



# 2

## Modélisation du comportement des élastomères

### Contents

---

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>2.1</b> | <b>Introduction</b>                     | <b>49</b> |
| <b>2.2</b> | <b>Cadre des grandes déformations</b>   | <b>49</b> |
| 2.2.1      | Définitions et description du mouvement | 49        |
| 2.2.2      | Description des déformations            | 50        |
| 2.2.3      | Vitesse de déformation                  | 51        |
| 2.2.4      | Description des efforts                 | 52        |
| 2.2.5      | Equations d'équilibre                   | 53        |
| <b>2.3</b> | <b>Lois de comportement</b>             | <b>54</b> |
| 2.3.1      | Généralités                             | 54        |
| 2.3.2      | Hyperélasticité                         | 58        |
| 2.3.3      | Viscoélasticité                         | 59        |
| <b>2.4</b> | <b>Modèles développés</b>               | <b>65</b> |
| 2.4.1      | Introduction                            | 65        |
| 2.4.2      | Modèle Analytique                       | 67        |
| 2.4.3      | Modèle Eléments finis                   | 73        |
| <b>2.5</b> | <b>Conclusion</b>                       | <b>79</b> |

---



## 2.1 Introduction

Le chapitre précédent a montré que le polychloroprène, en plus de supporter de grandes déformations, possédait une composante dissipative, que nous pouvons supposer de nature viscoélastique. L'objectif de ce chapitre est d'établir un modèle pouvant représenter la réponse mécanique de notre matériau. Une première partie, inspiré des travaux de (Méo, 2000), traitera du cadre thermodynamique des grandes déformations, dans lequel se basera la formulation de notre loi de comportement. Une liste non exhaustive de modèles hyperélastiques, puis viscohyperélastiques sera alors présentée. Dans une seconde partie, deux modèles complémentaires (analytique et éléments finis) seront alors définis. Ceux-ci seront utilisés pour déterminer des paramètres mécaniques localisés dans une structure en caoutchouc dans le chapitre suivant.

## 2.2 Cadre des grandes déformations

### 2.2.1 Définitions et description du mouvement

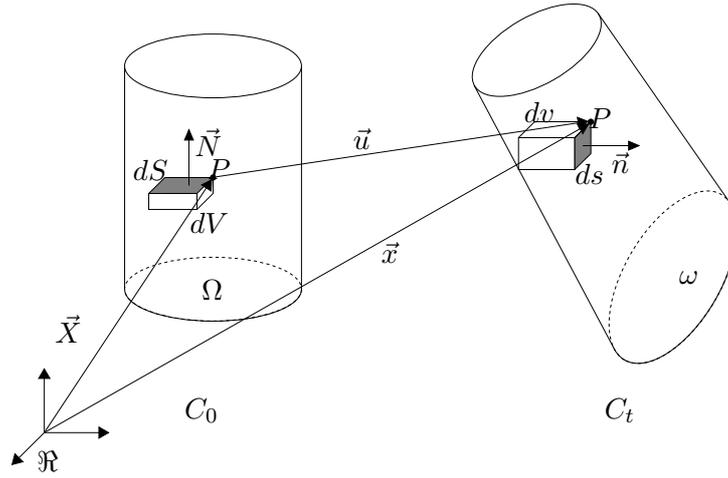


FIGURE 2.1 – Système de configurations.

Soit un solide  $S$  évoluant dans un référentiel  $\mathfrak{R}$ . Il occupe le domaine  $\Omega$  dans la configuration  $C_0$  que nous considérons comme la configuration initiale. Il occupera à l'instant  $t$  le domaine  $\omega$  dans la configuration  $C_t$ . (Fig. 2.1). On peut définir une fonction  $\chi$  qui, à la position  $\vec{X}$  d'une particule  $P$  dans  $C_0$  associe  $\vec{x}$  sa position dans  $C_t$  :

$$\chi : \begin{cases} C_0 & \rightarrow & C_t \\ \vec{X} & \mapsto & \vec{x} = \chi(\vec{X}, t) \end{cases} \quad (2.1)$$

En utilisant  $\vec{u}$ , le vecteur déplacement, l'eq. 2.1 peut se mettre sous forme équivalente :

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, t) \quad (2.2)$$

En vue de définir la transformation locale, au voisinage de la particule  $P$ , on introduit classiquement l'application linéaire tangente  $\bar{\bar{F}}$  associée à la fonction  $\chi$ . Considérant un vecteur  $d\vec{X}$  dans la configuration initiale, son image  $d\vec{x}$  dans la configuration actuelle s'obtient par la relation :

$$\vec{d}x = \bar{\bar{F}}.d\vec{X} \quad (2.3)$$

et de manière indicielle, en utilisant l'eq.2.3 :

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \delta_{ij} \quad (2.4)$$

$\bar{\bar{F}}$  (appelé aussi gradient de la transformation) représente la cinématique du mouvement de la configuration initiale vers la configuration actuelle. Au niveau local, les lois de transformation, liant un élément de volume  $dV$  ou de surface  $\vec{N}dS$  de  $C_0$  à leurs images respectives  $dv$  et  $\vec{n}ds$  dans  $C_t$ , se déclinent comme suit :

$$\text{pour un élément de volume } dv = \det \bar{\bar{F}} dV \quad (2.5)$$

$$\text{pour un élément de surface } \vec{n}.ds = \det \bar{\bar{F}} \bar{\bar{F}}^{-T} . \vec{N}dS \quad (2.6)$$

D'après l'eq. 2.5, la condition d'incompressibilité (c'est à dire conservation de volume) peut localement s'exprimer comme suit :

$$J = \det \bar{\bar{F}} = 1 \quad (2.7)$$

Cette condition est couramment utilisée dans le cadre de l'étude des élastomères qui sont considérés comme incompressibles.

## 2.2.2 Description des déformations

Les déformations peuvent être décrites suivant deux approches, selon la configuration dans laquelle nous nous plaçons : la description lagrangienne (configuration initiale) et la description eulérienne (configuration actuelle).

### 2.2.2.1 Description lagrangienne des déformations

Soient  $d\vec{X}$  et  $d\vec{Y}$  deux vecteurs de la configuration initiale  $C_0$  et soient  $d\vec{x}$  et  $d\vec{y}$  leurs images respectives dans la configuration actuelle  $C_t$ . On a donc :

$$\begin{aligned} d\vec{x}.d\vec{y} &= (\bar{\bar{F}}.d\vec{X}).(\bar{\bar{F}}.d\vec{Y}) \\ &= d\vec{X}.\bar{\bar{F}}^T.\bar{\bar{F}}.d\vec{Y} \\ &= d\vec{X}.\bar{\bar{C}}.d\vec{Y} \end{aligned} \quad (2.8)$$

On définit ainsi le tenseur des dilatations, ou tenseur de Cauchy-Green droit :

$$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{F}}^T.\bar{\bar{F}} \quad (2.9)$$

Considérant les déformations comme les variations de dilatations entre l'état de référence et l'état actuel, on définit le tenseur des déformations de Green-Lagrange par :

$$\bar{\bar{E}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{C}} - \bar{\bar{I}}) \quad (2.10)$$

### 2.2.2.2 Description eulerienne des déformations

De la même façon que dans le précédent paragraphe, on définit dans la configuration actuelle le tenseur de Cauchy-Green gauche comme étant :

$$d\vec{X} \cdot d\vec{Y} = d\vec{x} \cdot \bar{\bar{B}}^{-1} \cdot d\vec{y} \quad (2.11)$$

$$\bar{\bar{B}} = \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{F}}^T \quad (2.12)$$

Dans la configuration actuelle, la mesure des déformations est décrite par  $\bar{\bar{A}}$  le tenseur d'Euler-Almansi :

$$\bar{\bar{A}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{I}} - \bar{\bar{B}}^{-1}) \quad (2.13)$$

Nous remarquons que pour les petites déformations, les termes du second ordre sont négligés, et donc :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\epsilon}} &= \frac{1}{2}(\bar{\bar{\text{grad}}}_X u + \bar{\bar{\text{grad}}}_X^T u) \\ \bar{\bar{C}} &\simeq \bar{\bar{B}} \simeq \bar{\bar{I}} + 2\bar{\bar{\epsilon}} \text{ et } \bar{\bar{E}} \simeq \bar{\bar{A}} \simeq \bar{\bar{\epsilon}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

### 2.2.2.3 Invariants de tenseur

On rappelle ici la définition des trois invariants d'un tenseur  $\bar{\bar{X}}$  :

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr} \bar{\bar{X}} \\ I_2 &= \frac{1}{2}((\text{tr} \bar{\bar{X}})^2 - \text{tr}(\bar{\bar{X}}^2)) \\ I_3 &= \det \bar{\bar{X}} \end{aligned} \quad (2.15)$$

### 2.2.3 Vitesse de déformation

On définit le vecteur vitesse  $\vec{v}$  comme étant la dérivée par rapport au temps de  $\vec{x}(\vec{X}, t)$ . Pour  $d\vec{x}$  de  $C_t$ , il vient :

$$\begin{cases} d\vec{v} = \dot{\vec{x}} = \dot{\bar{\bar{F}}} \cdot d\vec{X} = \bar{\bar{L}} \cdot d\vec{x} \\ \bar{\bar{L}} = \dot{\bar{\bar{F}}} \cdot \bar{\bar{F}}^{-1} = \bar{\bar{D}} + \bar{\bar{W}} \end{cases} \quad (2.16)$$

$\bar{\bar{D}}$  et  $\bar{\bar{W}}$  définissent respectivement les parties symétriques et antisymétriques de  $\bar{\bar{L}}$ . Le tenseur  $\bar{\bar{D}}$  représente la vitesse de déformation et  $\bar{\bar{W}}$ , le tenseur vitesse de rotation. Ce sont respectivement les taux de déformation et de rotation de la transformation. Si  $d\vec{x}$  et  $d\vec{y}$  sont deux vecteurs de  $C_t$ , il nous faut exprimer la dérivée par rapport au temps de leur produit scalaire. Dans la configuration actuelle, on a :

$$\frac{d}{dt}(d\vec{x} \cdot d\vec{y} - d\vec{X} \cdot d\vec{Y}) = 2d\vec{x} \cdot \bar{\bar{D}} \cdot d\vec{y} \quad (2.17)$$

Tandis qu'en configuration initiale, on a :

$$\frac{d}{dt}(d\vec{x} \cdot d\vec{y} - d\vec{X} \cdot d\vec{Y}) = 2d\vec{X} \cdot \dot{\bar{\bar{E}}} \cdot d\vec{Y} \quad (2.18)$$

Ainsi, on obtient bien, après vérification que  $\dot{\bar{\bar{E}}} = \bar{\bar{F}}^T \cdot \bar{\bar{D}} \cdot \bar{\bar{F}}$ , ce qui montre que  $\dot{\bar{\bar{E}}}$  et  $\bar{\bar{D}}$  sont bien les transportés l'un de l'autre.

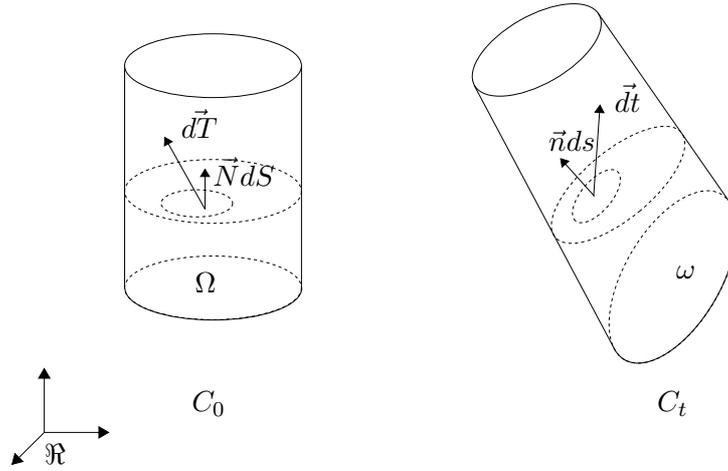


FIGURE 2.2 – Etat de contrainte dans les différentes configurations.

### 2.2.4 Description des efforts

Trois descriptions peuvent être utilisées pour définir l'état de contrainte dans un solide, suivant que l'on considère (fig. 2.2) :

- les efforts intérieurs de cohésion dans la configuration actuelle ( $\vec{dt}$ ) à travers un élément de surface déformée ( $\vec{n}ds$ ) (description eulérienne)
- les efforts intérieurs de cohésion dans la configuration actuelle ( $\vec{dt}$ ) à travers un élément de surface non déformée ( $\vec{N}dS$ ) (description mixte)
- le transport des efforts de cohésion ( $\vec{dT}$ ) à travers un élément de surface non déformée ( $\vec{N}dS$ ) (description lagrangienne)

#### 2.2.4.1 Description eulérienne

On définit  $\bar{\sigma}$  le tenseur des contraintes de Cauchy comme suit :

$$\vec{dt} = \bar{\sigma} \cdot \vec{n}ds \quad (2.19)$$

$\bar{\sigma}$  représente donc les efforts de cohésion réellement exercés à travers un élément de surface déformé et par unité de surface déformée. Ce tenseur est symétrique.

#### 2.2.4.2 Description mixte

Le transport de l'élément de surface  $\vec{n}ds$  dans cette configuration permet d'écrire :

$$\vec{dt} = \bar{\sigma} \cdot J\bar{F}^{-T} \cdot \vec{N}dS \quad (2.20)$$

Soit, en définissant  $\bar{\bar{\Pi}}$  comme le premier tenseur de Piola-Kirchoff (PK1) :

$$\begin{cases} \bar{\bar{\Pi}} = J\bar{\sigma} \cdot \bar{F}^{-T} \\ \vec{dt} = \bar{\bar{\Pi}} \cdot \vec{N}dS \end{cases} \quad (2.21)$$

$\bar{\bar{\Pi}}$  est un tenseur non symétrique. On parle de description mixte des contraintes car  $\bar{\bar{\Pi}}$  n'est ni lagrangien, ni eulérien.

### 2.2.4.3 Description lagrangienne

L'obtention d'une description complètement lagrangienne de l'état des contraintes nécessite le transport de l'effort réel de cohésion  $\vec{t}$  dans la configuration initiale.

$$d\vec{T} = \bar{F}^{-1} \cdot \bar{\Pi} \cdot \vec{N} dS \quad (2.22)$$

On introduit ainsi le second tenseur de Piola-Kirchoff  $\bar{S}$  (PK2) tel que :

$$\begin{cases} \bar{S} = \bar{F}^{-1} \cdot \bar{\Pi} \\ d\vec{T} = \bar{S} \cdot \vec{N} dS \end{cases} \quad (2.23)$$

Bien que sans signification physique,  $\bar{S}$  présente les avantages :

- d'être symétrique
- et de permettre une écriture de la loi de comportement inconditionnellement objective

### 2.2.5 Equations d'équilibre

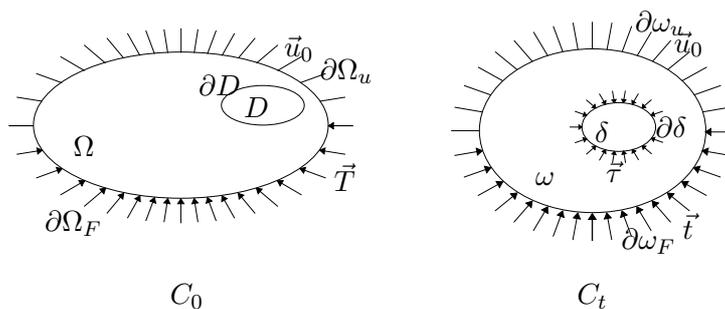


FIGURE 2.3 – Conditions limites dans les configurations de référence et actuelle.

On définit donc la configuration actuelle (Fig. 2.3) :

- $\omega$ , le domaine occupé par le solide dans cette configuration ;
- $\partial\omega$ , sa surface ;
- $\partial\omega_u$  et  $\partial\omega_F$  respectivement les sous-domaines de  $\partial\omega$  sur lesquels on applique un déplacement imposé  $\vec{u}_0$  ou une densité surfacique de force par unité de surface déformée  $\vec{t}$  ( $\partial\omega_u \cup \partial\omega_F = \partial\omega$  et  $\partial\omega_u \cap \partial\omega_F = \emptyset$ ) ;
- $\delta$  un élément de volume dans la configuration déformée ;
- et  $\vec{\tau}$  les efforts de cohésion exercés à travers l'élément de surface  $\partial\delta$ .

Dans la configuration de référence,  $\Omega$ ,  $\partial\Omega$ ,  $\partial\Omega_u$ ,  $\partial\Omega_F$ ,  $D$  et  $\partial D$  sont respectivement les transportés de  $C_t$  vers  $C_0$  par l'intermédiaire de  $\bar{F}^{-1}$  de  $\omega$ ,  $\partial\omega$ ,  $\partial\omega_u$ ,  $\partial\omega_F$ ,  $\delta$  et  $\partial\delta$ .  $\vec{T}$  est la densité surfacique de force exprimée dans  $C_0$ .

#### 2.2.5.1 Configuration actuelle

L'écriture de la conservation de la quantité de mouvement, traduisant la configuration actuelle, l'équilibre du sous domaine  $\partial\delta$  s'écrit :

$$\int_{\partial\delta} \vec{t} ds + \int_{\delta} \rho \vec{f} dv = \vec{0} \quad (2.24)$$

Où  $\rho$  est la masse volumique dans la configuration actuelle,  $\vec{f}$  la densité massique de force. On obtient dans la configuration actuelle, en utilisant le théorème de la divergence, après avoir injecté l'équation 2.19 dans l'équation 2.24 :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x \bar{\sigma} + \rho \vec{f} = \vec{0} & \text{sur } \omega \\ \bar{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{t} & \text{sur } \partial\omega_F \\ \vec{u} = \vec{u}_0 & \text{sur } \partial\omega_u \end{cases} \quad (2.25)$$

où  $\operatorname{div}_x$  correspond à l'opérateur divergent en coordonnées eulériennes.

### 2.2.5.2 Configuration de référence

L'équilibre peut aussi être exprimé dans la configuration de référence. On note  $\partial\Omega_u$  et  $\partial\Omega_F$  les images respectives de  $\partial\omega_u$  et  $\partial\omega_F$  par l'application  $\chi^{-1}$ .

$$\begin{cases} \operatorname{div}_X \bar{\Pi} + \rho_0 \vec{f} = \vec{0} & \text{sur } \Omega \\ \bar{\Pi} \cdot \vec{N} = \vec{T} & \text{sur } \partial\Omega_F \\ \vec{u} = \vec{u}_0 & \text{sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (2.26)$$

où  $\operatorname{div}_X$  représente l'opérateur divergent en coordonnées lagrangiennes.

## 2.3 Lois de comportement

### 2.3.1 Généralités

Dans un premier temps, les relations qui reposent sur les principes de la thermodynamiques sont rappelées dans le contexte des grandes déformations, afin de pouvoir ensuite établir l'inégalité de Clausius-Duhem. Cette inéquation est la base de la formulation des lois de comportement en grandes déformations. Les formalismes sont exprimés ici dans la description mixte.

#### 2.3.1.1 Premier principe

On considère le solide  $S$  occupant  $\Omega$  en configuration  $C_0$ . Soient  $\mathcal{P}_{int}$  et  $\mathcal{Q}$  respectivement la puissance des efforts intérieurs et le taux de chaleur reçu,  $\mathcal{E}$  et  $e$  son énergie interne et son énergie interne spécifique, on a :

$$\dot{\mathcal{E}} = -\mathcal{P}_{int} + \mathcal{Q} \quad (2.27)$$

Chaque terme de l'équation 2.27 peut être exprimé dans la description mixte :

–  $\mathcal{E}$  s'exprime à partir de sa valeur spécifique :

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega} \rho_0 e dV. \quad (2.28)$$

– La puissance des efforts internes est obtenue par intégration de sa valeur massique. Cette dernière est déduite de l'écriture du principe des puissances virtuelles et est égale au produit d'une grandeur cinématique avec son dual en contrainte. Il vient alors :

$$-\mathcal{P}_{int} = \int_{\Omega} \bar{\Pi} : \dot{\bar{F}}. \quad (2.29)$$

- Enfin, le taux de chaleur peut être décomposé en un apport massique  $r$  (rayonnement) et une perte surfacique  $\vec{Q}$  (conduction) au travers de la frontière  $\partial\Omega$ ;  $\vec{N}$  représente la normale sortante à  $\partial\Omega$

$$\mathcal{Q} = \int_{\Omega} \rho_0 r dV - \int_{\partial\Omega} \vec{Q} \cdot \vec{N} dS \quad (2.30)$$

Ainsi, on peut écrire une forme locale du premier principe :

$$\rho_0 \dot{\epsilon} = \bar{\bar{\Pi}} : \dot{\bar{F}} + \rho_0 r - \text{div}_X \vec{Q} \quad (2.31)$$

### 2.3.1.2 Second principe (Inégalité de Clausius-Duhem)

$\mathcal{S}$  définit l'entropie du système,  $\eta$  sa densité massique;  $\mathcal{T}_{ext}$  est le taux de chaleur reçu par le système, divisé par la température  $T$ . Dès lors, l'inégalité fondamentale pour un système adiabatique s'écrit :

$$\dot{\mathcal{S}} - \mathcal{T}_{ext} \geq 0, \quad (2.32)$$

$$\text{où } \mathcal{S} = \int_{\Omega} \rho_0 \eta dV \quad (2.33)$$

$$\text{et } \mathcal{T}_{ext} = \int_{\Omega} \frac{\rho_0 r}{T} dV - \int_{\partial\Omega} \frac{\vec{Q} \cdot \vec{N}}{T} dS. \quad (2.34)$$

Il vient alors localement dans  $C_0$  :

$$\underbrace{\rho_0 \dot{\eta} - \frac{\rho_0 r}{T} + \vec{Q} \cdot \text{grad}_X \frac{1}{T}}_{\phi_0: \text{dissipation dans } C_0} \geq 0. \quad (2.35)$$

En introduisant (2.31) dans (2.35), on obtient l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$\phi_0 = -\rho_0 (\dot{\epsilon} - T \dot{\eta}) - \frac{1}{T} \vec{Q} \cdot \text{grad}_X T + \bar{\bar{\Pi}} : \dot{\bar{F}} \geq 0. \quad (2.36)$$

Avant de pouvoir déterminer les lois de comportement en grandes déformations, il est avant tout nécessaire de poser les hypothèses suivantes :

### 2.3.1.3 Hypothèse de l'état local

Nous adopterons la méthode de l'état local telle qu'elle est exposée dans l'ouvrage de **Lemaitre et Chaboche (1985)** : la connaissance en un point d'un certain nombre de variables permet de déterminer intégralement l'état thermodynamique en ce point. Les dérivées par rapport au temps de ces variables n'interviennent pas dans la définition de l'état. L'évolution sera donc considérée comme une succession d'états d'équilibre. Dans le cadre de cette hypothèse, deux types de variables peuvent être considérées :

- Les **variables observables** qui sont déterminées directement par la mesure. On définit comme variables observables le couple  $(\bar{F}, T)$  qui correspond à une mesure de déformation et de température.
- et les **variables internes** qui peuvent décrire des phénomènes complexes tels que la plasticité, l'endommagement ou encore la viscosité.

On peut alors définir les variables d'état  $(\bar{F}, T, V_i)$  avec  $V_i$  représentant les variables internes, qui peuvent être des tenseurs d'ordre  $n$ .

### 2.3.1.4 Hypothèse des matériaux standards

On postule qu'il existe un potentiel thermodynamique d'énergie libre spécifique de Helmholtz  $\Psi$  dépendant des variables d'état tel que :

$$\Psi = e - \eta T \quad (2.37)$$

Sous cette hypothèse, on peut écrire que :

$$\dot{e} = \dot{\Psi} + \dot{\eta}T + \eta\dot{T} \quad (2.38)$$

$$\dot{e} - \dot{\eta}T = \dot{\Psi} + \eta\dot{T} \quad (2.39)$$

De plus, d'après l'hypothèse de l'état local, on a :

$$\Psi = \Psi(\bar{\bar{F}}, T, V_i) \quad (2.40)$$

Ainsi, la dérivée temporelle de  $\Psi$  devient :

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\bar{F}}} : \dot{\bar{\bar{F}}} + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \dot{T} + \sum \frac{\partial \Psi}{\partial V_i} \bullet \dot{V}_i \quad (2.41)$$

Où  $\bullet$  représente le produit contracté  $n$  fois,  $n$  représentant l'ordre des variables internes  $V_i$ . En reprenant les équations 2.39 et 2.41 dans l'équation 2.36, l'inégalité de Clausius-Duhem peut se réécrire comme suit :

$$\phi_0 = (\bar{\bar{\Pi}} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\bar{F}}}) : \dot{\bar{\bar{F}}} - \rho_0 (\eta + \frac{\partial \Psi}{\partial T}) \dot{T} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial V_i} \bullet \dot{V}_i - \frac{1}{T} \vec{Q} \cdot \text{grad}_X T \geq 0 \quad (2.42)$$

#### REMARQUE 2.1

On fait l'hypothèse que la dissipation ( $\phi_0$ ) résulte uniquement des déformations totales, des variables internes et de la conduction thermique. Ceci conduit à considérer :

$$\eta = - \frac{\partial \Psi}{\partial T} \quad (2.43)$$

Ainsi, l'équation 2.42 devient :

$$\phi_0 = (\bar{\bar{\Pi}} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\bar{F}}}) : \dot{\bar{\bar{F}}} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial V_i} \bullet \dot{V}_i - \frac{1}{T} \vec{Q} \cdot \text{grad}_X T \geq 0 \quad (2.44)$$

$\psi$ , initialement dépendant de  $\bar{\bar{F}}$ , devient, par le principe d'objectivité, dépendant de  $\bar{\bar{C}}$ . On montre que :

$$(\bar{\bar{F}} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\bar{F}}}) : \dot{\bar{\bar{F}}} = \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot (\bar{\bar{\Pi}} - 2\rho_0 \cdot \bar{\bar{F}} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\bar{C}}}) : \dot{\bar{\bar{C}}} \quad (2.45)$$

### 2.3.1.5 Découplage de la dissipation

$\phi_0$ , la dissipation dans  $C_0$ , peut être décomposée en une contribution purement thermique  $\phi_0^{ther}$  et une autre purement mécanique,  $\phi_0^{meca}$  :

$$\phi_0 = \underbrace{\bar{F}^{-1} \cdot (\bar{\Pi} - 2\rho_0 \bar{F} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{C}})}_{\phi_0^{meca}} : \dot{\bar{E}} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial V_i} \bullet \dot{V}_i - \underbrace{\frac{1}{T} \bar{Q} \cdot \text{grad}_X T}_{\phi_0^{ther}} \quad (2.46)$$

On suppose que les dissipations mécaniques et thermiques sont séparément positives (Germain, 1973) :

$$\phi_0^{meca} \geq 0 \quad \text{et} \quad \phi_0^{ther} \geq 0 \quad (2.47)$$

### 2.3.1.6 Hypothèse des matériaux standards généralisés

Dans le cadre de l'hypothèse des matériaux standards généralisés (Halphen et Quoc Son, 1975), on peut écrire qu'il existe un pseudo potentiel de dissipation à valeur scalaire, continu, convexe, positif et nul à l'origine tel que :

$$\varphi = \varphi_{meca}(\dot{\bar{E}}, \dot{V}_i) + \varphi_{ther}(\bar{Q}) \quad (2.48)$$

Dans ces conditions, on peut alors exprimer la dissipation sous la forme :

$$\phi_0 = \frac{\partial \varphi_{meca}}{\partial \dot{\bar{E}}} : \dot{\bar{E}} + \frac{\partial \varphi_{meca}}{\partial \dot{V}_i} \bullet \dot{V}_i + \frac{\partial \varphi_{ther}}{\partial \bar{Q}} \cdot \bar{Q} \quad (2.49)$$

En utilisant les équations 2.44 et 2.49, on peut définir les lois d'état et les lois complémentaires du matériau dans la description mixte :

$$\begin{cases} \bar{F}^{-1} \cdot (\bar{\Pi} - 2\rho_0 \bar{F} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{C}}) = \frac{\partial \varphi_{meca}}{\partial \dot{\bar{E}}} \\ \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial V_i} = - \frac{\partial \varphi_{meca}}{\partial \dot{V}_i} \\ \frac{1}{T} \text{grad}_X T = - \frac{\partial \varphi_{ther}}{\partial \bar{Q}} \end{cases} \quad (2.50)$$

### 2.3.1.7 Prise en compte de l'incompressibilité

L'hypothèse d'incompressibilité intervient lors d'une transformation isochore telle que :

$$I_3 = (\det(\bar{F}))^2 = J^2 = 1 \iff \bar{C}^{-1} : \dot{\bar{C}} = 0 \quad (2.51)$$

Ainsi, la loi de comportement doit être modifiée. Pour cela, un multiplicateur de Lagrange, noté  $p$  et assimilable à une pression hydrostatique, est ajouté à l'expression de la loi contrainte-déformation. Cela se traduit par la modification de la première des équations 2.50 :

$$\bar{F}^{-1} \cdot (\bar{\Pi} - 2\rho_0 \bar{F} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{C}}) + p \bar{C}^{-1} = \frac{\partial \varphi_{meca}}{\partial \dot{\bar{E}}} \quad (2.52)$$

ou encore :

$$\bar{\Pi} = 2\rho_0 \bar{F} \cdot \frac{\partial W}{\partial \bar{C}} + \bar{F} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\bar{E}}} - p \bar{F}^{-T} \quad (2.53)$$

## REMARQUE 2.2

**Lejeunes (2006)** propose un paragraphe complet dédié aux modèles décrivant le comportement compressible des élastomères. Cette classe de modèles repose sur un découplage de la densité d'énergie de déformation en une partie purement isochorique et une partie purement volumique. Pour cela, le modèle nécessite une décomposition du gradient de transformation, ou du tenseur de Cauchy-Green droit telle que

$$\bar{\bar{F}} = J^{\frac{1}{3}} \bar{\bar{F}} \quad (2.54)$$

et

$$\bar{\bar{C}} = J^{\frac{2}{3}} \bar{\bar{C}} \quad (2.55)$$

La cinématique, de gradient  $\bar{\bar{F}}$  est définie de sorte que  $\det \bar{\bar{F}} = 1$ , donnant lieu ainsi à une transformation incompressible. La densité d'énergie de déformation est donc découplée de la manière suivante :

$$\psi(\bar{\bar{C}}) = \psi_{ISO}(\bar{\bar{C}}) + \psi_{VOL}(J) \quad (2.56)$$

La partie isochorique de la densité d'énergie de déformation peut être choisie parmi les modèles hyperélastiques présentés dans le paragraphe 2.3.2. Quant à la partie volumique, il existe différentes fonctions de  $J$  utilisées dans la littérature pour la définir.

## 2.3.2 Hyperélasticité

Dans la partie précédente, nous avons parcouru les formalismes liés à l'établissement d'une loi de comportement d'un matériau dans le cadre des grandes déformations. Ici, nous nous focaliserons, dans un premier temps, sur les modèles hyperélastiques, traduisant du caractère non linéaire de l'élasticité du matériau. Ceux-ci, adaptés aux grandes déformations, ne tiennent pas compte des phénomènes dissipatifs susceptibles d'être présents dans le matériau. C'est en cela que cette classe de modèles reste limitée dans le cadre des élastomères. Une telle formulation se base essentiellement sur l'expression de l'énergie de déformation, déterminée suivant deux approches :

- Les formulations statistiques, qui reposent essentiellement sur la déformation des chaînes macromoléculaires et une loi de probabilité qui définit la répartition de ces chaînes au sein du matériau.
- Les formulations phénoménologiques, basées sur la dépendance de l'énergie de déformation aux invariants du tenseur de dilatation de Cauchy-Green gauche ou droit, ou éventuellement des elongations principales.

Ce paragraphe a pour objectif de présenter les principaux modèles hyperélastiques, sans pour autant être exhaustif.

### 2.3.2.1 Formulation statistique de l'énergie de déformation hyperélastique

Cette approche s'appuie sur le travail de **Wall (1942)** qui développe le concept de déformation d'une longue chaîne macromoléculaire selon les trois directions, en supposant la déformation macroscopique des élastomères équivalente à la celle de ses chaînes. Il introduit une loi de probabilité donnant la distribution de chaînes de même longueur. C'est dans ce contexte que le modèle de néo-Hooke fait son apparition (**Treloar, 1943**), dont l'expression est :

$$W = NkT(I_1 - 3) \quad (2.57)$$

où  $N$ ,  $k$ ,  $T$ , et  $I_1$  la longueur maximale des chaînes, la constante de Boltzmann, la température du matériau et le premier invariant du tenseur de Cauchy-Green droit. Ces travaux sont à l'origine de modèles plus complets, basés sur la déformation d'un volume élémentaire représentatif (V.E.R.) constitué de plusieurs chaînes. Le tableau 2.1 propose une liste non exhaustive de ces modèles :

| Modèle         | Référence                  | Densité d'énergie  |
|----------------|----------------------------|--|
| 1 Chaîne       | (Treloar, 1973)            | $W = NkT\left(\frac{\lambda}{\sqrt{N}}\beta + \ln\left(\frac{\beta}{\sinh\beta}\right)\right)$                           |
| 8 chaînes      | (Boyce et Arruda, 2000)    | $W = N.k.\sqrt{n}(\beta_{chaîne}.\lambda_{chaîne} + \sqrt{n}.\left(\frac{\beta_{chaîne}}{\sinh(\beta_{chaîne})}\right))$ |
| "Full-Network" | (Diani et Gilormini, 2005) | $W = \frac{\nu}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} w(r) \sin\theta d\theta d\phi^3$                        |

TABLE 2.1 – Tableau récapitulatif des modèle hyperélastiques statistiques

où  $\nu$  représentent respectivement le nombre d'enchevêtrement de chaînes.  $\beta$  correspond à la fonction inverse de langevin  $\mathcal{L}$  :

$$\mathcal{L}(\lambda) = \coth(\lambda) - \frac{1}{\lambda} = \beta^{-1} \quad (2.58)$$

### 2.3.2.2 Modèles phénoménologiques

Les modèles phénoménologiques, contrairement aux modèles statistiques, ne sont pas physiquement motivés et reposent essentiellement sur des considérations mathématiques. Le tableau 2.2 en propose une liste non exhaustive.

Leur classement s'inspire des travaux de Marckmann et Verron (2006) et de Lejeunes (2006). Dans ce tableau, la formulation, le nombre de paramètres impliqués et le domaine de validité de chaque modèle y sont indiqués (le domaine de validité des modèles d'Ogden et de Mooney-Rivlin dépendront du degré de troncature).

## 2.3.3 Viscoélasticité

### 2.3.3.1 Introduction

Les modèles hyperélastiques présentés dans le paragraphe 2.3.2 ne rendent pas compte de la sensibilité temporelle d'un matériau. Cette dépendance relève de son caractère viscoélastique. Ces modèles seront d'abord présentés dans le contexte des petites déformations, puis ensuite dans celui des grandes déformations.

### 2.3.3.2 Viscoélasticité linéaire

Dans le cadre des petites déformations, pour un matériau homogène, élastique et isotrope, on rappelle que  $\bar{\sigma} = \lambda \text{tr}(\bar{\epsilon})\bar{I} + 2\mu\bar{\epsilon}$ , avec  $\lambda$  et  $\mu$ , les coefficients de Lamé.

3.  $w(r)$  correspond à l'énergie de déformation d'une chaîne.

| Modèle        | Référence              | Densité d'énergie  | Nb Param. | Validité |
|---------------|------------------------|--|-----------|----------|
| Ogden         | (Ogden, 1973)          | $W = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3)$ | 2n        | N.C.     |
| Hart-Smith    | (Hart-Smith, 1966)     | $W = C_1 \int \exp[C_3(I_1 - 3)^2] dI_1 + C_2 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right)$                                       | 3         | 500 %    |
| Mooney-Rivlin | (Rivlin, 1992)         | $W = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} (I_1 - 3)^i \cdot (I_2 - 3)^j$   | 2n        | N.C.     |
| Gent-Thomas   | (Gent et Thomas, 1958) | $W = C_1 \cdot (I_1 - 3) + C_2 \cdot \ln\left(\frac{I_2}{3}\right)$  | 2         | 200%     |
| Mooney        | (Mooney, 1940)         | $W = C_1 \cdot (I_1 - 3) + C_2 \cdot (I_2 - 3)$  | 2         | 100%     |

TABLE 2.2 – Tableau récapitulatif des modèle hyperélastiques phénoménologiques inspiré de (Marckmann et Verron, 2006) (Lejeunes, 2006)

Soit une sollicitation de relaxation unidimensionnelle  $\varepsilon(t)$  telle que  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \mathcal{H}(t - t')$ , avec  $\varepsilon_0$  constante,  $t'$  le temps de référence et  $\mathcal{H}$  fonction d'échelon d'Heavyside<sup>1</sup>. La réponse en contrainte à une telle sollicitation s'écrit alors :

$$\sigma(t) = R(t - t')\varepsilon_0 \quad (2.59)$$

où  $R(t - t')$  est le module de relaxation.

Maintenant, si l'on considère une succession d'incrément de déformation tels que :

$$\varepsilon(t) = \sum_i \varepsilon_i \mathcal{H}(t - t'_i) \quad (2.60)$$

Le principe de superposition de Boltzmann nous permet de calculer la réponse du matériau en contrainte comme suit :

$$\sigma(t) = \sum_i \sigma(\varepsilon_i, t - t'_i) = \sum_i R(t - t'_i)\varepsilon_i \quad (2.61)$$

La généralisation à trois dimensions permet d'écrire la loi de comportement d'un matériau viscoélastique linéaire, supposé homogène isotrope, en fonction d'une intégrale héréditaire liant les contraintes à l'histoire des déformations telle que :

$$\bar{\sigma}(t) = \int_0^t \lambda(t - t') \text{tr}(\dot{\bar{\varepsilon}}(t')) dt' \bar{I} + \int_0^t 2\mu(t - t') \dot{\bar{\varepsilon}}(t') dt' \quad (2.62)$$

Il est commode de séparer les contributions des parties déviatorique et sphérique.

$$\begin{cases} \bar{\sigma}^D(t) = \bar{\sigma}(t) - \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\sigma}(t)) \\ \bar{\varepsilon}^D(t) = \bar{\varepsilon}(t) - \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\varepsilon}(t)) \end{cases} \quad (2.63)$$

On peut alors écrire la loi de comportement sous la forme suivante :

1.  $\mathcal{H} = 0$  si  $t - t' < 0$  et  $\mathcal{H} = 1$  sinon

$$\begin{cases} \bar{\sigma}^D(t) = \int_0^t 2\mu(t-t')\dot{\bar{\varepsilon}}^D(t')dt' \\ tr(\bar{\sigma}(t)) = 3 \int_0^t K(t-t')tr(\dot{\bar{\varepsilon}}(t'))dt' \end{cases} \quad (2.64)$$

où  $K$  est le module de compressibilité relié aux coefficients de Lamé par  $3K(t) = 3\lambda(t) + 2\mu(t)$ . Dans ce cas,  $K(t)$  et  $\mu(t)$  sont des fonctionnelles de relaxation. On peut alors écrire une forme équivalente à l'équation 2.62 :

$$\bar{\sigma}(t) = \int_0^t 2\mu(t-t')\dot{\bar{\varepsilon}}^D dt' + \int_0^t K(t-t')tr(\dot{\bar{\varepsilon}}(t'))dt' \bar{I} \quad (2.65)$$

Les modules de relaxation peuvent être définies à partir du modèle rhéologique choisi. Le plus complet, qui est notamment celui utilisé dans le code de calcul ANSYS pour modéliser le comportement des matériaux viscoélastiques dans le cadre des petites déformations, est le modèle de Maxwell généralisé (fig. 2.4). La fonction de relaxation d'un tel modèle est représenté par une série de Prony (eq. 2.66) :

$$\begin{cases} \mu(t) = \mu_\infty \left( 1 + \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\mu_\infty} e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \\ K(t) = K_\infty \left( 1 + \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{K_\infty} e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \end{cases} \quad (2.66)$$

### 2.3.3.3 Viscoélasticité en grandes déformations

Le cadre des grandes déformations est un contexte qui ajoute une difficulté dans la description d'un comportement viscoélastique. [Drapaca et al. \(2007\)](#) et [Wineman \(2009\)](#) proposent un état de l'art des modèles viscoélastiques appliqués aux petites et grandes déformations. Deux approches sont principalement utilisées à cet effet :

- Les formulations intégrales, qui considèrent les contraintes comme une fonction de l'histoire des déformations ([Coleman et Noll, 1961](#)), ([Bernstein et Kearsley, 1963](#)), ([Simo, 1987](#)), ([Morman et Pan, 1988](#)), ([Holzapfel, 1996a](#)), ([Saad, 2003](#))
- Les formulations différentielles qui sont principalement axées sur la théorie de l'état local et des matériaux standards généralisés ([Sidoroff, 1975a](#)), ([Sidoroff, 1975b](#)), ([Halphen et Quoc Son, 1975](#)), ([Méo, 2000](#)), ([Martinez, 2005](#)), ([Grandcoin, 2008](#)), ([Khedimi, 2010](#)). Cette approche est, pour une grande part, présentée dans le paragraphe 2.3.1.6.

#### Formulation intégrale

Nous partons des exemples présentés par [Méo \(2000\)](#), et dont l'élaboration a été réalisée à partir d'une généralisation du principe de superposition de Boltzmann (tableau 2.3).

[Simo \(1987\)](#) développe un modèle basé sur une décomposition additive des contraintes en :

- Un tenseur des contraintes de type déviatorique, qui est lui même décomposé en une partie élastique et une partie visqueuse. Ces contraintes sont liées au tenseur gradient modifié  $\bar{\bar{F}} = J^{-\frac{1}{3}} \bar{F}$ .
  - Un tenseur des contraintes sphérique qui prend en compte la quasi-incompressibilité des élastomères
- Ce modèle aboutit à une formulation fonctionnelle tout en s'appuyant sur une approche par variables internes. L'énergie libre postulée est de la forme :

| Modèle   | Formulation du comportement  |
|--|--|
| <b>FL.V.</b><br>Finite Linear Viscoelasticity<br>(Coleman et Noll, 1961)           | $\bar{R}^T(t) \cdot \bar{\sigma}(t) \cdot \bar{R}(t) = -p(t)\bar{I} + f(\bar{E}(t))$ $+ \int_{-\infty}^t \bar{K}(\bar{E}(t), s) : \bar{E}_d(t, s) ds$ Notion de mémoire évanescence des élastomères avec $\bar{E}_d(s) = \bar{E}(t-s) - \bar{E}(t)$ et $f$ une loi hyperélastique        |
| <b>M.F.L.V.</b><br>Modified Finite Linear Viscoelasticity<br>(Morman et Pan, 1988) | $\bar{R}^T(t) \cdot \bar{\sigma}(t) \cdot \bar{R}(t) = -p(t)\bar{I} + f(\bar{E}(t))$ $+ \int_{-\infty}^t \bar{K}_0(t, s) : \bar{H}_d(t, s) ds$ Introduction d'une mesure généralisée des déformations évanescences,<br>$\bar{H}_d(t, s) = \bar{H}(\bar{E}(t-s)) - \bar{H}(\bar{E}(t))$ . |
| <b>B.K.Z.</b><br>(Bernstein et Kearsley, 1963)                                     | $\bar{\sigma}(t) = -p(t)\bar{I} + \int_{-\infty}^t \bar{F}^{-1}(t') \cdot \frac{\partial W(\bar{E}(t, t'))}{\partial \bar{E}(t, t')} \cdot \bar{F}^{-T}(t') dt'$ où $W$ est un potentiel.  |

TABLE 2.3 – Tableau récapitulatif, et non exhaustif des principales formulations viscoélastiques intégrales en grandes déformations

$$\psi(\bar{\bar{E}}, \bar{\bar{A}}_v) = \psi_{vol}(J) + \psi(\bar{\bar{E}}) - \bar{\bar{A}}_v : \bar{\bar{E}} + \psi_v(\bar{\bar{A}}_v) \quad (2.67)$$

où  $\bar{\bar{E}}$  est le tenseur de Green-Lagrange et la variable interne  $\bar{\bar{A}}_v$  est un tenseur associé au caractère visqueux du matériau. Il suppose alors que cette variable interne obéit à une équation différentielle linéaire semblable aux équations d'évolution de la viscoélasticité linéaire. Il obtient alors, en description lagrangienne, la loi de comportement suivante :

$$\bar{\bar{S}} = Jp\bar{\bar{C}}^{-1} + J^{-\frac{2}{3}} \left[ \int_0^t a + (1-a)e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \frac{d}{dt'} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{E}}} \right) dt' \right]^D \quad (2.68)$$

où  $p$  est homogène à une pression hydrostatique,  $\tau$  est le temps de relaxation et  $a$  est un coefficient tel que  $a \in [0..1]$  et sa valeur permet de passer d'un élément de type Maxwell ( $a = 0$ ) vers celui de type ressort ( $a = 1$ ).

Holzapfel et Simo (1996) et Holzapfel (1996a) ont repris le travail de Simo (1987) pour modéliser respectivement le comportement thermoélastique puis viscoélastique des élastomères. (Holzapfel, 1996a) est utilisé comme référence pour expliquer l'implémentation, dans le code de calcul Eléments Finis ANSYS ADPL, du comportement viscoélastique en grandes déformations. Holzapfel (1996b) propose de détailler le programme, implémenté dans ANSYS, à partir duquel les résultats présentés dans Holzapfel (1996a) ont été obtenus. Ce modèle correspond à celui de Maxwell généralisé (fig. 2.4). L'auteur se base sur une décomposition du potentiel d'énergie libre de Helmotz  $\psi$  :

$$\psi(\bar{\bar{C}}, \bar{\bar{\Gamma}}) = U^\infty(J) + \psi^\infty(\bar{\bar{C}}) + \Upsilon(\bar{\bar{C}}, \bar{\bar{\Gamma}}^\alpha) \quad (2.69)$$

Où  $U$  représente à la partie sphérique du comportement, pour prendre en compte le caractère quasi-incompressible du matériau,  $\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{F}}^T \cdot \bar{\bar{F}}$  est le tenseur de Cauchy-Green droit relatif à la cinématique  $\bar{\bar{F}}$ ,  $\bar{\bar{\Gamma}}^\alpha$  correspond à la variable interne qui décrit la partie visqueuse de chaque branche  $\alpha$  du modèle de

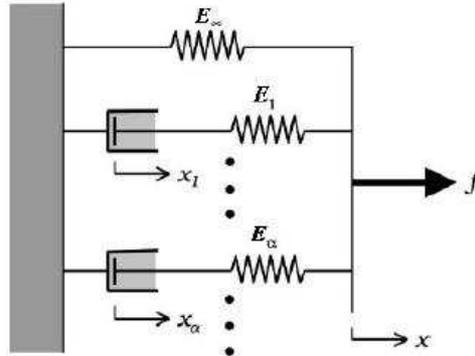


FIGURE 2.4 – Représentation du modèle de Maxwell Généralisé (Marvalova, 2007)

Maxwell généralisé. A partir de l'équation 2.69, le deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff est décomposé comme suit :

$$\bar{\bar{S}} = \bar{\bar{S}}_{vol}(J) + \bar{\bar{S}}_{ISO}(\bar{\bar{C}}, \bar{\Gamma}^\alpha) \quad (2.70)$$

où

$$\bar{\bar{S}}_{ISO} = \bar{\bar{S}}_{ISO}^\infty + \sum_{\alpha=1}^n \bar{\bar{Q}}^\alpha \quad (2.71)$$

avec

$$\bar{\bar{S}}_{ISO}^\infty = J^{-\frac{2}{3}} DEV_L \left( 2 \frac{\partial \tilde{\psi}^\infty(\bar{\bar{C}})}{\partial \bar{\bar{C}}} \right) \quad (2.72)$$

et

$$DEV_L(\cdot) = (\cdot) - \frac{1}{3} [(\cdot) : \bar{\bar{C}}] \bar{\bar{C}}^{-1} \quad (2.73)$$

$DEV_L(\cdot)$  représente l'opérateur d'ordre 4 déviateur lagrangien, alors que les tenseurs  $\bar{\bar{Q}}^\alpha$  correspondent à des tenseurs d'ordre 2, directement liés aux variables internes introduites pour chaque branche du modèle de Maxwell généralisé. Ces paramètres sont obtenus par  $\alpha$  équations différentielles linéaires d'ordre 1, valables pour chaque branche  $\alpha$  du modèle de Maxwell généralisé :

$$\dot{\bar{\bar{Q}}}^\alpha + \frac{\bar{\bar{Q}}}{\tau_\alpha} = \frac{d}{dt} \left( J^{-\frac{2}{3}} \cdot DEV_L \left( 2 \frac{\partial \tilde{\psi}^\alpha}{\partial \bar{\bar{C}}} \right) \right) \quad (2.74)$$

Où  $\psi^\alpha$  correspond à l'énergie libre de chaque branche  $\alpha$  du modèle de Maxwell généralisé. A partir de ce formalisme, chaque tenseur  $\bar{\bar{Q}}^\alpha$  est obtenu avec l'aide de la relation suivante :

$$\bar{\bar{Q}}^\alpha = \bar{\bar{Q}}_0^\alpha \exp\left(-\frac{t}{\tau_\alpha}\right) + \int_0^t \beta_\infty^\alpha \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_\alpha}\right) \frac{d}{ds} \left( J^{-\frac{2}{3}} \cdot DEV_L \left( 2 \frac{\partial \tilde{\psi}^\alpha}{\partial \bar{\bar{C}}} \right) \right) ds \quad (2.75)$$

avec

$$\tilde{\psi}^\alpha(\bar{\bar{C}}) = \beta_\infty^\alpha \tilde{\psi}^\infty(\bar{\bar{C}}) \quad (2.76)$$

Cette formulation, outre sa complexité, ressemble fortement à l'expression du comportement viscoélastique linéaire. En effet, nous pouvons faire un rapprochement entre les paramètres  $(G_i, \tau_i)$  utilisés dans les séries de Prony avec les paramètres  $(\beta_\infty^\alpha, \tau_\alpha)$  permettant de décrire le comportement visqueux en

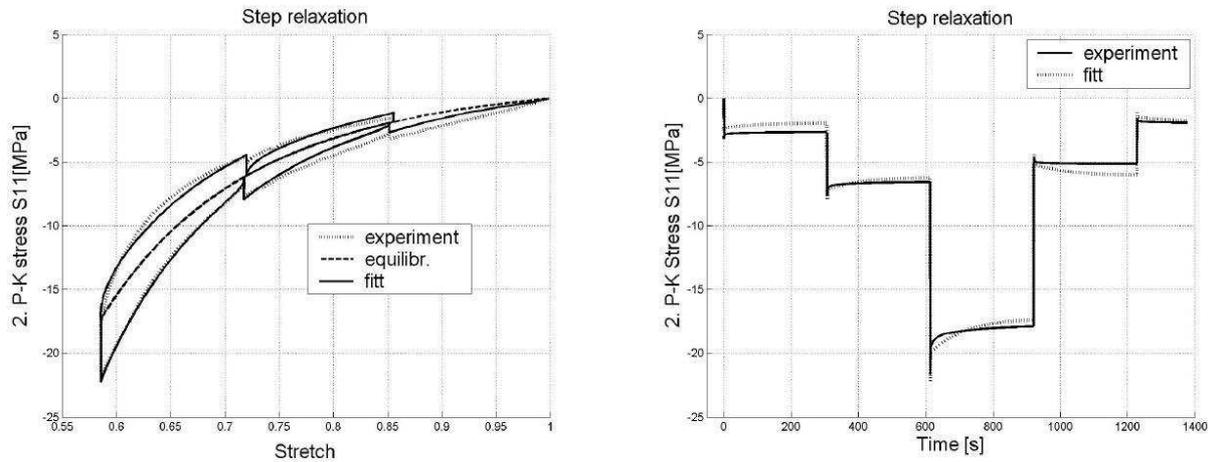


FIGURE 2.5 – Confrontation du modèle Eléments Finis avec les résultats expérimentaux (Marvalova, 2007)

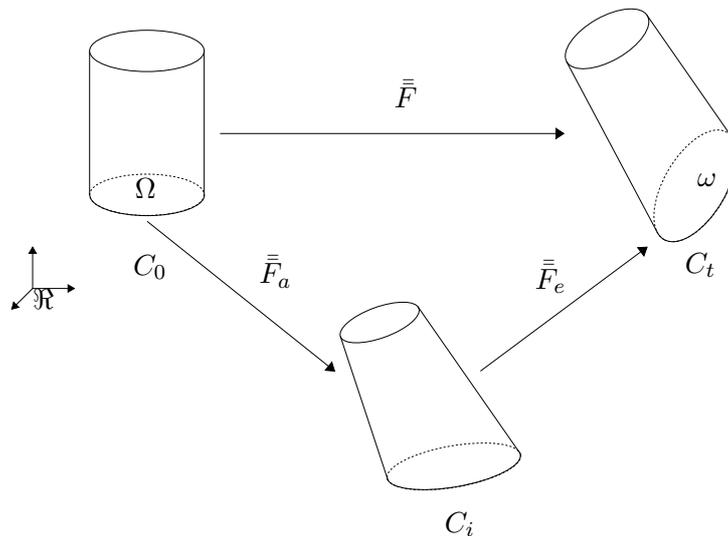


FIGURE 2.6 – Milieu avec une configuration intermédiaire.

grandes déformations. Marvalova (2007) utilise l'étude développée par Holzapfel (1996a) pour modéliser le comportement d'un élastomère chargé à partir du code de calcul ANSYS. Elle y redéfinit les concepts développés par Holzapfel (1996a). Au travers d'une comparaison numérique/expérimentale, l'auteur valide alors le modèle implémenté dans ANSYS (fig. 2.5).

### Formulation Différentielle

La formulation différentielle est fondée sur l'hypothèse des matériaux standards généralisés (cf. paragraphe 2.3.1.6). Pour la mise en oeuvre d'une telle approche, un choix judicieux de variables internes est nécessaire. Il est souvent préférable de se ramener à des variables ayant un sens physique. Une méthode consiste en l'introduction d'états intermédiaires ( $C_i$ ) pour passer d'un état de référence  $C_0$  à un état actuel  $C_t$  (fig.2.6).

Ce concept a été initialement développé pour décrire les comportements élastoplastiques en grandes

déformations (Sidoroff, 1975b). Il considère donc la transformation comme la décomposition d'une transformation purement élastique avec une autre purement anélastique (Boukamel, 2006)(fig. 2.6). En notant  $\bar{\bar{F}}_e$  et  $\bar{\bar{F}}_a$  respectivement les gradients de transformation élastiques et anélastiques, le tenseur gradient  $\bar{\bar{F}}$  se décompose comme suit

$$\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{F}}_e \cdot \bar{\bar{F}}_a \quad (2.77)$$

Ainsi, pour chaque transformation, il est possible de définir les tenseurs de Cauchy-Green droit :

$$\bar{\bar{C}}_e = \bar{\bar{F}}_e^T \cdot \bar{\bar{F}}_e \quad (2.78a)$$

$$\bar{\bar{C}}_a = \bar{\bar{F}}_a^T \cdot \bar{\bar{F}}_a \quad (2.78b)$$

Il en va de même pour le tenseur de Cauchy-Green gauche et le tenseur taux de déformation. Différents modèles résultent de ce formalisme. L'ensemble des modèles présentés sont exprimés dans la description mixte, c'est-à-dire sous la forme du premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff en fonction du tenseur des déformation de Green-Lagrange. Le tableau 2.4 propose une liste non exhaustive de modèles développés à partir de l'approche des états intermédiaires. Dans ce tableau, pour l'ensemble des modèles présentés, l'écriture des potentiels hyperélastiques et dissipatifs sont exprimés, ainsi que l'équation complémentaire produite par l'introduction d'une variable interne.

#### REMARQUE 2.3

Afin de développer des modèles plus complets, Sidoroff (Sidoroff, 1976) propose une décomposition de la transformation en plusieurs états intermédiaires. Méo (2000), Martinez (2005), Grandcoin (2008) montrent des applications de ce type de décomposition dans le cas de comportement hyperelasto-visco-plastique.

## 2.4 Modèles développés

### 2.4.1 Introduction

Afin de décrire le comportement du polychloroprène, deux approches ont été développées. La première, analytique, utilise une formulation différentielle de la viscoélasticité en grandes déformations sur une géométrie simplifiée. La seconde consiste en une méthode par éléments finis, avec le code de calcul ANSYS, reprenant les travaux de Holzapfel (1996a). Le but de ces modélisations est l'obtention d'une loi contrainte-déformation simple qui puisse retranscrire la réponse du matériau et de la structure à un chargement cyclique, jusqu'à un niveau maximal de déformation égal à 70%. Le tableau 2.2, résumant une liste non exhaustive des principaux modèles hyperélastiques disponibles dans la littérature, montre que le modèle de Mooney est capable de décrire le comportement des élastomères jusqu'à 100% de déformation. Il est donc choisi pour représenter la partie hyperélastique du comportement de notre matériau (pour le modèle analytique et éléments finis) car il semble être le modèle le plus simple qui convienne à notre application. Concernant la partie viscoélastique, le modèle diffère selon l'approche envisagée.

- La méthode éléments finis ne nous donne pas le choix du modèle (modèle de Maxwell généralisé), mais nous contrôlons le nombre de branches viscoélastiques nécessaires. Dans notre application, nous en choisissons deux.
- L'approche analytique nous laisse plus de libertés. Dans ce chapitre, nous avons vu différents modèles viscoélastiques issus de la méthode différentielle. Le modèle de Kelvin-Voigt, dans un souci de simplicité, est adopté.

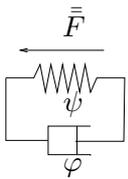
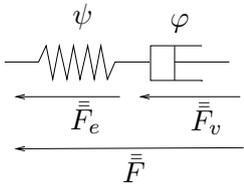
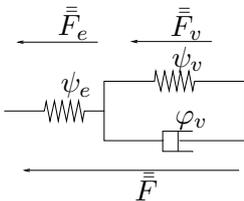
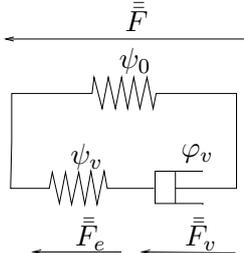
| Modèle            | Représentation rhéologique  | $\psi$   | $\varphi$                            | Equation complémentaire   |
|-------------------|---|--|--------------------------------------|---|
| Kelvin-Voigt      |    | $\psi = \psi(\bar{C})$                         | $\varphi = \varphi(\dot{\bar{E}})$   | $\emptyset$   |
| Maxwell           |   | $\psi = \psi(\bar{C}_e)$                       | $\varphi = \varphi(\dot{\bar{C}}_v)$ | $\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{C}_v} = - \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\bar{C}}_v}$   |
| Poynting-Thompson |  | $\psi = \psi_e(\bar{C}_e) + \psi_v(\bar{C}_v)$ | $\varphi = \varphi(\dot{\bar{C}}_v)$ | $\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{C}_v} = - \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\bar{C}}_v}$   |
| Zener             |  | $\psi = \psi_0(\bar{C}) + \psi_v(\bar{C}_v)$   | $\varphi = \varphi(\dot{\bar{C}}_v)$ | $\rho_0 \frac{\partial \psi_v}{\partial \bar{C}_v} = - \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\bar{C}}_v}$ |

TABLE 2.4 – Tableau récapitulatif non exhaustif de modèles viscohyperélastiques

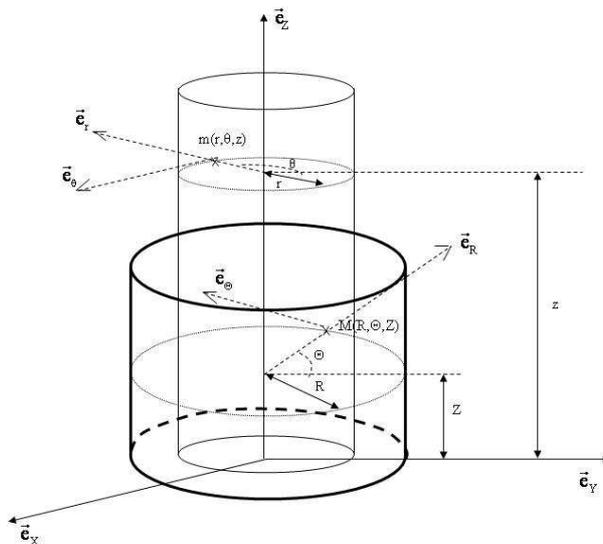


FIGURE 2.7 – Description d'une sollicitation de traction-torsion d'un cylindre

## 2.4.2 Modèle Analytique

Le modèle de comportement analytique constitue un outil simple pour calculer, *a posteriori*, des critères de fatigue locaux, pour une structure donnée en polychloroprène. Dans cette partie, le modèle va être utilisé sur une structure cylindrique, le diabolo étant approximé par un cylindre, dont le rayon est celui de la partie utile. La méthodologie de ce calcul, qui se base sur les travaux de [Hartman \(2001\)](#) et [Feng et al. \(1992\)](#), est présentée en annexe (annexe A). Ainsi, la cinématique de la sollicitation multiaxiale sera d'abord déterminée, à partir d'un chargement simultané en traction et torsion d'un cylindre. Ensuite, une loi de comportement de type Kelvin-Voigt adaptée aux grandes déformations sera utilisée pour obtenir la relation Contrainte-Déformation pour le polychloroprène. Cette formulation reposera sur les formalismes de la thermodynamique présentés dans le paragraphe 2.2. Ce modèle de comportement disposera de paramètres matériaux qu'il sera nécessaire d'identifier et de valider.

### 2.4.2.1 Formulation

Le chargement multiaxial, tel qu'il a été approché dans cette étude, est une combinaison d'une sollicitation en traction et en torsion. La structure étudiée étant un cylindre, il est donc judicieux de formuler la cinématique du chargement dans un repère cylindrique. D'après ce qui a été vu dans ce chapitre, la base de la loi de comportement se trouve dans le calcul du tenseur gradient.

La figure 2.7 représente la sollicitation de traction-torsion d'une structure cylindrique, dans lequel un point  $M(R, \Theta, Z)$ , à l'état initial, est transformé en un point  $m(r, \theta, z)$ . Les relations liant les coordonnées à l'état initial à ceux de l'état actuel sont formulées dans l'eq. 2.79 :

$$r = \lambda^{-1/2} R \quad \theta = \Theta + \frac{\beta Z}{L} \quad z = \lambda Z \quad (2.79)$$

Où  $\lambda$  correspond à l'élongation axiale,  $\beta$  au pilotage angulaire,  $L$  à la longueur du cylindre. La position actuelle est donc définie eq.2.1 :

$$\bar{x} = r\bar{e}_r + z\bar{e}_z = \lambda^{-1/2} R \cos\left(\frac{\beta Z}{L}\right)\bar{e}_R + \lambda^{-1/2} R \sin\left(\frac{\beta Z}{L}\right)\bar{e}_\Theta + Z\lambda\bar{e}_Z \quad (2.80)$$

A partir de l'eq. 2.80, le tenseur gradient peut être calculé :

$$F = \begin{pmatrix} \lambda^{-1/2} R \cos(\frac{\beta Z}{L}) & -\lambda^{-1/2} R \sin(\frac{\beta Z}{L}) & -\frac{\lambda^{-1/2} R \beta}{L} \sin(\frac{\beta Z}{L}) \\ \lambda^{-1/2} R \sin(\frac{\beta Z}{L}) & \lambda^{-1/2} R \cos(\frac{\beta Z}{L}) & \frac{\lambda^{-1/2} R \beta}{L} \cos(\frac{\beta Z}{L}) \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

A présent, à partir du tenseur gradient, la loi de comportement peut être calculée (eq. 2.82).

$$\bar{\Pi} = 2\bar{F} \cdot \frac{\partial W}{\partial \bar{C}} + \bar{F} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{E}} - p\bar{F}^{-T} \quad (2.82)$$

### 2.4.2.2 Identification

La réponse du matériau, à une sollicitation cyclique, peut être divisée en trois parties (fig. 2.8) :

- adoucissement, dû aux phénomènes liés au matériau (effet Mullins, endommagement, viscoélasticité)
- stabilisation du comportement mécanique
- rupture

Un point représentatif de l'histoire du chargement se trouve donc dans la phase de stabilisation. C'est pour cette raison que l'identification du modèle est réalisée à partir d'un cycle stabilisé du matériau, en l'occurrence, le 2000<sup>me</sup> cycle. La partie hyperélastique, dont l'expression est rappelée dans l'eq.2.83, est identifiée sur la moyenne du cycle stabilisé, en traction simple. La fig. 2.9 représente la courbe moyenne relatif à un cycle de chargement.

$$\Pi_{33} = 2(\lambda - \frac{1}{\lambda})[C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda}] \quad (2.83)$$

L'identification du comportement se fera avec l'aide du logiciel Matlab, par une minimisation de l'écart, au sens des moindres carrés, entre courbes expérimentale et théorique. Les paramètres ainsi obtenus sont  $C_{10} = 0.0476MPa$  et  $C_{01} = 0.7087MPa$ . A présent, la partie visqueuse est identifiée à partir de la boucle d'hystérésis, formée par le 2000<sup>me</sup> cycle.

Pour déterminer la partie visqueuse du modèle, les coefficients  $C_{10}$  et  $C_{01}$  sont fixés, et l'expression de la contrainte de traction devient :

$$\Pi_{33} = 2(\lambda - \frac{1}{\lambda})(C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda}) + \eta \dot{\lambda} (\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda^{-\frac{7}{2}}) \quad (2.84)$$

Ainsi,  $\eta$  est identifié de la même façon que les coefficients de Mooney-Rivlin. Voici les coefficients identifiés pour le modèle analytique :

$$C_{10} = 0.0476MPa \quad (2.85)$$

$$C_{01} = 0.7067MPa \quad (2.86)$$

$$\eta = 0.0037MPa.s - 1 \quad (2.87)$$

A partir de ce modèle, les figures 2.10, 2.11, 2.12 montrent les résultats du modèle analytique (traits pleins) superposés à la réalité expérimentale correspondante (courbes en pointillés) pour trois états multiaxiaux différents.

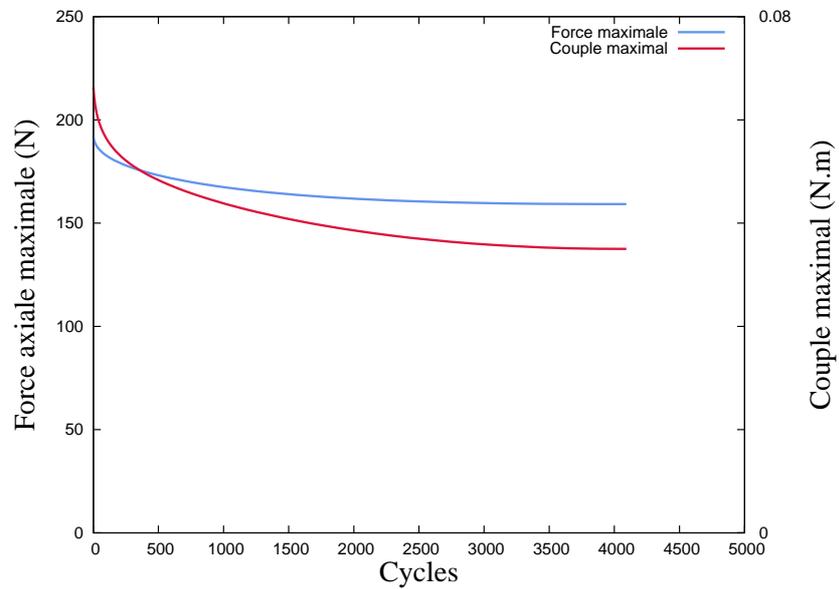


FIGURE 2.8 – Evolution de la force et du couple maximal au cours d'un essai de fatigue multiaxial piloté en déplacement ( $\delta = 180^\circ$ ,  $d_{max} = 20mm$  et  $R_d = -0.2$ )

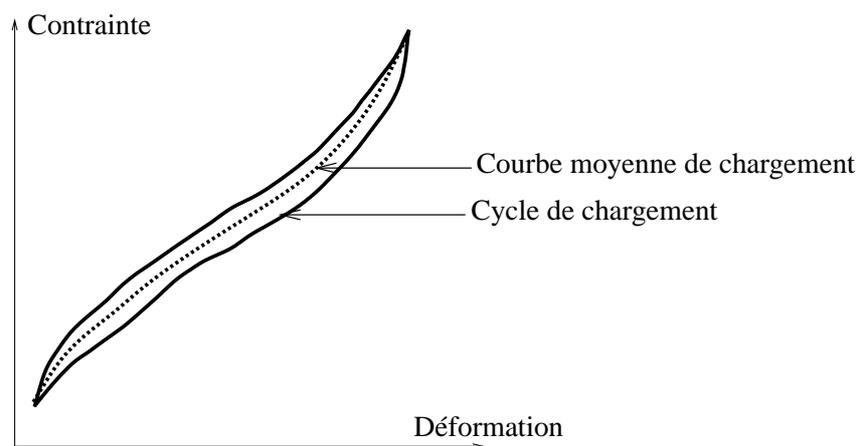


FIGURE 2.9 – Représentation de la courbe moyenne de chargement cyclique

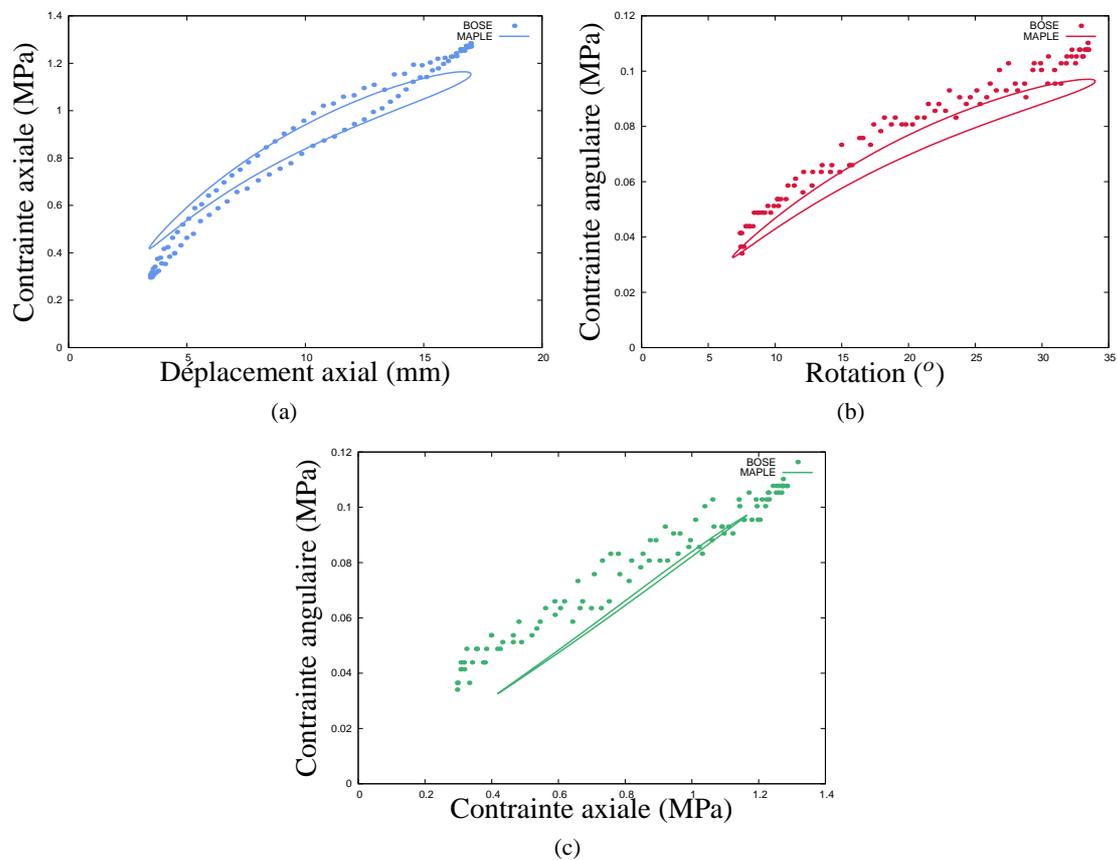


FIGURE 2.10 – Confrontation du modèle analytique avec un cycle de fatigue stabilisé ( $\delta = 0^\circ$ ,  $R_d = 0.2$ ,  $d_{max} = 17mm$ ) : (a) Partie axiale, (b) Partie angulaire (c) Réponse en force

| Déphasage   | $R_d$ | $U_{max}(mm)$ | $\beta_{max}(^\circ)$ | Energie dissipée totale (MPa) |        |        |
|-------------|-------|---------------|-----------------------|-------------------------------|--------|--------|
|             |       |               |                       | Expérimental                  | Modèle | Erreur |
| $0^\circ$   | 0,2   | 20            | 40                    | 0.061                         | 0.056  | -10 %  |
| $0^\circ$   | 0,2   | 17            | 34                    | 0.0406                        | 0.0406 | -7,7 % |
| $0^\circ$   | 0,2   | 15            | 30                    | 0.03                          | 0.028  | -7,1 % |
| $0^\circ$   | 0,1   | 20            | 40                    | 0.0682                        | 0.0685 | 0,5 %  |
| $0^\circ$   | 0     | 20            | 40                    | 0.053                         | 0.056  | 5,8 %  |
| $0^\circ$   | -0,2  | 20            | 40                    | 0.113                         | 0.111  | -2,3 % |
| $90^\circ$  | 0,2   | 20            | 40                    | 0.0481                        | 0.053  | 10 %   |
| $90^\circ$  | -0,2  | 20            | 40                    | 0.1117                        | 0.1075 | -3,8 % |
| $180^\circ$ | 0,2   | 20            | 40                    | 0.061                         | 0.113  | -2,3 % |
| $180^\circ$ | -0,2  | 20            | 40                    | 0.1083                        | 0.1085 | 0,2 %  |

TABLE 2.5 – Validation du modèle analytique en termes de densité d'énergie dissipée

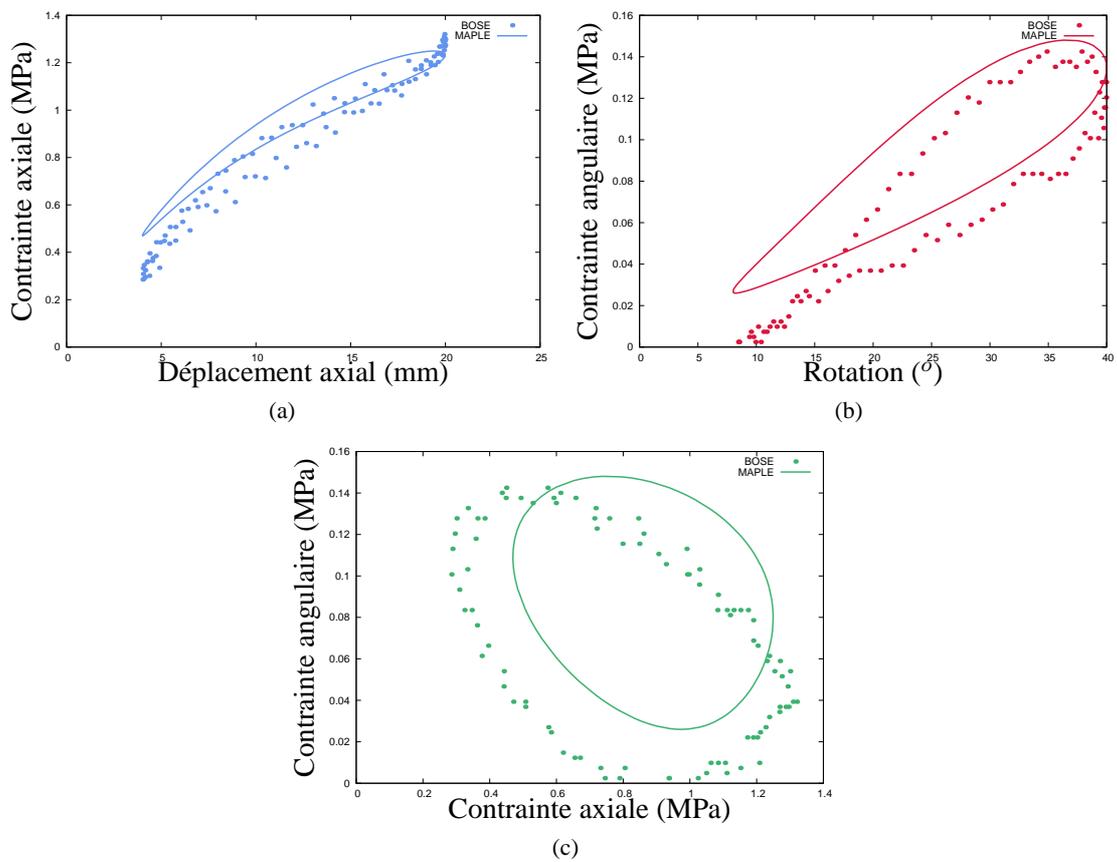


FIGURE 2.11 – Confrontation du modèle analytique avec un cycle de fatigue stabilisé ( $\delta = 90^\circ$ ,  $R_d = 0.2$ ,  $d_{max} = 20mm$ ) : (a) Partie axiale, (b) Partie angulaire (c) Réponse en force

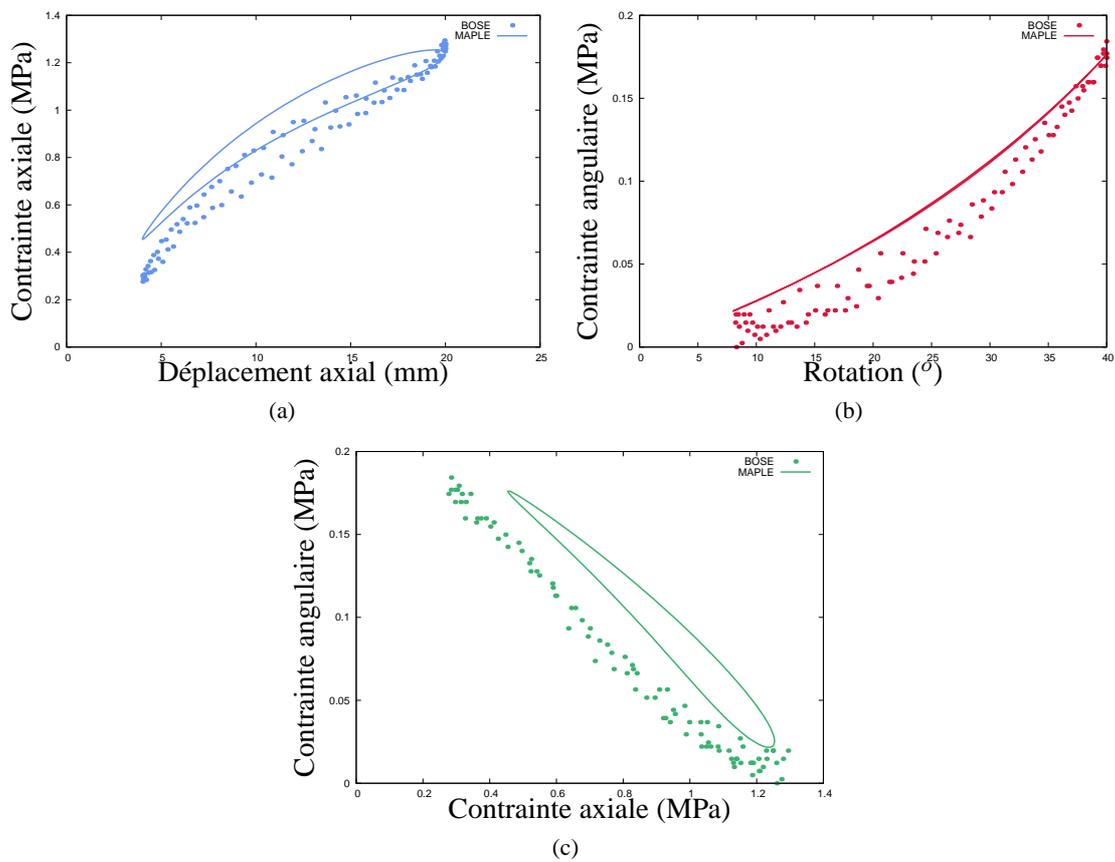


FIGURE 2.12 – Confrontation du modèle analytique avec un cycle de fatigue stabilisé ( $\delta = 180^{\circ}$ ,  $R_d = 0.2$ ,  $d_{max} = 20mm$ ) : (a) Partie axiale, (b) Partie angulaire (c) Réponse en force

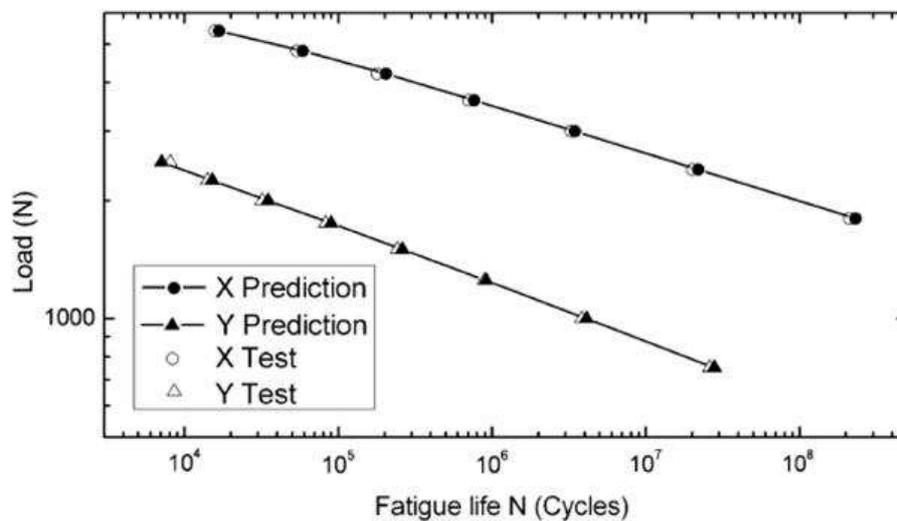


FIGURE 2.13 – Confrontation du comportement en fatigue prédit par le modèle éléments finis de Li et al. (2009) avec les résultats expérimentaux

Le tableau 2.5 propose une quantification de ces résultats, qui présente des erreurs, relatives à l'énergie dissipée, comprises entre 0 et 10%. Un tel résultat valide le modèle analytique, qui permet donc de calculer des paramètres mécaniques en un point d'une structure en polychloroprène. Pour compléter cette approche, une modélisation éléments finis, réalisée avec un code de calcul industriel, est ainsi proposée.

### 2.4.3 Modèle Eléments finis

La modélisation par la méthode éléments finis est un outil qui est souvent utilisé dans la conception de pièces industrielles. Cette étape peut déterminer les zones critiques d'une structure complexe et également prédire leur comportement en fatigue :

- Samad et Ali (2009), puis Li et al. (2009) déterminent la zone de rupture de supports ainsi que leur comportement en fatigue (fig. 2.13)
- Woo et al. (2009) étudient le comportement en fatigue d'un caoutchouc naturel ayant subi du vieillissement thermique à 70°C. Ils obtiennent une bonne corrélation entre les résultats en fatigue de leur modèle éléments finis et la réalité expérimentale (fig. 2.14).
- Samad et al. (2011) montrent l'efficacité d'un modèle éléments finis à prédire les zones de ruptures d'un amortisseur en caoutchouc naturel (fig. 2.15)

L'objectif de cette partie consiste à développer un calcul permettant de déterminer les paramètres mécaniques dans une structure diabolos en polychloroprène. La mise en place de la méthode éléments finis sera détaillée, le modèle sera ensuite identifié, puis validé.

#### 2.4.3.1 Élément utilisé

On utilise l'élément SOLID186, de forme hexaédrique, qui propose une formulation mixte déplacement-pression (quadratique en déplacement et linéaire en pression). Il sera possible de réaliser une intégration réduite, évitant ainsi les verrouillages dus à l'incompressibilité du matériau. Dans ce cas, on prendra

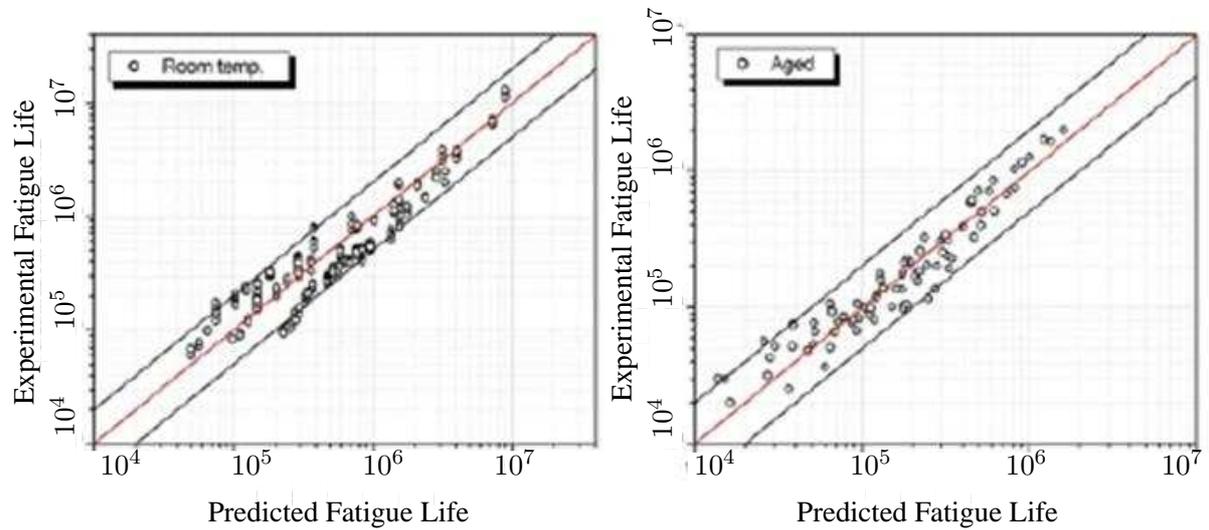


FIGURE 2.14 – Corrélation entre les durées de vies prédites par le modèle de Woo et al. (2009) et la réalité expérimentale

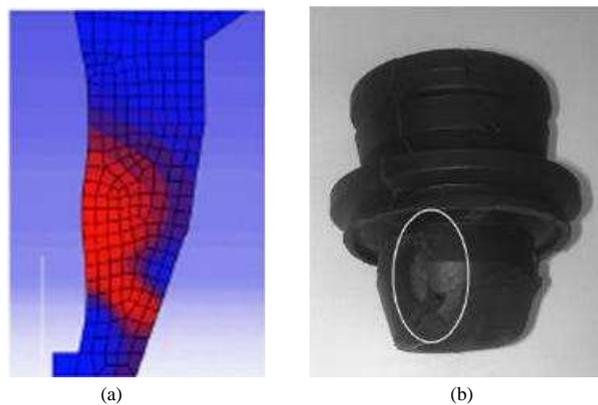


FIGURE 2.15 – Comparaison entre la zone critique désignée par le modèle et la rupture expérimentale correspondante (Samad et al., 2011)

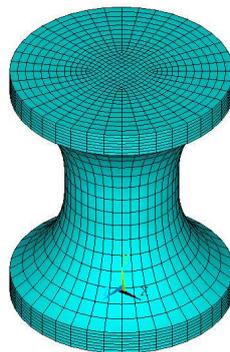


FIGURE 2.16 – Eprouvette diabolos maillée

soin de mettre plus d'un élément dans chaque direction pour éviter la propagation de modes sablier.

### 2.4.3.2 Structure étudiée

La géométrie utilisée ici est celle de la partie caoutchouc de l'éprouvette diabolos. La fig. 2.16 montre le maillage régulier adopté dans cette partie, avec une structure non simplifiée du diabolos.

### 2.4.3.3 Modèle de comportement

Le logiciel de calcul ANSYS v11.0 permet à l'utilisateur de simuler le comportement dissipatif des élastomères en grandes déformations. Le modèle utilisé dans cette partie est un modèle de Maxwell généralisé à deux branches viscoélastiques. Les bases de ce modèle ont été détaillées dans le paragraphe 2.3.3.3. Nous rappelons ici la loi contrainte-déformation qui en découle :

$$\bar{\bar{S}} = \bar{\bar{S}}_{ISO}(\bar{\bar{C}}, C_{10}, C_{01}) - p\bar{\bar{C}}^{-1} + \sum_{\alpha=1}^2 \bar{\bar{Q}}_{\alpha} \quad (2.88)$$

Avec

$$\bar{\bar{Q}}_{\alpha} = e^{-\frac{t}{\tau_{\alpha}}} \bar{\bar{Q}}_0^{\alpha} + \int_0^t \beta_{\infty}^{\alpha} e^{-\frac{t-s}{\tau_{\alpha}}} \frac{d\bar{\bar{S}}_{ISO}}{ds} ds \quad (2.89)$$

Les paramètres  $C_{10}$ ,  $C_{01}$ ,  $\beta_{\infty}^1$ ,  $\beta_{\infty}^2$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont les paramètres à identifier.

### 2.4.3.4 Identification du modèle

La figure 2.17 détaille le protocole utilisé afin d'identifier la loi de comportement développée dans la modélisation éléments finis. Les paramètres sont ainsi initialisés à l'aide de deux résultats :

- la courbe moyenne d'un cycle de fatigue stabilisé en traction pure (cf. paragraphe 2.4.2.2)
- la réponse en relaxation de contrainte en double cisaillement

Les coefficients sont alors initialisés avec l'outil "Curve-fitting" d'ANSYS, puis validés à l'issu d'un calcul éléments finis en traction pure, où le résultat est confronté à un cycle de fatigue stabilisé expérimental, dans le plan (déplacement, force). Ces paramètres étant exempts de toute approximation liée à la structure de l'échantillon, ils constituent un critère de validation intéressant pour ce modèle. Un terme d'erreur est alors calculé et défini dans l'équation 2.90.

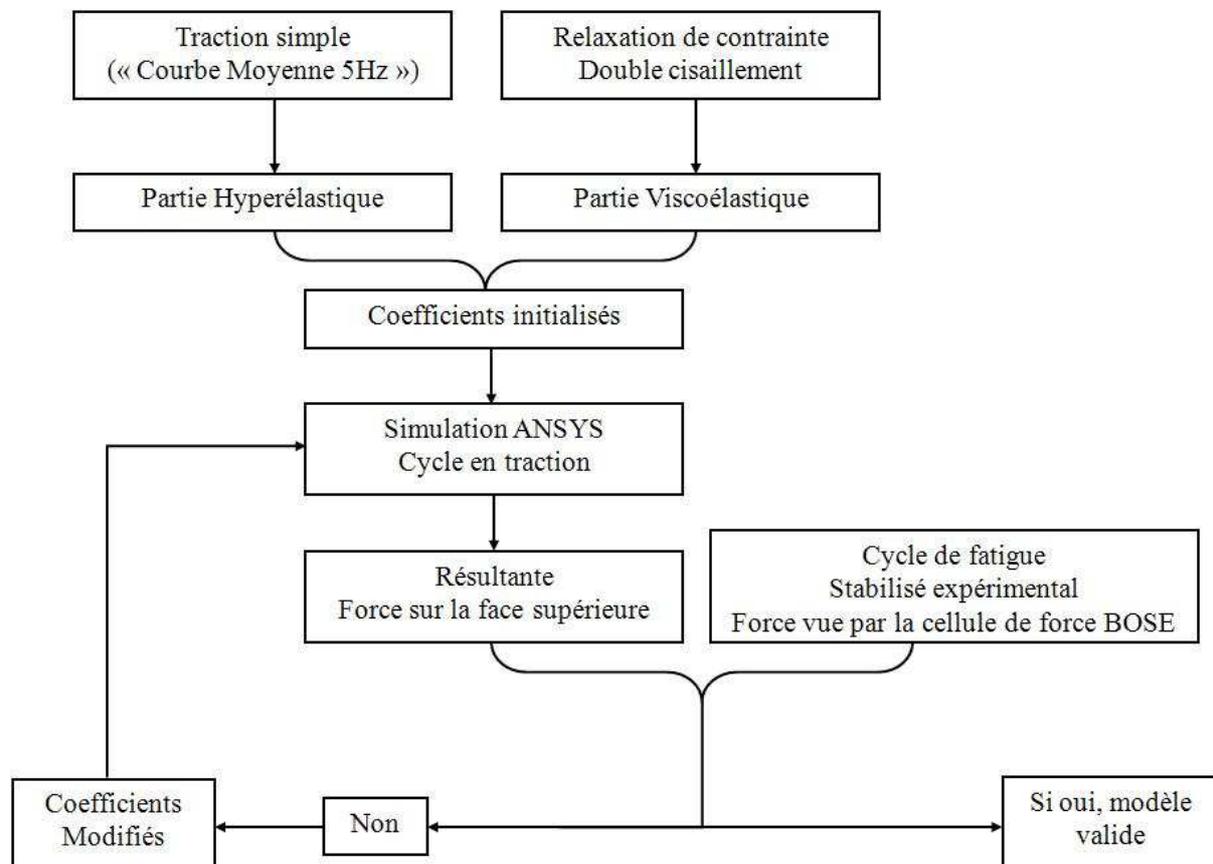


FIGURE 2.17 – Description du protocole d'identification du modèle éléments finis

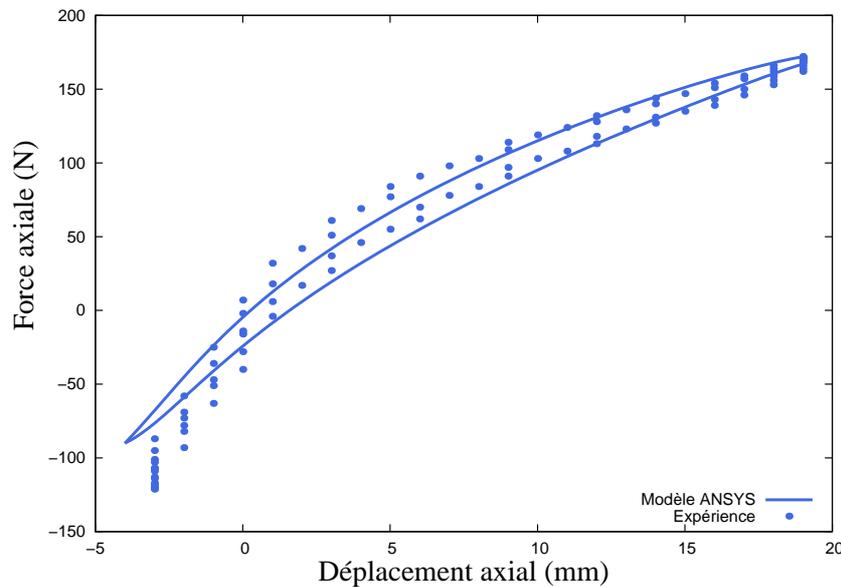


FIGURE 2.18 – Résultat de l'identification du modèle ANSYS pour un chargement en traction pure ( $R_d = -0.2, U_{max} = 20mm$ )

$$Erreur = \sqrt{0.6(W_d^{MOD} - W_d^{EXP})^2 + 0.1(E^{*MOD} - E^{*EXP})^2 + 0.3(F_{max}^{MOD} - F_{max}^{EXP})^2} \quad (2.90)$$

Si la condition de validation du modèle (une erreur inférieure à 10%) n'est pas respectée, les coefficients sont alors modifiés et le modèle recalculé.

#### REMARQUE 2.4

En observant l'éq. 2.90, il y a des pondérations différentes pour les termes d'erreur en énergie dissipée, module dynamique et force maximale. Ces coefficients ont été choisis en fonction de l'importance que nous avons donnée à chaque terme d'erreur. Etant donné que ce modèle a essentiellement pour vocation de représenter l'énergie dissipée du polychloroprène, celui-ci a obtenu le coefficient le plus important.

La boucle d'identification, arrêtée une fois que l'erreur calculée est inférieure à 10%, est réalisée pour un rapport de déplacement égal à  $-0.2$ , et un déplacement maximal de 20 mm. Cette condition représente la sollicitation la plus sévère car elle dispose de la plus grande amplitude. La figure 2.18 montre le résultat correspondant à l'identification du modèle élément finis. L'erreur obtenue est de 3 %.

Les paramètres identifiés et implémentés dans le code de calcul ANSYS sont les suivants :

$$\begin{aligned} C_{10} &= 0,36MPa \\ C_{01} &= 0,12MPa \\ \alpha_1^G &= \frac{\beta_\infty^1}{G_0} = 0,18 \\ \alpha_2^G &= \frac{\beta_\infty^2}{G_0} = 0,1 \\ \tau_1 &= 2s \\ \tau_2 &= 2000s \end{aligned} \quad (2.91)$$

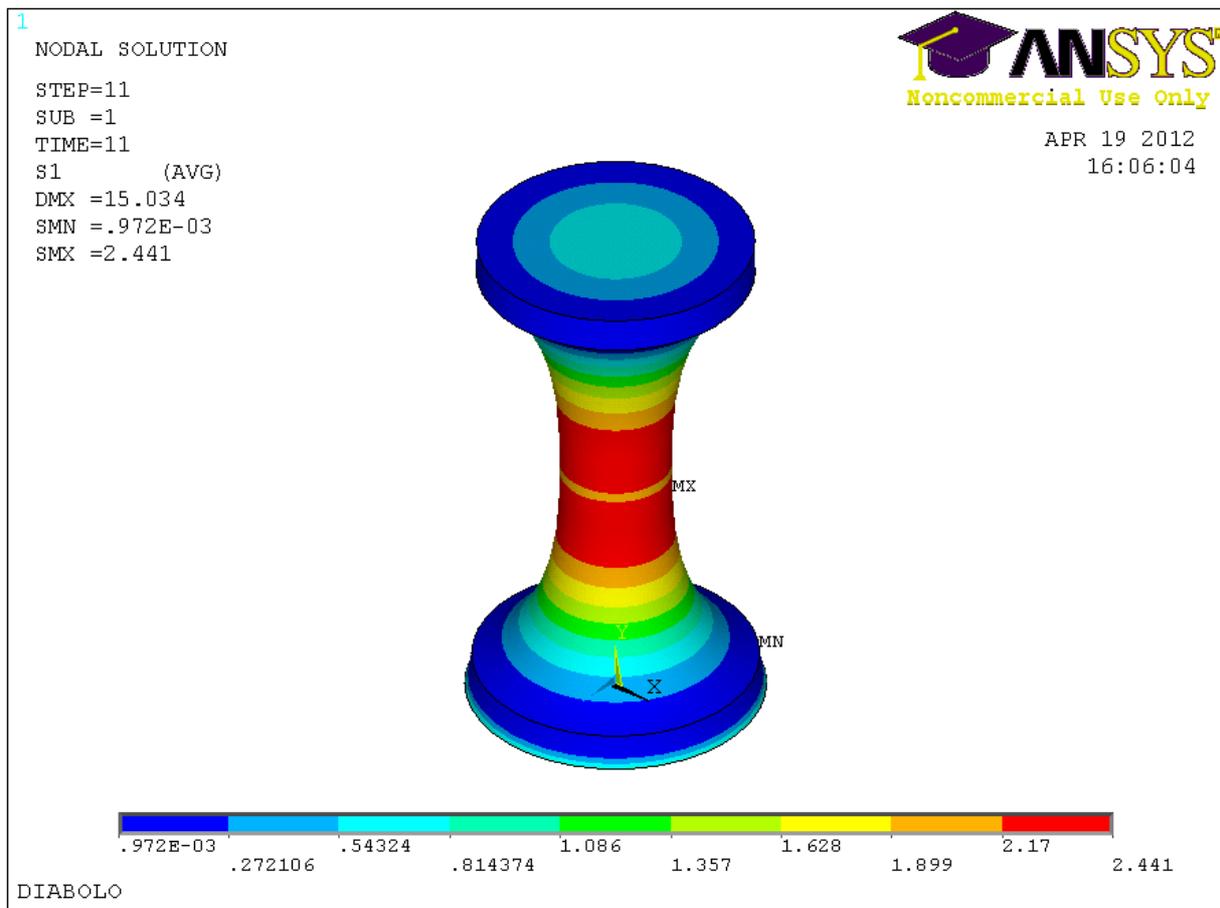


FIGURE 2.19 – Résultat d’un calcul éléments finis en traction pure :  $d_{max} = 15\text{mm}$  et  $R_d = -0.2$ , observation de la première contrainte principale à l’instant où le chargement est maximal

#### 2.4.3.5 Résultats en traction simple

La figure 2.19 montre le résultat d’un calcul ANSYS, pour une sollicitation en traction simple, avec un rapport  $R_d$  égal à  $-0.2$  et un déplacement maximal égal à  $15\text{ mm}$ .

A partir de ce résultat, nous pouvons remarquer que la zone critique ne se trouve pas à mi-hauteur de l’éprouvette, mais au niveau du congé de raccordement. Cela correspond à une hauteur égale à  $13.25\text{ mm}$  (noeud 22) et  $16.75\text{ mm}$  (noeud 5042). Il est également intéressant de constater que la contrainte axiale maximale se situe en rayon extérieur de la section du diabolo (fig. 2.20), révélant ainsi que la zone critique de cette structure est localisée en surface extérieure.

Avant de pouvoir utiliser le modèle éléments finis dans le contexte de la fatigue des élastomères, il est important de pouvoir le valider dans le cas de sollicitations multiaxiales. Cette étape est présentée dans la partie suivante.

#### 2.4.3.6 Résultats en chargement multiaxial

La confrontation entre les résultats expérimentaux et le modèle est réalisée par le biais de la force et du couple. Ces données vont être calculées à partir du modèle éléments finis en s’inspirant de l’approche développée par Hartman (2001) :

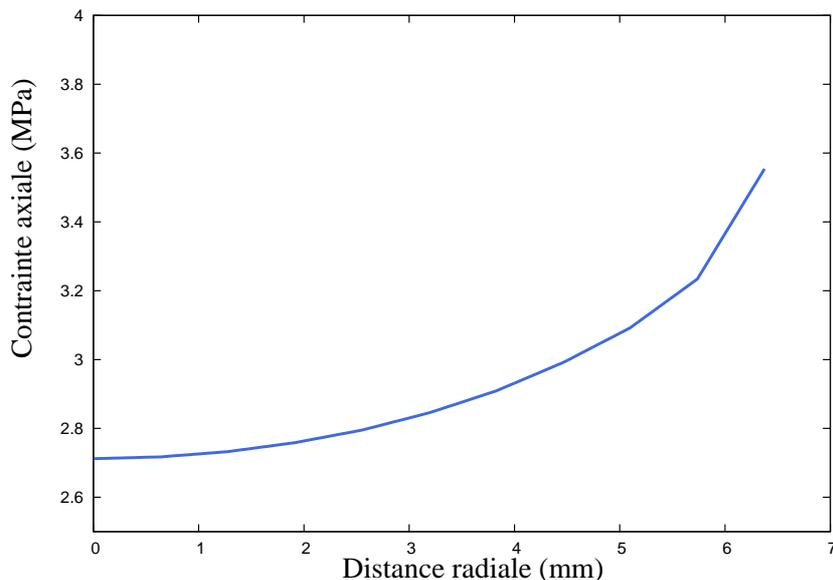


FIGURE 2.20 – Evolution de la contrainte normale suivant le rayon de la section de l'éprouvette, pour une hauteur de 13,25 mm

$$N = \int_S \sigma_{zz} \cdot ds \quad (2.92)$$

$$M = \int_S r \cdot \sigma_{\theta z} \cdot ds \quad (2.93)$$

$N$  et  $M$  représentent respectivement la force axiale et le couple de torsion, obtenus à partir de l'intégration de la composante axiale et angulaire du tenseur des contraintes de cauchy dans la surface supérieure du diabololo  $S$ . Les figures 2.21, 2.22 et 2.23 montrent respectivement les réponses du matériau en force, la partie axiale de la réponse et sa partie angulaire pour un déphasage de  $90^\circ$  et un déplacement maximal de  $20\text{mm}$ . Les résultats du modèle et de l'expérience correspondants y sont respectivement représentés par des traits pleins et des points. Un code couleur a été respecté afin d'apporter plus de clarté aux graphiques. Ainsi, pour un déphasage à  $90^\circ$ , le modèle semble bien reproduire le comportement multiaxial de notre matériau.

Les figures 2.24 à 2.29 montrent les résultats du modèle pour un déphasage de  $180^\circ$  et  $0^\circ$ . Celui-ci, globalement, semble être fidèle à la réalité expérimentale pour les trois chargements multiaxiaux.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les formalismes de la thermodynamique ont été rappelés dans le cadre des grandes déformations, puis appliqués à l'établissement d'une loi de comportement. Nous avons ensuite pu voir une liste non exhaustive de modèles hyperélastiques et viscohyperélastiques. Cet état de l'art nous a ensuite servi à établir, dans un premier temps, un modèle analytique simple. Celui-ci utilise une approche dérivative de la viscoélasticité, à partir d'un modèle de Kelvin-Voigt. Cette méthode, très peu coûteuse en temps de calcul, aboutit à une erreur globale inférieure à 10%. Toutefois, celle-ci ne permet pas d'indiquer la répartition des différents paramètres physiques au sein d'une structure complexe. Cette

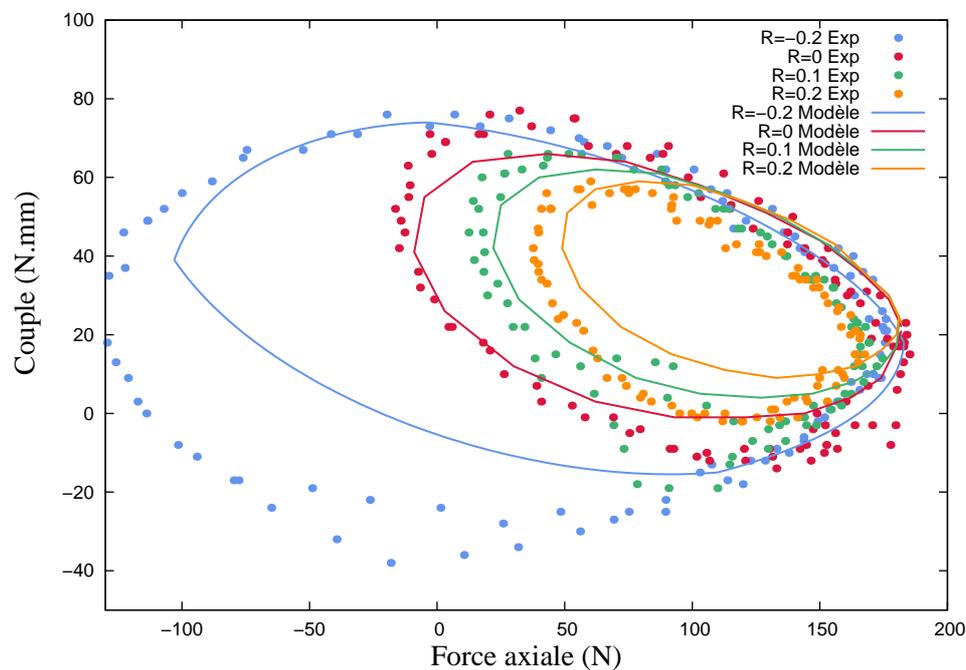


FIGURE 2.21 – Réponses en force du modèle éléments finis, avec  $\delta = 90^\circ$ , pour différents rapports  $R_d$  et  $d_{max} = 20mm$ . Confrontation avec les réponses expérimentales.

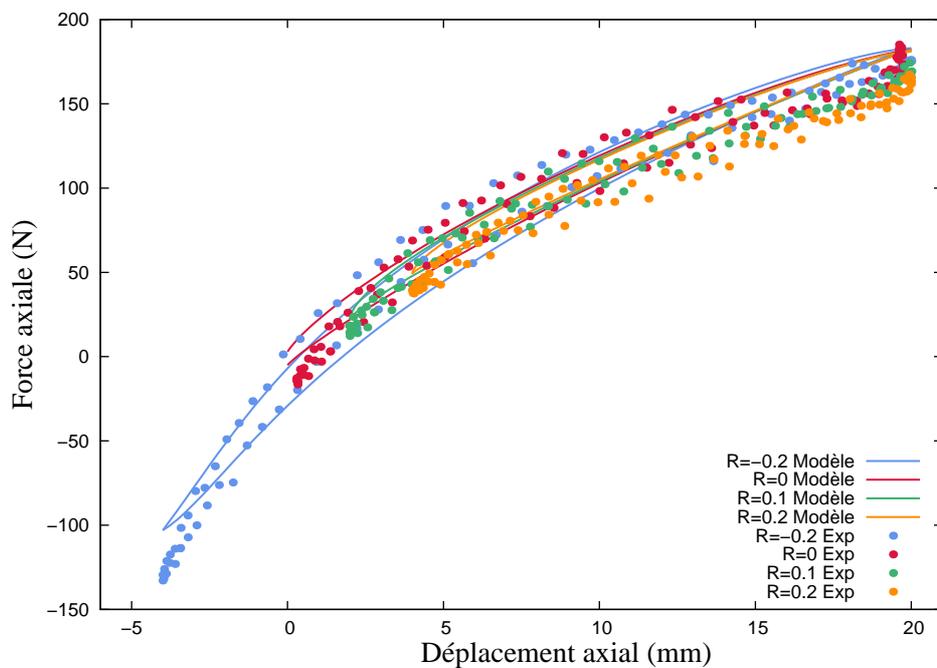


FIGURE 2.22 – Partie axiale des réponses en force du modèle éléments finis, avec  $\delta = 90^\circ$ , pour différents rapports  $R_d$  et  $d_{max} = 20mm$ . Confrontation avec les réponses expérimentales.

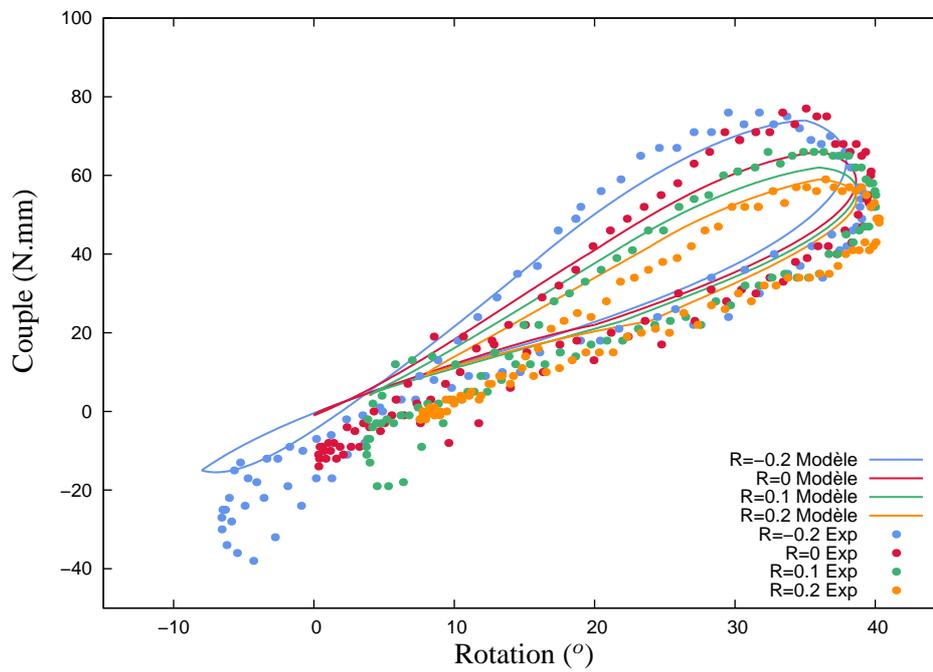


FIGURE 2.23 – Partie angulaire des réponses en force du modèle éléments finis, avec  $\delta = 90^\circ$ , pour différents rapports  $R_d$  et  $d_{max} = 20mm$ . Confrontation avec les réponses expérimentales.

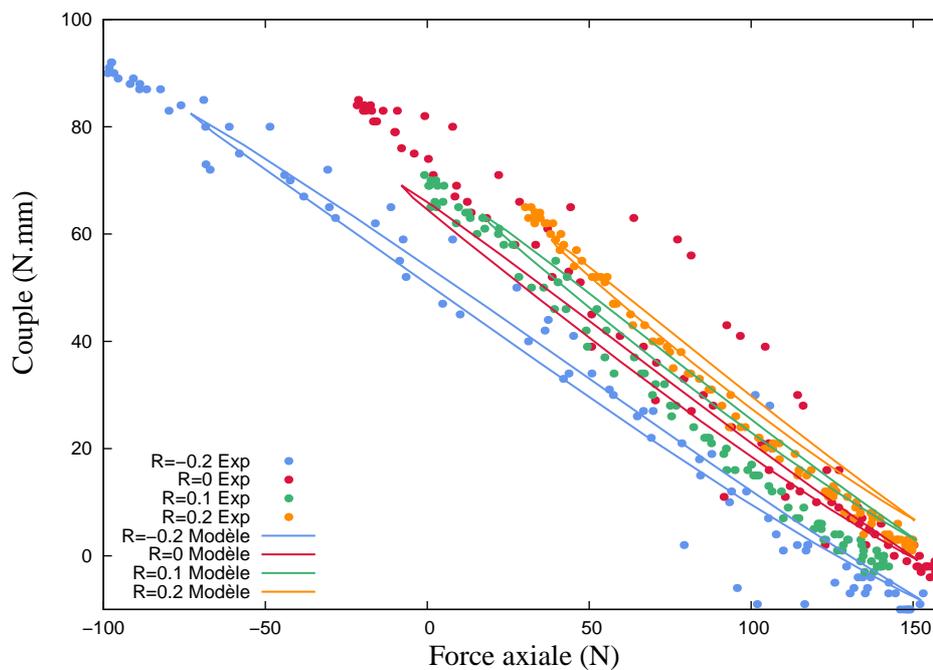


FIGURE 2.24 – Réponses en force du modèle éléments finis, avec  $\delta = 180^\circ$ , pour différents rapports  $R_d$  et  $d_{max} = 15mm$ . Confrontation avec les réponses expérimentales.

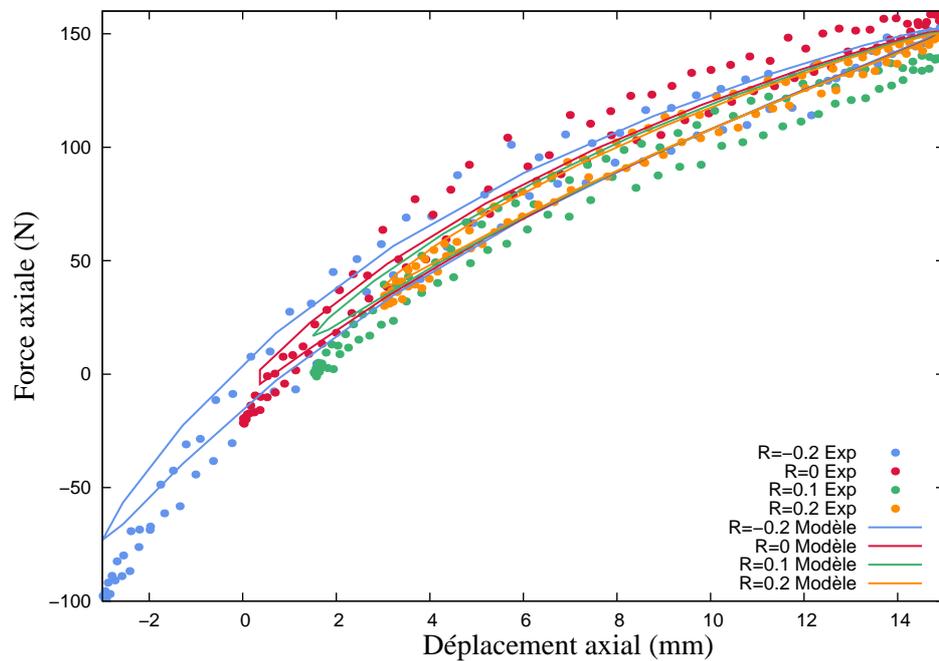


FIGURE 2.25 – Partie axiale des réponses en force du modèle éléments finis, avec  $\delta = 180^\circ$ , pour différents rapports  $R_d$  et  $d_{max} = 15mm$ . Confrontation avec les réponses expérimentales.

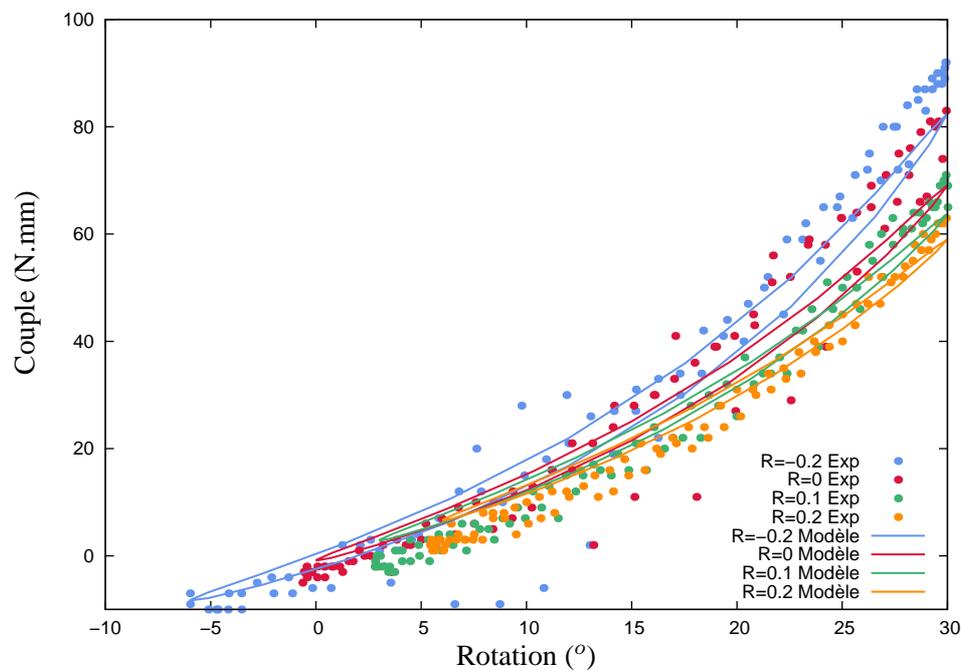


FIGURE 2.26 – Partie angulaire des réponses en force du modèle éléments finis, avec  $\delta = 180^\circ$ , pour différents rapports  $R_d$  et  $d_{max} = 15mm$ . Confrontation avec les réponses expérimentales.

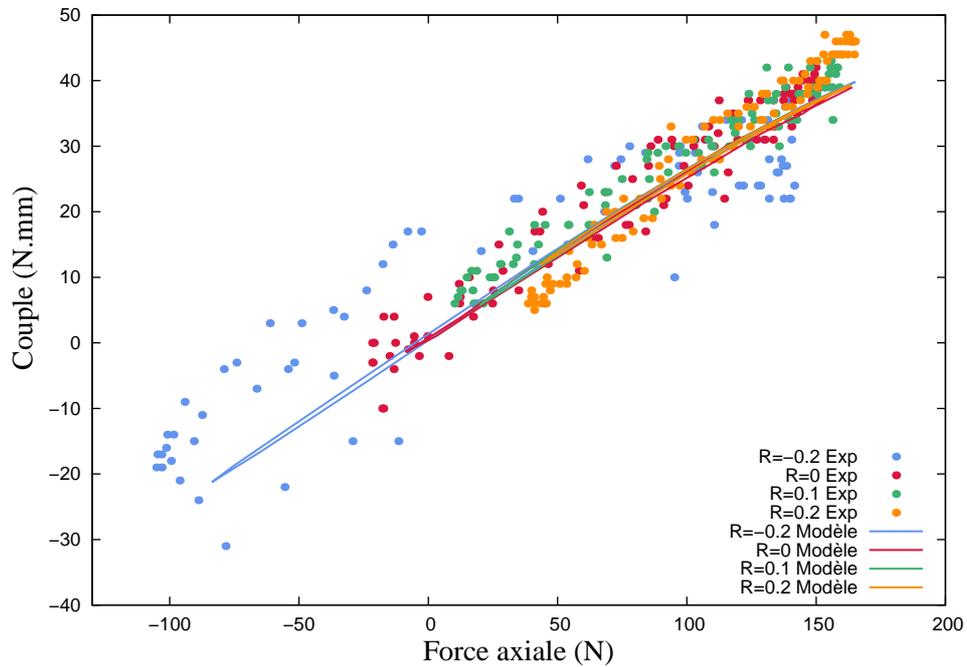


FIGURE 2.27 – Réponses en force du modèle éléments finis, avec  $\delta = 0^\circ$ , pour différents rapports  $R_d$  et  $d_{max} = 17mm$ . Confrontation avec les réponses expérimentales.

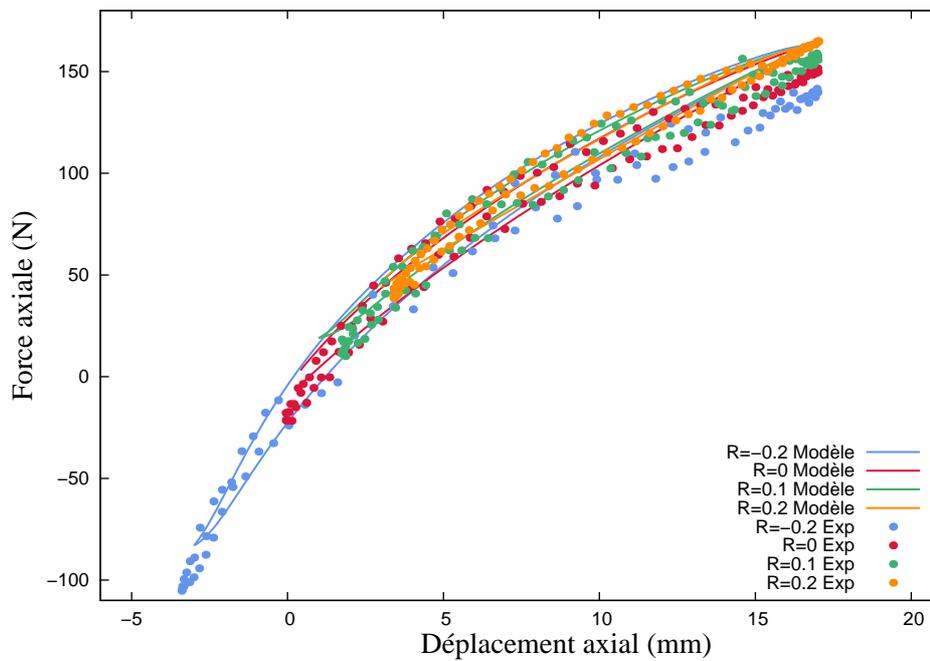


FIGURE 2.28 – Partie axiale des réponses en force du modèle éléments finis, avec  $\delta = 0^\circ$ , pour différents rapports  $R_d$  et  $d_{max} = 17mm$ . Confrontation avec les réponses expérimentales.

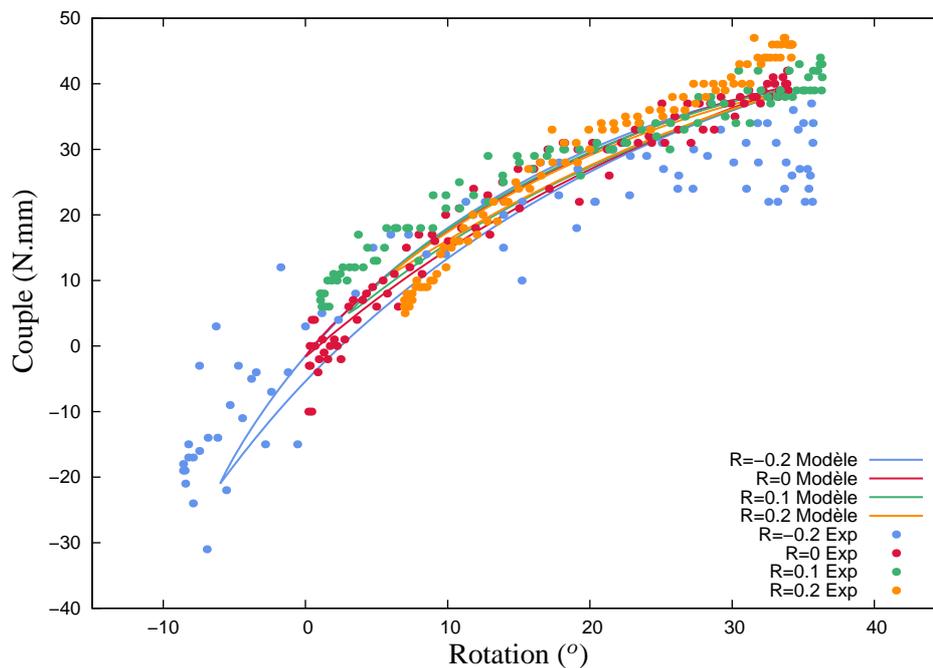


FIGURE 2.29 – Partie angulaire des réponses en force du modèle éléments finis, avec  $\delta = 0^\circ$ , pour différents rapports  $R_d$  et  $d_{max} = 17mm$ . Confrontation avec les réponses expérimentales.

information est fourni par un modèle éléments finis implémenté dans le code de calcul ANSYS ADPL. Cette approche repose sur les travaux de [Holzapfel \(1996a\)](#), qui consiste à déterminer le comportement viscoélastique en grandes déformations par une loi de Maxwell généralisé. Dans notre application, nous avons opté pour un modèle à deux branches viscoélastiques. Les coefficients de celui-ci ont été initialisés avec l'outil "Curve-Fitting" du logiciel, puis optimisé à l'aide de résultats expérimentaux en fatigue uniaxiale. Il en résulte un modèle identifié en traction simple qui propose des prédictions intéressantes du comportement du matériau pour des chargements multiaxiaux. Les modèles obtenus dans ce chapitre seront utilisés pour déterminer des paramètres locaux liés à la structure et au matériau.

Ces formulations ont été optimisés à partir d'un cycle de fatigue stabilisé en traction, puis validés pour des chargements multiaxiaux.