

Modélisation multiplicative perturbations dans un modèle de réapprovisionnement sur deux périodes

4.1 Introduction

Ce chapitre apporte une contribution à la résolution du problème d'optimisation de la quantité de commande, dans un contexte de e-commerce, avec une modélisation multiplicative des perturbations sur 2 périodes : l'e-détaillant commande pour les deux périodes avant le début de la première période de vente. Le but de ce travail est double : i) analyser les propositions managériales concernant les quantités à commander pour les deux périodes et ii) étudier les propriétés mathématiques permettant une extension vers le cas multi-périodes.

La suite de ce chapitre est organisée comme suit : dans la section 4.2 nous présentons l'approche utilisée pour modéliser le problème à deux périodes de vente et pour optimiser la fonction profit moyen de l'e-détaillant. Dans la section 4.3 nous présentons les résultats d'une application numérique ainsi que les réponses à certaines interrogations managériales.

Ce chapitre fait l'objet d'un article en cours de révision dans la revue internationale Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA).

4.2 Modélisation et Optimisation

En adoptant la séquence d'événements décrite dans l'introduction de la partie 2 de ce mémoire et en addition aux notations de la demande, tout au long de ce chapitre, nous utilisons les notations qui suivent :

γ_{ISi} (resp. γ_{PHi}): variable aléatoire représentant les perturbations sur la quantité IS (resp. PH) durant la période $i = 1, 2$

μ_{ISi} (resp. μ_{PHi}): la moyenne de γ_{ISi} (resp. γ_{PHi}) durant la période $i = 1, 2$

σ_{ISi} (resp. σ_{PHi}): l'écart type de γ_{ISi} (resp. γ_{PHi}) durant la période $i = 1, 2$

f_{ISi} (resp. F_{ISi}): la fonction densité (resp. la fonction de répartition,) de γ_{ISi} durant la période $i = 1, 2$

f_{PHi} (resp. F_{PHi}): la fonction densité (resp. la fonction de répartition,) de γ_{PHi} durant la période $i = 1, 2$

- Y_i : niveau de re-complètement pour la période $i = 1, 2$
- Y_i^* : la valeur optimale Y_i de la période $i = 1, 2$
- Y_{ISi} : quantité affichée dans le système d'information au début de la période $i = 1, 2$
- Y_{PHi} : quantité disponible dans le système physique au début de la période $i = 1, 2$
- x_i : stock IS initial affiché dans la période $i = 1, 2$ avant la passation d'une commande auprès du fournisseur
- π_2 : le profit moyen associé à la période 2
- π_g : le profit moyen global associé aux périodes 1 et 2

Afin d'utiliser les résultats du chapitre précédent, nous définissons ici un coût de sur-stockage par période :

h_i : le **coût unitaire de stockage** associé à la période $i = 1, 2$ coût de sur-stockage dans la première période et coût payé quand un produit reste invendu à la fin de la deuxième période.

4.2.1 Méthodologie de résolution

Afin de résoudre analytiquement le problème en déterminant les niveaux de re-complètement optimaux Y_i^* ($i = 1, 2$), nous utilisons la programmation dynamique avec une récursion arrière (backward recursion). Ceci consiste à calculer dans un premier temps le profit moyen de la période 2 pour un niveau donné du stock IS initial x_2 et de déduire dans un second temps le profit global pour les deux périodes de vente en appliquant l'espérance mathématique sur toutes les valeurs possible de x_2 . Le niveau x_2 est fonction du niveau de re-complètement de la première période Y_1 et de la demande $D1$ générée également durant la première période.

4.2.2 Dynamique du système et fonction profit global

4.2.2.1 Analyse du problème mono-période

Afin de résoudre le problème à deux périodes, il est nécessaire d'étudier dans un premier temps la fonction profit générique relative au problème mono-période. Pour ce faire, nous utilisons la fonction coût associée à une période de vente i , (x, Y) , cf. équation (4.1), exprimée pour un stock initial x_i donné, un niveau de re-complètement IS Y_{IS} , un niveau de re-complètement PH Y_{PH} , une demande D_i et un coût de sur-stockage unitaire h_i :

$$L_i(Y) = E_{Di} \left[u_1 [Di - Y_{IS}]^+ + u_2 [\text{Min}\{Y_{IS}, Di\} - Y_{PH}]^+ + h_i [Y_{PH} - \text{Min}\{Y_{IS}, Di\}]^+ \right] \quad (4.1)$$

Il est à noter que les différentes parties de la fonction coût ci-dessus peuvent être interprétées comme suit :

$u_1 [Di - Y_{IS}]^+$: représente la pénalité liée aux pertes de ventes résultant d'une demande cumulative des clients supérieure à la quantité affichée dans le IS.

$u_2 [\text{Min}\{Y_{IS}, Di\} - Y_{PH}]^+$: représente la pénalité payée si une fraction des engagements de vente n'est pas honorée lors de la livraison aux clients finaux.

$h_i [Y_{PH} - \text{Min}\{Y_{IS}, Di\}]^+$: représente la pénalité liée à une situation de sur-stockage

Pour pouvoir développer la fonction $L_i(Y)$ nous utilisons les égalités suivantes (4.2), (4.3), (4.4) et (4.5) :

$$\text{Min}(a, b) = a - [a - b]^+ \quad (4.2)$$

$$[a]^+ = a + [-a]^+ \quad (4.3)$$

$$\int_{x=-\infty}^a x f_X(x) dx = \mu_X F_X(a) - \sigma_X^2 f_X(a) \quad (4.4)$$

$$\int_{x=a}^{+\infty} x f_X(x) dx = \mu_X (1 - F_X(a)) + \sigma_X^2 f_X(a) \quad (4.5)$$

Et en appliquant par la suite l'espérance mathématique par rapport à la demande et aux deux perturbations Di , $Y_{ISi} = \gamma_{ISi} Y_i$, $Y_{PHi} = \gamma_{PHi} Y_i$, la fonction coût moyen peut être exprimée comme suit (4.6) :

$$(4.6)$$

$$\begin{aligned} L_i(Y) = & u_1 \int_{\gamma_{ISi}=0}^{+\infty} \int_{Di=\gamma_{ISi}Y}^{+\infty} (Di - \gamma_{ISi}Y) f_{Di}(Di) f_{ISi}(\gamma_{ISi}) dDi d\gamma_{ISi} \\ & + h_i \int_{\gamma_{ISi}=0}^{+\infty} \int_{Di=-\infty}^{\gamma_{ISi}Y_i} (\gamma_{ISi}Y - Di) f_{Di}(Di) f_{ISi}(\gamma_{ISi}) dDi d\gamma_{ISi} \\ & + u_2 Y \int_{\gamma_{PHi}=0}^{+\infty} \int_{\gamma_{ISi}=0}^{+\infty} (\gamma_{ISi} - \gamma_{PHi}) f_{ISi}(\gamma_{ISi}) f_{PHi}(\gamma_{PHi}) d\gamma_{ISi} d\gamma_{PHi} \\ & - (u_2 + h_i) \left(\int_{\gamma_{PHi}=0}^{+\infty} \int_{\gamma_{ISi}=0}^{\gamma_{PHi}} (\gamma_{ISi} - \gamma_{PHi}) Y f_{ISi}(\gamma_{ISi}) f_{PHi}(\gamma_{PHi}) d\gamma_{ISi} d\gamma_{PHi} \right. \\ & \left. + \int_{\gamma_{ISi}=0}^{+\infty} \int_{\gamma_{PHi}=0}^{\gamma_{ISi}} \int_{Di=\gamma_{PHi}Y_i}^{\gamma_{ISi}Y_i} (\gamma_{ISi}Y - Di) f_{Di}(Di) f_{PHi}(\gamma_{PHi}) f_{ISi}(\gamma_{ISi}) dDi d\gamma_{PHi} d\gamma_{ISi} \right. \\ & \left. + \int_{\gamma_{ISi}=0}^{+\infty} \int_{\gamma_{PHi}=0}^{\gamma_{ISi}} \int_{Di=-\infty}^{\gamma_{PHi}Y_i} (\gamma_{ISi} - \gamma_{PHi}) Y_i f_{Di}(Di) f_{PHi}(\gamma_{PHi}) f_{ISi}(\gamma_{ISi}) dDi d\gamma_{PHi} d\gamma_{ISi} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= u_1 \mu_{Di} (1 - F_{ISi}(0)) \\
 &+ Y \int_{\gamma_{ISi}=0}^{+\infty} ((u_1 + h_i) F_{Di}(\gamma_{ISi} Y) - u_1) \gamma_{ISi} f_{ISi}(\gamma_{ISi}) d\gamma_{ISi} \\
 &- (u_1 + h_i) \int_{\gamma_{ISi}=0}^{+\infty} (\mu_{Di} F_{Di}(\gamma_{ISi} Y) - \sigma_{Di}^2 f_{Di}(\gamma_{ISi} Y)) f_{ISi}(\gamma_{ISi}) d\gamma_{ISi} \\
 &+ u_2 Y (\mu_{ISi} - \mu_{PHi}) \\
 &- (u_2 + h_i) \left(\int_{\gamma_{PHi}=0}^{+\infty} Y \left(\begin{aligned} &(\mu_{ISi} - \gamma_{PHi})(F_{ISi}(\gamma_{PHi}) - F_{ISi}(0)) \\ &-\sigma_{ISi}^2 (f_{ISi}(\gamma_{PHi}) - f_{ISi}(0)) \end{aligned} \right) f_{PHi}(\gamma_{PHi}) d\gamma_{PHi} \right. \\
 &\left. + \int_{\gamma_{ISi}=0}^{+\infty} \left(\begin{aligned} &((\gamma_{ISi} Y - \mu_{Di}) F_{Di}(\gamma_{ISi} Y)) \\ &+ \sigma_{Di}^2 f_{Di}(\gamma_{ISi} Y) \end{aligned} \right) (F_{PHi}(\gamma_{ISi}) - F_{PHi}(0)) f_{ISi}(\gamma_{ISi}) d\gamma_{ISi} \right. \\
 &\left. * \left(- \int_{\gamma_{ISi}=0}^{+\infty} \int_{\gamma_{PHi}=0}^{\gamma_{ISi}} \left(\begin{aligned} &(\gamma_{PHi} Y - \mu_{Di}) F_{Di}(\gamma_{PHi} Y) \\ &+ \sigma_{Di}^2 f_{Di}(\gamma_{PHi} Y) \end{aligned} \right) f_{PHi}(\gamma_{PHi}) f_{ISi}(\gamma_{ISi}) d\gamma_{PHi} d\gamma_{ISi} \right) \right)
 \end{aligned}$$

La dérivée première de $L_i(Y)$ est donnée par (4.7).

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L_i(Y)}{\partial Y} &= \int_{\gamma_{ISi}=0}^{+\infty} ((u_1 + h_i) F_{Di}(\gamma_{ISi} Y) - u_1) \gamma_{ISi} f_{ISi}(\gamma_{ISi}) d\gamma_{ISi} \\
 &+ u_2 (\mu_{ISi} - \mu_{PHi}) \\
 &- (u_2 + h_i) \left(\int_{\gamma_{PHi}=0}^{+\infty} \left(\begin{aligned} &(\mu_{ISi} - \gamma_{PHi})(F_{ISi}(\gamma_{PHi}) - F_{ISi}(0)) \\ &-\sigma_{ISi}^2 (f_{ISi}(\gamma_{PHi}) - f_{ISi}(0)) \end{aligned} \right) f_{PHi}(\gamma_{PHi}) d\gamma_{PHi} \right. \\
 &\left. + \int_{\gamma_{ISi}=0}^{+\infty} (\gamma_{ISi} F_{Di}(\gamma_{ISi} Y)) (F_{PHi}(\gamma_{ISi}) - F_{PHi}(0)) f_{ISi}(\gamma_{ISi}) d\gamma_{ISi} \right. \\
 &\left. - \int_{\gamma_{ISi}=0}^{+\infty} \int_{\gamma_{PHi}=0}^{\gamma_{ISi}} (\gamma_{PHi} F_{Di}(\gamma_{PHi} Y)) f_{PHi}(\gamma_{PHi}) f_{ISi}(\gamma_{ISi}) d\gamma_{PHi} d\gamma_{ISi} \right)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

La fonction profit générique pour une période de vente peut être déduite selon (4.8).

$$\pi_i(x_i, Y_i) = u_1 \mu_{Di} - L_i(Y_i) - c(\mu_{PHi} Y_i - x_i) \tag{4.8}$$

Dans la suite de ce chapitre nous utilisons les constantes suivantes pour $i \in \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned}
 C_{1i} &= -(u_1 + h_i) \int_0^{+\infty} \gamma_{ISi} f_{ISi}(\gamma_{ISi}) \gamma_{ISi} \\
 &+ (u_2 + h_i) \int_0^{+\infty} \int_0^{\gamma_{ISi}} (\gamma_{ISi} - \gamma_{PHi}) f_{PHi}(\gamma_{PHi}) f_{ISi}(\gamma_{ISi}) d\gamma_{PHi} d\gamma_{ISi} \\
 C_{2i} &= -u_1 (\mu_{ISi} (1 - F_{ISi}(0)) + \sigma_{ISi}^2 f_{ISi}(0)) + u_2 (\mu_{ISi} - \mu_{PHi}) \\
 &- (u_2 + h_i) \int_0^{+\infty} ((\mu_{ISi} - \gamma_{PHi})(F_{ISi}(\gamma_{PHi}) - F_{ISi}(0)) - \sigma_{PHi}^2 (f_{ISi}(\gamma_{PHi}) - f_{ISi}(0))) f_{PHi}(\gamma_{PHi}) d\gamma_{PHi}
 \end{aligned}$$

Remarque 1 : Comme pour le chapitre précédent, nous faisons l'hypothèse que la quantité facturée par le fournisseur est la quantité existante réellement en stock (cf. eq. 4.8 où le coût unitaire d'achat est appliqué au stock PH). Si nous changeons cette

hypothèse et que nous supposons que la facturation pour le fournisseur se base sur la quantité affichée dans le quantités IS (i.e. nous changeons le dernier terme dans eq. 4.8 par $c(\mu_{IS_i}Y - x)$), notre démarche d'optimisation reste applicable. Le seul paramètre qui change si nous considérons cette hypothèse est C_{2i} qui devient :

$$C_{2i} = -u_1(\mu_{IS_i}(1 - F_{IS_i}(0)) + \sigma_{IS_i}^2 f_{IS_i}(0)) + (u_2 - c)(\mu_{SI_i} - \mu_{SP_i}) - (u_2 + h_i) \int_0^{+\infty} \left(\begin{array}{l} (\mu_{SI_i} - \gamma_{SP_i})(F_{IS_i}(\gamma_{SP_i}) - F_{IS_i}(0)) \\ -\sigma_{SP_i}^2 (f_{IS_i}(\gamma_{PH_i}) - f_{IS_i}(0)) \end{array} \right) f_{PH_i}(\gamma_{PH_i}) d\gamma_{PH_i}$$

4.2.2.2 Analyse du problème à deux périodes de vente :

Comme mentionné précédemment, nous utilisons la récursion arrière pour résoudre le cas à deux périodes de vente. Pour ce faire, nous commençons par établir les conditions d'optimalité de la période 2 pour un niveau de stock IS initial x_2 donné. L'optimisation de la période 2 correspond tout simplement au cas mono-période pour un niveau x_2 donné. En utilisant et en adaptant nos résultats mono-période démontrés dans le chapitre précédent, le niveau de re-complètement optimal pour la période 2, Y_2^* doit satisfaire l'équation (4.9) qui correspond à l'annulation de la dérivée première de la fonction profit moyen :

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{\gamma_{IS_2}} \left[\begin{array}{l} (u_2 + h_2) \gamma_{IS_2} F_{D2}(\gamma_{IS_2} Y_2^*) \\ -(u_2 + h_2) \gamma_{PH_2} F_{D2}(\gamma_{PH_2} Y_2^*) \\ -(u_1 + h_2) \frac{\gamma_{IS_2} F_{D2}(\gamma_{IS_2} Y_2^*)}{F_{PH_2}(\gamma_{IS_2}) - F_{PH_2}(0)} \end{array} \right] f_{PH_2}(\gamma_{PH_2}) f_{IS_2}(\gamma_{IS_2}) d\gamma_{PH_2} d\gamma_{IS_2} = C_{22} + c\mu_{PH_2} \quad (4.9)$$

Ainsi, pour un stock initial en début de la période 2 égal à x_2 , la quantité que doit commander l'e-détaillant auprès de son fournisseur pour cette période, est égale à

$$Q_2^* = \begin{cases} Y_2^* - x_2 & \text{si } x_2 \leq Y_2^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le profit moyen de la période 2 peut également s'écrire comme (4.10) :

$$\pi_2(x_2, Y_2^*) = \begin{cases} u_1 \mu_{D2} - L_2(Y_2^*) - c(\mu_{PH_2} Y_2^* - x_2) & \text{si } 0 < x_2 \leq Y_2^* \\ u_1 \mu_{D2} - L_2(Y_2^*) - c(\mu_{PH_2} Y_2^*) & \text{si } x_2 = 0 \\ u_1 \mu_{D2} - L_2(x_2) & Y_2^* \leq x_2 \end{cases} \quad (4.10)$$

En utilisant cette dernière expression, le profit moyen global relatif aux deux périodes de vente, après intégration du profit moyen de la période 1 et en appliquant l'espérance

mathématique par rapport à x_2 sur le profit de la période 2, peut se formuler comme suit (4.11) :

$$\pi_g(x_1, Y_1) = \max_{Y_1 \geq x_1} \left\{ u_1 \mu_{D1} - L_1(Y_1) - c(\mu_{PH1} Y_1 - x_1) + E_{x_2} \left[\pi_2^*(x_2, Y_2^*) \right] \right\} \quad (4.11)$$

La dynamique du système entre les deux périodes de vente s'exprime par la relation entre x_2 et la demande de la période 1 :

Le stock disponible au début de période 2 x_2 , affiché dans le SI et qui est utilisé pour re-compléter le stock dépend du niveau de re-complètement, des perturbations SI et de la demande relatifs à période 1 :

$$x_2 = \begin{cases} \gamma_{IS1} Y_1 - D1 \text{ si } D1 \leq \gamma_{IS1} Y_1 \\ 0 \text{ si } \gamma_{IS1} Y_1 \leq D1 \end{cases}$$

En appliquant cette dynamique sur l'expression de $\pi_g(x_1, Y_1)$, le profit moyen des deux périodes de vente peut s'exprimer comme suit (4.12) :

$$\pi_g(x_1, Y_1) = \max_{Y_1 \geq x_1} \left\{ \begin{aligned} & u_1 \mu_{D1} - L_1(Y_1) - c(\mu_{PH1} Y_1 - x_1) \\ & + \int_{\gamma_{IS1}=0}^{+\infty} \left(\int_{D1=0}^{\gamma_{IS1} Y_1 - Y_2^*} u_1 \mu_{D2} - L_2(\gamma_{IS1} Y_1 - D1) f_{D1}(D1) dD1 \right. \\ & + \int_{D1=\gamma_{IS1} Y_1 - Y_2^*}^{\gamma_{IS1} Y_1} \left(u_1 \mu_{D2} - L_2(Y_2^*) - c(\mu_{PH2} Y_2^* - \gamma_{IS1} Y_1 + D1) \right) f_{D1}(D1) dD1 \\ & \left. + \int_{D1=\gamma_{IS1} Y_1}^{+\infty} \left(u_1 \mu_{D2} - L_2(Y_2^*) - c(\mu_{PH2} Y_2^*) \right) f_{D1}(D1) dD1 \right) f_{\gamma_{IS1}}(\gamma_{IS1}) d\gamma_{IS1} \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

$$= \max_{Y_1 \geq x_1} \left\{ \begin{aligned} & u_1 \mu_{D1} - L_1(Y_1) - c(\mu_{PH1} Y_1 - x_1) \\ & + \int_{\gamma_{IS1}=0}^{+\infty} \left(\int_{D1=0}^{\gamma_{IS1} Y_1 - Y_2^*} u_1 \mu_{D2} - L_2(\gamma_{IS1} Y_1 - D1) f_{D1}(D1) dD1 \right. \\ & + \int_{D1=\gamma_{IS1} Y_1 - Y_2^*}^{\gamma_{IS1} Y_1} \left(u_1 \mu_{D2} - L_2(Y_2^*) - c(\mu_{PH2} Y_2^*) \right) f_{D1}(D1) dD1 \\ & \left. + \int_{D1=\gamma_{IS1} Y_1}^{+\infty} \left(c(\gamma_{IS1} Y_1 - D1) \right) f_{D1}(D1) dD1 \right) f_{\gamma_{IS1}}(\gamma_{IS1}) d\gamma_{IS1} \end{aligned} \right\}$$

En remplaçant $L_1(Y_1)$, $L_2(\gamma_{IS1} Y_1 - D1)$ et $L_2(Y_2^*)$ par leurs expressions, le profit moyen global devient sous la forme de l'équation (4.13) :

$$(4.13)$$

$$\begin{aligned}
 \pi_g(Y_1) &= u_1(\mu_{D1} - \mu_{D1}(1 - F_{IS1}(0))) - c(\mu_{PH1}Y_1 - x_1) \\
 &- Y_1 \int_{\gamma_{IS1}=0}^{+\infty} ((u_1 + hol)F_{D1}(\gamma_{IS1}Y_1) - u_1)\gamma_{IS1}f_{IS1}(\gamma_{IS1})d\gamma_{IS1} \\
 &+ (u_1 + hol_1) \int_{\gamma_{IS1}=0}^{+\infty} (\mu_{D1}F_{D1}(\gamma_{IS1}Y_1) - \sigma_{D1}^2 f_{D1}(\gamma_{IS1}Y_1))f_{IS1}(\gamma_{IS1})d\gamma_{IS1} - u_2Y_1(\mu_{IS1} - \mu_{PH1}) \\
 &+ (u_2 + hol_1) \left(\int_{\gamma_{PH1}=0}^{+\infty} Y_1 \left(\begin{aligned} &(\mu_{IS1} - \gamma_{PH1})(F_{IS1}(\gamma_{PH1}) - F_{IS1}(0)) \\ &- \sigma_{IS1}^2 (f_{IS1}(\gamma_{PH1}) - f_{IS1}(0)) \end{aligned} \right) f_{PH1}(\gamma_{PH1})d\gamma_{PH1} \right. \\
 &\left. + \int_{\gamma_{IS1}=0}^{+\infty} \left(\begin{aligned} &((\gamma_{IS1}Y_1 - \mu_{D1})F_{D1}(\gamma_{IS1}Y_1)) \\ &+ \sigma_{D1}^2 f_{D1}(\gamma_{IS1}Y_1) \end{aligned} \right) (F_{PH1}(\gamma_{IS1}) - F_{PH1}(0))f_{IS1}(\gamma_{IS1})d\gamma_{IS1} \right. \\
 &\left. - \int_{\gamma_{IS1}=0}^{+\infty} \int_{\gamma_{PH1}=0}^{\gamma_{IS1}} \left(\begin{aligned} &(\gamma_{PH1}Y_1 - \mu_{D1})F_{D1}(\gamma_{PH1}Y_1) \\ &+ \sigma_{D1}^2 f_{D1}(\gamma_{PH1}Y_1) \end{aligned} \right) f_{PH1}(\gamma_{PH1})f_{IS1}(\gamma_{IS1})d\gamma_{PH1}d\gamma_{IS1} \right) \\
 &+ \int_{D1=0}^{\gamma_{IS1}Y_1 - Y_2^*} \left(\begin{aligned} &u_1(\mu_{D2} - \mu_{D2}(1 - F_{IS2}(0))) \\ &- (\gamma_{IS1}Y_1 - D1) \int_{\gamma_{IS2}=0}^{+\infty} ((u_1 + hol)F_{D2}(\gamma_{IS2}(\gamma_{IS1}Y_1 - D1)) - u_1)f_{IS2}(\gamma_{IS2})d\gamma_{IS2} \\ &+ (u_1 + hol_2) \int_{\gamma_{IS2}=0}^{+\infty} \left(\begin{aligned} &(\mu_{D2}F_{D2}(\gamma_{IS2}(\gamma_{IS1}Y_1 - D1))) \\ &- \sigma_{D2}^2 f_{D2}(\gamma_{IS2}(\gamma_{IS1}Y_1 - D1)) \end{aligned} \right) f_{IS2}(\gamma_{IS2})d\gamma_{IS2} \\ &- u_2(\gamma_{IS1}Y_1 - D1)(\mu_{IS2} - \mu_{PH2}) \\ &+ (u_2 + hol_2) \left(\int_{\gamma_{PH2}=0}^{+\infty} (\gamma_{IS1}Y_1 - D1) \left(\begin{aligned} &(\mu_{IS2} - \gamma_{PH2})(F_{IS2}(\gamma_{PH2}) - F_{IS2}(0)) \\ &- \sigma_{IS2}^2 (f_{IS2}(\gamma_{PH2}) - f_{IS2}(0)) \end{aligned} \right) f_{PH2}(\gamma_{PH2})d\gamma_{PH2} \right. \\ &+ \int_{\gamma_{IS2}=0}^{+\infty} \left(\begin{aligned} &(\gamma_{IS2}(\gamma_{IS1}Y_1 - D1) - \mu_{D2})F_{D2}(\gamma_{IS2}(\gamma_{IS1}Y_1 - D1)) \\ &+ \sigma_{D2}^2 f_{D2}(\gamma_{IS2}(\gamma_{IS1}Y_1 - D1)) \end{aligned} \right) (F_{PH2}(\gamma_{IS2}) - F_{PH2}(0))f_{IS2}(\gamma_{IS2})d\gamma_{IS2} \\ &- \int_{\gamma_{IS2}=0}^{+\infty} \int_{\gamma_{PH2}=0}^{\gamma_{IS2}} \left(\begin{aligned} &(\gamma_{PH2}(\gamma_{IS1}Y_1 - D1) - \mu_{D2})F_{D2}(\gamma_{PH2}(\gamma_{IS1}Y_1 - D1)) \\ &+ \sigma_{D2}^2 f_{D2}(\gamma_{PH2}(\gamma_{IS1}Y_1 - D1)) \end{aligned} \right) f_{PH2}(\gamma_{PH2}) + \\ &f_{IS2}(\gamma_{IS2})d\gamma_{PH2}d\gamma_{IS2} \end{aligned} \right) f_{D1}(D1)dD1 \\
 &+ \int_{\gamma_{IS1}=0}^{+\infty} + \left(\begin{aligned} &u_1(\mu_{D2} - \mu_{D2}(1 - F_{IS2}(0))) \\ &- Y_2^* \int_{\gamma_{IS2}=0}^{+\infty} ((u_1 + hol)F_{D2}(\gamma_{IS2}Y_2^*) - u_1)f_{IS2}(\gamma_{IS2})d\gamma_{IS2} \\ &+ (u_1 + hol_2) \int_{\gamma_{IS2}=0}^{+\infty} \left(\begin{aligned} &(\mu_{D2}F_{D2}(\gamma_{IS2}Y_2^*)) \\ &- \sigma_{D2}^2 f_{D2}(\gamma_{IS2}Y_2^*) \end{aligned} \right) f_{IS2}(\gamma_{IS2})d\gamma_{IS2} \\ &- u_2Y_2^*(\mu_{IS2} - \mu_{PH2}) \\ &+ (u_2 + hol_2) \left(\int_{\gamma_{PH2}=0}^{+\infty} Y_2^* \left(\begin{aligned} &(\mu_{IS2} - \gamma_{PH2})(F_{IS2}(\gamma_{PH2}) - F_{IS2}(0)) \\ &- \sigma_{IS2}^2 (f_{IS2}(\gamma_{PH2}) - f_{IS2}(0)) \end{aligned} \right) f_{PH2}(\gamma_{PH2})d\gamma_{PH2} \right. \\ &+ \int_{\gamma_{IS2}=0}^{+\infty} \left(\begin{aligned} &(\gamma_{IS2}Y_2^* - \mu_{D2})F_{D2}(\gamma_{IS2}Y_2^*) \\ &+ \sigma_{D2}^2 f_{D2}(\gamma_{IS2}Y_2^*) \end{aligned} \right) (F_{PH2}(\gamma_{IS2}) - F_{PH2}(0))f_{IS2}(\gamma_{IS2})d\gamma_{IS2} \\ &- \int_{\gamma_{IS2}=0}^{+\infty} \int_{\gamma_{PH2}=0}^{\gamma_{IS2}} \left(\begin{aligned} &(\gamma_{PH2}Y_2^* - \mu_{D2})F_{D2}(\gamma_{PH2}Y_2^*) \\ &+ \sigma_{D2}^2 f_{D2}(\gamma_{PH2}Y_2^*) \end{aligned} \right) f_{PH2}(\gamma_{PH2}) + \\ &f_{IS2}(\gamma_{IS2})d\gamma_{PH2}d\gamma_{IS2} - c\mu_{PH2}Y_2^* \end{aligned} \right) f_{D1}(D1)dD1 \\
 &+ \int_{D1=\gamma_{IS1}Y_1 - Y_2^*}^{\gamma_{IS1}Y_1} (-c(\gamma_{IS1}Y_1 - D1))f_{D1}(D1)dD1 \\
 &f_{IS1}(\gamma_{IS1})d\gamma_{IS1}
 \end{aligned}$$

4.2.3 Optimisation et conditions d'existence des solutions d'optimalité

4.2.3.1 Conditions d'optimalité pour Y_2^*

L'optimisation de la période 2 correspond tout simplement au cas mono-période pour un niveau x_2 donné. En utilisant et en adaptant les résultats mono-période démontrés par Dans le chapitre précédent, le niveau de re-complètement optimal pour la période 2 Y_2^* , s'il existe, doit annuler la dérivée première de la fonction profit moyen qui s'écrit comme suit (4.14) :

$$\frac{\partial \pi_2(Y_2)}{\partial Y_2} = \int_0^{+\infty} \int_0^{\gamma_{IS2}} \left[\begin{array}{l} (u_2 + h_2) \gamma_{IS2} F_{D2}(\gamma_{IS2} Y_2) \\ -(u_2 + h_2) \gamma_{PH2} F_{D2}(\gamma_{PH2} Y_2) \\ -(u_1 + h_2) \frac{\gamma_{IS2} F_{D2}(\gamma_{IS2} Y_2)}{F_{PH2}(\gamma_{IS2}) - F_{PH2}(0)} \end{array} \right] f_{PH2}(\gamma_{PH2}) \left[f_{IS2}(\gamma_{IS2}) d\gamma_{PH2} d\gamma_{IS2} - C_{22} - c\mu_{PH2} \right] \quad (4.14)$$

Afin d'étudier l'existence de la solution optimale Y_2^* , nous analysons le comportement de la dérivée seconde du profit moyen, $\frac{\partial^2 \pi_2(Y_2)}{\partial Y_2^2}$, qui s'écrit comme (4.15) :

$$\frac{\partial^2 \pi_2(Y_2)}{\partial Y_2^2} = \int_0^{+\infty} \int_0^{\gamma_{IS2}} \left[\begin{array}{l} (u_2 + h_2) \gamma_{IS2} F_{D2}(\gamma_{IS2} Y_2) \\ -(u_2 + h_2) \gamma_{PH2} F_{D2}(\gamma_{PH2} Y_2) \\ -(u_1 + h_2) \frac{\gamma_{IS2} F_{D2}(\gamma_{IS2} Y_2)}{F_{PH2}(\gamma_{IS2}) - F_{PH2}(0)} \end{array} \right] f_{PH2}(\gamma_{PH2}) \left[f_{IS2}(\gamma_{IS2}) d\gamma_{PH2} d\gamma_{IS2} \right] \quad (4.15)$$

En nous basant sur le travail fait dans le chapitre précédent, l'analyse analytique de $\frac{\partial^2 \pi_2(Y_2)}{\partial Y_2^2}$ montre l'existence d'une hypothèse **H1** (Chapitre 3, section 3.4) permettant de vérifier analytiquement la concavité de la fonction profit moyen. Si la condition **H1** n'est pas vérifiée, une analyse numérique approfondie nous montre que la dérivée seconde $\frac{\partial^2 \pi_2(Y_2)}{\partial Y_2^2}$ s'annule uniquement une fois, ce qui nous permet de déduire les conditions d'optimalité de la fonction profit moyen. Une analyse approfondie de H1 a été réalisée dans le chapitre 3 (Section 3.4)

Si la dérivée seconde s'annule une seule fois, nous pouvons conclure que la dérivée première $\frac{\partial \pi_2(Y_2)}{\partial Y_2}$ présente au plus un seul optimum. En ajoutant le fait que

$\lim_{Y_2 \rightarrow +\infty} \frac{\partial \pi_2}{\partial Y_2} = C_{12} - C_{22}$ et $\lim_{Y_2 \rightarrow 0} \frac{\partial \pi_2}{\partial Y_2} = -C_{22}$, nous déduisons les conditions d'optimalité de la

fonction profit moyen qui se résume dans le tableau ci-dessous (Tableau 4.1) :

Tableau 4.1. Conditions d'existence de Y_2^*

| | | Nombre de solution pour (4.14) | Optimalité |
|-------------------------------|-----------------|--------------------------------|--|
| $(C_{12} - C_{22})C_{22} > 0$ | $C_{22} < 0$ | 1 | Solution optimale |
| $(C_{12} - C_{22})C_{22} > 0$ | $C_{22} > 0$ | 1 | Solution non optimale |
| $(C_{12} - C_{22})C_{22} < 0$ | $C_{22} < 0$ | 0 ou 2 | Si 2 solutions : la plus petite est optimale |
| $(C_{12} - C_{22})C_{22} < 0$ | $C_{22} > 0$ | 0 ou 2 | Si 2 solutions : la plus grande est optimale |
| $C_{22} = 0$ | Pas de solution | | |
| Autres combinaisons | Pas de solution | | |

4.2.3.2 Conditions d'optimalités pour Y_1^*

Nous poursuivons dans cette section notre analyse analytique avec la première période de vente et nous étudions les conditions d'optimalité du niveau de re-complètement Y_1^* .

Si la quantité optimale Y_1^* existe, son expression doit annuler la dérivée première de la fonction profit moyen associé aux deux périodes de vente, i.e. Y_1^* doit vérifier $\frac{\partial \pi_g}{\partial Y_1}(Y_1^*) = 0$.

Pour calculer $\frac{\partial \pi_g}{\partial Y_1}(Y_1)$ nous utilisons la formule de Leibniz (4.17) et l'expression de $\frac{\partial L_i(Y)}{\partial Y}$

(4.7).

$$\frac{\partial \int_{a(y)}^{b(y)} h(x, y) dx}{\partial y} = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial h(x, y)}{\partial y} dx + h(b(y), y)b'(y) - h(a(y), y)a'(y) \quad (4.17)$$

La dérivée première du profit total, $\frac{\partial \pi_g}{\partial Y_1}(Y_1)$, peut ainsi s'écrire selon (4.18).

(4.18)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \pi_g}{\partial Y_1}(Y_1) &= -\frac{dL_1(Y_1)}{dY_1} - c\mu_{PH1} \\
 &+ \int_{\gamma_{IS1}=0}^{+\infty} \gamma_{IS1} \left(\int_{D1=0}^{\gamma_{IS1}Y_1 - Y_2^*} -\frac{\partial L_2}{\partial Y_1}(\gamma_{IS1}Y_1 - D1) f_{D1}(D1) dD1 + c(F_{D1}(\gamma_{IS1}Y_1) - F_{D1}(\gamma_{IS1}Y_1 - Y_2^*)) \right) f_{\gamma_{IS1}}(\gamma_{IS1}) d\gamma_{IS1} \\
 &= -(u_1 + h_1) \int_{\gamma_{IS1}=0}^{+\infty} F_{D1}(\gamma_{IS1}Y_1) \gamma_{IS1} f_{IS1}(\gamma_{IS1}) d\gamma_{IS1} - C_{21} \\
 &+ (u_2 + h_1) \left(\int_{\gamma_{IS1}=0}^{+\infty} (\gamma_{IS1} F_{D1}(\gamma_{IS1}Y_1)) (F_{PH1}(\gamma_{IS1}) - F_{PH1}(0)) f_{IS1}(\gamma_{IS1}) d\gamma_{IS1} \right. \\
 &\quad \left. - \int_{\gamma_{IS1}=0}^{+\infty} \int_{\gamma_{PH1}=0}^{\gamma_{IS1}} (\gamma_{PH1} F_{D1}(\gamma_{PH1}Y_1)) f_{PH1}(\gamma_{PH1}) f_{IS1}(\gamma_{IS1}) d\gamma_{PH1} d\gamma_{IS1} \right) - c\mu_{PH1} \\
 &\quad \gamma_{IS1} (-u_1 + h_2) \int_{\gamma_{IS2}=0}^{+\infty} F_{D2}(\gamma_{IS2}(\gamma_{IS1}Y_1 - D1)) \gamma_{IS2} f_{IS2}(\gamma_{IS2}) d\gamma_{IS2} - C_{22} \\
 &+ \int_{\gamma_{IS1}=0}^{+\infty} \left(\int_{D1=0}^{\gamma_{IS1}Y_1 - Y_2^*} + (u_2 + h_2) \int_{\gamma_{IS1}=0}^{+\infty} (\gamma_{IS2} F_{D2}(\gamma_{IS2}(\gamma_{IS1}Y_1 - D1))) (F_{PH2}(\gamma_{IS2}) - F_{PH2}(0)) f_{IS2}(\gamma_{IS2}) d\gamma_{IS2} \right) f_{D1}(D1) dD1 \\
 &\quad \left(- \int_{\gamma_{IS2}=0}^{+\infty} \int_{\gamma_{PH2}=0}^{\gamma_{IS2}} (\gamma_{PH2} F_{D2}(\gamma_{PH2}(\gamma_{IS1}Y_1 - D1))) f_{PH2}(\gamma_{PH2}) f_{IS2}(\gamma_{IS2}) d\gamma_{PH2} d\gamma_{IS2} \right) \\
 &\quad + c\gamma_{IS1} (F_{D1}(\gamma_{IS1}Y_1) - F_{D1}(\gamma_{IS1}Y_1 - Y_2^*)) + c\gamma_{IS1} (\mu_{PH2} - 1) Y_2^* f_{D1}(\gamma_{IS1}Y_1 - Y_2^*) f_{\gamma_{IS1}}(\gamma_{IS1}) d\gamma_{IS1}
 \end{aligned}$$

Dans le reste du chapitre, pour se focaliser sur l'impact des incertitudes des perturbations et pour simplifier les expressions mathématiques, nous fixons $\mu_{IS1} = \mu_{IS2} = \mu_{PH1} = \mu_{PH2} = 1$.

Comme précédemment, nous analysons les conditions d'optimalité de la fonction profit global des deux périodes en étudiant le comportement de sa dérivée seconde $\frac{\partial^2 \pi_g}{\partial^2 Y_1}(Y_1)$ qui s'écrit selon (4.19).

(4.19)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \pi_g}{\partial^2 Y_1}(Y_1) &= -(u_1 + h_1 - c) \int_{\gamma_{IS1}=0}^{+\infty} f_{D1}(\gamma_{IS1}Y_1) \gamma_{IS1}^2 f_{IS1}(\gamma_{IS1}) d\gamma_{IS1} \\
 &+ (u_2 + h_1) \left(\int_{\gamma_{IS1}=0}^{+\infty} \left(\int_{\gamma_{PH1}=0}^{\gamma_{IS1}} \gamma_{IS1}^2 f_{D1}(\gamma_{IS1}Y_1) \right) f_{PH1}(\gamma_{PH1}) f_{IS1}(\gamma_{IS1}) d\gamma_{PH1} d\gamma_{IS1} \right) \\
 &\quad \gamma_{IS1}^2 (-u_1 + h_2) \int_{\gamma_{IS2}=0}^{+\infty} f_{D2}(\gamma_{IS2}(\gamma_{IS1}Y_1 - D1)) \gamma_{IS2}^2 f_{IS2}(\gamma_{IS2}) d\gamma_{IS2} \\
 &+ \int_{\gamma_{IS1}=0}^{+\infty} \left(\int_{D1=0}^{\gamma_{IS1}Y_1 - Y_2^*} + (u_2 + h_2) \int_{\gamma_{IS2}=0}^{+\infty} \int_{\gamma_{PH2}=0}^{\gamma_{IS2}} \left(\gamma_{IS2}^2 f_{D2}(\gamma_{IS2}(\gamma_{IS1}Y_1 - D1)) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \gamma_{PH2}^2 f_{D2}(\gamma_{PH2}(\gamma_{IS1}Y_1 - D1)) \right) f_{PH2}(\gamma_{PH2}) f_{IS2}(\gamma_{IS2}) d\gamma_{PH2} d\gamma_{IS2} \right) f_{D1}(D1) dD1 \\
 &\quad - c\gamma_{IS1}^2 f_{D1}(\gamma_{IS1}Y_1 - Y_2^*) f_{IS1}(\gamma_{IS1}) d\gamma_{IS1}
 \end{aligned}$$

Comme précédemment, nous définissons une nouvelle hypothèse **H2** qui porte cette fois sur les paramètres d'entrée associés à la première période de vente :

$$\mathbf{H2} \quad \mu_{IS1} + 3\sigma_{IS1} \leq F_{PH1}^{-1} \left(\frac{u_1 + h_1 - c}{u_2 + h_1} + F_{PH1}(0) \right)$$

Et en posant $w = \frac{u_2}{u_1}$ et $z = \frac{h_1}{u_1}$ nous pouvons illustrer **H2** avec les figures 4.1 et 4.2 qui représentent les plages de valeurs que peut prendre le paramètre σ_{IS1} en fonction de w et z pour $\mu_{IS1} = 0.8$ et $\mu_{IS1} = 1$ avec $\mu_{PH1} = 1$ et $\sigma_{PH1} = 0.05$ et $c = 2$.

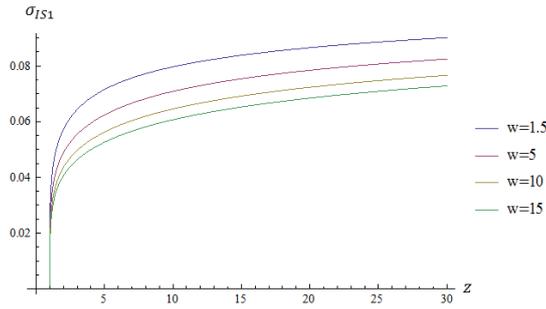


Figure 4.1. σ_{IS1} en fonction de w et z pour $\mu_{IS1} = 0.8$

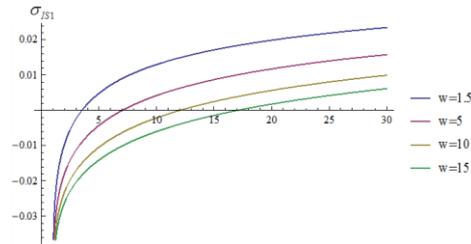


Figure 4.2. σ_{IS1} en fonction de w et z pour $\mu_{IS1} = 1$

La prise en compte des hypothèses **H1** et **H2** imposent une limite sur la variabilité des erreurs. Comme pour **H1**, il est à noter que **H2** est vérifiée pour des faibles variabilités de l'erreur IS de la première période de vente.

Afin de pouvoir l'étudier, nous décomposons $\frac{\partial^2 \pi_g}{\partial^2 Y_1}(Y_1)$ comme suit :

$$\frac{\partial^2 \pi_g}{\partial^2 Y_1}(Y_1) = PT1(Y_1) - PT2(Y_1)$$

Où $PT1(Y_1)$ (respectivement $PT2(Y_1)$) a pour expression (4.20) (respectivement (4.21)).

(4.20)

$$\begin{aligned}
 PT1(Y_1) = & \int_{\gamma_{IS1}=0}^{+\infty} \left(-(u_1 + h_1 - c) \right. \\
 & \left. + (u_2 + h_1)(F_{PH1}(\gamma_{IS1}) - F_{PH1}(0)) \right) f_{D1}(\gamma_{IS1}Y_1) f_{IS1}(\gamma_{IS1}) d\gamma_{IS1} \\
 & + \int_{\gamma_{IS1}=0}^{+\infty} \gamma_{IS1}^2 \left(\int_{D1=0}^{\gamma_{IS1}Y_1 - Y_2^*} \left(-(u_1 + h_2) \right. \right. \\
 & \left. \left. + (u_2 + h_2)(F_{PH2}(\gamma_{IS2}) - F_{PH2}(0)) \right) \gamma_{IS2}^2 f_{D2}(\gamma_{IS2}(\gamma_{IS1}Y_1 - D1)) \right) \\
 & \left. f_{IS2}(\gamma_{IS2}) d\gamma_{IS2} \right) f_{D1}(D1) dD1 f_{IS1}(\gamma_{IS1}) d\gamma_{IS1}
 \end{aligned}
 \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
 PT2(Y_1) = & (u_2 + h_1) \int_0^{+\infty} \int_{\gamma_{PH1}=0}^{\gamma_{IS1}} (\gamma_{PH1}^2 f_{D1}(\gamma_{PH1}Y_1)) f_{PH1}(\gamma_{PH1}) f_{IS1}(\gamma_{IS1}) d\gamma_{PH1} d\gamma_{IS1} \\
 & + \int_{\gamma_{IS1}=0}^{+\infty} ((u_2 + h_2) \gamma_{IS2}^2 \int_{D1=0}^{\gamma_{IS1}Y_1 - Y_2^*} \int_0^{+\infty} \int_{\gamma_{PH2}=0}^{\gamma_{IS2}} \gamma_{PH2}^2 f_{D2}(\gamma_{PH2}(\gamma_{IS1}Y_1 - D1)) \\
 & f_{PH2}(\gamma_{PH2}) f_{IS1}(\gamma_{IS2}) f_{D1}(D1) d\gamma_{PH2} d\gamma_{IS2} dD1 \\
 & - c \gamma_{IS2}^2 f_{D1}(\gamma_{IS1}Y_1 - Y_2^*)) f_{IS1}(\gamma_{IS1}) d\gamma_{IS1}
 \end{aligned}$$

Si les hypothèses **H1** et **H2** sont vérifiées les conditions d'optimalité des niveaux de re-complètement peuvent être déduites comme suit :

$PT1(Y_1)$ est une fonction négative et $PT2(Y_1)$ est une fonction positive donc $\frac{\partial^2 \pi_g}{\partial^2 Y_1}(Y_1)$ est

négative et donc $\frac{\partial \pi_g}{\partial Y_1}(Y_1)$ est une fonction décroissante et nous posons

$$C_\infty = \lim_{Y_1 \rightarrow +\infty} \frac{\partial \pi_g(x_1, Y_1)}{\partial Y_1} = C_{11} - C_{21} + C_{12} - C_{22} \text{ et } \lim_{Y_1 \rightarrow 0} \frac{\partial \pi_g(x_1, Y_1)}{\partial Y_1} = -C_{21}.$$

L'allure de $\frac{\partial^2 \pi_g}{\partial^2 Y_1}(Y_1)$ est représentée dans la figure 4.3.

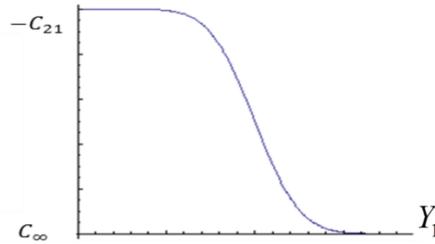


Figure 4.3. Variations de $\frac{\partial^2 \pi_g}{\partial^2 Y_1}(Y_1)$ en fonction de Y_1 dans le cas deux périodes

Le tableau 4.2 résume les conditions d'existence d'une solution optimale pour le problème d'incertitude sur les stocks sur deux périodes et avec une modélisation multiplicative des perturbations.

Théorème de résolution

$$\frac{\partial \pi_g}{\partial Y_1}(Y_1^*) = 0$$

Tableau 4.2. Conditions d'existence Y_1^*

| | | Nombre de solution de (4.18) | Optimalité |
|---------------------------|------------------------|------------------------------|---|
| $-C_{21}C_\infty < 0$ | $-C_{21} > 0$ | 1 | Optimal |
| $-C_{21}C_\infty < 0$ | $-C_{21} < 0$ | 1 | Pas optimal |
| $-C_{21}C_\infty > 0$ | $-C_{21} > 0$ | 0 ou 2 | Si 2 solutions : la plus petite est optimale |
| $-C_{21}C_\infty > 0$ | $-C_{21} < 0$ | 0 ou 2 | Si 2 solutions : la plus grande est optimale |
| $C_{21} = 0$ | Pas de solution | | |
| Autre Combinaisons | Pas de solution | | |

Dans la résolution mathématique, nous remarquons que la dérivée de la fonction profit moyen global peut avoir 2, 1 ou 0 solution. Et si elle admet une solution, cette dernière est soit un minimum ou un maximum.

Si les hypothèses **H1** et **H2** ne sont pas vérifiées, il n'existe pas de règles générales décrivant les conditions optimales du niveau de re-complètement à cause du nombre important de paramètres dont dépend la fonction profit global moyen, l'étude de son comportement devient très difficile à cause du caractère multiplicatif des perturbations, et donc afin de trouver une solution, si elle existe, il faudra tracer la dérivée afin de voir les points où cette dernière s'annule.

4.3 Application numérique

Nous présentons dans cette section, une analyse numérique afin de répondre à des interrogations managériales sur l'impact des perturbations IS et PH sur la stratégie optimale de chaque période de vente.

Nous considérons un e-détaillant ayant des produits à forte marge (u_1 et u_2 sont supérieurs à h_1 et h_2) et des produits à faible marge (u_1 et u_2 sont inférieurs à h_1 et h_2). Cette distinction est faite afin de permettre une analyse complète. Le tableau 4.3 présente les valeurs relatives aux coûts unitaires considérés dans notre étude numérique ainsi que les paramètres de la demande pour chaque période de vente.

Tableau 4.3. Valeurs des paramètres de l'étude numérique

| Coût unitaire | Produit à forte marge | Produit à faible marge |
|-----------------|-----------------------|------------------------|
| u_1 | 15 | 0.5 |
| u_2 | 25 | 0.8 |
| c | 2 | 2 |
| h_1 | 3 | 3 |
| h_2 | 1 | 1 |
| $\mu_{D1,2}$ | 20 | 20 |
| $\sigma_{D1,2}$ | 4 | 4 |
| x_1 | 5 | 5 |

Notre analyse numérique a montré que les écarts types des perturbations σ_{IS} et σ_{PH} ont un rôle symétrique dans la solution optimale, c'est pourquoi nous limitons dans la suite notre illustration graphique à l'impact de σ_{IS} .

Pour chaque type de produit (forte ou faible marge) nous faisons varier σ_{IS2} pour différentes valeurs de σ_{IS1} . Afin de se focaliser sur l'impact des incertitudes, nous fixons

$$\mu_{IS1} = \mu_{IS2} = \mu_{PH1} = \mu_{PH2} = 1$$

Les figures 4.4 et 4.5 (respectivement figures 4.6 et 4.7) présentent la variation de Y_1^* et Y_2^* en fonction des écarts types des perturbations IS et PH pour les produits à forte marge (respectivement faible marge).

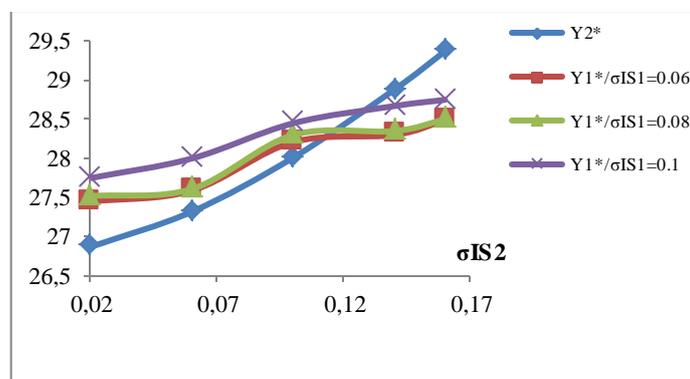


Figure 4.4. Y_1^* et Y_2^* fonction de σ_{IS1} et σ_{IS2} pour un produit à forte marge

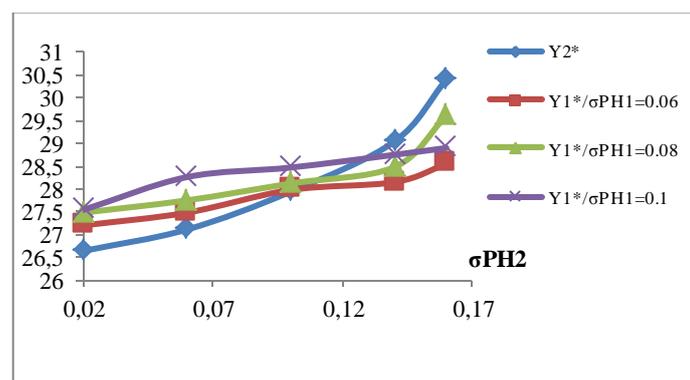


Figure 4.5. Y_1^* et Y_2^* fonction de σ_{PH1} et σ_{PH2} pour un produit à forte marge

Y_1^* et Y_2^* se comportent de la même manière face à la variabilité des perturbations IS et PH :

- pour les produits à faible marge, la quantité optimale à avoir en stock en début de chaque période (Y_1^* et Y_2^*) augmente dans un premier temps afin d'éviter des situations de rupture résultant des perturbations. La pente de la courbe s'inverse et devient décroissante pour les grandes valeurs de la variabilité des perturbations IS et PH (1er et 2ème période). Un tel changement de pente pourrait être expliqué par le fait que pour les grandes valeurs de la variabilité, l'augmentation de Y_1^* et Y_2^* contribue à l'augmentation de l'imprécision car les perturbations sont multiplicatives. L'augmentation des stocks physiques et par conséquent

l'augmentation de la probabilité d'avoir une situation de sur-stockage est plus importante. Il est à rappeler que dans le cas des produits à faible marge, la situation de sur-stockage est plus pénalisante en termes économique que la situation de rupture ;

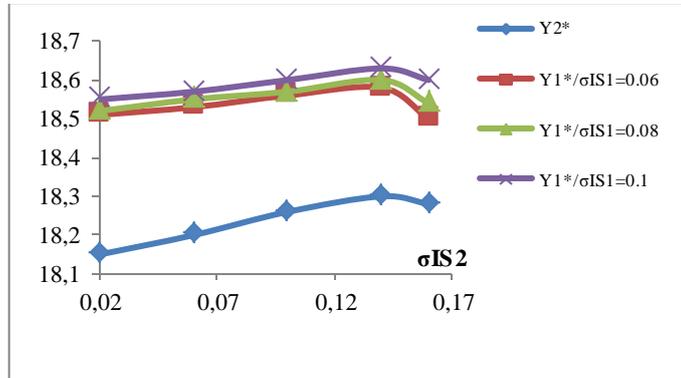


Figure 4.6. Y_1^* et Y_2^* fonction de σ_{IS1} et σ_{IS2} pour un produit à faible marge

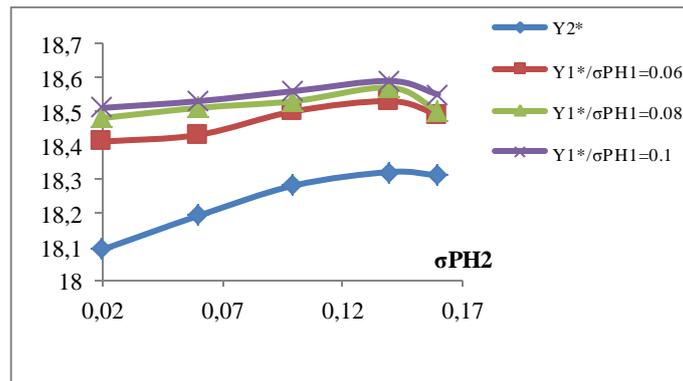


Figure 4.7. Y_1^* et Y_2^* fonction de σ_{PH1} et σ_{PH2} pour un produit à faible marge

- pour les produits à forte marge, Y_1^* et Y_2^* augmentent avec la variabilité des perturbations IS et PH (1er et 2ème périodes) afin d'éviter la situation de rupture qui est plus pénalisante que la situation de sur-stockage en cas de produit de forte marge.

Dans tous les cas, nous remarquons que le profit moyen optimum est décroissant avec la variabilité des perturbations IS (1^{ère} et 2^{ème} périodes) car plus l'incertitude est grande, plus le profit est négativement impacté par les risques de ruptures et sur-stockage causés par les perturbations.

Nous proposons dans la suite une comparaison entre Y_1^* et Y_2^* afin de déduire comment le risque des perturbations doit être partagé entre les deux périodes de vente. Nous notons les remarques qui suivent :

- pour les produits à faible marge nous remarquons que $Y_1^* > Y_2^*$: ceci peut s'expliquer par le fait qu'il est moins risqué de commander beaucoup la première période pour faire face aux perturbations et de reporter les quantités invendues sur la deuxième période. L'augmentation de Y_1^* entraîne mécaniquement l'augmentation de x_2 et donc la quantité à commander pour la période 2 est moins importante afin d'éviter la situation de sur-stockage ;
- pour les produits à forte marge la situation est différente :
 - pour les petites valeurs de σ_{SI2} et σ_{PH2} nous avons peu d'incertitude sur Y_2^* , mais l'incertitude sur Y_1^* est importante car Y_1^* est fonction à la fois de σ_{IS1} et σ_{IS2} (ainsi que de σ_{PH1} et σ_{PH2}). Constatant que pour les produits à haute marge, les ventes perdues et les engagements de vente non honorés sont plus pénalisants que les situations de sur-stockage, il est intuitif d'expliquer l'augmentation de Y_1^* ;
 - pour les grandes valeurs de σ_{IS2} et σ_{PH2} , la variabilité des perturbations de la période 2 l'emporte sur celle de la première.

En raison des remarques précédentes, nous concluons cette analyse de comparaison par le fait qu'une solution myopique ne serait pas optimale si nous voulons étendre le problème vers la configuration multi périodes car le niveau de re-complètement n'est pas toujours croissant avec les périodes de vente.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'impact des perturbations sur la politique de réapprovisionnement dans un contexte e-détaillant en proposant une résolution du problème avec une modélisation multiplicative des perturbations afin d'optimiser le profit. Nous avons étendu les résultats existants vers le cas à deux périodes de vente avec une résolution analytique du problème. Les conditions d'optimalité de la stratégie de commande pour les deux périodes de vente ont été fournies sous forme d'un théorème.

En addition à la contribution théorique, l'étude numérique a permis de répondre à des interrogations managériales concernant le partage des risques des perturbations entre les deux périodes de vente. Ce partage de risque dépend essentiellement de la marge du produit considéré et du comparatif des variabilités des perturbations entre les deux périodes.

Pour les produits à faible marge, la pente des courbes de Y_1^* et Y_2^* change suivant la valeur de la variabilité des perturbations. Quant aux produits à forte marge, Y_1^* et Y_2^* augmentent avec la variabilité des perturbations.

De plus, nous remarquons que le développement analytique a atteint des limites mathématiques avec l'extension de une à deux périodes de vente. Les quantités optimales n'ont pas un comportement monotone avec la variabilité des perturbations, car suivant le type de produit (forte ou faible marge) et la valeur des variabilités des perturbations de la 1^{ère} et 2^{ème} nous n'avons pas une relation monotone entre Y_1^* et Y_2^* . Cette non monotonie rendra très difficile voire impossible l'utilisation des résultats mono-période dans le cas multi-périodes. En effet, à cause de ce comportement non monotone des quantités optimales et la complexité de la résolution mathématique (nombre de variable aléatoire par période, stock initial fonction de plusieurs variables pour la période 2, dynamique complexe du système) une solution myopique n'est pas optimale pour le cas à plusieurs périodes. Afin de contourner cette situation de complexité et d'étendre le contexte e-détaillant au cas multi-périodes, nous utilisons une approche d'optimisation basée sur le taux de service pour de futurs développements.