

Exemple numérique : interactions acousto-optique dans un barreau de silice

Ce chapitre présente un exemple numérique qui a pour objectif d'évaluer l'erreur introduite sur le calcul des coefficients de couplage élasto-optique selon la formulation adoptée, c'est-à-dire, théorie linéarisée de Pockels en fonction du champ de déplacement ou en fonction du champ électrique. Cette dernière se ramène à la formulation non-linéaire de Nelson et Lax. Nous avons choisi de travailler sur le cas d'un barreau de silice, de diamètre un micron pour une longueur d'onde optique de $1,55 \mu\text{m}$. Cette fibre peut se concevoir comme une version très simplifiée d'une fibre à bande interdite simultanément acoustique et optique, dans la mesure où les deux types de champ restent confinés dans le même volume : elle présente donc, du point de vue d'une démonstration de principe tout au moins, le même intérêt phénoménologique que la PCF de la figure 7.1 par exemple. Dans les deux cas, la forme des modes élastiques du guide peut être obtenue au moyen de simulations en éléments finis de la section de la fibre, telles que présentées par Vincent Laude *et al.* [93]. Celle des modes optiques peut être calculée soit par utilisation d'un logiciel commercial, par exemple, dans le cas d'une fibre microstructurée, soit par calcul analytique des modes d'un guide d'onde optique cylindrique, comme rapporté dans de nombreux ouvrages (par exemple [158]), dans le cas du barreau de silice.

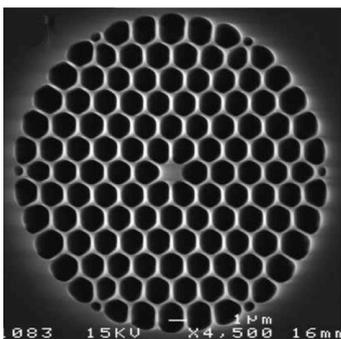


FIG. 7.1 – Image au microscope électronique à balayage d'une fibre à cristaux photoniques en silice. Le diamètre du cœur, solide, est de $1,25 \mu\text{m}$. La large fraction d'air de la gaine rend cette fibre photonique comparable à un simple barreau de silice dans l'air. D'après [94].

7.1 Formes des modes élastiques

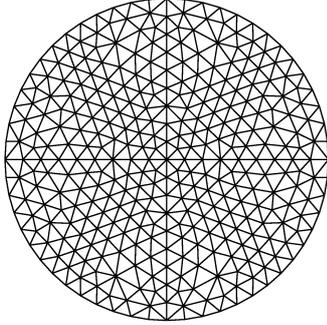


FIG. 7.2 – Exemple de maillage pour un barreau de silice de diamètre $1\ \mu\text{m}$.

Un calcul pertinent des courbes de dispersion des modes élastiques d'une fibre à cristaux photoniques, ou plus simplement dans notre cas d'un barreau de silice, nécessite la prise en compte de la dimension finie de la structure, que la méthode de décomposition en ondes planes ne permet pas d'assurer. Un code éléments finis modifié pour prendre en considération l'aspect propagatif des modes élastiques, a été développé par Vincent Laude [93]. Dans ce contexte, le cas plus général d'une fibre à cristaux photoniques quelconque, c'est-à-dire consistant en un arrangement de trous d'air disposés dans une matrice de silice peut être traité. D'un point de vue élastique, l'énergie élastique peut être considérée comme nulle dans les trous d'air, et reste donc confinée dans la silice. Les frontières de chaque cylindre creux sont supposées libres de toute contrainte et font office de diffuseurs des ondes élastiques incidentes, indépendamment de leur direction de propagation. Enfin, on bénéficiera des simplifications liées à l'isotropie de la silice.

L'analyse des modes élastiques est fondée sur la méthode dite *waveguide finite element method* qui permet de combiner une approche de type décomposition modale le long de la direction de propagation, supposée infinie, avec une autre de type éléments finis de façon à pouvoir simuler une section arbitraire de fibre. Cette dernière, que l'on supposera dans le plan (x, y) est donc maillée par des éléments triangulaires constitués de trois sommets et de six nœuds, un à chaque sommet de l'élément plus un au milieu de chaque arête, comme illustré sur la figure 7.2. Les inconnues du problème sont alors les champs de déplacement suivant x , y et z en chaque nœud. Enfin, on impose une dépendance harmonique en $\exp[j(\Omega t - Kz)]$ le long de la direction de propagation.

Pour des matériaux isotropes et une propagation axiale, les champs transverses u_x et u_y et le champ longitudinal u_z à la direction de propagation sont en quadrature [41]. Les parties réelles des composantes u_x et u_y sont donc couplées à la partie imaginaire de u_z , et réciproquement. Afin de déterminer une solution à caractère unique, les champs de déplacement du mode en chaque

noeud de la structure sont représentés par les fonctions réelles suivantes :

$$u_x(x, y, z, t) = \mathbf{p}(x, y)^T \cdot \hat{\mathbf{u}}_x \sin(\Omega t - Kz), \quad (7.1)$$

$$u_y(x, y, z, t) = \mathbf{p}(x, y)^T \cdot \hat{\mathbf{u}}_y \sin(\Omega t - Kz), \quad (7.2)$$

$$u_z(x, y, z, t) = \mathbf{p}(x, y)^T \cdot \hat{\mathbf{u}}_z \cos(\Omega t - Kz) \quad (7.3)$$

$\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z)^T$ est le vecteur champ de déplacement au noeud n , et \mathbf{p} est un polynôme d'interpolation de Lagrange. L'équation aux valeurs propres représentative du problème de la propagation des ondes élastiques est à nouveau :

$$(\mathcal{K} - \Omega^2 M) \mathbf{u} = 0 \quad (7.4)$$

avec \mathcal{K} et M les matrices de constantes de rigidité et de masses, respectivement.

La matrice de masse prend la forme d'une intégrale élémentaire, ici suivant les trois directions de l'espace, mettant en jeu la densité du matériau ρ et le vecteur des déplacements $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)^T$:

$$M = \int_0^{2\pi/K} dz \int_{\sigma} dx dy \mathbf{u}^T \cdot \rho \cdot \mathbf{u} \quad (7.5)$$

K désignant le vecteur d'onde. L'intégration en z est limitée à une période de l'onde, et σ est la section de l'élément fini. En injectant les équations (7.1) à (7.3) et après intégration suivant z , l'expression précédente devient :

$$M = \frac{1}{2K} \hat{\mathbf{u}}^T \cdot M_{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{u}}, \quad (7.6)$$

où la matrice de masse élémentaire M_{σ} de dimension $3n \times 3n$ s'écrit :

$$M_{\sigma} = \int_{\sigma} dx dy P^T \cdot \rho \cdot P \quad (7.7)$$

avec P la matrice des polynômes de dimension $3 \times 3n$ définie par :

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{p}^T & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{p}^T \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

La matrice de raideur \mathcal{K} s'exprime de façon assez similaire :

$$\mathcal{K} = \int_0^{2\pi/K} dz \int_{\sigma} dx dy \mathbf{S}_I^T C_{IJ} \mathbf{S}_J, \quad (7.9)$$

où \mathbf{S} et \mathbf{C} sont respectivement les tenseurs de déformations et de constantes élastiques dont les indices sont donnés en notation contractée.

Après intégration le long de l'axe des z , et en faisant usage des propriétés d'orthogonalité des

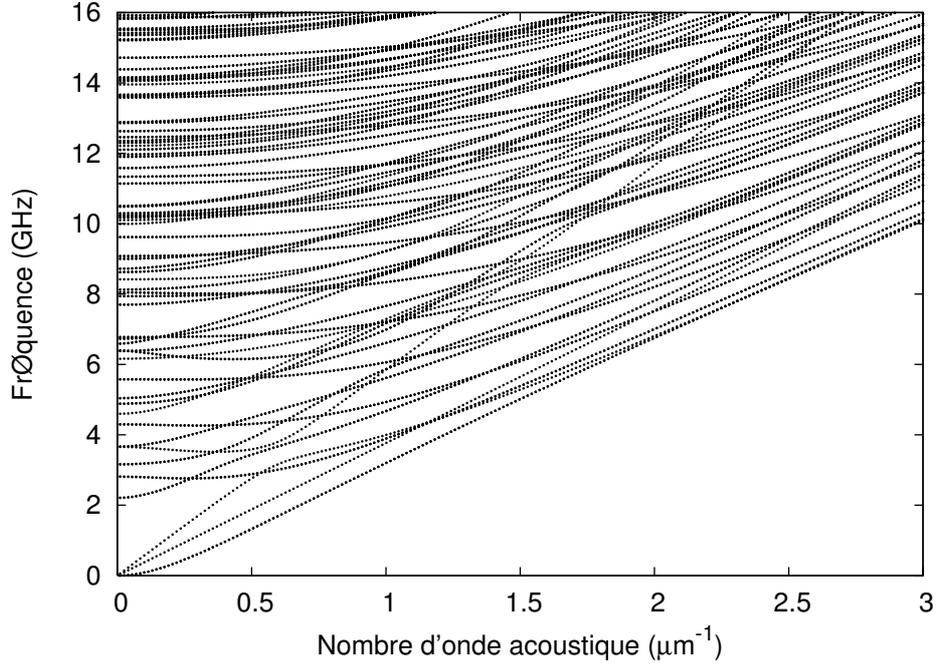


FIG. 7.3 – Diagramme de bandes pour des modes élastiques guidés dans un barreau de silice de diamètre 1 μm obtenu par méthode des éléments finis.

fonctions sinus et cosinus intervenant dans l'expression des champs de déplacement u_i , on obtient :

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2K} (\hat{\mathbf{u}}^T \cdot \mathcal{K}_\sigma \cdot \hat{\mathbf{u}}) \quad (7.10)$$

avec

$$\mathcal{K}_\sigma = \int_\sigma (dxdy (A_S^T \cdot C \cdot A_S + A_C^T \cdot C \cdot A_C)), \quad (7.11)$$

où :

$$A_S = \begin{pmatrix} p_{,x}^T & 0 & 0 \\ 0 & p_{,y}^T & 0 \\ 0 & 0 & Kp^T \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{,y}^T & -p_{,x}^T & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & -Kp^T & p_{,y}^T \\ -Kp_{,x}^T & 0 & p_{,x}^T \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

L'équation posée en (7.1) se ramène donc à un problème aux valeurs propres généralisé que l'on peut résoudre en termes de Ω^2 en admettant le vecteur d'onde K comme paramètre. Il est ainsi possible de déterminer les modes susceptibles de se propager dans la structure ainsi que leur relations de dispersion, nécessaires à la détermination de l'existence de potentielles bandes interdites élastiques.

Le diagramme de bandes d'un barreau de silice de un micron de diamètre entouré d'air est illustré sur la figure 7.3. La densité des modes acoustiques est très élevée, dans la mesure où toutes les polarisations sont prises en compte dans le calcul. Chacun de ces modes est susceptible d'interagir avec une onde optique se propageant dans le milieu, son vecteur d'onde, sa répartition d'énergie et sa polarisation influant sur la force d'interaction.

7.2 Formes des modes optiques

L'importance qu'ont revêtu les fibres optiques, en particulier les fibres à saut d'indice, ont conduit à l'élaboration de descriptions mathématiques précises rendant compte de la propagation des ondes optiques dans ces guides à symétrie cylindrique. Usuellement, la faible différence d'indice entre cœur et gaine, de l'ordre de quelques 10^{-4} permet de procéder à quelques simplifications des équations de propagation dans un tel milieu (approximation dite "du guidage faible"). On traite ici de manière quelque peu succincte le cas plus général d'un barreau de silice dans l'air. De plus amples détails sur le formalisme de la propagation d'ondes dans des guides diélectriques peuvent être obtenus en consultant les références [158, 159].

La géométrie du problème impose d'écrire le champ électrique en coordonnées cylindriques. Celui-ci s'exprime sous la forme d'un champ se propageant suivant z uniquement, i.e. :

$$\mathbf{E} = E(r, \phi) e^{j(\omega t - \beta z)}.$$

Ici, β est la constante de propagation du mode, soit son indice effectif multiplié par le vecteur d'onde dans le vide :

$$\beta = n_{eff} k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}.$$

On obtient ainsi pour l'équation d'onde une forme simple de type équation de Helmholtz, qui s'écrit en coordonnées cylindriques comme :

$$\nabla^2(E) - k \frac{\partial^2[\mathbf{E}]}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \phi^2} = (\beta^2 - k^2) E \quad (7.13)$$

Cette équation peut être résolue par séparation des variables spatiales d'une part et angulaires d'autre part, en prenant comme base de solutions potentielles des fonctions à symétrie circulaire dont la dépendance radiale est donnée par des fonctions de Bessel ou de Hankel. On étudie dans un premier temps les composantes axiales E_z et H_z . Le détail des calculs est donné en Annexe C. On se contentera ici de donner les formes finales de ces expressions que nous emploierons pour la détermination des autres composantes des champs.

On pose à cette fin :

$$u = a \sqrt{(n_c^2 k_0^2 - \beta^2)} \quad (7.14)$$

$$w = a \sqrt{(\beta^2 - n_g^2 k_0^2)} \quad (7.15)$$

où n_c et n_g sont les indices du cœur et de la gaine respectivement.

Après résolution de l'équation (7.13) pour la composante E_z (H_z) et insertion de ce terme dans les équations de Maxwell en coordonnées cylindriques, on obtient finalement les expressions des champs suivantes :

dans le cœur, en posant $\gamma = \frac{u}{a}$:

$$\begin{aligned} E_{rc} &= -ie^{im\phi} \left[Aa\beta \frac{J'_m\left(\frac{ur}{a}\right)}{u} - Ba^2\omega\mu \frac{m}{r} \frac{J_m\left(\frac{ur}{a}\right)}{u^2} \right] \sin(m\phi) \\ E_{\phi c} &= -i \left[Aa^2\beta \frac{m}{r} \frac{J_m\left(\frac{ur}{a}\right)}{u^2} - Ba\omega\mu \frac{J'_m\left(\frac{ur}{a}\right)}{u} \right] \cos(m\phi) \\ E_{zc} &= AJ_m\left(\frac{ur}{a}\right) \sin(m\phi) \end{aligned} \quad (7.16)$$

pour le champ électrique et

$$\begin{aligned} H_{rc} &= i \left[Aa^2\omega\epsilon_0 n_c^2 \frac{m}{r} \frac{J_m\left(\frac{ur}{a}\right)}{u^2} - Ba\beta \frac{J'_m\left(\frac{ur}{a}\right)}{u} \right] \cos(m\phi) \\ H_{\phi c} &= -i \left[Aa\omega\epsilon_0 n_c^2 \frac{J'_m\left(\frac{ur}{a}\right)}{u} - Ba^2\beta \frac{m}{r} \frac{J_m\left(\frac{ur}{a}\right)}{u^2} \right] \sin(m\phi) \\ H_{zc} &= BJ_m\left(\frac{ur}{a}\right) \cos(m\phi) \end{aligned} \quad (7.17)$$

pour le champ magnétique ;

dans la gaine, avec $\gamma = \frac{w}{a}$:

$$\begin{aligned} E_{rg} &= i \left[Ca\beta \frac{K'_m\left(\frac{wr}{a}\right)}{w} - Da^2\omega\mu \frac{m}{r} \frac{K_m\left(\frac{wr}{a}\right)}{w^2} \right] \sin(m\phi) \\ E_{\phi g} &= i \left[Ca^2\beta \frac{m}{r} \frac{K_m\left(\frac{wr}{a}\right)}{w^2} - Da\omega\mu \frac{K'_m\left(\frac{wr}{a}\right)}{w} \right] \cos(m\phi) \\ E_{zg} &= CK_m\left(\frac{wr}{a}\right) \sin(m\phi) \end{aligned} \quad (7.18)$$

pour le champ électrique et

$$\begin{aligned} H_{rg} &= -i \left[Ca^2\omega\epsilon_0 n_G^2 \frac{m}{r} \frac{K_m\left(\frac{wr}{a}\right)}{w^2} - Da\beta \frac{K'_m\left(\frac{wr}{a}\right)}{w} \right] \cos(m\phi) \\ H_{\phi g} &= i \left[Ca\omega\epsilon_0 n_G^2 \frac{K'_m\left(\frac{wr}{a}\right)}{w} - Da^2\beta \frac{m}{r} \frac{K_m\left(\frac{wr}{a}\right)}{w^2} \right] \sin(m\phi) \\ H_{zg} &= DK_m\left(\frac{wr}{a}\right) \cos(m\phi) \end{aligned} \quad (7.19)$$

pour le champ magnétique.

7.2.1 Équation caractéristique

Les conditions de continuité des champs aux interfaces (soit en $r = a$) vont ensuite nous permettre de déterminer les relations s'établissant entre les constantes A , B , C et D . Les composantes tangentielles de \mathbf{E} (E_z et E_ϕ ainsi que la composante normale de \mathbf{H} (H_r)) sont continues à l'interface entre les deux diélectriques. De même, en l'absence de charges libres, la composante normale de \mathbf{D} ($\epsilon E_r = n^2 E_r$) et les composantes tangentielles de \mathbf{H} le sont également. On obtient ainsi un système de six équations, dont quatre seulement sont indépendantes, par exemple, celles portant sur E_z , H_z , E_r , et H_r . Ce système n'admet de solution que si son déterminant est non nul, conduisant ainsi à l'équation caractéristique admettant pour paramètre la constante de propagation β :

$$\left[\frac{n_C^2}{n_G^2} \frac{J'_m(u)}{uJ_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{wK_m(w)} \right] \left[\frac{J'_m(u)}{uJ_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{wK_m(w)} \right] = m^2 \left[\frac{n_C^2}{n_G^2} \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right] \left[\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right] \quad (7.20)$$

Une première réduction de ce système nous donne par ailleurs la relation liant l'amplitude du champ électrique à celle du champ magnétique :

$$B = A \frac{\beta}{\omega \mu m} \left[\frac{J'_m(u)}{uJ_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{wK_m(w)} \right] \left[\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right]^{-1} \quad (7.21)$$

L'équation caractéristique (7.20) détermine donc la constante de propagation d'un mode guidé pour une valeur d'indice du cœur n_C et de la gaine n_G , un diamètre de fibre a et une longueur d'onde de travail λ fixée. Il est donc intéressant d'exprimer ces constantes du problème sous la forme d'une grandeur adimensionnelle, en l'occurrence la fréquence normalisée V :

$$V = \sqrt{(u^2 + w^2)} = \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{n_C^2 - n_G^2} \quad (7.22)$$

7.2.2 Classification des modes

Les résultats liés à l'équation (7.20) nous permettent de dégager deux cas particuliers de familles de modes.

Modes hybrides

On considère dans un premier temps le cas général où $m \geq 1$. on parle de modes hybrides, pour lesquels les composantes Ψ_z des champs ne sont pas négligeables devant Ψ_r et Ψ_ϕ . Les modes HE (respectivement EH) ont une composante E_z (resp. H_z) significative en rapport aux deux autres. Ils sont de plus caractérisés par deux entiers m et n , où m intervient directement dans l'argument sinusoïdal ou cosinoïdal des champs (qui ont, rappelons-le une dépendance en cos ou en $\sin(m\phi)$), et l'indice n est utilisé pour distinguer les différentes solutions de l'équation caractéristique à m donné, les fonctions de Bessel étant périodiques. Il est intéressant de noter

par ailleurs que les courbes de dispersion des modes EH et HE deviennent très proches dans le cas d'une très faible différence d'indice entre le cœur et la gaine. Les modes deviennent alors dégénérés, et une nouvelle nomenclature est usuellement adoptée pour décrire cette configuration particulière (modes dits "Linearly Polarized, soit LP_{m,n})

Modes TEM

Lorsque $m=0$, l'équation caractéristique (7.20) se réduit à :

$$\left[\frac{n_C^2}{n_G^2} \frac{J'(u)}{uJ(u)} + \frac{K'(w)}{wK(w)} \right] \left[\frac{J'(u)}{uJ(u)} + \frac{K'(w)}{wK(w)} \right] = 0 \quad (7.23)$$

On distingue ainsi deux sous-familles de modes vérifiant respectivement :

$$\left[\frac{J'(u)}{uJ(u)} + \frac{K'(w)}{wK(w)} \right] = 0 \quad (7.24)$$

et

$$\left[\frac{n_C^2}{n_G^2} \frac{J'(u)}{uJ(u)} + \frac{K'(w)}{wK(w)} \right] = 0 \quad (7.25)$$

Ces deux équations (7.24) et (7.25) peuvent être obtenues en partant des relations des continuité des champs en en posant E_z et H_z nuls respectivement. On décrit donc dans un premier cas des modes de type TE_{0,n} et dans un second cas des modes de type TM_{0,n}. Le tracé de ces modes optiques pour les ordres 0 et 1 est donné sur la figure 7.4.

7.2.3 Fréquences de coupure

Lorsque l'indice effectif d'un mode donné se rapproche de celui de la gaine, le mode en question a tendance à fuir, et à ne plus être guidé par la structure. Cette condition, dite condition de coupure, se traduit mathématiquement par un paramètre w proche de zéro et donc par $V \simeq u$.

On montre que pour les modes d'ordre 0 (modes transverses, de type TE_{0n} ou TM_{0n}, la fréquence de coupure est donnée par la racine n^{ieme} de la fonction de Bessel J_0 . Le premier mode TEM apparaît donc dès $V \simeq 2.4048$.

De même, les fréquences de coupure des modes hybrides de type HE_{m,n} sont données par la racine n^{ieme} J_m . A noter que le mode HE_{1,1} a une fréquence de coupure nulle, c'est-à-dire qu'il peut se propager dans des fibres de diamètre de cœur très faible.

7.2.4 Détermination des paramètres pertinents pour une application acousto-optique

On cherche à étudier deux cas particuliers :

- La rétrodiffusion Brillouin stimulée
- Le couplage de polarisation d'un mode à l'autre (diffraction anisotrope).

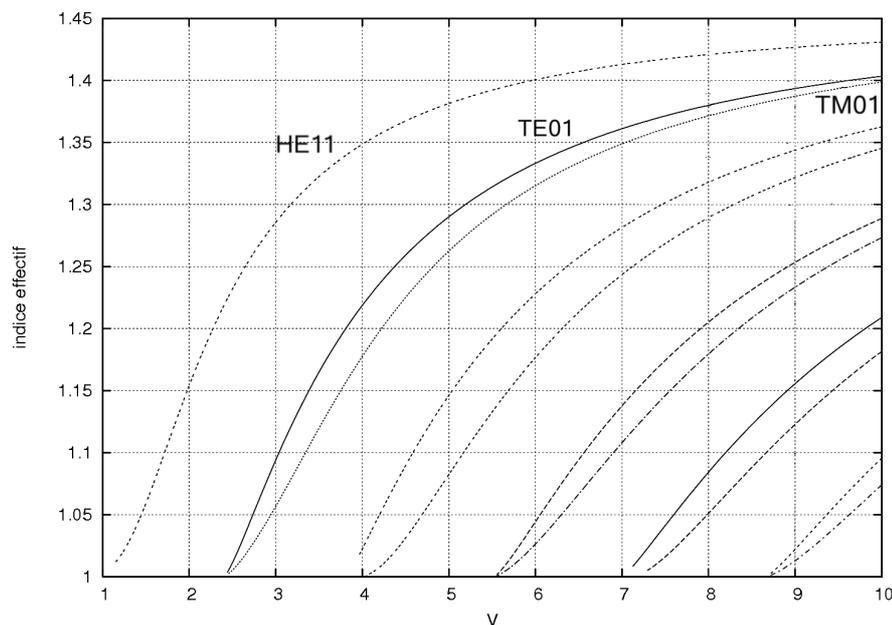


FIG. 7.4 – Constantes de propagation normalisées pour un barreau de silice (indice pris égal à 1,5) dans l'air. Seules les courbes de dispersion des modes TE, TM et HE d'ordre 0 et 1 sont reportés.

Le premier cas peut être observé dans une configuration monomode, i.e. en choisissant un diamètre du barreau de silice de l'ordre de $1\ \mu\text{m}$ à une longueur d'onde de $1.55\ \mu\text{m}$, en prenant un indice égal à 1.45 pour la silice.

Le second nécessite la présence de modes TE_0 et TM_0 suffisamment discernables dans la structure. On se place alors à une fréquence normalisée V égale à 3.5 (par exemple avec un diamètre de cœur de $1\ \mu\text{m}$ et à une longueur d'onde optique dans la silice de $500\ \text{nm}$). Dans ce cas précis, les indices effectifs des trois modes en présence sont :

$$n_{HE11} \simeq 1.3234$$

$$n_{TE01} \simeq 1.2575$$

$$n_{TM01} \simeq 1.1649$$

Si les sections précédentes ont été dédiées à l'étude la plus générale possible en termes de formalisme mathématique de l'interaction acousto-optique de modes guidés dans une fibre, les exemples numériques donnés à titre illustratif se contentent de traiter les interactions susceptibles de se produire sur ces trois modes particuliers. On ne calcule par ailleurs que la valeur des coefficients C_{12} tels qu'introduits dans en (6.4.3), qui contiennent l'information pertinente en termes de force d'interaction dans le cas du couplage d'un mode optique à un autre.

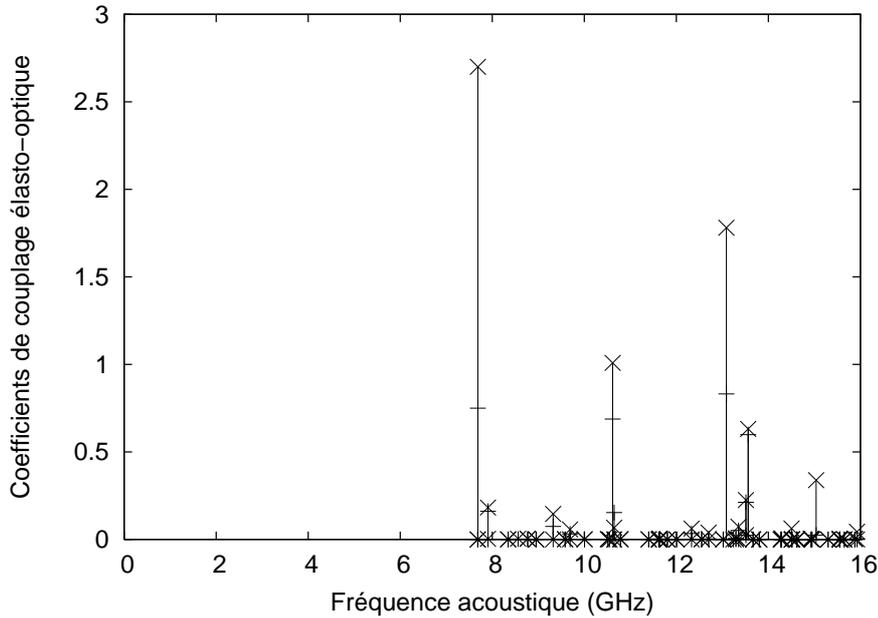


FIG. 7.5 – Coefficients de diffusion élasto-optiques dans le cas de la rétrodiffusion d’un mode sur lui-même pour le modes TE_{01} . Les points marqués par des croix ('x') donnent les amplitudes des coefficients obtenus par la formulation en \mathbf{D} de la théorie linéarisée de Pockels ; ceux marqués par des plus ('+') se rapportent à la formulation en \mathbf{E} .

7.3 Résolution des équations d’ondes couplées

7.3.1 Rétrodiffusion

Le premier exemple qui a été considéré est celui de la rétrodiffusion d’un mode optique sur lui-même. La rétrodiffusion Brillouin peut être de façon très simpliste vue comme le couplage d’un mode optique de vecteur d’onde β vers un second mode de vecteur d’onde $-\beta$. Le vecteur d’onde du mode acoustique permettant un tel couplage doit donc vérifier la relation :

$$K = 2\beta$$

Les coefficients de couplage élasto-optiques ont été évalués pour les deux modes optiques TE_{01} , TM_{01} et HE_{11} dans les cas de formulation en \mathbf{E} comme en \mathbf{D} , et sont reportés sur la figure 7.5 pour le premier mode. Ils ont été calculés en évaluant les termes de couplage non diagonaux C_{12} des expressions (6.4.3) et (6.4.3) du Chapitre précédent.

De manière générale, lorsque la formulation en \mathbf{E} prévoit des coefficients de couplage non nuls, un phénomène d’interaction est également théoriquement prédit par la formulation en \mathbf{D} . En revanche, la valeur des coefficients obtenus par cette dernière sont plus élevés. Les différences observées ne s’arrêtent pas à la seule amplitude : de façon beaucoup plus conséquente, on constate que la formulation \mathbf{D} prévoit par ailleurs la possibilité d’obtenir une rétrodiffusion d’un mode optique pour d’autres modes acoustiques, en plus de ceux obtenus par la calcul fondé sur le champ

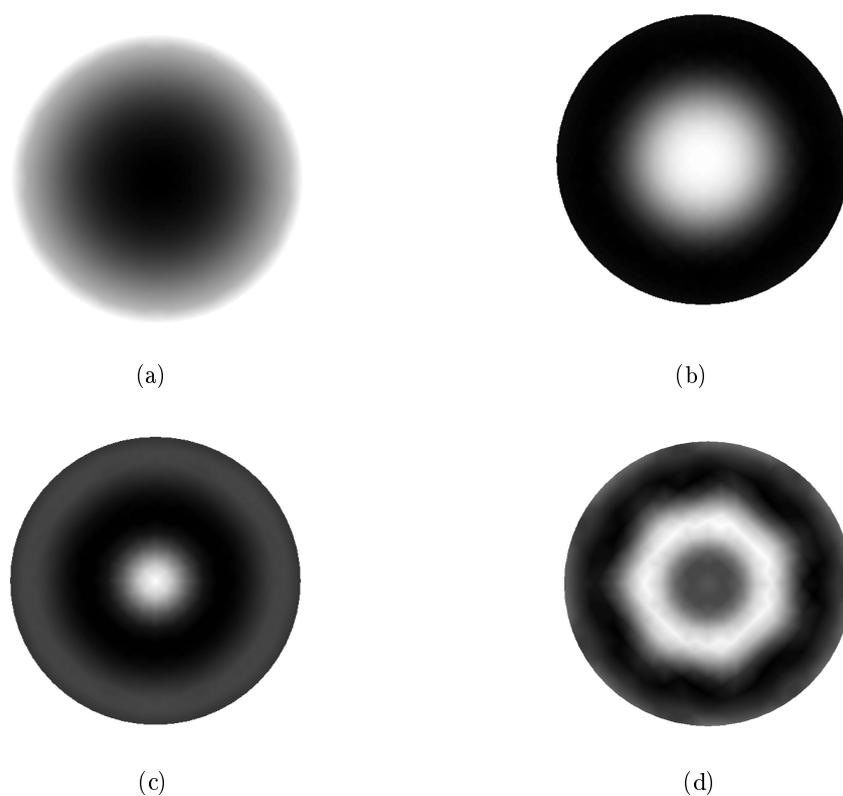


FIG. 7.6 – Distribution de l'énergie cinétique pour les modes acoustiques d'un barreau de silice de fréquence (a) 7,69 GHz, (b) 10,62 GHz, (c) 13,09 GHz et (d) 13,56 GHz. Ces quatre modes correspondent à ceux permettant d'obtenir les coefficients élasto-optiques les plus élevés lors de la rétro-diffusion du mode optique TE_{01} . Les maxima d'amplitude apparaissent en blanc sur la figure.

électrique. Ces modes restent toutefois minoritaires et résultent en une relativement faible force d'interaction.

Dans les deux cas, il est assez difficile d'établir une corrélation entre forme et polarisation des modes acoustiques d'une part et valeur des coefficients de couplage d'autre part. Les modes fondamentaux TE et TM présentant tous deux un profil spatial d'amplitude Gaussien, on s'attendrait à ce que les maxima de couplage soient obtenus, en partie, la polarisation de l'onde acoustique entrant par ailleurs en jeu, pour des modes élastiques ayant un profil spatial similaire. Or, si les modes générant les plus fortes interactions, c'est-à-dire, ceux se trouvant respectivement aux fréquences de 7,69 GHz, 10,62 GHz, 13,09 GHz et 13,56 GHz ont effectivement une symétrie circulaire, l'analogie avec la forme du mode optique s'arrête ici, comme le montre la figure 7.6. Il est donc nécessaire, même dans le cas très simple d'un barreau de silice plein, de calculer les coefficients élasto-optiques affectés à chaque mode acoustique susceptible de se propager dans le milieu.

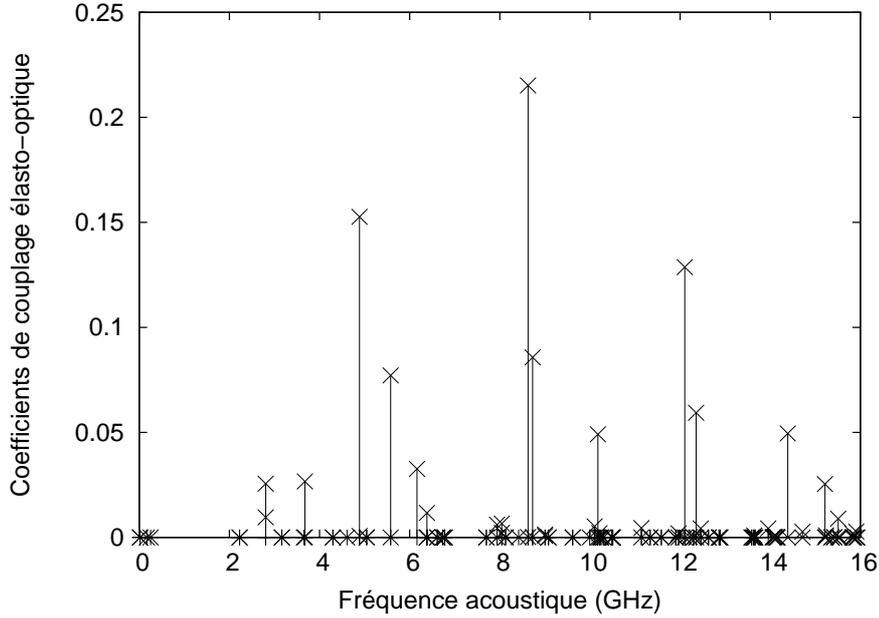


FIG. 7.7 – Coefficients de diffusion élasto-optiques dans le cas d’un couplage du mode TE_{01} vers le mode TM_{01} (couplage de polarisation).

7.3.2 Couplage de polarisation

Les différences observées entre théorie linéarisée de Pockels et modèle d’interaction paramétrique sont bien plus critiques dans le cas du couplage du mode TE_{01} avec le mode TM_{01} . La figure 7.7 montre les coefficients élasto-optiques calculés pour un mode acoustique de vecteur d’onde

$$K = \beta_{TE} - \beta_{TM}.$$

Les simulations réalisées en prenant pour base la polarisation non-linéaire n’autorisent pas ce couplage de polarisation à se produire, et ce quelle que soit la forme ou la polarisation du mode acoustique du barreau de silice considéré. On retombe ainsi sur les prévisions d’un modèle en ondes planes, pour lequel le couplage d’un ordre de diffraction de la lumière vers un autre n’est pas permis par l’interaction acousto-optique. La formulation en \mathbf{D} , elle, continue de fournir des coefficients de couplage non nuls, quand bien même les forces d’interaction calculées sont près d’un ordre de grandeur plus faible que dans le cas de la rétrodiffusion. Nous n’avons pas trouvé mention dans la littérature de phénomènes de couplage de polarisation induits dans un matériau isotrope par effet photo-élastique. Ce dernier point et la cohérence du traitement théorique entre les deux approches adoptées contribuent *a priori* à faire du champ électrique la variable la plus pertinente. Dans le cas d’un matériau élastiquement ou optiquement anisotrope, en revanche, ce type de transfert de polarisation pourrait être envisageable. Un arrangement judicieux des trous dans une fibre à cristaux photoniques permet de parvenir à une telle anisotropie et constituerait donc un champ d’investigation à privilégier [93].

7.4 Conclusion

Ces exemples numériques nous ont permis de quantifier les différences induites par les termes de gradients spatiaux additionnels introduits par la formulation en champ de déplacement. Celles-ci s'étendent en effet bien au-delà d'une simple différence en termes de force d'interaction : ils tendent en effet à prévoir des coefficients élasto-optiques non nuls pour d'autres modes élastiques que ceux qu'ils partagent avec la formulation en champ électrique. En particulier, un couplage de polarisation entre les différents modes d'une fibre optique isotrope n'est prévue que par la seule approche en champ de déplacement.

La cohérence entre traitement suivant la théorie de Pockels et l'approche non-linéaire semble encore une fois pousser à l'adoption de cette dernière, équivalente à un traitement de la première en fonction du champ électrique. Mais le seul moyen définitif d'établir plus fermement la validité de cette dernière hypothèse reste, clairement, une démonstration expérimentale.

Conclusion de la troisième partie

L'étude théorique des interactions acousto-optiques en milieu confiné que nous avons esquissée n'en est finalement qu'à ses prémices : elle suscite à l'heure actuelle plus d'interrogations sur la validité du traitement classique qu'elle ne fournit réellement de réponses sur la méthode la plus rigoureuse à adopter. Deux approches ont en effet été confrontées : la théorie classique de Pockels et l'interaction paramétrique suivant Nelson et Lax. Les développements théoriques présentés n'ont certes rien de particulièrement novateurs dans la mesure où ils reposent sur des principes fermement implantés dans le domaine : la théorie linéarisée de Pockels a maintenant près de 120 ans d'existence, et Nelson et Lax l'ont remise en cause dans les années 1970 déjà. Pourtant, il a, du moins à notre connaissance, rarement été fait mention dans la littérature de l'incohérence entre le traitement largement répandu du problème en fonction du champ électrique et le fait admis que l'effet photo-élastique peut être retranscrit en termes de déformation de l'ellipsoïde des indices. Les exemples numériques traités, à savoir la rétrodiffusion d'un mode sur lui-même et le couplage de polarisation dans un barreau de silice isotrope, nous ont permis de quantifier les différences induites : leurs implications sont largement au-delà d'une simple différence de l'amplitude prédite pour la force d'interaction. Les perspectives attachées à ces travaux sont donc nombreuses. D'un point de vue numérique déjà, la mise en place d'une théorie valide dans le cas anisotrope et surtout dans celui d'une fibre photo-phononique (ou phoXonique) est nécessaire. Cette dernière application nécessite d'ailleurs la prise en compte de la longueur d'interaction du fait du guidage conjoint des modes élastiques et optiques. Quoiqu'il en soit, il est nécessaire dans ce cas de procéder à une étude expérimentale de ces phénomènes avant que des conclusions précises puissent être avancées avec certitude.

Conclusion générale

Les travaux entrepris au cours de cette thèse ont été consacrés à l'étude principalement expérimentale des effets de bandes interdites pour les ondes élastiques dans des structures périodiques. Les différents cristaux phononiques étudiés ont inscrit cette thèse au confluent de plusieurs disciplines : acoustique, optique ou encore microfabrication. En effet, une première partie de ces travaux a été dédiée à l'étude expérimentale de phénomènes de filtrage, guidage ou encore de couplage des ondes acoustiques de volume dans un réseau périodique consistant en un arrangement de tiges cylindriques d'acier plongées dans une cuve d'eau. En particulier, le problème de l'interaction entre modes guidés dans un défaut linéaire du cristal et modes propres de résonateurs greffés le long du guide a été abordé. Ces travaux se sont solidement appuyés sur l'expertise théorique pré-existante au sein de l'équipe Acoustique et Microsonique du département LPMO de l'Institut FEMTO-ST : les modèles de simulation par méthode des différences finies de la transmission des ondes acoustiques à travers le cristal se sont révélés des outils indispensables à la mise en place comme à l'interprétation des expériences. Par ailleurs, les démonstrations préalables à ces travaux des fonctions de filtrage et de guidage dans de telles structures ont assuré le bon déroulement des expériences subséquentes de couplage des ondes. Au-delà d'un simple moyen d'appréhension du phénomène, ces expériences simples, sans difficulté particulière de fabrication ou d'instrumentation, ont permis la mise en évidence de fonctions complexes de traitement du signal acoustique. L'un des exemples les plus aboutis a été obtenu par une collaboration avec l'IEMN de Lille, résultant en la démonstration expérimentale d'un système de démultiplexage en longueur d'onde.

Nous avons consacré la seconde partie de cette thèse à la démonstration expérimentale de l'existence d'une bande interdite complète pour les ondes de surface dans des cristaux phononiques bidimensionnels. Le confinement intrinsèque de ce type d'ondes à la surface du substrat où s'opère la propagation permet un confinement quasi-tridimensionnel des ondes élastiques dans un cristal phononique initialement conçu et fabriqué comme un simple cristal 2D. Par ailleurs, la possibilité de générer ces ondes directement à la surface d'un matériau piézoélectrique par intégration de transducteurs à peignes interdigités permet la mise en place d'expériences simples et illustratives où émetteur et récepteur sont directement intégrés au cristal phononique. D'un point de vue plus applicatif, les cristaux phononiques de surface peuvent être perçus comme un moyen d'étendre encore la gamme d'applications des dispositifs SAW classiques. La majeure partie de ces travaux a donc consisté à mettre en évidence une bande interdite complète pour les

ondes de surface à des fréquences autour de 200 MHz dans un cristal phononique consistant en un réseau carré de trous d'air dans une matrice de niobate de lithium. Dans ce cas également, nous nous sommes servis de modèles de simulation par la méthode de décomposition en ondes planes mis en place dans le cadre d'une thèse précédente [107], ainsi que de codes d'éléments finis par ailleurs développés au sein de l'équipe d'accueil pour fixer les paramètres géométriques et physiques pertinents pour la réalisation des structures. La fabrication des cristaux artificiels a quant à elle nécessité le développement d'un procédé de gravure du niobate de lithium permettant la réalisation d'inclusions cylindriques de dimension micrométrique avec un rapport de forme suffisant pour assurer le confinement transverse des ondes de surface. Des trous de diamètre $10\ \mu\text{m}$, et de même profondeur ont ainsi été obtenus. Ces cristaux phononiques ont ensuite été caractérisés par voie électrique ainsi que par voie optique. Les caractérisations électriques ont été assurées par mesure de transmission électrique à travers le cristal, permettant d'évaluer les caractéristiques du système dans une configuration applicable à des dispositifs fonctionnels. Nous avons ainsi pu mettre en évidence l'effet d'atténuation subi par des modes se propageant à une fréquence supérieure à celle, théoriquement attendue, de l'entrée de la bande interdite du cristal. Ces pertes semblent dues au phénomène escompté de bande interdite phononique d'une part, mais aussi à un effet de rayonnement des modes de fréquences élevées que nous avons imputé à un couplage avec les modes de volume du matériau massif. Des mesures additionnelles réalisées sur d'autres dispositifs nous ont permis de lever le doute quant à l'existence réelle d'une bande interdite complète pour les ondes de surface dans ce cristal phononique bidimensionnel. Ces résultats ont été solidement confirmés par une mesure optique des champs de déplacements des ondes de surface effectuée dans le cadre d'une collaboration avec l'université technologique d'Helsinki qui nous a permis d'observer l'effet de réflexion induit par le cristal parfait. Enfin, des cristaux phononiques pour les ondes de surface ont été fabriqués dans un substrat de silicium, permettant l'obtention de structures à haut facteur de forme. Ces cristaux sont en cours de caractérisation par voie optique dans le cadre d'une collaboration avec l'université d'Hokkaido au Japon.

La troisième et dernière partie de ces travaux a consisté à poser les fondations d'une étude théorique de l'interaction acousto-optique dans un matériau exhibant une bande interdite photonique et phononique simultanée. Dans ce cadre, il n'a été fait aucune hypothèse sur le régime d'interaction, ni sur la forme spatiale des modes optiques comme acoustiques. Le cas d'une fibre en silice, milieu optiquement isotrope, a été traité suivant deux approches distinctes : la formulation linéarisée de Pockels d'une part, et l'approche non-linéaire proposée par Nelson et Lax d'autre part, les équations du problème ayant été exprimées soit en fonction du champ électrique, soit en fonction du champ de déplacement électrique. Ces calculs analytiques des coefficients de couplage elasto-optiques ont ensuite été éprouvés sur un exemple numérique consistant à traiter le cas d'un barreau de silice de dimension micrométrique. Nous avons ainsi pu constater que les deux formulations, équivalentes dans le cas traditionnellement étudié de la diffraction d'une onde optique par une onde acoustique plane et donc d'extension spatiale infinie, présentaient ici des différences fondamentales, tant au niveau de la force d'interaction que de la nature des phénomènes prévus. Si la formulation mettant en jeu le champ électrique demeure en effet cohérente

quel que soit le modèle théorique adopté, celle impliquant le champ de déplacement introduit par contre des termes additionnels dans le cas de la formulation phénoménologique de Pockels. Ces résultats remettent donc en cause la relation généralement établie dans la littérature entre effet élasto-optique et déformation de l'ellipsoïde des indices optiques. Mais la mise en place d'une série d'expériences visant à valider l'un ou l'autre des modèles employés s'impose.

Sur ce dernier aspect, les perspectives de ces travaux consisteraient donc à mettre au point un système expérimental permettant de procéder à l'excitation d'ondes acoustiques à haute fréquence dans une fibre microstructurée présentant des propriétés de bandes interdites phononiques. Deux types de pistes peuvent être poursuivies. La première consisterait à exciter des modes acoustiques radiaux, statiques, en réalisant par exemple un transducteur annulaire directement intégré sur la fibre. Le dépôt d'un matériau piézoélectrique sur la circonférence de la fibre devrait permettre d'atteindre cet objectif. Des travaux similaires, visant à réaliser un modulateur tout fibré par dépôt d'oxyde de zinc sur fibre optique standard ont d'ailleurs été rapportés dans la littérature. Des essais préliminaires destinés à déposer du nitrure d'aluminium suivant le même principe ont été effectués au cours de cette thèse. S'ils se sont jusqu'à présent révélés infructueux, ils ont au moins permis de soulever les principales difficultés liées à l'adaptation des facilités de dépôt. Une autre possibilité consisterait à exciter des modes élastiques propagatifs, par exemple par couplage évanescent d'ondes de surface générées au moyen de transducteurs à peignes interdites sur un substrat piézoélectrique. L'idée serait donc de mettre en contact (mécaniquement ou par collage) la fibre optique avec le transducteur. Pour une confrontation directe avec la théorie, il conviendrait de pousser encore le développement théorique précédent afin d'évaluer complètement la force d'interaction et de prendre également en compte l'influence de la longueur d'interaction. Une alternative à ces composants acoustiques actifs pour la génération d'ondes élastiques dans une fibre consisteraient à utiliser à bon escient les ondes acoustiques induites par des phénomènes d'optique non-linéaire, à l'image de l'effet Brillouin stimulé par exemple. Si une structuration pertinente du cœur d'une fibre photonique pourrait conduire, du fait de l'existence d'une bande interdite pour les ondes élastiques, à une inhibition de cet effet des plus nocifs dans le domaine des télécommunications optiques [93], il est également possible de tirer profit d'une famille particulière de ces modes, les modes de Brillouin de gaine, pour mettre en place des interactions acousto-optiques à haute fréquence. Une thèse en partie consacrée à l'exploitation de ces phénomènes est d'ailleurs actuellement en cours au sein de l'Institut FEMTO-ST.

Les travaux menés sur les ondes de surface ouvrent également de nombreuses perspectives. D'un point de vue théorique, d'abord, il serait intéressant de pouvoir calculer la cartographie des champs de déplacement, ou au moins la fonction de transmission du cristal phononique à la manière des prédictions théoriques réalisées par méthode des différences finies en milieu faiblement anisotrope. Un tel outil nous permettrait un dimensionnement beaucoup plus pertinent de structures périodiques plus complexes mettant en jeu des guides d'ondes ou encore des cavités. Ces fonctions de guidage restent d'ailleurs à démontrer sur matériau piézoélectrique, et pourraient être mises en évidence de façon probante par mesures optiques. Les résultats obtenus par ce moyen de caractérisation pourraient encore être améliorés en adaptant les caractéristiques du

transducteur émetteur au banc de mesures optiques dans le cas d'une mesure par interférométrie hétérodyne : adaptation de la fréquence de fonctionnement, multiplication du nombre de doigts, etc. D'autres moyens de caractérisation par mesures acoustiques picosecondes ou encore par visualisation au microscope électronique à balayage peuvent également être employés. Ces différentes études, si elles peuvent être réalisées sur les cristaux phononiques piézoélectriques présentés dans le cadre de cette thèse, gagneraient à l'être sur des structures bidimensionnelles réellement infinies au sens des ondes de surface. Pour cela, il est indispensable de s'affranchir des phénomènes de rayonnement liés à la profondeur finie du cristal. L'obtention de structures à très haut facteur de forme sur niobate de lithium s'annonçant difficile, les alternatives possibles résideraient donc en l'utilisation d'un matériau piézoélectrique plus aisément usinable (quartz, par exemple) ou d'un système couche piézoélectrique sur silicium. L'utilisation de ce dernier matériau permet par ailleurs de bénéficier de multiples moyens de microstructuration, notamment de procédés prêts à l'emploi de gravure ionique réactive profonde. Il devient ainsi possible de fabriquer des cristaux phononiques pour des modes de plaques, soit par fabrication (suivie par la structuration) d'une membrane piézoélectrique suspendue, soit par structuration directe d'une plaquette de silicium, la fréquence de fonctionnement du cristal dépendant bien évidemment de l'épaisseur de la plaque. Enfin, le choix du niobate de lithium n'ayant rien eu d'anodin, il s'agirait de tenter de tirer profit des propriétés optiques de ce matériau. La première possibilité consisterait à fabriquer un cristal photonique acoustiquement accordable, en s'appuyant sur différents travaux en cours au sein du département d'optique de l'institut FEMTO-ST : une modification de l'indice de réfraction du niobate de lithium par effets électro-optique et élasto-optique du fait des déformations induites par une onde de surface conduirait en effet en une modification du rapport d'indice existant entre matrice et inclusion au sein du cristal photonique. On s'attend ainsi à une modification de la fréquence centrale et/ou de la largeur de la bande interdite photonique. L'étape suivante est bien évidemment la réalisation d'un cristal exhibant des bandes interdites à la fois photoniques et phononiques. Des interactions acousto-optiques exaltées sont là encore attendues, mais une étude des plus intéressantes pourrait être consacrée à une extension au cas bidimensionnel des expériences de Trigo *et al.* [88] : la réalisation d'une cavité résonante acoustique mettant en jeu des ondes de surface d'une part, mais surtout celle d'une cavité résonante à la fois acoustique et optique laissent présager l'émergence d'une nouvelle génération de dispositifs élasto-optiques. Là encore, des développements théoriques plus poussés s'imposent, nécessitant l'extension du modèle présenté en troisième partie aux matériaux ferro-électriques et optiquement anisotropes.

Enfin, l'étude des propriétés physiques des cristaux phononiques laisse encore un champ d'investigation assez vaste, qui ne passe pas nécessairement par l'utilisation de techniques de microfabrication. Des démonstrations de principes similaires à celles présentées dans la première partie de ce manuscrit présentent un intérêt scientifique certain : études de structures tridimensionnelles, réseaux bidimensionnelles de différentes géométries, propriétés inédites liées à la nature de la matrice ou des inclusions ou encore étude de la propagation en milieu périodiques de différents types de modes acoustiques figurent parmi les nombreux projets envisageables.

Annexe A

Périodicité et zones de Brillouin

Cette annexe a pour but de fournir quelques définitions fondamentales ayant trait aux réseaux périodiques et en particulier à la notion de zone irréductible de Brillouin. Elle est largement inspirée d'ouvrages traitant de la physique des semi-conducteurs, auxquels nous suggérons au lecteur de se reporter pour de plus amples détails [160, 161, 162]

A.1 Structure des cristaux et réseaux réciproques

Un réseau périodique est caractérisé par trois vecteurs élémentaires \mathbf{a}_i , avec $i = 1, 2, 3$ (encore appelés vecteurs *primitifs*) tels que la structure est strictement invariante par translation de l'un des trois vecteurs ou de toute combinaison linéaire de ces vecteurs. Les \mathbf{a}_i sont ainsi les vecteurs de base du réseau dit de Bravais (ou réseau direct), défini par l'ensemble des points dont le vecteur position vérifie :

$$\mathbf{R} = h\mathbf{a}_1 + j\mathbf{a}_2 + l\mathbf{a}_3 \quad (\text{A.1})$$

Pour tout réseau direct, on peut définir une suite de vecteurs dits *réciproques* \mathbf{a}_i^* tels que :

$$\mathbf{a}_1^* = \frac{2\pi \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}, \quad \mathbf{a}_2^* = \frac{2\pi \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_3^* = \frac{2\pi \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3} \quad (\text{A.2})$$

Notons ici que le facteur 2π est ramené à 1 par certains auteurs.

Les vecteurs directs et réciproques vérifient la relation :

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i^* = 2\pi \delta_{ij} \quad (\text{A.3})$$

Le vecteur réciproque général de la structure \mathbf{G} employé à plusieurs reprises au chapitre 3 est alors donné par :

$$\mathbf{G} = h.\mathbf{a}_1^* + j.\mathbf{a}_2^* + l.\mathbf{a}_3^* \quad (\text{A.4})$$

A.2 Cellules de Wigner-Seitz et zones de Brillouin

La cellule dite de *Wigner-Seitz* est une cellule primitive rendant compte de la symétrie élémentaire de la maille du système étudié. Elle possède donc la symétrie du réseau de Bravais. D'un point de vue géométrique, sa construction s'effectue dans le réseau direct en trois étapes, illustrées sur la figure A.1 :

- on définit un point origine dans la maille cristalline, à partir duquel on vient tracer des segments liant ce point à ses voisins immédiats,
- on trace ensuite les bissectrices à ces lignes de construction,
- le plus petit polyèdre compris entre les dites bissectrices est la cellule de Wigner-Seitz du cristal.

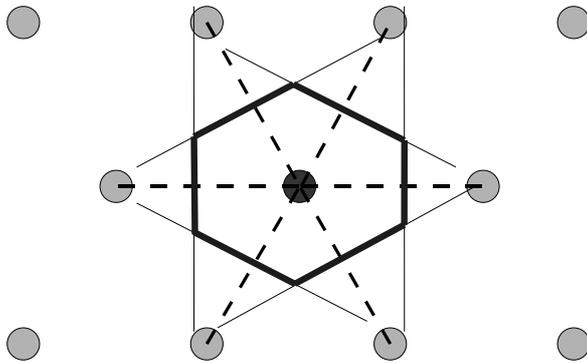


FIG. A.1 – Méthode de construction de la cellule de Wigner-Seitz.

La *première zone de Brillouin* est l'équivalent direct de cette cellule de Wigner-Seitz pour le réseau réciproque¹. Le tableau A.1 montre les cellules de Wigner-Seitz pour les réseaux cubique centré (CC) et cubique à faces centrées (FCC), ainsi que leurs homologues dans le réseau réciproque. On remarque que le réseau CC se mue en FCC et respectivement. La première zone de Brillouin ne définit pas nécessairement le volume élémentaire du réseau dans l'espace réciproque. Dans certains cas, du fait de symétries additionnelles propres au cristal concerné, il est possible de définir une *zone de Brillouin irréductible*, soit une partie de la première zone de Brillouin qui autorise la reconstruction du réseau réciproque dans son intégralité. Cette zone contient tous les points pertinents du cristal et permet une étude complète des vecteurs d'ondes du cristal tout entier.

Nous nous sommes plus particulièrement intéressés dans le cadre de cette thèse à des structures bidimensionnelles. Les zones de Brillouin se ramènent alors à de simples plans. Celles correspondant à des mailles bidimensionnelles carrées ou triangulaires sont reportées sur la figure A.2.

¹On définit par ailleurs des zones de Brillouin d'ordre supérieur : la $n^{\text{ème}}$ zone de Brillouin est délimitée par les éléments du réseau qui peuvent être atteints à partir du point d'origine choisi en coupant $(n - 1)$ bissectrices.