 \otimes s_i))} \tag{8.1.1}$$

Suivant [24, 4.2.8], le schéma $X * X$ s'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & X * X \arrow[d] \\ X \arrow[ur, "\delta"] \arrow[r, "\mathrm{Diag}"'] & X \times X \end{tikzcd}$$

Avec δ immersion fermée régulière de fibré conormal canoniquement isomorphe à $\Omega^1_X(\log D)$.

Si $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^{*n}$ et $D_{\underline{a}} = a_1 D_1 + \cdots + a_m D_m$, on s'intéresse comme en dimension 1 [3, 3] à la dilatation $(X * X)^{\underline{a}}$ de $X * X$ en $\delta(D_{\underline{a}})$ par rapport à $D_{\underline{a}}$. Ce schéma s'insère dans le diagramme commutatif de carré gauche cartésien

$$\begin{tikzcd} T_{\underline{a}} \arrow[r] \arrow[d] & (X * X)^{\underline{a}} \arrow[d, "\pi"'] & U \times U \arrow[l, "j_a"'] \arrow[d] \\ D \arrow[r] & X & U \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{8.1.2}$$

avec $T_{\underline{a}}$ muni d'une identification canonique [4, (5.31.4)]

$$T_{\underline{a}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{V}(\Omega^1_{X/\mathbb{C}}(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D_{\underline{a}})) \times_X D.$$

Dans la suite, on se restreint au cas où X est l'espace affine $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ avec D un hyperplan, et on se donne une connexion $\mathcal{M}$ sur $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ méromorphe le long de D. Dans ce cas, $\underline{a}$ est simplement la donnée d'un entier naturel non nul a. On notera $\rho(\mathcal{M})$ où encore ρ le rang de Poincaré-Katz de $\mathcal{M}$ au point générique de D (c'est-à-dire la plus grande pente de la restriction de $\mathcal{M}$ au point générique de D), et $H_a(\mathcal{M})$ pour $j_{a+}\mathcal{H}om(p_2^+\mathcal{M}, p_1^+\mathcal{M})$, où j_a désigne l'inclusion canonique de $U \times U$ dans $(X * X)^a$.

On dira qu'un module holonome $\mathcal{N}$ sur un fibré sur D est *ponctuellement lisse* si les modules de cohomologie du complexe $i^+_{x,X}\mathcal{N}$ sont des connexions algébriques pour tout $x \in D$. Le but de cette seconde partie de thèse est de démontrer le

Théorème 8.1.3. *On suppose que $\rho(\mathcal{M})$ est entier. Alors, si $a \geq \rho(\mathcal{M})$, le $\mathcal{D}_{T_a}$-module $\Psi_\pi H_a(\mathcal{M})$ est ponctuellement lisse et ponctuellement $\mathcal{H}^0$-linéaire.*

8.2 Discussion

Comme conséquence de 12.2.1, la restriction $i^*_{x,D}\mathfrak{F}\Psi_t H_a(\mathcal{M})$ est à support fini pour tout $x \in D$. Néanmoins, du fait de la mise en défaut du lemme de Nakayama pour les faisceaux quasi-cohérents, le support de la restriction à $T_{a,x}$ d'un module holonome $\mathcal{N}$ sur T_a est en général un sous-ensemble strict de $\operatorname{Supp}\mathcal{N} \cap T_{a,x}$.

Abbes et Saito utilisent le foncteur de restriction plutôt que les cycles proches. Ici le choix des cycles proches se justifie par le fait que la restriction à une sous-variété Z de n'importe quel $\mathcal{D}$-module localisé le long de Z donne 0. Une vertu de Ψ est d'être justement insensible à la localisation [33, 4.4-3].

Dans [49, 2.3.7] et [4, 8.15], les auteurs démontrent l'analogue ℓ-adique de 8.1.3 sans hypothèse de lissité sur D, mais au prix d'une hypothèse [4, 8.2] sur la ramification le long de D. Détaillons ici la nature de cette hypothèse. Soit X une variété sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$, et D un diviseur lisse de X. On considère le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & U \times_k U \arrow[d, "j_a"] \\ X \arrow[r, "\delta_a"'] & (X * X)^a \end{tikzcd} \tag{8.2.1}$$

Soit ℓ un nombre premier distinct de p, $x \in D$, $\overline{x}$ un point géométrique de X localisé en x, et $\mathcal{F}$ un $\mathbb{F}_\ell$-faisceau localement constant constructible sur U. Alors, le changement de base relatif au diagramme cartésien (8.2.1)

$$\alpha : \delta_a^* j_{a*} H_a(\mathcal{F}) \longrightarrow j_* \delta^* H_a(\mathcal{F}) = j_* \operatorname{End}(\mathcal{F})$$

est injectif, et on dit que *la ramification de $\mathcal{F}$ en $\overline{x}$ est bornée par D_a* si le morphisme $\alpha_{\overline{x}}$ est un isomorphisme. Sous cette condition, l'objet d'étude d'Abbes et Saito est le faisceau $\nu_a(H_a(\mathcal{F}), X) := (j_{a*}H_a(\mathcal{F}))_{|T_a}$.

Dans le contexte des connexions méromorphes, le changement de base α est automatiquement un isomorphisme [16, 1.7.3], et il se pose alors la question de savoir par quoi remplacer la condition d'Abbes et Saito. Lorsqu'on choisit pour point x le point générique η de D, Abbes et Saito démontrent [4, 8.8] que la condition précédente équivaut au fait que la plus grande pente de la restriction de $\mathcal{F}$ au point générique de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}^{sh}_{X,\eta}$ est $\leq a$. Cette condition fait sens pour les $\mathcal{D}$-modules, d'où l'occurrence du rang de Katz générique dans 8.1.3.

Le théorème 8.1.3 suggère que dans le contexte ℓ-adique, on doit pouvoir obtenir un théorème de finitude à l'aide d'une condition portant seulement sur le point générique de D, et ceci au prix de perdre la constance locale de $\nu_a(H_a(\mathcal{F}), X)$.

Du fait que la formation de H_a ne commute pas à l'image inverse, la construction d'Abbes et Saito se prête mal aux arguments de section par des courbes transverses à D (mêmes génériques).

On observera aussi que la construction d'Abbes et Saito peut se définir pour $D_{\underline{a}}$ remplacé par une combinaison linéaire à coefficients rationnels des D_i. Dans le cas où l'un des a_i est rationnel non entier, le schéma $(X * X)^{\underline{a}}$ est normal mais plus nécessairement lisse. Bien qu'on puisse toujours le plonger dans un schéma lisse, on y perd le morphisme structural définissant les cycles proches. On doit donc se restreindre au cas des coefficients entiers. Ce n'est pas une grande restriction dans la mesure où 8.1.3 est un énoncé local, et localement il est toujours loisible de ramifier les variables définissant D.

9 Cycles proches

9.1 Rappels et notations

Dans toute cette section, on fixe une variété complexe lisse X et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome le long d'une hypersurface lisse D définie par l'équation $t = 0$. On rappelle suivant [33] que $\mathcal{D}_X$ est muni de la *filtration de Kashiwara-Malgrange*

$$V_k(\mathcal{D}_X) := \{P \in \mathcal{D}_X, P(\mathcal{I}_D^l) \subset \mathcal{I}_D^{l-k} \quad \forall l \in \mathbb{Z}\}$$

et qu'on appelle *bonne V-filtration* de $\mathcal{M}$ toute filtration exhaustive $(U_k(\mathcal{M}))_{k\in\mathbb{Z}}$ par des $V_0(\mathcal{D}_X)$-modules cohérents tels que localement, il existe un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$U_{-k-k_0}(\mathcal{M}) = t^k U_{-k_0}(\mathcal{M}) \quad \text{ et } \quad U_{k+k_0}(\mathcal{M}) = \sum_{i=0}^{k} \partial_t^i U_{k_0}(\mathcal{M}) \tag{9.1.1}$$

Si m est une section de $\mathcal{M}$, il existe un polynôme de degré minimal b_m pour lequel on a

$$b_m(t\partial_t)m \in V_{-1}(\mathcal{D}_X)m.$$

C'est le *polynôme de Bernstein* de m. Notons $\mathrm{ord}_Y(m)$ l'ensemble de ses racines et soit $\geq$ l'ordre lexicographique sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R} + i\mathbb{R}$. Pour $a \in \mathbb{C}$, si on définit

$$V_a(\mathcal{M}) = \{m \in \mathcal{M}, \mathrm{ord}_Y(m) \subset \{\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \geq -a-1\}\}$$

et

$$V_{<a}(\mathcal{M}) = \{m \in \mathcal{M}, \mathrm{ord}_Y(m) \subset \{\alpha \in \mathbb{C}, \alpha > -a-1\}\},$$

la théorie générale stipule que $(V_{a+k}(\mathcal{M}))_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(V_{<a+k}(\mathcal{M}))_{k\in\mathbb{Z}}$ sont des bonnes V-filtrations de $\mathcal{M}$, et que ce sont les seules bonnes V-filtrations de $\mathcal{M}$ dont les racines du polynôme de Bernstein sont respectivement dans $[-a-1, -a[$ et $]-a-1, -a]$. Par définition, si on pose $\mathrm{Gr}_a(\mathcal{M}) = V_a(\mathcal{M})/V_{<a}(\mathcal{M})$, on a

$$\Psi_t\mathcal{M} := \bigoplus_{-1\leq a<0} \mathrm{Gr}_a(\mathcal{M}). \tag{9.1.2}$$

Proposition 9.1.3. *Si $\mathcal{M}$ est une connexion méromorphe à singularité régulière le long de D, alors le module $\Psi_t\mathcal{M}$ est une connexion algébrique de rang* $\mathrm{rg}\,\mathcal{M}$ *sur D.*

Démonstration. Pour montrer 9.1.3, on sait par [8, VI 1.7] qu'il suffit de montrer que le $\mathcal{O}_D$-module sous-jacent à $\Psi_t\mathcal{M}$ est libre de rang $\mathrm{rg}\,\mathcal{M}$, soit encore que pour tout $x \in D$, le $\mathcal{O}_{D,x}$-module $(\Psi_t\mathcal{M})_x$ est libre de rang $\mathrm{rg}\,\mathcal{M}$. Par descente fidèlement plate [13, 1.11], il suffit de montrer que le $\widehat{\mathcal{O}_{D,x}}$-module $(\widehat{\Psi_t\mathcal{M}})_x := \widehat{\mathcal{O}_{D,x}} \otimes_{\mathcal{O}_{D,x}} (\Psi_t\mathcal{M})_x$ est libre de rang $\mathrm{rg}\,\mathcal{M}$. Or on dispose d'une identification canonique

$$(\widehat{\Psi_t\mathcal{M}})_x \xrightarrow{\sim} \Psi_t\widehat{\mathcal{M}_x}$$

et on sait d'après Deligne [9] que $\widehat{\mathcal{M}_x}$ est extension successive de connexions régulières de rang 1. On est donc ramené au cas où $\mathcal{M}$ est de rang 1. Alors, on peut se donner une trivialisation locale s de $\mathcal{M}$ vérifiant $t\partial_t s = \alpha s$ pour α dans l'intervalle $]-1,0]$ et telle que l'action des autres dérivations se fait sans pôles. En particulier, $(V_k(\mathcal{D}_X)s)_{k\in\mathbb{Z}}$ est la V-filtration canonique $(V_{<k}(\mathcal{M}))_{k\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{M}$, de sorte qu'on a localement

$$\Psi_t\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} V_0(\mathcal{D}_X)s/tV_0(\mathcal{D}_X)s \tag{9.1.4}$$

Puisque l'action des dérivations de D se fait sans pôles sur s, le membre de droite de (9.1.4) est localement engendré par s comme $\mathcal{O}_D$-module, et le lemme 9.1.3 est prouvé. □

9.2 Généralités sur les V-filtrations

Lemme 9.2.1. *Soit $U_0(\mathcal{M})$ un $V_0(\mathcal{D}_X)$ sous-module cohérent de $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} = U_0\mathcal{M}[t^{-1}]$. Alors, la filtration (exhaustive) de $\mathcal{M}$ définie par*

$$U_k(\mathcal{M}) = t^{-k}U_0(\mathcal{M}) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

est une bonne V-filtration de $\mathcal{M}$.

Démonstration. Du fait de la relation $(t\partial_t)t^{-k} = -kt^{-k} + t^{-k}(t\partial_t)$, chaque $U_k(\mathcal{M})$ est un $V_0(\mathcal{D}_X)$-module cohérent. Il faut donc vérifier que les relations de (9.1.1) sont satisfaites pour un certain $k_0 \geq 0$. Par définition, la première relation de (9.1.1) est vérifiée pour tout choix de k_0.

Montrer la seconde relation revient à montrer

$$U_{k+k_0}(\mathcal{M}) = t^k \sum_{i=0}^{k} \partial_t^i U_{k_0}(\mathcal{M}) \tag{9.2.2}$$

pour un k_0 convenable. Du fait de $\partial_t t^{-k} = -kt^{-k-1} + t^{-k-1}t\partial_t$, la stabilité de $U_0(\mathcal{M})$ par $t\partial_t$ entraine $\partial_t U_k(\mathcal{M}) \subset U_{k+1}(\mathcal{M})$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. L'inclusion $\supset$ dans (9.2.2) est donc automatique. Il faut montrer l'inclusion $\subset$ pour un k_0 bien choisi.

Si $e_1, \ldots, e_n$ désigne un système de $V_0(\mathcal{D}_X)$-générateurs de $U_0(\mathcal{M})$, alors on observe que le polynôme $b(T) = b_{e_1}(T)\cdots b_{e_n}(T)$ annule l'opérateur induit par $t\partial_t$ sur $\mathrm{Gr}_0\, U(\mathcal{M}) = U_0(\mathcal{M})/U_{-1}(\mathcal{M})$. Par conséquent, le polynôme $b(T+k)$ annule l'opérateur induit par $t\partial_t$ sur $\mathrm{Gr}_k\, U(\mathcal{M}) = U_k(\mathcal{M})/U_{k-1}(\mathcal{M})$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Donc si A désigne l'ensemble fini des valeurs propres de l'action de $t\partial_t$ sur $\mathrm{Gr}_0\, U(\mathcal{M})$, les valeurs propres de l'action de $t\partial_t$ sur $\mathrm{Gr}_k\, U(\mathcal{M})$ sont dans $A-k$. Choisissons k_0 assez grand de telle sorte que $A - k_0$ ne rencontre par $\mathbb{N}$, et montrons (9.2.2) pour ce choix là de k_0. On raisonne par récurrence sur k, le cas $k = 0$ étant tautologique. Par hypothèse de récurrence, on est ramené à montrer l'inclusion

$$U_{k_0}(\mathcal{M}) \subset U_{k_0-1}(\mathcal{M}) + t^k\partial_t^k U_{k_0}(\mathcal{M}),$$

soit encore que le morphisme $T_k : \mathrm{Gr}_{k_0}\, U(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{Gr}_{k_0}\, U(\mathcal{M})$ induit par l'opérateur $t^k\partial_t^k$ est surjectif. Or, une récurrence permet de voir que

$$t^k\partial_t^k = t\partial_t(t\partial_t - 1)\cdots(t\partial_t - (k-1)),$$

de sorte que T_k admet un polynôme minimal non nul $\mu_{T_k} = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0$ dont les racines sont de la forme $\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(k-1))$ pour $\lambda \in A - k_0$. Ces racines sont donc non nulles, soit encore $a_0 \neq 0$. On a donc pour tout $m \in U_{k_0}(\mathcal{M})$ l'égalité suivante dans $\mathrm{Gr}_{k_0} U(\mathcal{M})$

$$[m] = -(T_k^d[m] + a_{d-1}T_k^{d-1}[m] + \cdots + a_1 T_k[m])/a_0$$

et la surjectivité souhaitée est prouvée. □

Le lemme qui suit figure dans [33]. Son intérêt réside dans la possibilité qu'il offre de transporter des informations concernant une bonne V-filtration particulière pour $\mathcal{M}$ à toute bonne V-filtration de $\mathcal{M}$.

Lemme 9.2.3. *Soient U et U' deux bonnes V-filtrations de $\mathcal{M}$. Alors, il existe localement des entiers $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tels que*

$$U_{k+k_1} \subset U'_k \subset U_{k+k_2} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Démonstration. Fixons $k_0 \geq 0$ comme dans (9.1.1) pour U. On sait que U_{k_0} est localement finiement engendré comme $V_0(\mathcal{D}_X)$-module, donc comme U' est une filtration exhaustive, on dispose d'un entier $n_0 \geq 0$ tel que

$$U_{k_0} \subset U'_{n_0}$$

Par application de $V_k(\mathcal{D}_X)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, il vient par définition de k_0

$$U_{k_0+k} \subset U'_{n_0+k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

soit encore

$$U_{k_0-n_0+k} \subset U'_k \quad \forall k \geq n_0 \tag{9.2.4}$$

Or par application de t^j à l'inclusion $U_{-k_0} = U_{-k_0-n_0+n_0} \subset U'_{n_0}$, il vient

$$U_{-k_0-n_0+n_0-j} \subset U'_{n_0-j} \tag{9.2.5}$$

En combinant (9.2.4) et (9.2.5), on obtient la première des inclusions de (9.2.3) en posant $k_1 = -k_0 - n_0$. L'autre inclusion s'obtient par symétrie. □

9.3 Cycles proches et propriété $L(x)$

Dans le lemme qui suit, la situation est locale : E désigne le fibré trivial de rang m sur $X = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\![t_1, \ldots, t_n]\!]$, muni de coordonnées $y_1, \ldots, y_m$, le point fermé de X est noté O et M désigne un module holonome sur E. Soit D le diviseur défini par $t_n = 0$ et E_D la restriction de E à D. On considère sur M la V-filtration associée à E_D.

Lemme 9.3.1. *Si M vérifie la propriété $L(O)$ et si N est un sous-module de M, alors pour tout nombre complexe $a < 0$, le gradué $\mathrm{Gr}_a(N)$ est un sous-module d'un module vérifiant $L(O)$.*

Démonstration. Par exactitude des foncteurs Gr_a, on peut toujours supposer que $N = M$ [33, 4.2-7]. D'autre part, on sait que Gr_a est insensible à la localisation pour tout $a < 0$ [33, 4.4-3]. Si $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_m)$ est une famille génératrice de M donnée par hypothèse $L(O)$ sur M, la suite des modules $M_k := \mathcal{D}_E t_n^{-k}\mathbf{e}, k \in \mathbb{N}$ est une suite croissante exhaustive de sous-modules de $M[t_n^{-1}]$. Par noethérianité de $M[t_n^{-1}]$ [8, V 1.9], $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ stationne à partir d'un certain entier k_0. Alors, la famille des $t_n^{-k_0}e_j$ [7] avec $j = 0, \dots, m$ fait de $M[t_n^{-1}]$ un module vérifiant la propriété $L(O)$. Dans la suite, on peut donc supposer que $M = M[t_n^{-1}]$.

Soit $\mathbf{e} := (e_1, \dots, e_m)$ une famille génératrice de M vérifiant (7.2.2) et notons $V(\mathbf{e})$ le $V_0(\mathcal{D}_E)$-module engendré par $\mathbf{e}$. Si $s \in M$, on peut écrire

$$\begin{aligned} s &= \sum P_i(t_j, y_j, \partial_{t_1}, \dots, \partial_{t_{n-1}}, \partial_{t_n}, \partial_{y_j})e_i \\ &= \sum P_i(t_j, y_j, \partial_{t_1}, \dots, \partial_{t_{n-1}}, t_n^{-1}(t_n\partial_{t_n}), \partial_{y_j})e_i \end{aligned}$$

où les P_i désignent des polynômes à plusieurs variables et à coefficients complexes. On en déduit que $V(\mathbf{e})[t_n^{-1}] = M$, et alors par 9.2.1

$$V_k(\mathbf{e}) := t_n^{-k}V(\mathbf{e})$$

est une bonne V-filtration de M.

D'après 9.2.3, on peut trouver un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ pour lequel on a les inclusions

$$V_{-k_0}(\mathbf{e}) \subset V_{<a}(M) \subset V_a(M) \subset V_{k_0}(\mathbf{e})$$

d'où une surjection canonique de $V_0(\mathcal{D}_E)$-modules

$$V_{k_0}(\mathbf{e})/V_{-k_0}(\mathbf{e}) \twoheadrightarrow V_{k_0}(\mathbf{e})/V_{<a}(M) \tag{9.3.2}$$

et une injection canonique de $V_0(\mathcal{D}_E)$-modules

$$\mathrm{Gr}_a(M) \hookrightarrow V_{k_0}(\mathbf{e})/V_{<a}(M) \tag{9.3.3}$$

Pour prouver 9.3.1, il suffit d'après (9.3.3) de voir que par restriction des scalaires de $V_0(\mathcal{D}_E)$ à $\mathcal{D}_{E_D}$, le $\mathcal{D}_{E_D}$-module induit par $V_{k_0}(\mathbf{e})/V_{<a}(M)$ vérifie la propriété $L(O)$. Du fait de la surjection (9.3.2), il suffit de voir que le $\mathcal{D}_{E_D}$-module induit par

$$V(\mathbf{e}, k_0) := V_{k_0}(\mathbf{e})/V_{-k_0}(\mathbf{e})$$

vérifie la propriété $L(O)$.

En observant que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}$, l'opérateur $t_n^k(t_n\partial_{t_n})^\alpha$ s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients entiers des opérateurs $(t_n\partial_{t_n})^i t_n^k, i = 0, \dots, \alpha$, on voit que les classes $[t_n^k e_i], k = -k_0, \dots, k_0$ forment une famille $V_0(\mathcal{D}_E)$-génératrice finie de $V(\mathbf{e}, k_0)$. Puisque l'action de $t_n\partial_{t_n}$ sur $V(\mathbf{e}, k_0)$ admet un polynôme minimal non nul, disons de degré $d > 0$, la famille des $[(t_n\partial_{t_n})^\alpha t_n^k e_i]$ pour $k = -k_0, \dots, k_0$ et $\alpha = 0, \dots, d-1$ engendre $V(\mathbf{e}, k_0)$ comme $\mathcal{D}_{E_D}$-module.

Montrons enfin que les $[(t_n\partial_{t_n})^\alpha t_n^k e_i]$ satisfont à une relation du type (7.2.2). On commence par écrire

$$\partial_{y_i} e_j = \sum_{u=1}^{m} f_{iju}(t_1, \dots, t_n, y_1, \dots, y_l)e_u$$

7. Par souci de légèreté, on note ici de façon abusive e_j pour l'image de e_j par $M \longrightarrow M[t_n^{-1}]$, flèche qui n'a pas de raison d'être injective en général.

avec
$$f_{iju} = \sum_{\nu} P_{\nu}(y_1, \dots, y_l) t_1^{\nu_1} \cdots t_n^{\nu_n}$$
comme dans (7.2.2), c'est-à-dire tel que $\deg_y P \leq \nu_1 + \cdots + \nu_n$. On a
$$\begin{aligned}\partial_{y_i}[(t_n\partial_{t_n})^{\alpha} t_n^k e_i] &= [(t_n\partial_{t_n})^{\alpha} t_n^k \partial_{y_a} e_i] \\ &= \sum_{u=1}^{m} [(t_n\partial_{t_n})^{\alpha} t_n^k f_{iju}(t_1, \dots, t_n, y_1, \dots, y_l) e_u]\end{aligned}$$
Le point est que
$$t_n\partial_{t_n}(P_{\nu}(y_1, \dots, y_l) t_1^{\nu_1} \cdots t_n^{\nu_n}) = \nu_n P_{\nu}(y_1, \dots, y_l) t_1^{\nu_1} \cdots t_n^{\nu_n} + P_{\nu}(y_1, \dots, y_l) t_1^{\nu_1} \cdots t_n^{\nu_n} t_n \partial_{t_n},$$
de sorte que les monômes $Q_{\nu}(y_1, \dots, y_l) t_1^{\nu_1} \cdots t_n^{\nu_n}$ produits par application de $(t_n\partial_{t_n})^{\alpha}$ à f_{iju} vérifient encore que $\deg_y Q \leq \nu_1 + \cdots + \nu_n$. Le lemme 9.3.1 s'en déduit. □

Corollaire 9.3.4. *Tout sous-module N d'un $\mathcal{D}_E$-module holonome M vérifiant la propriété $L(O)$ est $\mathcal{H}^0$-linéaire au-dessus de O.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n. Si $n = 0$, alors d'après 7.2.3, le module M est linéaire. Par (7.1.5), on en déduit que le module N est linéaire.

Supposons donc que $n > 0$. On dispose d'après 9.3.1 d'un hyperplan de coordonnée $i_{D,X} : D \hookrightarrow X$ tel que $\mathrm{Gr}_{-1}(N)$ est inclus dans un module vérifiant $L(O)$. Par hypothèse de récurrence, on en déduit que $\mathrm{Gr}_{-1}(N)$ est linéaire au-dessus de O.

Or on sait par [33, 4.4-4] que $\mathcal{H}^0 i_{D,X}^+ N$ est un quotient de $\mathrm{Gr}_{-1}(N)$. Par exactitude à droite du foncteur image inverse, on en déduit que $\mathcal{H}^0 i_{O,D}^+ \mathcal{H}^0 i_{D,X}^+ N$ est un quotient de $\mathcal{H}^0 i_{O,D}^+ \mathrm{Gr}_{-1}(N)$ qui est linéaire par hypothèse de récurrence. D'après 7.1.5, le module $\mathcal{H}^0 i_{O,D}^+ \mathcal{H}^0 i_{D,X}^+ N \simeq \mathcal{H}^0 i_{O,D}^+ \circ i_{D,X}^+ N \simeq \mathcal{H}^0 i_{O,X}^+ N$ est donc linéaire.

□

9.4 Cycles proches et propriété $P(x)$

On se place dans les conditions locales de 9.3.

Définition 9.4.1. On dira que M vérifie la *propriété* $P(O)$ si M admet une famille génératrice $\mathbf{e} := (e_1, \dots, e_m)$ vérifiant
$$\partial_{y_i} e_j = \sum_{u=1}^{m} f_{iju}(t_1, \dots, t_n, y_1, \dots, y_l) e_u \tag{9.4.2}$$
où les f_{iju} sont des éléments de $\mathbb{C}[\![t_1, \dots, t_n]\!][y_1, \dots, y_l]$.

Bien sûr, si M vérifie la propriété $L(O)$, alors M vérifie aussi la propriété $P(O)$. On a comme en 9.3 le

Lemme 9.4.3. *Soit N un sous-module d'un module M vérifiant $P(O)$. Alors pour tout nombre complexe a, le gradué $\mathrm{Gr}_a(N)$ est inclus dans un module vérifiant $P(O)$.*

Démonstration. Par exactitude de Gr_a, on peut supposer $N = M$. Soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille génératrice locale de $\mathcal{M}$ donnée par 9.4.1. On définit ici une bonne V-filtration

$$V_k(\mathbf{e}) := V_k(\mathcal{D}_E)\mathbf{e}$$

D'après 9.2.3, on peut trouver un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ pour lequel on a les inclusions

$$V_{-k_0}(\mathbf{e}) \subset V_{<a}(M) \subset V_a(M) \subset V_{k_0}(\mathbf{e})$$

d'où une surjection canonique de $V_0(\mathcal{D}_E)$-modules

$$V_{k_0}(\mathbf{e})/V_{-k_0}(\mathbf{e}) \twoheadrightarrow V_{k_0}(\mathbf{e})/V_{<a}(M)$$

et une injection canonique de $V_0(\mathcal{D}_E)$-modules

$$\mathrm{Gr}_a(M) \hookrightarrow V_{k_0}(\mathbf{e})/V_{<a}(M)$$

et on obtient 9.4.3 en considérant comme en 9.3.1 les $\partial_t^i(t\partial_t)^j e_k$ et les $t^{i'}(t\partial_t)^j e_k$ pour $i, i' = 0, \ldots, k_0$ et j assez grand. □

Corollaire 9.4.4. *Tout sous-module N d'un module vérifiant la propriété $P(O)$ est ponctuellement lisse au-dessus de O.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n, le cas où $n = 0$ résultant de ce qu'un $\mathcal{D}$-module sur l'espace affine qui est de type fini sur $\mathbb{C}[y_1, \ldots, y_l]$ est une connexion algébrique. Supposons donc que $n > 0$ et soit $a \in \mathbb{C}$. Avec les notations de 9.3, on dispose d'après 9.4.3 d'un hyperplan de coordonnée $i_{D,X} : D \hookrightarrow X$ qui est tel que $\mathrm{Gr}_a(N)$ est inclus dans un module vérifiant $P(O)$. Par hypothèse de récurrence, $\mathrm{Gr}_a(N)$ est ponctuellement lisse au-dessus de O.

Or on sait par [33, 4.4-4] que le complexe $i_{D,X}^{+}N$ est quasi-isomorphe au complexe

$$\mathrm{Gr}_0(N) \xrightarrow{t_n} \mathrm{Gr}_{-1}(N)$$

On en déduit un isomorphisme de la catégorie dérivée de $\mathcal{D}_{E_O}$-mod

$$i_{O,X}^{+}(N) \simeq i_{O,D}^{+}(\mathrm{Gr}_0(N) \longrightarrow \mathrm{Gr}_{-1}(N))$$

et on conclut à l'aide de la suite spectrale d'hypercohomologie

$$E_1^{pq} = \mathcal{H}^p i_{O,D}^{+}(\mathrm{Gr}_q(N)) \Longrightarrow \mathcal{H}^{p+q} i_{O,X}^{+}(N) \quad p \leq 0 \quad \text{et} \quad q = 0, -1$$

□

10 Preuve du théorème principal

10.1 Prologue géométrique

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées de l'espace affine $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ avec D défini par $x_n = 0$. On pose $U = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n \setminus D$. Dans cette situation, on a

$$\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n * \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[x_i, t_i, u^{\pm}]/(x_n - ut_n)$$

et

$$(\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} * \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}})^{(a)} = \operatorname{Spec} \frac{\mathbb{C}[x_i, t_i, u^{\pm}, y_1, \ldots, y_n]}{(x_n - ut_n, u - 1 - t_n^a y_n, (x_k - t_k - t_n^a y_k)_{k<n})} \tag{10.1.1}$$

Par conséquent, le choix des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ induit une identification

$$(\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} * \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}})^{(a)} \simeq \operatorname{Spec} \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_n, y_1, \ldots, y_n]$$

Ce choix étant fait, les coordonnées verticales de T_a sont $y_1, \ldots, y_n$, et la projection $(\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} * \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}})^{(a)} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ du diagramme (8.1.2) est explicitement donnée par $(t, y) \longrightarrow t$. Quant à la première projection $U \times U \longrightarrow U$, elle est donnée dans ce point de vue par la formule

$$(t_1, \ldots, t_n, y_1, \ldots, y_n) \longrightarrow (t_1 + y_1 t_n^a, \ldots, t_{n-1} + y_{n-1} t_n^a, t_n + y_n t_n^{a+1}) \tag{10.1.2}$$

10.2 $H_a(\mathcal{M})$ vérifie la propriété $L(x)$

On rappelle que ρ désigne le rang de Poincaré-Katz générique de $\mathcal{M}$. Posons $\delta_{in} = 0$ si $i \neq n$ et $\delta_{in} = 1$ sinon. On a le

Lemme 10.2.1. *Si $\mathcal{M}$ est localement engendré comme $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}$-module par un sous-faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}$-cohérent stable par les $x_i^{\rho+\delta_{in}} \partial_{x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, alors $H_a(\mathcal{M})$ vérifie la propriété $L(x)$ pour tout $x \in D$.*

Démonstration. Quitte à translater les coordonnées, on peut supposer que x est l'origine O de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$. Notons $\mathcal{R}$ un sous-faisceau $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}$-cohérent de $\mathcal{M}$ comme dans 10.2.1. On a

$$H_a(\mathcal{M}) \simeq p_1^+ \mathcal{M} \otimes (p_2^+ \mathcal{M})^* \simeq p_1^+ \mathcal{M} \otimes p_2^+ (\mathcal{M}^*)$$

Soit m (resp. e) une section de $\mathcal{R}$ (resp. de $\mathcal{M}^*$) définie au-dessus d'un voisinage de O. On note $p_1^+ m$ et $p_2^+ e$ les sections induites sur $p_1^+ \mathcal{M}$ et $p_2^+(\mathcal{M}^*)$ respectivement. Par construction de la fibration d'Abbes et Saito, $\partial_{y_i} p_2^+ e = 0$. D'après (10.1.2), il vient

$$\begin{aligned}
\partial_{y_i}(p_1^+ m \otimes p_2^+ e) &= (\partial_{y_i} p_1^+ m) \otimes p_2^+ e \\
&= \frac{\partial}{\partial y_i}(t_i + y_i t_n^{a+\delta_{in}}) p_1^+ \partial_{x_i} m \otimes p_2^+ e \\
&= t_n^{a+\delta_{in}} p_1^+ \partial_{x_i} m \otimes p_2^+ e \\
&= \frac{(t_n + y_n t_n^{a+1})^{a+\delta_{in}}}{(1 + y_n t_n^a)^{a+\delta_{in}}} p_1^+ \partial_{x_i} m \otimes p_2^+ e \\
&= \frac{1}{(1 + y_n t_n^a)^{a+\delta_{in}}} p_1^+ x_n^{a+\delta_{in}} \partial_{x_i} m \otimes p_2^+ e
\end{aligned}$$

avec δ_{in} valant 1 si $i = n$ et 0 sinon.

Soit $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ une famille $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}$-génératrice locale de $\mathcal{R}$ au-dessus d'un voisinage U de O, et $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_l)$ une trivialisation locale de $\mathcal{M}^*$ au-dessus du même voisinage, quitte à rétrécir U. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $H_a(\mathcal{M})_k$ le sous-module de $H_a(\mathcal{M})$ défini au-dessus de U engendré par les $p_1^+ m_i \otimes (p_2^+ e_j)/t_n^k$. La suite des $H_a(\mathcal{M})_k$ est croissante. Montrons qu'elle est aussi exhaustive.

On sait déjà que $\mathcal{N} := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} H_a(\mathcal{M})_k$ contient les $p_1^+ m_i \otimes p_2^+(\mathcal{M}^*)$. Si $\partial \in \mathcal{D}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}$ est d'ordre au plus 1, on a pour tout $i = 1, \ldots, k$ et tout $e \in \mathcal{M}^*$ la relation

$$\begin{aligned} p_1^+ \partial m_i \otimes p_2^+ e &= ((p_1^+\partial) p_1^+ m_i) \otimes p_2^+ e \\ &= (p_1^+\partial)(p_1^+ m_i \otimes p_2^+ e) - p_1^+ m_i \otimes (p_1^+\partial) p_2^+ e \\ &\in \mathcal{N} \end{aligned}$$

En raisonnant par récurrence sur l'ordre des opérateurs différentiels de $\mathcal{D}_U$, on montre que

$$p_1^+ P m_i \otimes p_2^+(\mathcal{M}^*) \subset \mathcal{N}$$

pour tout $P \in \mathcal{D}_U$. Puisque les m_i engendrent $\mathcal{M}$ localement, il vient

$$p_1^+ \mathcal{M} \otimes p_2^+(\mathcal{M}^*) \subset \mathcal{N}$$

et le caractère exhaustif de la suite des $H_a(\mathcal{M})_k$ est prouvé.

Par argument de noethérianité, on a $H_a(\mathcal{M}) = H_a(\mathcal{M})_{k_0}$ pour un entier k_0 assez grand, de sorte que la famille des $p_1^+ m_i \otimes (p_2^+ e_j)/t_n^{k_0}$ engendre $H_a(\mathcal{M})$ localement au-dessus de U.

De la stabilité du faisceau $\mathcal{R}$ par $x_n^{\rho+\delta_{ln}}\partial_{x_l}$ et de l'inégalité $\rho \leq a$, on déduit la stabilité de $\mathcal{R}$ par $x_n^{a+\delta_{ln}}\partial_{x_l}$, d'où des relations

$$x_n^{a+\delta_{ln}}\partial_{x_l} m_i = f_{li1}(x) m_1 + \cdots + f_{lik}(x) m_k$$

pour $l = 1, \ldots, n$ et $i = 1, \ldots, k$, avec $f_{liu} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}, O}$. D'après le calcul qui précède et (10.1.2), on a

$$\begin{aligned} \partial_{y_l}(p_1^+ m_i \otimes p_2^+ e_j)/t_n^{k_0} &= \frac{1}{(1+y_n t_n^a)^{a+\delta_{in}}} p_1^+ x_n^{a+\delta_{ln}} \partial_{x_l} m_i \otimes (p_2^+ e_j)/t_n^{k_0} \\ &= \frac{1}{(1+y_n t_n^a)^{a+\delta_{ln}}} \sum_{u=1}^{k} p_1^+ f_{liu}(x_1, \ldots, x_n) m_u \otimes (p_2^+ e_j)/t_n^{k_0} \\ &= \sum_{u=1}^{k} \frac{f_{liu}(t_1 + y_1 t_n^a, \ldots, t_n + y_n t_n^{a+1})}{(1+y_n t_n^a)^{a+\delta_{ln}}} (p_1^+ m_u \otimes (p_2^+ e_j)/t_n^{k_0}) \end{aligned}$$

En développant les fonctions $f_{liu}(t_1 + y_1 t_n^a, \ldots, t_n + y_n t_n^{a+1})/(1+y_n t_n^a)^{a+\delta_{ln}}$ suivant les puissances des t_i, le fait que a soit plus grand que 1 assure qu'elles satisfont à la condition de (7.2.2). La restriction de la famille des $(p_1^+ m_i \otimes p_2^+ e_j)/t_n^{k_0}$ au-dessus de $\operatorname{Spec} \widehat{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}, O}}$ fait donc de $H_a(\mathcal{M})$ un module satisfaisant la propriété $L(x)$, et le lemme 10.2.1 est prouvé. $\square$

Pour pouvoir conclure la preuve de 8.1.3, il reste donc à exhiber un sous-faisceau de $\mathcal{M}$ comme dans 10.2.1. C'est dû au fait général suivant :

Lemme 10.2.2. *Soit $\mathcal{M}$ une connexion sur $X = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ méromorphe le long du diviseur D donné par $x_n = 0$. On suppose que le rang de Katz ρ de $\mathcal{M}$ est un entier. Alors $\mathcal{M}$ est engendré comme $\mathcal{D}_X$-module par un sous-faisceau $\mathcal{O}_X$-cohérent stable par les $x_i^{\rho+\delta_{in}}\partial_{x_i}$, $i = 1, \ldots, n$.*

Démonstration. Considérons un réseau de Malgrange $\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ 12.1.3 pour une section τ de $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$. C'est un sous-faisceau $\mathcal{O}_X$-cohérent de $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X[x_n^{-1}]\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$. Par argument de noethérianité, le $\mathcal{D}_X$-module engendré par $x_n^{-k}\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$ est égal à $\mathcal{M}$ pour un entier k_0 assez grand. Montrons que le faisceau cohérent $x_n^{-k_0}\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$ convient.

Du fait des égalités

$$x_i^\rho \partial_{x_i}(x_n^{-k_0} m) = x_n^{-k_0}(x_i^\rho \partial_{x_i} m)$$

et

$$x_n^{\rho+1}\partial_{x_n}(x_n^{-k_0} m) = -k_0 x_n^\rho (x_n^{-k_0} m) + x_n^{-k_0}(x_n^{\rho+1}\partial_{x_n} m)$$

valables pour $i < n$ et $m \in \mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$, il suffit de montrer que $\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$ est stable par $x_n^{\rho+1}\partial_{x_n}$ et les $x_i^\rho \partial_{x_i}, i < n$.

D'après la relation (12.1.4), on a

$$\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \cap \mathcal{R}_\tau(\mathcal{M}^{\mathrm{an}})$$

où l'égalité a lieu dans $\mathcal{M}^{\mathrm{an}}$. En particulier, pour vérifier que $\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$ est stable par $x_n^{\rho+1}\partial_{x_n}$ et les $x_i^\rho \partial_{x_i}, i < n$, il suffit de vérifier que $\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M}^{\mathrm{an}})$ est stable par les mêmes opérateurs. Du fait de

$$\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M}^{\mathrm{an}}) := \mathcal{M}^{\mathrm{an}} \cap \mathcal{R}_\tau(\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}})$$

il suffit par le même argument de démontrer que $\mathcal{R}_\tau(\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}})$ est stable par $x_n^{\rho+1}\partial_{x_n}$ et les $x_i^\rho \partial_{x_i}, i < n$.

Soit U un ouvert donné par le théorème 12.1.2 appliqué à $\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}}$. Par construction de $\mathcal{R}_\tau(\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}})$, une section de $\mathcal{M}^{\mathrm{an}}$ est une section de $\mathcal{R}_\tau(\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}})$ dès que sa restriction à U l'est. On en déduit que pour prouver la stabilité de $\mathcal{R}_\tau(\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}})$ par $x_n^{\rho+1}\partial_{x_n}$ et les $x_i^\rho \partial_{x_i}, i < n$, il suffit de se placer au-dessus de U.

Pour faire apparaitre la décomposition de Levelt-Turrittin, on procède localement sur U à la ramification

$$f_p : (x_1, \dots, x_{n-1}, t) \longrightarrow (x_1, \dots, x_{n-1}, t^p)$$

On a localement

$$f_p^+ \widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{E}^{\phi_i} \otimes \mathcal{R}_{\phi_i} \tag{10.2.3}$$

où $\mathcal{E}^{\phi_i}$ désigne $(\widehat{\mathcal{O}_X}, d + d\phi_i)$ avec $\phi_i = \phi_i(x_1, \dots, x_{n-1}, t)$ polynôme de Laurent en la variable t à coefficients des fonctions analytiques en $(x_1, \dots, x_{n-1})$ et $\mathcal{R}_{\phi_i}$ une connexion méromorphe à singularité régulière le long de D. Par définition

$$\mathcal{R}_\tau(\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}}) = \widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}} \cap \mathcal{R}_{p,\tau}(\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}})$$

où l'intersection doit se comprendre dans $f_p^+\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}}$, et où $\mathcal{R}_{p,\tau}(\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}})$ désigne un réseau localement libre de $f_p^+\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}}$ induisant la décomposition (10.2.3).

Puisque ρ est la plus grande des pentes génériques de $\mathcal{M}$, l'ordre du pôle d'une fonction ϕ_i intervenant dans (10.2.3) est $\leq p\rho$. Ainsi par construction, le réseau $\mathcal{R}_{p,\tau}(\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}})$ a la propriété supplémentaire d'être laissé stable par $t^{p\rho}\partial_{x_i}, i = 0, \dots, n-1$ et $t^{p\rho+1}\partial_t$.

Pour une section m de $\mathcal{R}_\tau(\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}})$, on a donc

$$x_n^\rho \partial_{x_i} m = t^{p\rho}\partial_{x_i} m \in \mathcal{R}_{p,\tau}(\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}})$$

et du fait de $\partial_t = pt^{p-1}\partial_{x_n}$

$$x_n^{\rho+1}\partial_{x_n} m = t^{p\rho+1}\partial_t m/p \in \mathcal{R}_{p,\tau}(\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}})$$

□

Remarque 10.2.4. Dans le cas de la dimension 2, on peut montrer[8] que $\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$ est localement libre. Dans ce cas, le lemme 10.2.2 signifie que $\mathcal{M}$ admet localement une base dans laquelle la matrice de ∂_{x_n} est à pôle d'ordre au plus $\rho+1$, et la matrice des ∂_{x_i}, $i = 1,\dots,n$ est à pôles d'ordre au plus ρ.

Dans un contexte formel le long d'un trait avec une seule dérivation, André obtient dans [5, 3.3.2] ce même résultat par des méthodes algébriques.

11 Un exemple

Dans cette section, on reprend les notations de 8.1.3. L'objectif de cette partie est de calculer le support de $\mathfrak{F}\Psi_{t_n}H_a(\mathcal{M})$ dans le cas non tournant d'une somme de modules de rang 1 de rang de Poincaré-Katz égal à a.

Soient donc $\omega_1,\dots,\omega_m$ des formes différentielles sur $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ à pôles le long de $x_n = 0$ et vérifiant $d\omega_i + \omega_i \wedge \omega_i = 0$. On peut écrire

$$\omega_i = f_{i1}(x)\frac{dx_1}{x_n^a} + \cdots + f_{in}(x)\frac{dx_n}{x_n^{a+1}}$$

où les f_{ij} sont des polynômes avec l'hypothèse que les $f_{in}(x_1,\dots,x_{n-1},0), i = 1,\dots,n$ (resp. $f_{in}(x_1,\dots,x_{n-1},0) - f_{jn}(x_1,\dots,x_{n-1},0), i \neq j$) sont inversibles au voisinage de 0. On note comme d'habitude $\mathcal{E}^{\omega_i}$ la connexion de rang 1 associée à la forme ω_i et on pose

$$\mathcal{M} = \oplus_{i=1}^m \mathcal{E}^{\omega_i} \tag{11.0.5}$$

Il s'agit de démontrer la

Proposition 11.0.6. *Le support de $\mathfrak{F}\Psi_{t_n}H_a(\mathcal{M})$ est la réunion sur les formes ω_i de (11.0.5) des fermés donnés par les idéaux $(f_{i1}\circ i_{D,X} - y_1,\dots,f_{in}\circ i_{D,X} - y_n)$.*

Démonstration. On commence par traiter le cas où $\mathcal{M} := \mathcal{E}^\omega$ sans hypothèse d'inversibilité[9]. Pour $k < n$, on a en regardant modulo $t_n dt_k, t_n dy_k$ et dt_n les congruences

$$\begin{aligned}
&p_1^* f_k\frac{dx_k}{x_n^a} - p_2^* f_k\frac{dx_k}{x_n^a}\\
=&f_k(t_i + y_i t_n^{a+\delta_{in}})\frac{d(t_k + y_k t_n^a)}{(t_n + y_n t_n^{a+1})^a} - f_k(t)\frac{dt_k}{t_n^a}\\
\equiv&\Big(-af_k(t)y_n + y_1\frac{\partial f_k}{\partial t_1}(t) + \cdots + y_{n-1}\frac{\partial f_k}{\partial t_{n-1}}(t)\Big)dt_k + f_k(t_i + y_i t_n^{a+\delta_{in}})\frac{d(y_k t_n^a)}{(t_n + y_n t_n^{a+1})^a}\\
\equiv&\Big(-af_k(t)y_n + y_1\frac{\partial f_k}{\partial t_1}(t) + \cdots + y_{n-1}\frac{\partial f_k}{\partial t_{n-1}}(t)\Big)dt_k + f_k(t)t_n^{a-\rho}dy_k + ay_k f_k(t)\frac{dt_n}{t_n}
\end{aligned}$$

8. Voir [37, 3.3.1].
9. C'est un cas particulier de ce qu'André appelle une situation *semi-stable*. Voir [5, 3.2.4]

Pour $k = n$, on a

$$p_1^* f_n \frac{dx_n}{x_n^a} - p_2^* f_n \frac{dx_n}{x_n^a} \equiv f_n(t) dy_n + g(t,y) \frac{dt_n}{t_n}$$

avec $g(t,y)$ une fonction sans pôle qu'on ne précisera pas. On en déduit que $H_a(\mathcal{E}^\omega)$ est à singularité régulière le long de D. D'après 9.1.3, $\Psi_{t_n} H_a(\mathcal{E}^\omega)$ est une connexion algébrique de rang 1. Soit s la trivialisation de $H_a(\mathcal{E}^\omega)$ dans laquelle les congruences précédentes valent. Si $k \in \mathbb{Z}$ est tel que $t_n^k s$ définit un élément non nul de $V_{<0}(H_a(\mathcal{E}^\omega))$, alors la classe de $t_n^k s$ dans $\Psi_{t_n} H_a(\mathcal{E}^\omega)$ est une trivialisation locale de $\Psi_{t_n} H_a(\mathcal{E}^\omega)$. Les équations précédentes prises en $a = \rho$ montrent que l'action de $\partial_{t_k}, k < n$ se fait par la multiplication par

$$-a f_k \circ i_{D,X}(t) y_n + y_1 \frac{\partial f_k}{\partial t_1} \circ i_{D,X}(t) + \cdots + y_{n-1} \frac{\partial f_k}{\partial t_{n-1}} \circ i_{D,X}(t) \tag{11.0.7}$$

tandis que l'action de ∂_{y_k} se fait via la multiplication par $f_k \circ i_{D,X}(t)$.

Pour terminer la preuve de 11.0.6, supposons que 0 est non tournant pour $\mathcal{M} = \mathcal{E}^{\omega_1} \oplus \mathcal{E}^{\omega_2}$, c'est-à-dire que ω_1 et ω_2 sont de la forme

$$\omega_i = f_{i1}(x) \frac{dx_1}{x_n^a} + \cdots + f_{in}(x) \frac{dx_n}{x_n^{a+1}}, \quad i = 1,2 \tag{11.0.8}$$

avec $f_{in}(0) \neq 0$ et $f_{1n}(0) - f_{2n}(0) \neq 0$. Le calcul des cycles proches des termes diagonaux de $H_a(\mathcal{M})$ est acquis du fait du calcul précédent de $\Psi_{t_n} H_a(\mathcal{E}^{\omega_i})$. Il suffit donc de montrer la nullité des cycles proches de $\mathcal{E}^{p_1^*\omega_1 - p_2^*\omega_2}$.

Pour cela on observe que la partie la plus polaire de l'action de ∂_{t_n} est produite par le terme

$$f_{1n}(t_i + y_i t_n^{a+\delta_{in}}) \frac{d(t_n + y_n t_n^{a+1})}{(t_n + y_n t_n^{a+1})^{a+1}} - f_{2n}(t) \frac{dt_n}{t_n^{a+1}}$$

Elle est de la forme $(f_{1n}(t) - f_{2n}(t) + t_n \cdots)/t_n^{a+1}$. Il suffit donc d'invoquer une version en dimension quelconque du lemme d'annulation 3.5.1, qui se prouve immédiatement en remplaçant la référence à [46, 2.1.1] par [26, 4.1.4]. $\square$

12 Appendice

12.1 Réseaux de Malgrange

On rappelle ici le nécessaire concernant les réseaux de Malgrange [37]. Pour cela, on se donne une variété analytique complexe lisse X, une hypersurface Z de X ainsi qu'une connexion méromorphe formelle $\mathcal{M}$ le long de Z, à savoir un $\widehat{\mathcal{O}_X}(*Z)$-module [10] localement libre de rang fini muni d'une connexion méromorphe à pôles le long de Z.

Pour $\phi \in \widehat{\mathcal{O}_X}$, on note comme d'habitude $\mathcal{E}^\phi$ la connexion méromorphe formelle $(\widehat{\mathcal{O}_X}, d + d\phi)$. On commence par la

Définition 12.1.1. On dit que $\mathcal{M}$ admet une *décomposition admissible* au voisinage d'un point de lissité x de Z si au-dessus d'un ouvert contenant x, la connexion $\mathcal{M}$ se décompose en une somme directe finie de connexions méromorphes formelles du type $\mathcal{E}^\phi \otimes \mathcal{R}_\phi$ avec $\phi \in \widehat{\mathcal{O}_X}(*Z)$ et $\mathcal{R}_\phi$ à singularité régulière le long de Z.

10. Dans cette notation, $\widehat{\mathcal{O}_X}$ désigne la formalisation de $\mathcal{O}_X$ le long de l'idéal défini par Z.

Dans une décomposition admissible, on peut remplacer à loisir un facteur ϕ par $\phi + f$ avec $f \in \widehat{\mathcal{O}_X}$. Quitte à regrouper certains termes, on peut donc toujours choisir les contributions $\mathcal{E}^{\phi_i} \otimes \mathcal{R}_{\phi_i}$, $i = 1, \ldots, n$ de telle sorte que $\phi_i - \phi_j$ soit non nulle et admette un pôle le long de Z pour $i \neq j$. Ceci étant fait, la décomposition 12.1.1 est unique. C'est une telle décomposition qui sera considérée dans toute la suite.

Le premier pas vers la construction des réseaux de Malgrange est le

Théorème 12.1.2. *Il existe un ouvert U du lieu de lissité de Z avec $S := Z \setminus U$ fermé*[11] *de codimension 1 de Z et tel que pour tout $x \in U$, on dispose d'un système de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$ dans lequel Z est défini par $x_n = 0$ et d'un entier p tel que si f_p désigne l'application $(x_1, \ldots, x_{n-1}, t) \longrightarrow (x_1, \ldots, x_{n-1}, t^p)$, alors la connexion $f_p^+\mathcal{M}$ admet une décomposition admissible au sens de 12.1.1.*

Dans la suite, on garde les notations de 12.1.2. Soit τ une section de $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Pour un point $x \in U$, soit

$$f_p^+\mathcal{M} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{E}^{\phi_i} \otimes \mathcal{R}_{\phi_i}$$

la décomposition admissible de $\mathcal{M}$ au-dessus d'un voisinage de x inclus dans U. Notons $\mathcal{R}_{p,\tau}$ le réseau de $f_p^+\mathcal{M}$ somme directe des réseaux de Deligne [9] associés à τ des connexions régulières $\mathcal{R}_{\phi_i}$. Posons $\mathcal{R}_\tau := \mathcal{R}_{p,\tau} \cap \mathcal{M}$. On vérifie alors que $\mathcal{R}_\tau$ ne dépend ni de p ni du choix de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$, et on obtient ainsi un réseau bien défini de $\mathcal{M}$ au-dessus de U.

Suivant Malgrange[12], notons $\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$ le sous-faisceau en $\widehat{\mathcal{O}_X}$-module de $\mathcal{M}$ des sections de $\mathcal{M}$ dont la restriction en dehors de S défini une section de $\mathcal{R}_\tau$. Le théorème fondamental de Malgrange [37, 3.3.1] est alors

Théorème 12.1.3. *Le faisceau $\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$ est cohérent, et on a $\mathcal{M} = \widehat{\mathcal{O}_X}(*Z)\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$.*

On peut transporter le travail de Malgrange dans le contexte algébrique de la façon suivante : soit X une variété algébrique lisse, et soit $\mathcal{M}$ une connexion méromorphe sur X à pôles le long d'une hypersurface Z de X. On se donne une compactification lisse $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ de X tel que $D = \overline{X} \setminus X$ soit un diviseur à croisements normaux, et on fixe une section τ de $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Notons $\overline{Z}$ l'adhérence de Z dans $\overline{X}$.

Alors, $(j_*\mathcal{M})^{\mathrm{an}}$ est une connexion analytique sur $\overline{X}$ méromorphe le long de $D \cup \overline{Z}$. Posons

$$\widehat{(j_*\mathcal{M})^{\mathrm{an}}} := \widehat{\mathcal{O}_{\overline{X}}}(*(D \cup \overline{Z})) \otimes (j_*\mathcal{M})^{\mathrm{an}}$$

D'après [37, 1.2], le sous-faisceau de $(j_*\mathcal{M})^{\mathrm{an}}$ défini par

$$\mathcal{R}_\tau((j_*\mathcal{M})^{\mathrm{an}}) := (j_*\mathcal{M})^{\mathrm{an}} \cap \mathcal{R}_\tau(\widehat{(j_*\mathcal{M})^{\mathrm{an}}})$$

est cohérent et vérifie

$$\widehat{\mathcal{O}_{\overline{X}}}(*(D \cup \overline{Z})) \otimes \mathcal{R}_\tau((j_*\mathcal{M})^{\mathrm{an}}) = \mathcal{R}_\tau(\widehat{(j_*\mathcal{M})^{\mathrm{an}}})$$

et

$$(j_*\mathcal{M})^{\mathrm{an}} = \mathcal{O}_{\overline{X}}(*(D \cup \overline{Z}))\mathcal{R}_\tau((j_*\mathcal{M})^{\mathrm{an}})$$

11. Ceci signifie que tout point de S est inclus localement dans un fermé analytique de Z de codimension au moins 1.

12. Voir les 3 lignes qui suivent l'énoncé du théorème 3.3.1 de [37].

Par théorème GAGA de Serre, le sous-faisceau $\mathcal{R}_\tau((j_*\mathcal{M})^{\mathrm{an}})$ de $(j_*\mathcal{M})^{\mathrm{an}}$ est l'analytifié d'un sous-faisceau cohérent de $j_*\mathcal{M}$. On en déduit par restriction à X un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{M}$ noté $\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$ et dont $\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M}^{\mathrm{an}})$ est l'analytifié. Il est indépendant du choix de la compactification $\overline{X}$. Pour le voir il suffit d'observer la relation

$$\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \cap \mathcal{R}_\tau(\mathcal{M}^{\mathrm{an}}) \tag{12.1.4}$$

qui découle de la fidèle platitude des couples $(\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}},x})$ pour $x \in Z$ combinée au lemme général suivant

Lemme 12.1.5. *Soit $A \longrightarrow B$ un morphisme fidèlement plat, M un A-module, et N un sous-module de M. Alors on a $N = M \cap (B \otimes_A N)$, où l'intersection a lieu dans $B \otimes_A M$.*

Démonstration. Le fait que $M \cap (B \otimes_A N)$ a bien un sens découle du fait que par fidèle platitude, les morphismes $M \longrightarrow B \otimes_A M$ et $B \otimes_A N \longrightarrow B \otimes_A M$ sont des injections.

Le lemme 12.1.5 se déduit alors d'une chasse au digramme dans

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M/N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \otimes_A N \arrow[r] & B \otimes_A M \arrow[r] & B \otimes_A (M/N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes et les flèches verticales injectives. □

Comme conséquence de (12.1.4), on a $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X(*Z)\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$. Le faisceau $\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$ est appelé le *réseau*[13] *de Malgrange de $\mathcal{M}$ associé à τ.*

12.2 La transformation de Fourier commute à l'image inverse

Dans cet appendice, on se donne un fibré vectoriel E sur une variété algébrique lisse X, on note $E^\vee$ son dual et $\sigma_E : E \times_X E^\vee \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ l'accouplement canonique. On choisit une coordonnée t sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ et on définit la connexion algébrique $\mathcal{E} := (\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}}, d + dt)$. Soit enfin Y une variété lisse et $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme.

$$\begin{tikzcd}
 & E \times E^\vee \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
E & & E^\vee
\end{tikzcd}$$

On pose

$$\mathfrak{F}\mathcal{M} := p_{2+}(p_1^+(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{E\times E^\vee}} \sigma_E^+\mathcal{E})$$

On a les diagrammes cartésiens

$$\begin{tikzcd}
E_{|Y} \arrow[r, "f_E"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\
Y \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
E_{|Y} \times E^\vee_{|Y} \arrow[r, "f_E \times f_E^\vee"] \arrow[d, "p_{2|Y}"] & E \times E^\vee \arrow[d, "p_2"] \\
E^\vee_{|Y} \arrow[r, "f_E^\vee"] & E^\vee
\end{tikzcd}$$

13. On prendra garde que la terminologie de réseau est trompeuse car on ne sait pas a priori si $\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$ est localement libre. Il l'est en dimension 2 par propriété de réflexivité de $\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M}^{\mathrm{an}})$. Voir la remarque 3.3.2 de [37].

On va montrer que

Proposition 12.2.1. *Pour tout module cohérent $\mathcal{M}$ sur E, on a un isomorphisme canonique*

$$f_E^{\vee+}\mathfrak{F}\mathcal{M} \simeq \mathfrak{F}f_E^{\vee+}\mathcal{M}$$

Démonstration. On a la chaîne d'isomorphismes

$$\begin{aligned}
f_E^{\vee+}\mathfrak{F}\mathcal{M} &= f_E^{\vee+}p_{2+}(p_1^+(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{E\times E^\vee}} \sigma_E^+\mathcal{E}) && (12.2.2)\\
&\simeq p_{2|Y+}(f_E \times f_E^\vee)^+(p_1^+(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{E\times E^\vee}} \sigma_E^+\mathcal{E}) && (12.2.3)\\
&\simeq p_{2|Y+}((f_E \times f_E^\vee)^+p_1^+(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{E\times E^\vee}} (f_E \times f_E^\vee)^+\sigma_E^+\mathcal{E}) && (12.2.4)\\
&\simeq p_{2|Y+}(p_{1|Y}^+(f_E^+\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{E\times E^\vee}} (f_E \times \sigma_{E_{|Y}}^+\mathcal{E})) && (12.2.5)\\
&= \mathfrak{F}f_E^{\vee+}\mathcal{M} && (12.2.6)
\end{aligned}$$

(12.2.3) vaut par théorème de changement de base pour les $\mathcal{D}$-modules [16, 1.7.3].

(12.2.4) est l'objet [34, 4.1] où l'on prend $M = p_1^+(\mathcal{M})$ et $N = \sigma_E^+\mathcal{E}$ qui est une connexion algébrique (on a donc en particulier pas besoin de dériver le produit tensoriel comme c'est fait dans [34, 4.1]).

(12.2.5) est immédiat.

□