Modélisation fine des transferts tridimensionnels

Le modèle d'enveloppe de bâtiment est régi par l'ensemble des équations présentées dans le chapitre 1. Dans le cadre de cette thèse, il sera implémenté en 3D et appliqué aux cas de pièces parallélépipédiques munies d'une fenêtre.

Dans cette optique, les murs du local ont été maillés en surface et selon leur épaisseur tandis qu'un seul nœud d'air est considéré. Le comportement thermique dynamique de l'enveloppe du bâtiment est alors modélisé selon les fonctions principales calculant les différents flux régissant les échanges thermiques à l'intérieur des parois et entre les surfaces des parois et l'environnement extérieur et intérieur de la pièce (Fig. II.5).

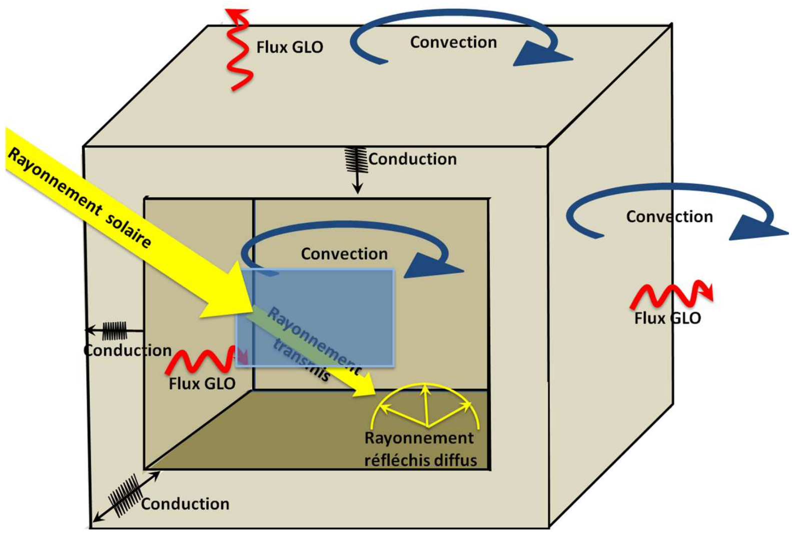


Figure II.5 – Schéma représentant les flux d'énergie dans l'enveloppe d'une cellule

On considère ainsi :

- la conduction tridimensionnelle en volume fini au sein des matériaux de l'enveloppe du bâtiment ;

- les échanges radiatifs de courtes et grandes longueurs d'ondes (notées respectivement CLO et GLO) déterminant la répartition du rayonnement solaire ;
- la convection, de manière simplifiée à partir de corrélations établies expérimentalement ;

Enfin, un bilan enthalpique de la masse d'air du volume intérieur du bâtiment permet de calculer la température d'air intérieur. S'il est considéré isotherme dans ce travail de thèse, cette hypothèse sera discutée dans les conclusions. L'éventuel renouvellement d'air est traité comme un débit d'air sur un intervalle de temps donné.

Certaines méthodes numériques utilisées dans le cadre de l'implémentation de ce modèle sont présentées dans ce chapitre. Il s'agira ici dans un premier temps de présenter le logiciel de calcul de transfert de chaleur, HEAT 3D utilisé pour le maillage 3D et la détermination des capacités et conductances des volumes de contrôle. Ensuite, les méthodes de calcul de la conduction en 3D seront développées, insistant en particulier sur le traitement des interfaces parois/air. Par ailleurs, les modes de calcul des échanges radiatifs CLO et GLO, à l'intérieur de la cellule en particulier, seront introduits. La méthode des radiosités sera alors montrée, tandis que les calculs des facteurs de forme seront développés. Enfin, la structure du programme informatique et la méthode d'intégration numérique utilisée pour la résolution des équations différentielles seront présentées.

2.1 Maillage tridimensionnel

HEAT3 (Blomberg, 1996) est un logiciel de calculs tridimensionnels de transfert de chaleur en régimes dynamique et stationnaire. Il est doté d'une bibliothèque référençant les caractéristiques thermiques de nombreux matériaux, d'un mailleur respectant les coordonnées cartésiennes ou cylindriques et d'un solveur. S'il est possible d'appliquer à la géométrie différentes conditions aux limites homogènes par face, le logiciel n'est pas fait pour lui appliquer des conditions aux limites hétérogènes. C'est pourquoi cet outil ne sera utilisé, dans le cadre de cette thèse, que comme mailleur et pour déterminer les capacités et conductances des volumes de contrôle résultant du maillage généré.

Le mailleur de Heat3 laisse beaucoup de liberté quant-à la finesse des mailles dans les trois directions et permet de générer un maillage progressif : les tailles de mailles peuvent être variables au sein d'une même couche de matériaux. Cette dernière option sera utile pour raffiner le maillage lorsqu'on s'approchera des surfaces interne et externe des parois, dans l'optique d'explorer l'effet du maillage dans la prise en compte des sollicitations définies comme des conditions aux limites.

Une fois le maillage réalisé, l'équation de la chaleur peut être implémenté et ses conditions au limites calculées sur la base des dimensions et positionnement des mailles. Les méthodes numériques utilisées sont développées dans les sections suivantes.

2.2 Traitement tridimensionnel de la conduction

Le maillage de la cellule est obtenu grâce à Heat 3 (Blomberg, 1996) qui fourni par la même occasion les conductances et capacités de chaque volume de contrôle. L'équation de la chaleur II.1 peut alors être développée en trois dimensions selon les trois axes x, y et z du repère cartésien défini, aboutissant à :

$$\begin{aligned}\rho.C.V.\frac{\partial T}{\partial t} = & \left(\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx/2} - \lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x-dx/2}\right)dydz+ \\ & \left(\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y+dy/2} - \lambda\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y-dy/2}\right)dxdz+ \\ & \left(\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z+dz/2} - \lambda\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z-dz/2}\right)dxdy\end{aligned} \tag{II.33}$$

Ici, $V = dxdydz$ désigne les volumes des mailles parallélépipédiques considérées et nous considérons qu'il n'existe dans le mur aucune source de chaleur : $\forall(x, y, z), Q(x, y, z) = 0.$.

Les conditions aux limites s'appliquent aux mailles dont au moins une des facettes est en contact avec l'extérieur. L'équation II.2 est alors appliquée, considérant les flux conductifs φ_{cond}, les flux surfaciques convectifs φ_{conv} et radiatifs φ_{clo} et φ_{glo}.

Numériquement, suivant une discrétisation spatiale et temporelle donnée, on distingue le cas où la maille (i, j, k) est à l'intérieur du mur, sans contact avec son environnement extérieur du cas où elle est en contact avec l'extérieur.

1. Dans le premier cas, son comportement thermique est alors régi par la conduction seule :

$$\begin{aligned}\rho_{i,j,k}C_{i,j,k}V_{i,j,k}\frac{\Delta_t\left(T_{i,j,k}\right)}{\Delta t} = & K_{i-1/2,j,k}\left(T_{i-1,j,k} - T_{i,j,k}\right) + K_{i+1/2,j,k}\left(T_{i+1,j,k} - T_{i,j,k}\right) + \\ & K_{i,j-1/2,k}\left(T_{i,j-1,k} - T_{i,j,k}\right) + K_{i,j+1/2,k}\left(T_{i,j+1,k} - T_{i,j,k}\right) + \\ & K_{i,j,k-1/2}\left(T_{i,j,k-1} - T_{i,j,k}\right) + K_{i,j,k+1/2}\left(T_{i,j,k+1} - T_{i,j,k}\right)\end{aligned} \tag{II.34}$$

   $T_{i+1,j,k}$, $T_{i-1,j,k}$, $T_{i,j-1,k}$, $T_{i,j+1,k}$, $T_{i,j,k-1}$ et $T_{i,j,k+1}$ étant les températures des nœuds entourant la maille étudiée et définissant K les conductances aux interfaces entre la maille (i, j, k) et ses voisines. La conductance $K_{i+1/2,j,k}$ entre la maille (i, j, k) et la maille $(i + 1, j, k)$ par exemple, est alors calculée dans ce cas selon la relation :

$$K_{i+1/2,j,k} = \frac{\delta y_j \delta z_k}{\delta x_i/2\lambda_{i,j,k} + \delta x_{i+1}/2\lambda_{i+1,j,k} + R_{i+1/2,j,k}} \tag{II.35}$$

   $\lambda_{i,j,k}$ et $\lambda_{i+1,j,k}$ sont les conductivités thermiques des mailles (i, j, k) et $(i + 1, j, k)$, $R_{i+1/2,j,k}$ la résistance de son interface avec la maille $(i + 1, j, k)$ et δy_j, δz_k et δx_i désignent les dimensions de la maille dans les trois directions.

2. Dans le second cas où l'on considère une maille en surface de température $T_{surf,i,j,k}$, présentant donc une facette en contact avec l'extérieur, les conditions aux limites sont appliquées. Par exemple, consi-

dérant la maille dont la facette normale à l'axe x, on a alors

$$K_{i+1/2,j,k}\left(T_{i,j,k} - T_{surf,i,j,k}\right) + h_{i,j,k}\left(T_{air} - T_{surf,i,j,k}\right) + \varphi_{clo,i,j,k} + \varphi_{glo,i,j,k} = 0 \qquad (II.36)$$

Dans ce cas, seule la conduction dans la direction normale à la facette, entre la surface et le nœud de la maille, vers l'intérieur de la paroi, est considérée. Le flux convectif $\varphi_{conv,i,j,k} = h_{i,j,k}\left(T_{air} - T_{surf,i,j,k}\right)$, ainsi que les flux radiatifs $\varphi_{clo,i,j,k}$ et $\varphi_{glo,i,j,k}$ sont quant-à eux pris au niveau de l'interface de la maille. Les autres cas de facettes en contact avec l'environnement extérieur sont obtenus de la même façon, substituant selon le cas le flux conductif par le flux convectif.

Les conditions de conduction et de convection étant maintenant précisées, les méthodes de calcul des flux radiatifs agissant en tant que condition aux limites intérieures et extérieures seront détaillées dans la section à venir.

2.3 Calcul des flux radiatifs à l'intérieur de la cellule

2.3.1 Méthode des radiosités

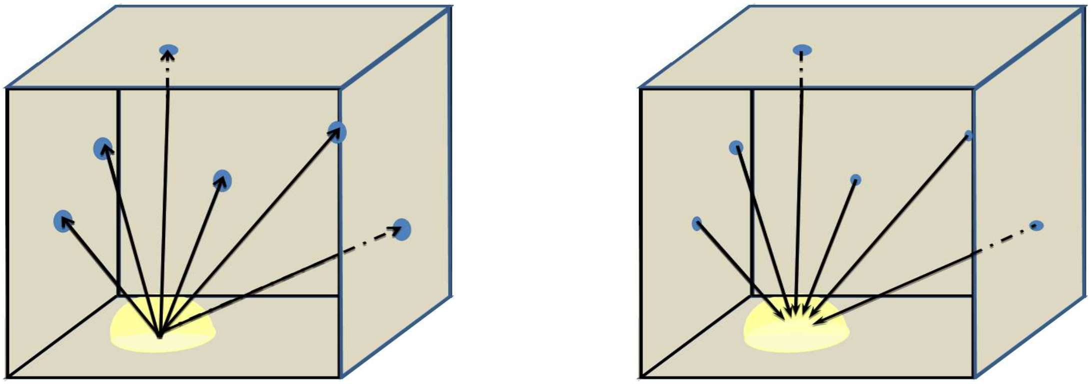
A l'intérieur du local, les flux CLO et GLO définis par la relation II.10 résultent de multiréflexions entre facettes des parois internes. Il existe dans la littérature de nombreuses méthodes de calcul de ces échanges radiatifs que l'on peut rassembler dans deux familles : les méthodes de suivi de rayons et la méthode des radiosités.

La première famille de méthodes consiste à suivre le parcours de rayon de la source ou d'un observateur à son extinction ou sa sortie de l'espace considéré. Le principe est de lancer des rayons dans des directions choisies aléatoirement et de modéliser leurs interactions avec les éléments de la pièce qu'ils rencontrent. De nouveaux lancers de rayons sont réalisés à chaque intersection avec un élément de la cellule. Cette méthode permet de tenir compte des réfractions, réflexions et autres absorptions des rayons lancés et est particulièrement adaptée aux réflexions spéculaires. Dans ce cas, les rayons qui touchent une surface dans une certaine direction sont renvoyés avec un angle symétrique par rapport à la normale à la surface touchée au point de contact. Au contraire, elle est inadaptée aux réflexions diffuses car lourde en calcul du fait que dans ce cas, à chaque intersection avec un élément, un grand nombre de rayons doit être lancé dans toutes les directions du demi-espace.

La méthode des radiosités ou méthode des exitances dans le domaine des Courtes Longueurs d'onde, quant-à elle, consiste à faire un bilan des flux radiatifs en tenant compte de toutes les réflexions diffuses impliquant tous les éléments émetteurs et récepteurs de chaque surface. Cette méthode est inadaptée aux réflexions spéculaires mais particulièrement bien adaptée aux réflexions diffuses de notre modèle.

La radiosité est une grandeur quantifiant le flux surfacique total émis par une facette r. Il s'agit de son émittance apparente, somme de son émittance et des flux qu'elle réfléchit vers les autres points visibles dans la demi-sphère environnante (Fig. II.6.a) :

$$J(r) = \int_{\Omega} \varepsilon(r,\gamma,\theta) . L_{\varepsilon}(r,\gamma,\theta) . d\omega + \rho(r,\gamma,\theta) L_{\rho}(r,\gamma,\theta) . d\omega \tag{II.37}$$



a) Radiosité d'un point i

b) Eclairements reçus par un point i des points environnants

FIGURE II.6 – Radiosité d'un point i et contribution de l'ensemble des points environnants

Considérant l'hypothèse selon laquelle les surfaces sont diffuses, l'émissivité et la réflectivité sont isotropes donc $\varepsilon(r,\gamma,\theta) = \varepsilon_r$ et $\rho(r,s,\omega) = \rho_r$. On a alors :

$$J(r) = \varepsilon_r \underbrace{\int_{\Omega} L_{\varepsilon}(r,\gamma,\theta)}_{M^0(r)} + \rho_r \underbrace{\int_{\Omega} L_{\rho}(r,\omega) . d\omega}_{\rho_r . E} \tag{II.38}$$

La luminance réfléchie par la facette r résulte de la luminance perçue par celle-ci qui n'est autre que l'ensemble des contributions des points s de l'espace visible du point de vue de r, noté E_v (Fig. II.6.b). Ces contributions sont les flux émis par ces points, exprimés par leur propre radiosité. On aboutit alors à l'équation de rendu introduite par Kajiya (1986) :

$$J(r) = \varepsilon_r . M^0(r) + \rho_r \int_{s \in E_v} FF_{s \to r} . J(s) . dE_v \tag{II.39}$$

$FF_{s \to r}$ étant un terme géométrique de visibilité émetteur/récepteur : le facteur de forme, dont le calcul sera détaillé dans la section 2.3.2.

La cellule étudiée peut être discrétisée suivant un ensemble de N facettes (Fig.II.7) et pour une facette i donnée de surface S_i, l'équation II.39 donne :

$$J_i = \varepsilon_i . M_i^0 + \rho_i \sum_{j=1}^{N} FF_{i,j} . J_j \tag{II.40}$$

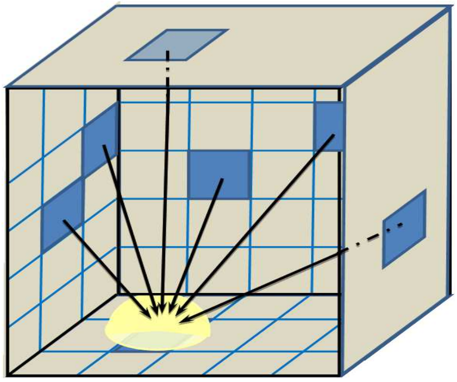


FIGURE II.7 – Radiosité d'une maille i et contribution de l'ensemble des mailles environnantes

ou matriciellement, pour l'ensemble des facettes intérieures de la cellule :

$$\{J\} = [\varepsilon]\left\{M^0\right\} + [\rho]\,[FF]\,.\,\{J\} \tag{II.41}$$

La méthode des radiosités permet donc, entre-autre, la prise en compte des multiréflexions pour le calcul des flux CLO et GLO dans le cas de parois diffusantes lambertiennes, au travers de facteurs de forme présentés dans la section 2.3.2.

2.3.2 Facteurs de forme

Selon les hypothèses présentées en section 1.2, le rayonnement perçu de façon diffuse par les surfaces lambertiennes l'est dans toutes les directions de l'espace. Cependant, les surfaces étant orientées, l'intensité est maximale dans la direction normale à la surface considérée et nulle dans la direction tangente à celle-ci. Aussi les flux captés par les surfaces réceptrices dépendent des orientations du récepteur vis à vis de la source et de la distance dont ils sont éloignés. Les rayons d'une source dont dS_s est un élément de surface capté par un récepteur dont dS_r est un élément de surface se situent dans un angle solide ω par lequel l'émetteur perçoit le récepteur (Fig. II.8).

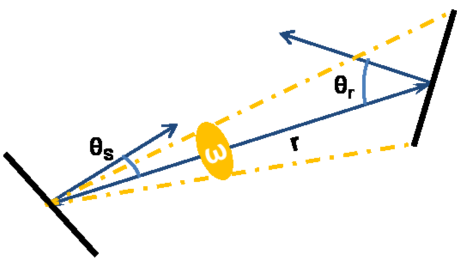


FIGURE II.8 – Définition géométrique du facteur de forme

L'éclairement $dE_{s\rightarrow r}$ reçu par l'élément dS_r issu de dS_s est donné par :

$$dE_{s\rightarrow r} = dS_s.E_s.\frac{\cos(\theta_r)\,.\,\cos(\theta_s)}{r^2} \tag{II.42}$$

Et alors, l'éclairement total reçu de la surface réceptrice Σ_r issu de toute la surface émettrice Σ_s est, par intégration :

$$E_{s \to r} = E_s FF_{s \to r} \tag{II.43}$$

On détermine alors le facteur de forme $FF_{s \to r}$

$$FF_{s \to r} = \frac{1}{S_r} \int_{\Sigma_s} dS_s \int_{\Sigma_r} dS_r . \frac{\cos(\theta_r) . \cos(\theta_s)}{\pi . r^2} \tag{II.44}$$

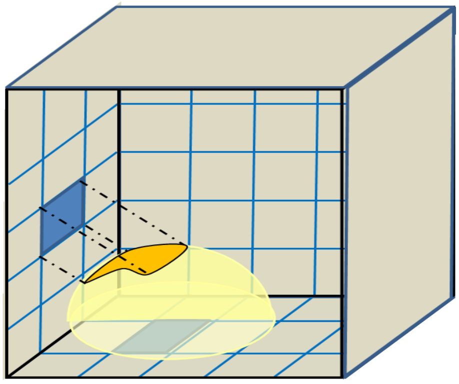
$FF_{s \to r}$ est un facteur géométrique dépendant seulement des surfaces des facettes considérées et de leur orientation mutuelle. Il représente la part du demi-hémisphère visible du point de vue du récepteur occupée par l'émetteur. Son calcul peut être complexe, la difficulté essentielle résidant dans l'intégration de la double intégrale, alors que la précision des résultats issus de la méthode de radiosité dépend particulièrement de la précision de la valeur obtenue. La double intégrale peut être résolue par des méthodes de lancé de rayon ou de monte Carlo, qui demeurent lourdes et coûteuses en temps de calcul. Il existe cependant quelques méthodes efficaces éprouvées pour ce calcul. Tout d'abord, un catalogue de formules analytiques peut être utilisé, d'autant que des combinaisons peuvent être réalisées entre formules élémentaires pour calculer des cas plus complexes (Howell, 1982). L'utilisation de ces formules analytiques a l'intérêt de permettre des calculs rapides et précis, mais elle à l'inconvénient de ne pas être souple : il s'agit avant tout d'être dans un des cas particuliers pour lesquels il existe une expression analytique. Ensuite, des méthodes de projection ont été développées, telles que les méthodes de l'hémicube ou de l'hémisphère. On projette alors la surface Σ_s sur un hémisphère ou un hémicube unité centré sur la surface Σ_r (Fig. II.9.a), puis de re-projeter sur le plan de la surface Σ_r (Fig. II.9.b). Le facteur de forme est finalement égal à la surface de cette projection divisé par π. Cette dernière méthode, certes plus couteuse en temps de calcul que l'utilisation d'expression analytique, et dont la précision dépend directement du maillage, est beaucoup plus souple. C'est pourquoi elle a été choisie dans le cadre de notre modélisation.

2.3.3 Flux courtes longueurs d'onde

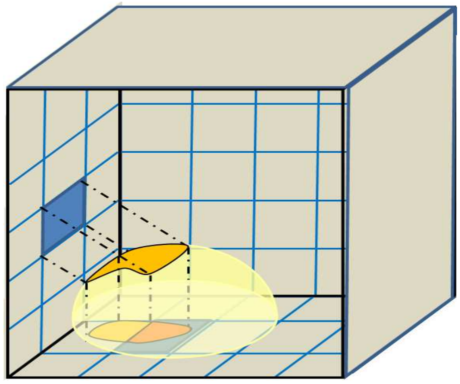
Le vecteur des flux radiatifs CLO $\left\{\varphi_{clo,int}\right\}$ absorbés par l'ensemble des facettes de mailles superficielles des parois, à l'intérieur de la cellule, est donné par la relation matricielle :

$$\left\{\varphi_{clo,int}\right\} = [S] . \left[\alpha_{clo,int}\right] . \left\{E_{clo,int}\right\} \tag{II.45}$$

$\left[\alpha_{clo,int}\right]$ désigne la matrice diagonale des absorptions de rayonnement CLO des facettes situées à l'intérieur du bâtiment. Leurs éclairements incidents $\left\{E_{clo,int}\right\}$ résultent de bilans incluant les éclairements primaires incidents $\left\{E^0_{clo,int}\right\}$ et des multiréflexions exprimées selon les radiosités $\{J\}$:



a) Etape 1 - Projection sur la sphère unité de centre C_i



b) Etape 2 - Projection sur la maille i

Figure II.9 – Calcul des facteurs de forme par l'analogie de Nusselt ou méthode de la demi-sphère

$$\left\{E_{clo,int}\right\} = \left\{E^0_{clo,int}\right\} + [FF] . \{J\} \tag{II.46}$$

[FF] désigne la matrice des facteurs de forme dont les éléments $FF_{i,j}$, désignant le facteurs de forme entre une facette i et une facette j, sont calculés selon la méthode de l'hémisphère détaillée dans la section 2.3.2).

Dans les courtes longueurs d'onde, $M^0_\lambda \approx 0$ et alors $\{J\} = \left[\rho_{clo,int}\right] . \left\{E_{clo,int}\right\}$, $\left[\rho_{clo,int}\right]$ étant la matrice diagonale des coefficients de réflexion CLO des facettes intérieures. Ainsi, les éclairements des facettes sont donnés par la relation matricielle :

$$\left\{E_{clo,int}\right\} = \left\{E^0_{clo,int}\right\} + \left[\rho_{clo,int}\right] [FF] \left\{E_{clo,int}\right\} \tag{II.47}$$

Les éléments du vecteur $\left\{E^0_{clo,int}\right\}$, le vecteur des éclairements primaires, s'expriment en fonction du rayonnement solaire reçu par les facettes des parois, selon qu'elles soient ensoleillées ou non. Pour les facettes à l'intérieur de la cellule, le rayonnement solaire reçu par les facettes est modulé par la transmission de la vitre, et donc selon les cas :

$$\begin{cases} E^0_{clo,int} = \tau_b.I_b + \tau_d.I_d & \text{pour les facettes ensoleillées} \\ E^0_{clo,int} = \tau_d.I_d & \text{pour les facettes à l'ombre} \end{cases} \tag{II.48}$$

I_b et I_d sont les rayonnements solaires directs et diffus, tandis que τ_b et τ_d désignent les coefficients de transmission des rayonnement directs et diffus du vitrage respectivement.

La distribution de l'éclairement primaire reçu par les parois à l'intérieur de la cellule est dans les faits hétérogène. Les facettes éclairées par le rayonnement solaire direct délimitent alors la tache solaire liée à la position du soleil et l'orientation des ouvertures vers l'extérieur.

Cependant, la tache solaire n'est pas localisée systématiquement : dans de nombreux logiciels, l'éclairement primaire résulte soit du rayonnement solaire global projeté totalement sur le sol, soit du même rayonnement réparti uniformément sur les parois en fonction de la position du soleil. C'est le cas de TRNSYS où le flux incident est calculé sur chaque paroi en fonction de la position du soleil grâce au type TRNSYS solar processor [1] tandis qu'ENERGYPLUS prend en compte la tache solaire d'une façon complète, un module permettant en effet d'en calculer la position et la surface dans une pièce convexe de géométrie quelconque (Crawley et al., 2001).

Wall (1997) a étudié la distribution du rayonnement solaire dans une pièce dotée d'une grande surface vitrée orientée Sud. Des simulations du comportement thermique de cette pièce, effectuées avec différents logiciels tels que DEROB-LTH, FRES, SUNREP, TRNSYS et TSBI3, ont donné des résultats très différents : les choix de méthodes de projection du rayonnement solaire ainsi que les valeurs des coefficients de transmission, réflexion et absorption ont un impact considérable sur la dynamique thermique de la pièce.

De la même façon, Tittelein (2008) compare les besoins de chauffage simulés appliquant les quatre méthodes de projection du rayonnement solaire sur les parois d'un bâtiment suivantes :

1. localisation de la tache solaire à chaque instant puis moyenne de ce résultat sur chaque paroi ;
2. projection de tout le rayonnement sur le sol ;
3. projection de 60 % du rayonnement sur le sol, le reste du rayonnement étant réparti sur les autres parois ;
4. répartition de façon constante au cours du temps du rayonnement sur les parois, en faisant un calcul préliminaire de la tache solaire et du coefficient de répartition.

Les écarts observés, en termes de besoins de chauffage, peuvent atteindre 8,5 % entre deux modèles utilisant des méthodes de projection du rayonnement solaire différentes, confirmant l'importance de la distribution du rayonnement primaire dans la cellule. D'ailleurs, un pré-calcul des coefficients de répartition moyen sur les parois peut suffire pour obtenir un résultat approchant celui obtenu avec le calcul de tache solaire (moins de 0,3 % d'écart) (Tittelein, 2008). Cependant, une répartition uniforme du flux solaire primaire sur les parois ne semble adaptée qu'avec une conduction unidimensionnelle si l'on veut traiter l'impact des sollicitations de façon précise. Il est plus judicieux de calculer la tache solaire sur les parois suffisamment finement maillées en 3D et de réaliser un bilan surfacique par nœud et non par paroi tant il parait évident qu'elle aura un impact non uniforme sur les températures des nœuds des parois.

Outre ces différences en termes de comportement thermique intrinsèque, l'hétérogénéité de la distribution du rayonnement solaire entrant dans la pièce et la présence d'une tache solaire localisée ont un impact sur le confort des occupants (Trombe et al., 1999 ; Serres, 1997). Serres (1997), par exemple, a développé un premier modèle dans lequel il attribue des flux uniformes par paroi et un autre modèle dans lequel seules les facettes du sol incluses dans la tache solaire reçoivent un flux CLO. Il a ainsi pu constater que si les différences de modélisation n'ont que peu d'influence sur la température d'air, des écarts plus importants sont observés

1. Lire *TRNSYS Mathematical Reference Solar Energy*

au niveau des températures du sol. Utilisant le dernier modèle pour ses études de confort, il a pu montrer des asymétries de rayonnement dans les pièces qui ont une conséquence sur les distributions de températures moyennes de rayonnement et provoquant des inconforts locaux.

Nous pouvons donc anticiper que la prise en compte précise de la tache solaire dans les bilans de flux pour la modélisation du comportement thermique d'une pièce présente un double intérêt :

1. elle peut améliorer la précision du modèle et ses performances pour les calculs de températures d'air et de parois ;
2. elle offre aussi l'opportunité de cartographier précisément les températures moyennes de rayonnement pour des calculs d'indices de confort.

La modélisation tridimensionnelle de la conduction sera, pour cette étude, couplée à un calcul de la position et de la taille de la tache solaire. La localisation est réalisée par l'application d'un test d'appartenance dont le principe est de vérifier l'inclusion ou non des projections des centres des mailles sur un plan perpendiculaire aux rayons du soleil dans le polygone issu de la projection de la fenêtre sur ce même plan. Ce test est réalisé suivant trois étapes :

a) on détermine N le plan normal aux rayons du soleil dans le repère orthonormé défini par la base directe $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, $\vec{i}$ étant horizontal et orienté vers le sud ($\gamma = 0; h = 0$), $\vec{k}$ étant vertical et dirigé vers le haut :

$$N = \begin{bmatrix} \cos(h_{sun})\cos(\gamma_{sun}) \\ \cos(h_{sun})\sin(\gamma_{sun}) \\ \sin(h_{sun}) \end{bmatrix} \tag{II.49}$$

Avec h_{sun} l'élévation du soleil et γ_{sun} son azimut dont les calculs sont réalisés par la fonction sun_position.m [2] implémentée sous Matlab par Reda et Andreas (2004, 2008), dont le modèle mathématique est présenté en annexe A.

b) L'ensemble des centres des mailles du bâtiment ainsi que le polygone du contour de la fenêtre sont projetés sur ce plan N (Fig. II.10). Considérant A le centre à projeter, de coordonnées (x_A, y_A, z_A), on note A' sa projection sur N, dont les coordonnées $(x_{A'}, y_{A'}, z_{A'})$ sont données par

$$\begin{cases} x_{A'} = \left(1-u^2\right)x_A - uv.y_A - uw.z_A \\ y_{A'} = -uv.x_A + \left(1-v^2\right)y_A - uw.z_A \\ z_{A'} = -uw.x_A - vw.y_A + \left(1-w^2\right)z_A \end{cases} \tag{II.50}$$

Définissant (u, v, w) les coordonnées d'un vecteur colinéaire aux rayons du soleil.

2. http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/4605- sunposition-m

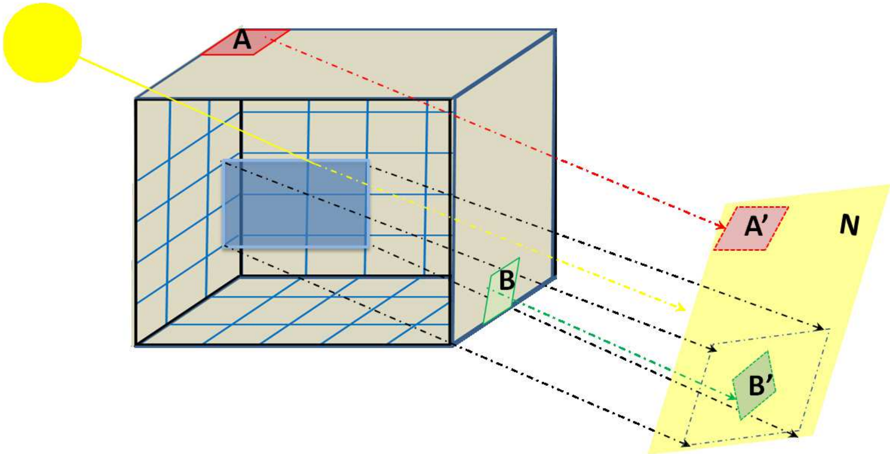


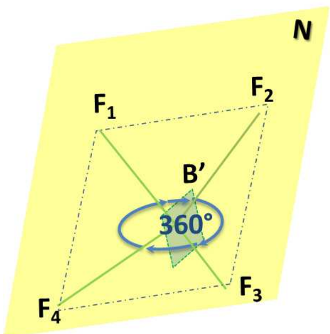
FIGURE II.10 – Projection du cadre de la fenêtre et des centres de mailles sur le plan N

c) Un test géométrique d'appartenance est implémenté pour l'ensemble des centres de mailles (Fig. II.11). La maille de centre B est incluse dans la tache solaire car la projection B′ de son centre est incluse dans le quadrilatère image de la fenêtre dans le plan N. Géométriquement, si l'on note $\left(\vec{F_i}\right)_{i\in[1,4]}$ les coordonnées des sommets de ce quadrilatère, cette inclusion est vérifiée lorsque la somme des angles orientés directs $\left(\vec{A'F_i}, \vec{A'F_j}\right)_{i\in[1,4], j=mod(i+1,4)}$ est proche de 360 °(Fig. II.11.a) :

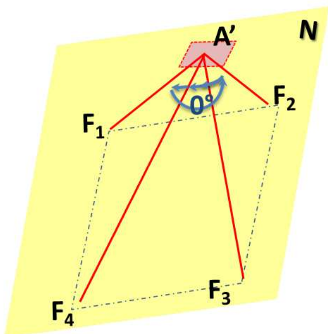
$$\sum_{i=1}^{4}\left(\vec{B'F_i}, \vec{B'F_j}\right) \longrightarrow 360^\circ \tag{II.51}$$

Au contraire, la maille de centre A n'est pas incluse dans la tache solaire (Fig.II.11.b. Sa projection vérifie :

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\vec{A'F_i}, \vec{A'F_j}\right) \longrightarrow 0^\circ \tag{II.52}$$



a) Cas d'inclusion dans la tache solaire



b) Cas d'exclusion de la tache solaire

FIGURE II.11 – Tests d'appartenance

Cette méthode géométrique a l'intérêt d'être souple, robuste et précise. Elle garantit la localisation de la tache solaire quel que soit l'orientation et la taille de la fenêtre, quel que soit la taille des facettes des parois et quel que soit le pas de temps considéré.

2.3.4 Flux grandes longueurs d'ondes

Les éclairements E_{glo} résultent des éclairements de l'ensemble des mailles et de multiréflexions. Considérant que les parois sont opaques dans le domaine des GLO, on a $\rho_{glo} = 1 - \varepsilon$. L'équation matricielle de la radiosité (équation II.41) est alors donnée par :

$$\{J\} = [\varepsilon].\left\{M^0\right\} + [1-\varepsilon].[FF].\{J\} \tag{II.53}$$

donc

$$[\varepsilon].\left\{M^0\right\} = \sigma.[\varepsilon]\left\{T^4\right\} = \{J\} - [1-\varepsilon].[FF].\{J\} \tag{II.54}$$

D'un autre côté, selon la relation II.10 et la définition de la radiosité II.38, la densité de flux GLO est donnée par

$$\left\{\Phi_{glo,int}\right\} = [\varepsilon]\left\{M^0\right\} - [\varepsilon]\left\{E_{glo}\right\} = \{J\} - [1-\varepsilon]\left\{E_{glo}\right\} - [\varepsilon]\left\{E_{glo}\right\} \tag{II.55}$$

Ainsi

$$\left\{\Phi_{glo,int}\right\} = \{J\} - \left\{E_{glo}\right\} = [[I]-[FF]]\{J\} \tag{II.56}$$

Par inversion :

$$\{J\} = [[I]-[FF]]^{-1}\left\{\Phi_{glo,int}\right\} \tag{II.57}$$

Des équations II.54 et II.57 on calcule

$$\sigma.[\varepsilon]\left\{T^4\right\} = [I-[1-\varepsilon].[FF]]\,[[I]-[FF]]^{-1}\left\{\Phi_{glo,int}\right\} \tag{II.58}$$

Finalement, le vecteur des flux GLO $\left\{\varphi_{glo,int}\right\}$ est donné par :

$$\left\{\varphi_{glo,int}\right\} = \sigma.[S]\,[M]\left\{T^4_{int}\right\} \tag{II.59}$$

posant $[M] = [\varepsilon]\,[I-[1-\varepsilon].[FF]]^{-1}\,[[I]-[FF]]$. Cette formulation est utilisée dans notre modèle malgré le fait qu'il soit commun, en thermique du bâtiment, d'utiliser sa forme linéarisée :

$$\left\{\varphi_{glo,int}\right\} = [S]\,[M]\,[h_r]\,(\{T_{int} - T_m\}) \tag{II.60}$$

Fixant dans notre cas $T_m = 0$ °C et posant $[h_r] = \sigma.(\{T_{int} + T_m\}).\left(\left\{T^2_{int} + T^2_m\right\}\right)$

2.4 Calcul des flux radiatifs à l'extérieur de la cellule

2.4.1 Flux courtes longueurs d'ondes

Le vecteur des flux radiatifs CLO $\left\{\varphi_{clo,ext}\right\}$ absorbés par l'ensemble des facettes de mailles en contact avec l'environnement extérieur est donné par la relation matricielle :

$$\left\{\varphi_{clo,ext}\right\} = [S] \cdot \left[\alpha_{clo,ext}\right] \cdot \left\{E_{clo,ext}\right\} \tag{II.61}$$

Définissant [S] la matrice diagonale recensant les aires des surfaces des facettes considérées, $\left[\alpha_{clo,ext}\right]$ la matrice diagonale des coefficients d'absorption du rayonnement CLO de ces facettes et enfin $\left\{E_{clo,ext}\right\}$ le vecteur rassemblant les éclairements reçus par celles-ci. Ces éclairements coïncident avec les éclairements primaires $\left\{E^0_{clo,ext}\right\}$ pour les facettes des mailles donnant vers l'extérieur du local :

$$\begin{cases} E_{clo,ext} = E^0_{clo,ext} = I_b + I_d & \text{pour les facettes ensoleillées} \\ E_{clo,ext} = E^0_{clo,ext} = I_d & \text{pour les facettes à l'ombre} \end{cases} \tag{II.62}$$

2.4.2 Flux grandes longueurs d'onde

Les facettes extérieures des parois échangent dans le domaine des GLO avec la voute céleste de température T_{ciel} et le sol de température T_{sol} selon la relation

$$\left\{\varphi_{glo,ext}\right\} = \sigma.\varepsilon.\,[S]\left(F_{rc}.\left(\{T_{ciel}\}^4 - \{T_{ext}\}^4\right) + F_{rs}\left(\{T_{sol}\}^4 - \{T_{ext}\}^4\right)\right) \tag{II.63}$$

Avec $F_{rc} = (1 + \cos(\beta))/2$ et $F_{rs} = (1 - \cos(\beta))/2$ les facteurs de forme respectivement entre les parois et le ciel et entre les parois et le sol, β représentant l'angle d'inclinaison des parois. Notons que cette relation, utilisée directement dans notre modèle, est usuellement appliquée sous sa forme linéarisée en thermique du bâtiment :

$$\varphi_{glo,ext} = F_{rc}.\,[h_{rc}]\,(T_{ciel} - T_{ext}) + F_{rs}.\,[h_{rs}]\,(T_{sol} - T_{ext}) \tag{II.64}$$

Avec $[h_{rc}]$ et $[h_{rs}]$ les coefficients d'échanges radiatifs avec le sol et le ciel :

$$\begin{cases} [h_{rc}] = \sigma.\varepsilon.\,[S]\,(T_{ciel} + T_{ext})\left(T^2_{ciel} + T^2_{ext}\right) \\ [h_{rs}] = \sigma.\varepsilon.\,[S]\,(T_{sol} + T_{ext})\left(T^2_{sol} + T^2_{ext}\right) \end{cases} \tag{II.65}$$

2.5 Résolution numérique

Ce chapitre est dédié à l'introduction des méthodes de calcul utilisées dans le cadre de la modélisation 3D de l'enveloppe de bâtiment. Nous nous sommes focalisés particulièrement sur des fonctions spécifiques aux calculs des différents flux conductifs, convectifs et radiatifs grandes et courtes longueurs d'onde. Ainsi, la conduction 3D a été développée tandis que nous avons détaillé les méthodes de détermination des flux radiatifs intérieurs à partir de la méthode des radiosités et de la localisation de la tache solaire.

La structure du programme informatique codé pour modéliser le comportement thermique du bâtiment est l'objet de cette section. Il s'agit de construire un code permettant de réaliser des calculs rapides et précis. Le programme peut être décomposé en trois parties (Fig. II.12) :

- une phase de préparation des entrées utiles au calcul pendant laquelle la géométrie du bâtiment et les caractéristiques optiques des parois sont définies tandis que les données d'entrée expérimentales sont traitées. Afin de gagner en temps de calcul, la localisation de la tache solaire et les calculs des transmissions du vitrage, fonction de la position du soleil, sont obtenus sur l'ensemble de la période d'étude. La situation de la tache solaire dans le temps est alors inscrite dans une matrice qui répertorie l'inclusion ou non des mailles, exprimée de façon booléenne, fonction de l'instant ;
- la phase de calcul pendant laquelle l'intégration numérique des équations différentielles est effectuée grâce à un solveur numérique spécifique. On résout alors les équations de la chaleur discrétisées II.34 et II.36 régissant les températures des parois de la cellule ainsi que le bilan enthalpique II.32 permettant d'obtenir la température d'air dans le bâtiment. Rappelons que les flux impliqués dans les équations de la chaleur sont donnés par les équations II.59 et II.63 pour les flux GLO respectivement intérieurs et extérieurs, II.45 et II.61 pour les flux CLO intérieurs et extérieurs, et II.11 pour les flux convectifs.

  Ces calculs passent par une étape d'initialisation lors de laquelle les températures du bâtiment sont calculées pendant quelques jours précédents la période d'étude. Ces simulations préalables ne seront par la suite pas étudiées car influencées et biaisées par des conditions initiales arbitrairement fixées. Elles sont réalisées afin de s'éloigner des conditions initiales tout en tenant compte de l'historique environnemental réel.
- la phase de post-traitement pendant laquelle les résultats sont d'abord enregistrés avant d'être traités. Les sorties de l'intégration sont rangées dans une matrice recensant la température de chaque maille à chaque instant. Le traitement permet alors de discriminer les températures d'air, de celles des parois et des surfaces. Il s'agit ensuite d'utiliser les températures obtenues pour diverses applications. On peut alors par exemple recalculer le comportement temporel des flux, ou comparer les sorties à des mesures en températures obtenues *in situ*.

La fonction ODE23t de Matlab est utilisée comme solveur numérique pour l'intégration des équations différentielles (Shampine et al., 1999). Ce solveur s'appuie sur la méthode numérique de Crank-Nicholson

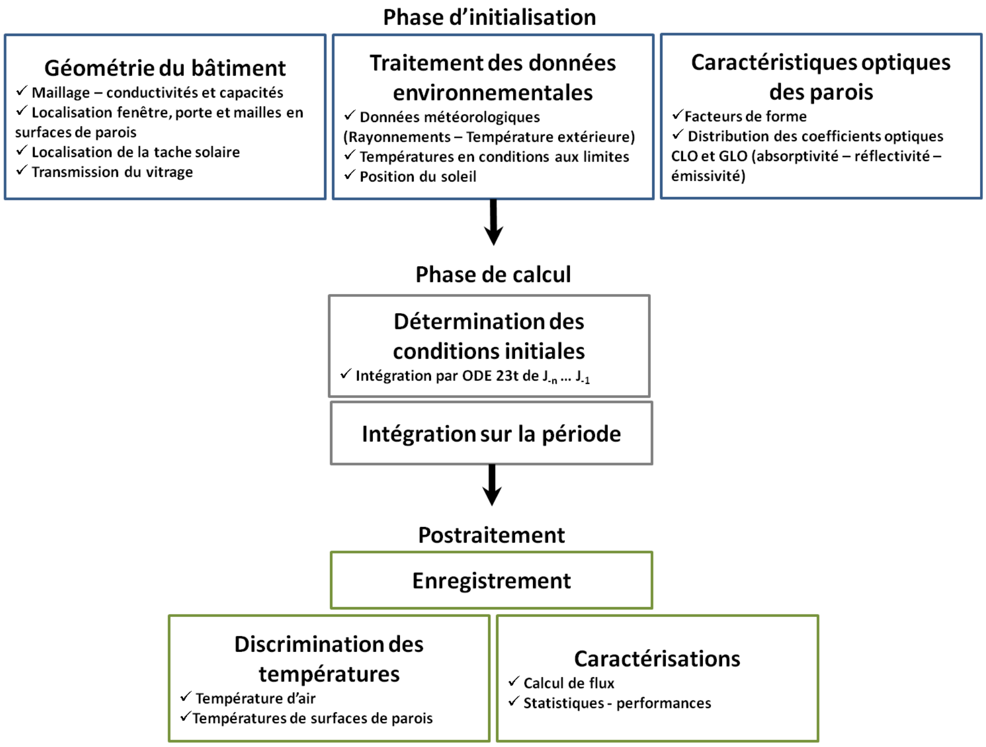


FIGURE II.12 – Schéma de fonctionnement du programme informatique mis en place

issue de l'intégration par méthode des trapèzes qui s'appuie sur l'interpolation linéaire par intervalle. Le principe est d'amalgamer les méthodes d'Euler progressive et régressive dans le même schéma numérique. Si l'on considère une équation différentielle de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, x, t) \tag{II.66}$$

Posons $u_i^n = u(i\Delta x, n\Delta t)$ la grandeur u située à l'abscisse $i\Delta x$ et l'instant $n\Delta t$, l'équation II.66 donne :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{f_i^{n+1}(u, x, t)}_{\text{Euler régressive}} + \underbrace{f_i^n(u, x, t)}_{\text{Euler progressive}}\right) \tag{II.67}$$

Le schéma obtenu est implicite et donc inconditionnellement stable. Il existe cependant des conditions de régularité à respecter pour obtenir des résultats de bonne précision, justifiant l'utilisation de pas de temps variables et adaptatifs. Le principe de la méthode de détermination du pas d'intégration adapté s'appuie sur des intégrations fragmentées (Shampine & Reichelt, 1997) : à l'instant t, on réalise un premier calcul avec un premier pas Δt, obtenant $u^{(1)}(t + \Delta t)$. Ensuite, l'intégration est réalisée en deux calculs mettant en jeu un pas de temps $\Delta t/2$: un premier calcul permet d'obtenir $u^{(2)}(t + \Delta t/2)$, le second permet d'avoir $u^{(2)}(t + \Delta t)$. Ce second mode de calcul permet d'avoir une valeur de $u(t + \Delta t)$ plus précise. Alors, si la différence entre les deux résultats est supérieure à une tolérance tol définie au préalable : $\left|u^{(1)}(t + \Delta t) - u^{(2)}(t + \Delta t)\right| > \text{tol}$, la précision du calcul avec Δt est considérée insuffisante et le pas de temps est diminué. Le double calcul est alors relancé pour vérifier que le pas de temps est suffisamment fin. Si au contraire $\left|u^{(1)}(t+\Delta t) - u^{(2)}(t+\Delta t)\right| < tol$, on considère le pas de temps suffisamment fin et on passe à l'instant suivant, le pas d'intégration étant au passage augmenté.

Le pas de temps variable et adaptatif peut permettre de mieux tenir compte des fluctuations des conditions aux limites. On peut en effet penser que lorsque des variations de flux importantes sont observables, en particulier au niveau des flux CLO, le pas de temps tendrait à diminuer : les résultats des intégrations aux pas de temps plus longs seront très différents de ceux obtenus pour des pas de temps plus courts, les conditions aux limites ayant elles-mêmes beaucoup changé entre les deux calculs.

Nous disposons donc maintenant d'un logiciel de simulation du comportement thermique du bâtiment dont les principales caractéristiques et innovations sont :

1. modélisation en 3 dimensions des échanges thermiques par conduction ;
2. prise en compte des distributions réelles du rayonnement solaire entrant dans la pièce via le positionnement de la tache solaire et le calcul des multiréflexions ;
3. intégration à pas de temps variable permettant à terme de mieux tenir compte de changements brusques des conditions environnementales, en termes de rayonnement incident ou de températures extérieures.

Notre logiciel ainsi programmé devrait permettre de calculer avec grande précision les températures des murs et d'air d'une enceinte munie d'une fenêtre. Ses performances en termes d'erreur restent maintenant à déterminer avant de pouvoir l'exploiter dans le cadre d'applications concrètes. Cette phase de validation, indispensable pour une bonne utilisation du logiciel, sera l'objet de la partie III à venir.