

qui concerne les flux radiatifs qu'ils émettent que les flux qu'ils reçoivent. En effet, les corps réels n'absorbent qu'une fraction α du rayonnement, en réfléchissent une fraction ρ et en transmettent une fraction τ . A l'équilibre thermodynamique, la conservation de l'énergie implique que l'énergie restituée au milieu extérieur par rayonnement, réflexion ou transmission, doit être égale à l'énergie absorbée (loi de Kirchhoff-Draper). Soit $\varepsilon(\lambda)$ le terme d'émission qui compense le terme d'absorption $\alpha(\lambda)$ et qui est nommé émissivité spectrale, le bilan radiatif s'exprime alors à travers la relation suivante :

$$\varepsilon(\lambda) + \rho(\lambda) + \tau(\lambda) = 1 \quad (\text{A.4})$$

Le rayonnement mesurable par observation d'un corps dont la température est T résulte donc de la superposition de 3 phénomènes (figure A.2) :

- la température du corps T est la source de son rayonnement propre ;
- le corps réfléchit la fraction ρ de l'énergie rayonnée par le milieu ambiant assimilé à un corps noir à la température T_a ;
- si le corps est partiellement transparent, il transmet la fraction τ du rayonnement émis par le fond supposé être un corps noir à la température T_f .

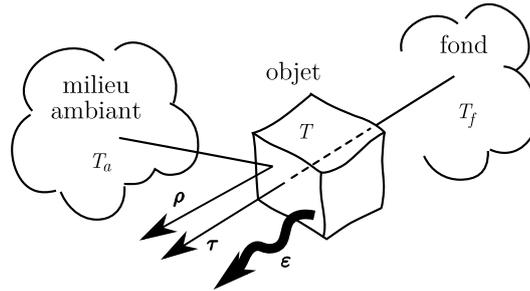


Figure A.2 – Décomposition des différentes contributions du rayonnement mesuré par une caméra infrarouge. D'après Gaussorgues (1984).

Dans ces conditions, le flux mesuré par la caméra, noté R_{det} est la somme de ces 3 contributions et s'écrit :

$$R_{det} = \underbrace{\int_{\Delta\lambda} \rho(\lambda) \frac{dR(\lambda, T_a)}{d\lambda} d\lambda}_{\text{fraction réfléchie}} + \underbrace{\int_{\Delta\lambda} \tau(\lambda) \frac{dR(\lambda, T_f)}{d\lambda} d\lambda}_{\text{fraction transmise}} + \underbrace{\int_{\Delta\lambda} \varepsilon(\lambda) \frac{dR(\lambda, T)}{d\lambda} d\lambda}_{\text{fraction émise}} \quad (\text{A.5})$$

Le but de la mesure étant d'identifier la température de l'objet, il est nécessaire de connaître les deux premiers termes de cette relation, ce qui est généralement un problème complexe. Il se simplifie si le corps est opaque ($\tau = 0$) et si la température de l'objet T est très supérieure à la température ambiante T_a . Il suffit, dans ces conditions, de connaître l'émissivité de l'objet pour remonter à sa température. En revanche, il peut y avoir des problèmes si le corps n'est pas opaque (ce qui est rarement le cas dans la pratique) et si la température ambiante est du même ordre de grandeur, voire supérieure, à la température de l'objet (ce qui est souvent le cas

dans la pratique). Dans ce dernier cas, le terme de rayonnement propre du corps est entaché d'une erreur provenant de la réflexion sur ce corps du rayonnement émis par les objets environnants. On cherche donc dans la pratique à minimiser ces réflexions parasites en maximisant l'émissivité du matériau par application sur la surface des échantillons d'une peinture noire à haute émissivité (les valeurs les plus courantes vont de 0.92 à 0.95). Dans le cas des élastomères, des mesures d'émissivité¹ réalisées sur différents matériaux ont montré qu'il n'était pas nécessaire de peindre les échantillons puisque leur émissivité naturelle, quelque soit le matériau considéré, est de l'ordre de 0.98. Nos matériaux sont ainsi presque équivalents, au sens du rayonnement infrarouge, à des corps noirs.

A.1.3 Etalonnage de la caméra

Nous présentons dans cette section une partie plus technique de la thermographie infrarouge en détaillant l'ensemble des opérations permettant de calibrer une caméra infrarouge, *i.e.* de relier les flux rayonnants mesurés à la température des corps considérés. La calibration d'une caméra est une étape cruciale qui conditionne fortement la qualité des mesures effectuées. Il faut par conséquent y apporter beaucoup de soin. Cette étape dépendant de la technologie utilisée, nous commençons par donner les principales caractéristiques des outils utilisés.

A.1.3.1 Caractéristiques techniques des moyens de mesure et de calibration

La caméra infrarouge utilisée dans cette thèse est une caméra FLIR Systems MWIR 9705 disposant d'une matrice de détecteurs 256×320 pixels, codés sur 14 bits et sensibles sur la bande spectrale $\Delta\lambda = [3 \mu\text{m} ; 5 \mu\text{m}]$. Ces détecteurs sont refroidis à une température de 77 K par un moteur Stirling afin de maximiser leur détectivité (grandeur reliée au rapport signal/bruit). Avec l'objectif utilisé, la résolution spatiale est de $30 \mu\text{m}/\text{pixel}$.

A cette caméra doit être associé un corps noir afin de disposer de mesures de référence. Notre caméra dispose d'un corps noir interne permettant d'y parvenir, mais ce dernier n'est pas très précis. Nous préférons utiliser un corps noir étendu HGH DCN1000 N4 qui permet de contrôler la température de la surface émissive ($\varepsilon = 0.98 \pm 0.02$) avec une très bonne précision ($\pm 0.01^\circ\text{C}$) et de disposer d'une température uniforme sur toute la surface utile du corps noir ($100 \times 100 \text{ mm}^2$). Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que l'émissivité du corps noir est la même que celle de nos matériaux. Les différentes étapes de calibration de la caméra que nous réaliserons seront ainsi directement transposables aux mesures sur éprouvettes

¹La technique que nous avons utilisé pour mesurer l'émissivité est une technique de mesure dite « indirecte » reposant sur la mesure de la réflectivité du matériau. Pour plus de détails sur la méthode, le lecteur est invité à se référer à la thèse de Poncet (2007) qui propose une description fine de la méthode.

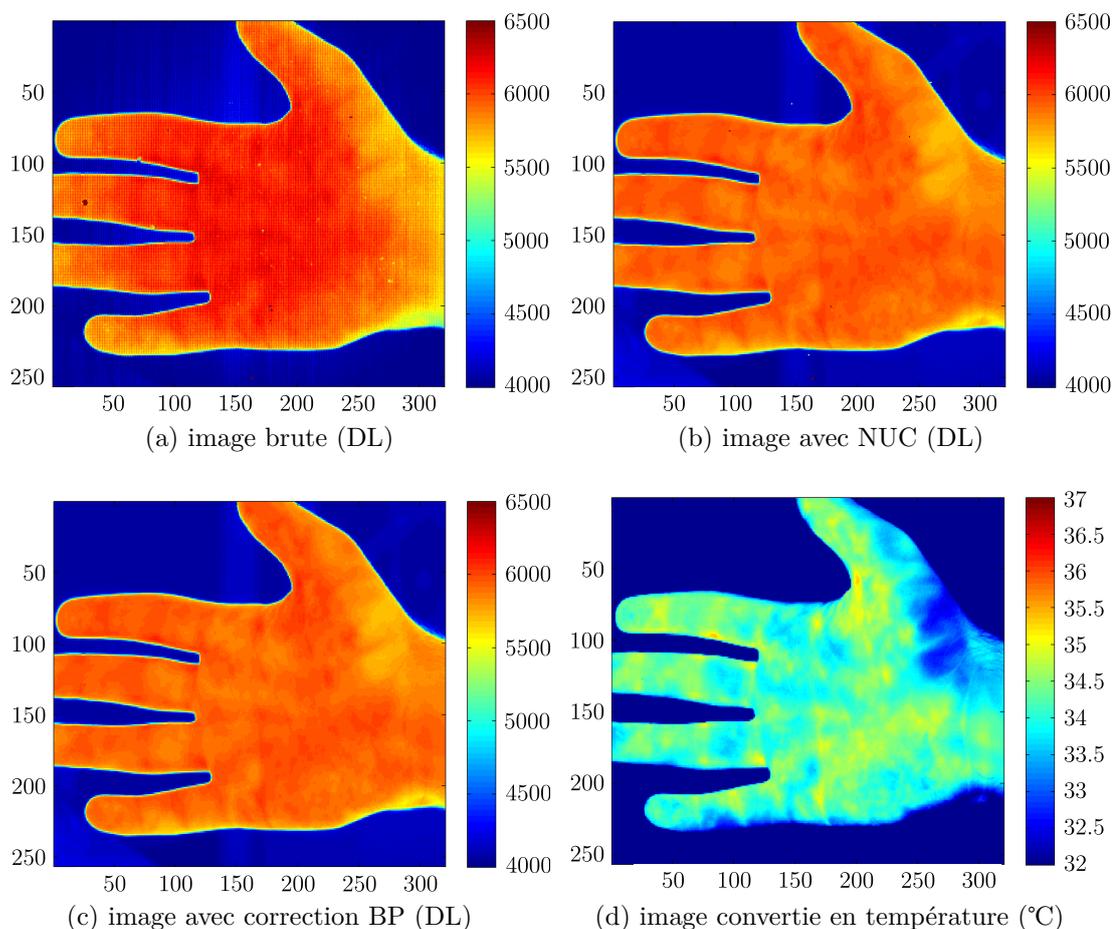


Figure A.3 – Clichés caractéristiques obtenus après les différentes étapes nécessaires à l'étalonnage d'une caméra infrarouge.

sans étapes de corrections supplémentaires permettant de tenir compte des différences d'émissivité.

A.1.3.2 Correction de non-uniformité (NUC)

a) Le bruit spatial fixe

Lorsqu'une caméra fixe une scène thermique d'émittance spectrale uniforme (un corps noir par exemple), le signal est entaché d'un bruit invariant d'une image thermique à l'autre. Ce bruit traduit les non-uniformités de conversions flux/signal dues aux disparités des caractéristiques des détecteurs ainsi qu'à l'interface électronique associée : c'est le bruit spatial fixe, noté BSF par la suite. Les images peuvent être affectées d'une structure aléatoire, d'une structure de grille ou de lignes comme illustré sur la figure A.3a. Le BSF est, en moyenne, invariant dans le temps et peut donc être corrigé. Il existe plusieurs méthodes de correction (NUC 1 point, 2 points et

n points), chacune associée à une certaine finesse de correction. Nous nous proposons de détailler la méthode la plus classiquement utilisée et celle retenue pour les mesures présentées dans cette thèse : la NUC 2 points. Une comparaison avec une NUC n points sera proposée en fin de section.

b) La NUC 2 points

Cette procédure de correction consiste à exposer la caméra à deux températures uniformes (à l'aide du corps noir étendu), une température dite basse et une température dite haute. En partant du principe que la réponse du détecteur dépend linéairement du nombre de photons captés, *i.e.* en se plaçant suffisamment loin des saturations haute et basse, la réponse de chaque détecteur $\phi_{i,j}$, $i, j = 1 \dots 256$ et $j = 1 \dots 320$, est corrigée à l'aide d'un gain $\alpha_{i,j}$ et d'un offset $\beta_{i,j}$, de façon à rendre la réponse corrigée du détecteur $\bar{\phi}_{i,j}$ aussi proche que possible de la réponse *moyenne* de la matrice de détecteurs :

$$\bar{\phi}_{i,j} = \alpha_{i,j}\phi_{i,j} + \beta_{i,j} \quad (\text{A.6})$$

La figure A.3b montre le résultat obtenu après application de la NUC sur l'image brute A.3a et permet d'apprécier la qualité de la correction effectuée.

A.1.3.3 Détection des pixels défectueux

Malgré la correction de non-uniformité, il est possible que la réponse d'un détecteur soit trop éloignée de la réponse moyenne de la matrice de détecteurs. Pour identifier ces mauvais pixels, ou *bad pixels* (BP), on utilise généralement des critères sur le gain, l'offset ou sur le bruit de mesure. Dans le cas où un pixel est considéré mauvais, il peut soit être remplacé par une moyenne de la valeur des pixels voisins suivant un algorithme particulier ou bien être laissé tel quel, auquel cas il ne faudra pas tenir compte de sa valeur lors du post-traitement. Dans notre cas, les BP sont remplacés par la moyenne des valeurs des pixels voisins comme l'illustre la figure A.3c.

A.1.3.4 Conversion signal numérique/température

Une fois ces corrections effectuées, il ne reste plus qu'à identifier la loi reliant les données brutes (mais corrigées avec la NUC et les BP) issues de la caméra, notées *DL* (*Digital Level*), et la température T . On utilise des polynômes et on se limite le plus souvent à des polynômes d'ordre 3, voir 4 :

$$T = \sum_{n=0}^4 a_n DL^n \quad (\text{A.7})$$

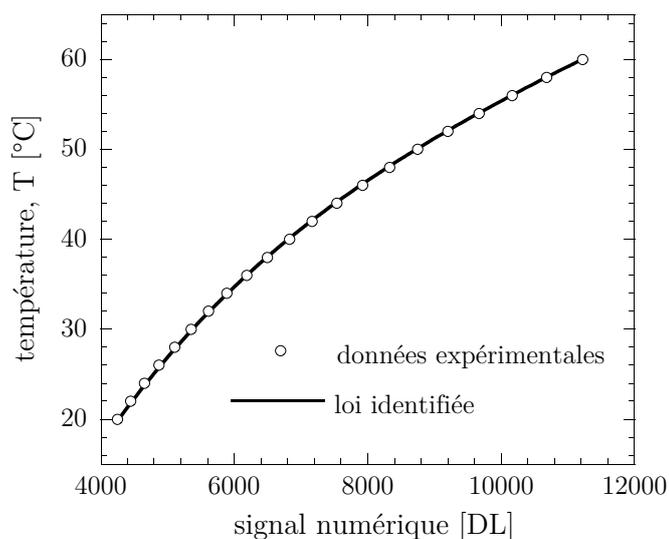


Figure A.4 – Exemple de conversion signal numérique/température.

A.1.3.5 Erreurs de mesure

Pour pouvoir évaluer la robustesse de la calibration de la caméra, il est important de pouvoir quantifier les erreurs de mesures, et plus particulièrement les cartographies d'erreur, *i.e.* les erreurs commises à chaque pixel. D'une manière générale, avec une NUC 2 points, l'erreur moyenne commise est importante lors de mesures absolues, pouvant parfois atteindre les 10% (en °C). En revanche, cette erreur diminue de manière significative (d'un ordre de grandeur typiquement) lorsque l'on effectue des mesures différentielles (figure A.5a). La correction effectuée est donc suffisante

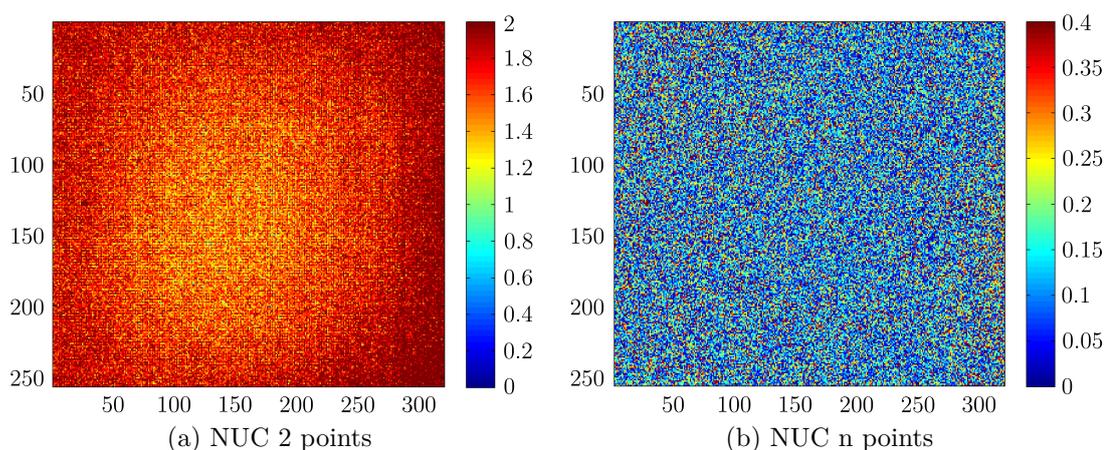


Figure A.5 – Cartographies d'erreur de mesure calculées à partir des températures en °C. L'échelle correspond à la valeur absolue de l'erreur (%).

pour réaliser des mesures différentielles, mais se révèle insuffisante pour des mesures absolues fines. Cette lacune peut s'expliquer facilement si l'on revient sur le principe de la NUC effectuée. Comme nous l'avons évoqué précédemment, chaque pixel est indépendant et présente une réponse qui lui est propre. Or l'étalonnage de la caméra est réalisé de manière globale, c.-à-d. à partir de la réponse moyenne de l'ensemble des pixels. De plus, les corrections effectuées ne sont exactes qu'aux deux températures de référence servant à établir les matrices de correction (gain et offset). Ceci explique le fait que les mesures absolues ne sont pas de bonne qualité, mais qu'en relatif, les erreurs se compensent en partie pour permettre des mesures avec un degré de confiance plus important. Il est possible d'améliorer la correction en calibrant chaque pixel indépendamment des autres pixels (NUC n points). La figure A.5b présente par exemple une cartographie d'erreur réalisée en mesures différentielles après un NUC n points. On constate une erreur très faible, inférieure à 0.5%. Dans le cas de mesures absolues, l'erreur ne dépasse pas 2%, illustrant la supériorité de ce type de correction. Cependant, cette approche est relativement lourde à mettre en oeuvre² et ne présente un intérêt que lorsque l'on souhaite réaliser des mesures d'une grande finesse (précision relative de l'ordre de 10 mK, voir moins). Nous conservons donc notre NUC 2 points en sachant qu'il ne faut pas accorder trop de poids aux mesures absolues, mais que les mesures différentielles proposées sont relativement fines (erreur inférieure à 2%).

A.2 Micro-tomographie par rayons X

La tomographie aux rayons X est une technique de mesure non destructive permettant d'accéder au coeur de la matière pour en apprécier les variations de compositions ou encore localiser toute hétérogénéité, vide ou inclusion, présent dans un objet. Née dans les années 1970 pour le domaine médical (Thiery et Gerstenmayer, 2002), cette technique a évolué pour répondre aux exigences du domaine industriel et est maintenant couramment utilisée en production, en phase de prototypage ou lors de la mise au point de procédés de fabrication. Elle représente bien entendu une technique expérimentale de choix en mécanique des matériaux (Salvo *et al.*, 2003).

A.2.1 Principe de fonctionnement

Le principe de fonctionnement d'un tomographe repose sur l'analyse multidirectionnelle de l'interaction entre un faisceau incident de rayons X avec la matière qu'il rencontre et sur la détection du rayonnement transmis après traversée de l'objet (figure A.6). Un rayon X est envoyé sur l'objet à analyser. Ce rayon est transmis dans la matière, atténué selon la loi de Beer-Lambert :

$$I = I_0 \exp \left[- \int_s \mu(s) ds \right] = I_0 \exp [-\mu x] \quad (\text{A.8})$$

²Cette approche revient à identifier 256×320 polynômes d'ordre 6.

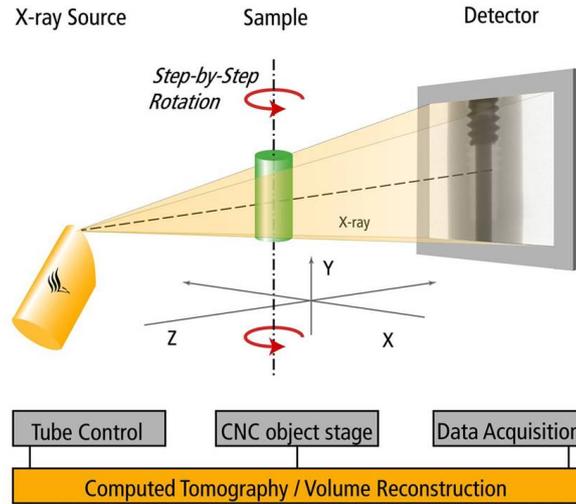


Figure A.6 – Principe de fonctionnement d'un tomographe aux rayons X.

où I_0 (resp. I) représente l'intensité du faisceau incident (resp. émergent), $\exp[-\mu x]$ la probabilité qu'un photon traverse un écran d'épaisseur x sans interaction, μ représente le coefficient d'absorption (ou d'atténuation linéique) du matériau le long du trajet s , et arrive finalement sur une matrice de détecteurs CCD. La projection de μ dépend de la composition et de l'épaisseur x du matériau traversé. Cette variation est à l'origine du contraste observé sur l'image. On peut également faire apparaître la masse volumique du matériau dans la loi de Beer-Lambert :

$$I = I_0 \exp \left[-\frac{\mu}{\rho} \rho x \right] = I_0 \exp [-\mu_m \rho x] \quad (\text{A.9})$$

nous permettant ainsi de visualiser directement les différences de densité à partir du contraste observé. Une zone sombre est ainsi reliée à une faible densité alors qu'une zone claire est reliée à une densité élevée. On dispose ainsi d'une radioscopie représentant la projection sur un plan bidimensionnel de l'objet observé. La tomographie combine les informations fournies sur un très grand nombre de radiographies, chacune étant réalisée pour un angle différent de l'échantillon par rapport aux rayons X et aux détecteurs CCD (figure A.6). Si l'angle entre chaque radiographie est suffisamment petit (typiquement inférieur au degré), il est possible de construire une image numérique et reconstruite mathématiquement en niveau de gris dont chaque point traduit la valeur locale du coefficient d'absorption μ ou de la densité ρ . La taille de ce point, le voxel (pour volume élémentaire, extension du pixel en 3D), est conditionnée par la résolution du système d'imagerie. Pour la tomographie classique, la dimension caractéristique du voxel est de l'ordre du mm, pour la micro-tomographie, de l'ordre du μm et pour la nanotomographie, de l'ordre du nm.

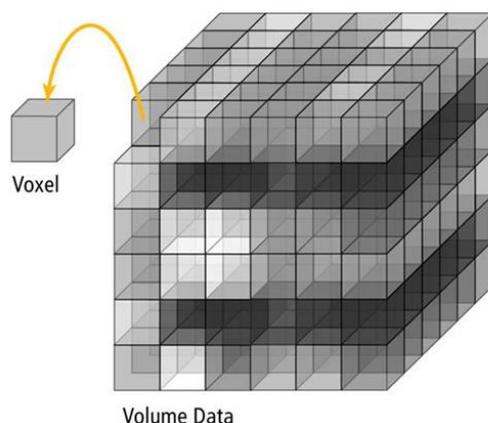


Figure A.7 – Définition du voxel.

A.2.2 Dispositif expérimental

Toutes les analyses ont été menées au Centre Régional Techniques (CRT) de Morlaix (Finistère) avec un dispositif Phoenix v|tome|x L 240 (figure A.8). Les paramètres de mesures utilisés sont synthétisés dans le tableau A.1. Avec ces paramètres, il est possible d'analyser un gros volume (typiquement la totalité de la zone utile des éprouvettes AE2) avec une précision suffisamment bonne (de l'ordre de $20\ \mu\text{m}$) pour être en mesure de détecter les plus petits défauts dont la taille est comprise entre 10 et $100\ \mu\text{m}$ (Gent et Pulford, 1984). Avant de réaliser les mesures, les éprouvettes sont mises en traction (déplacement des inserts métalliques de 2 mm) afin d'ouvrir les défauts et faciliter leur détection. Cet étirement est réalisé précautionneusement de manière à ne pas générer de nouveaux défauts. L'échantillon à analyser est ensuite



Figure A.8 – Appareil utilisé (référence : Phoenix v|tome|x L 240).

voltage du tube rayons X	180 kV
intensité	116 μ A
temps de scan	\approx 30 min
rotation	360° par pas de 0.45°
résolution	1 px = 20 μ m

Tableau A.1 – Paramètres utilisés durant les mesures aux rayons X

placé à une distance de 828 mm d'un détecteur CCD de rayons X Perkin-Elmer dont la résolution est de 1024×1024 pixels. Pour la reconstruction du volume, environ 800 radiographies sont prises à intervalles réguliers sur une révolution de 360°. Le temps d'exposition pour chaque image est de 400 ms. Pour chaque radiographie, cinq images sont prises. La première est systématiquement rejetée (prise en compte du temps de réponse des détecteurs) et les quatre images restantes sont moyennées. La résolution spatiale, *i.e.* le volume du voxel, est de $9.2 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^3$ (soit une taille caractéristique de 20 μ m) et le volume complet analysé est de l'ordre de 2700 mm^3 . Les données sont ensuite analysées avec le logiciel commercial myVGL 2.0. Une première étape consiste à définir un seuillage permettant de distinguer les vides du matériau. Un critère de taille minimale fixé à 4 voxels (soit un rayon équivalent de 13 μ m) a été imposé de manière à ne pas prendre en compte d'éventuels artefacts de mesure. Les volumes sont ensuite analysés et différentes grandeurs sont calculées de manière automatique (volume et surface des vides, position dans l'éprouvette, etc.) qui sont ensuite analysées pour caractériser la population de défauts.

Identification de la déformation seuil de cristallisation

Dans cette annexe, nous proposons de détailler la méthodologie mise en place pour identifier les déformations seuils de cristallisation à partir de la signature thermique ou des mesures par diffraction proposées par Marchal (2006). Elle apporte donc des éléments complémentaires aux notions évoquées dans le paragraphe 3.2.2.2 page 106.

B.1 Identification des déformations seuils à partir des données de Marchal (2006)

La figure B.1 présente les résultats de la thèse de Marchal (2006), obtenus par diffraction aux rayons X, qui ont été utilisés dans le chapitre 3 pour la comparaison avec nos mesures thermiques. Nous définissons les déformations seuils de cristallisation comme les déformations minimales à imposer pour que le matériau cristallise sous contrainte à température ambiante. La méthodologie employée pour identifier ces déformations est représentée sur la figure B.1 et s'inspire de celle mise en place par Marchal (2006). Elle consiste à relever la déformation correspondant à une évolution significative de la cristallinité. Notons que les résultats présentés permettent de mettre en avant une diminution de la déformation seuil à mesure que l'on augmente le taux de charges. Ils illustrent le fait que les charges jouent le rôle d'amplificateur des déformations à l'échelle de la microstructure.

Remarque : il est important de souligner que Marchal (2006) montre un effet de cyclage sur la cristallisation du matériau. Elle obtient notamment une légère augmentation de la déformation seuil avec le nombre de cycles. Cette augmentation se stabilise néanmoins rapidement (comme l'effet Mullins) et pourrait être reliée à l'effet Mullins observé durant les essais de traction. Cette évolution reste cependant suffisamment faible pour ne pas entâcher la comparaison de ces résultats avec nos mesures thermiques qui, on le rappelle, sont obtenus sur un cycle mécanique et thermique stabilisé, *i.e.* après 650 cycles à 0.5 Hz.

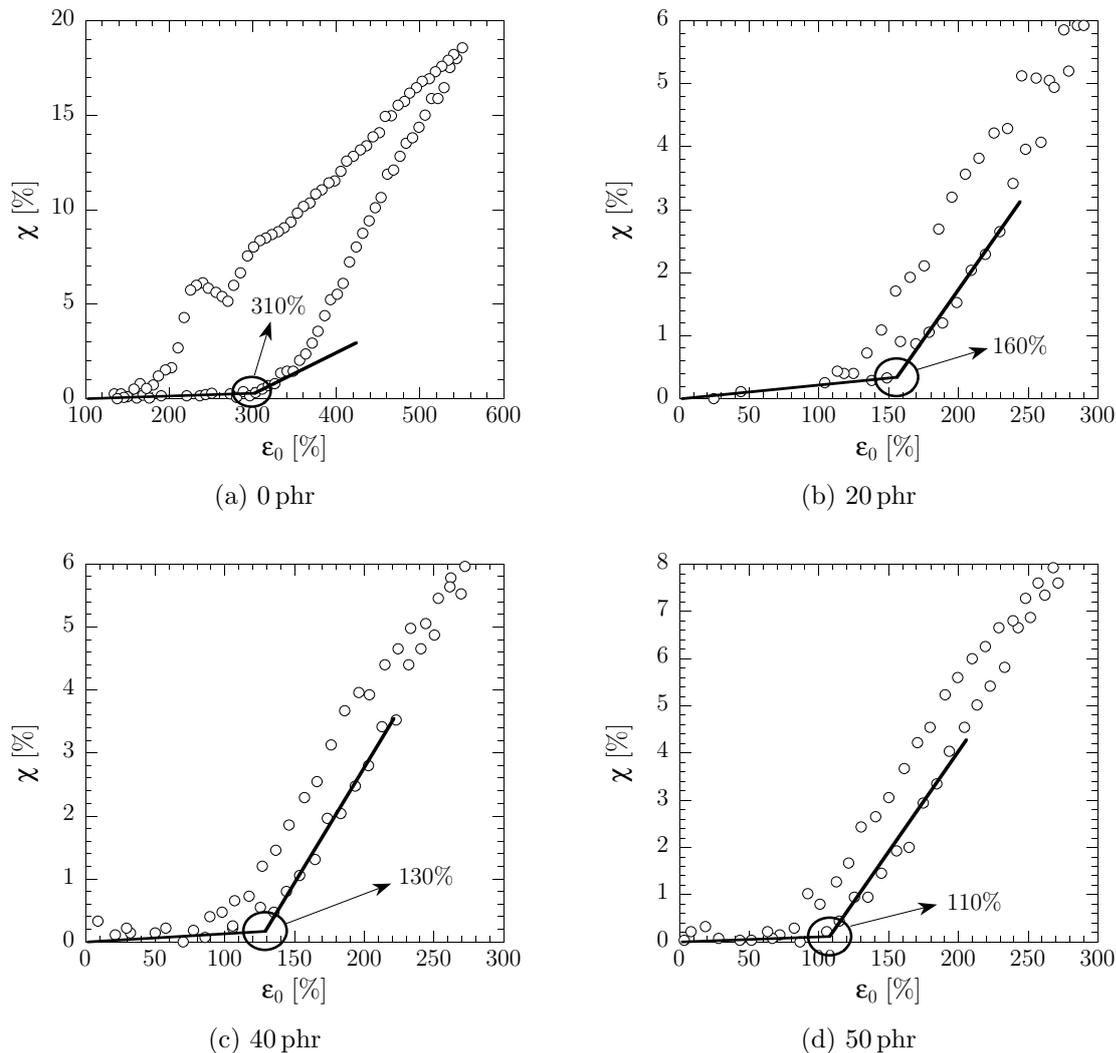


Figure B.1 – Identification des déformations seuils de cristallisation $\varepsilon_{\text{seuil}}$ à partir des mesures de taux de cristallinité χ .

B.2 Identification des déformations seuils à partir des mesures thermiques

Ce paragraphe illustre, pour un des matériaux étudiés (NR chargé à 43 phr de noir de carbone), la méthode employée pour évaluer graphiquement la déformation seuil à partir des mesures thermiques. La figure B.2 présente quelques résultats obtenus pour des conditions de chargement croissantes. D'une manière générale, les déformations seuils sont identifiées par comparaison des résultats et correspondent au chargement maximal pour lequel on distingue le point d'inflexion (marqué par une flèche sur la figure B.2). Nous associons également une erreur de mesure à cette déformation correspondant aux chargements mécaniques qui sont directement

inférieur et supérieur au chargement associé au début de la cristallisation. Dans le cas des résultats présentés sur la figure B.2, la déformation seuil est d'environ 130% (figure B.2b) et les bornes inférieure et supérieure sont respectivement de 118% et 153%.

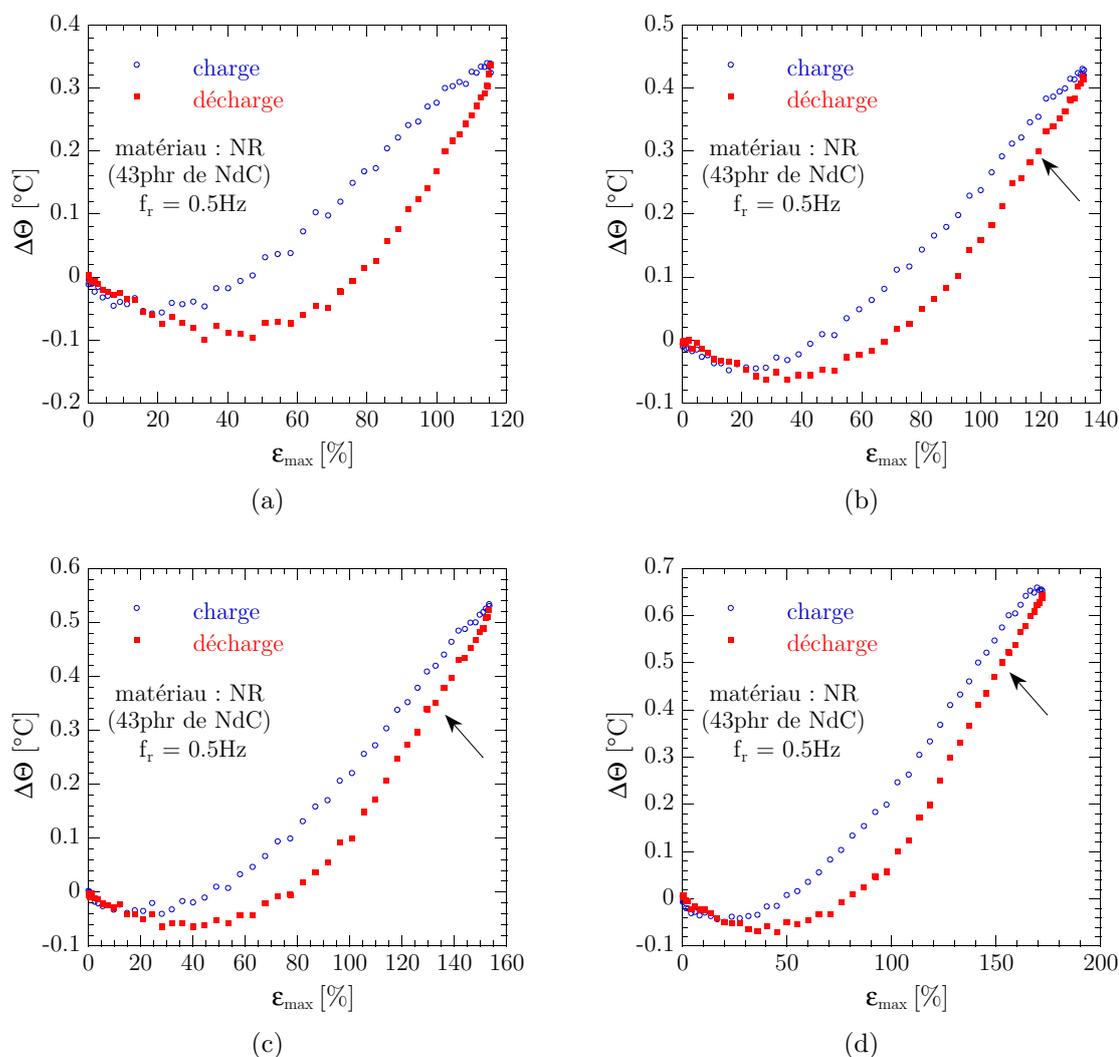
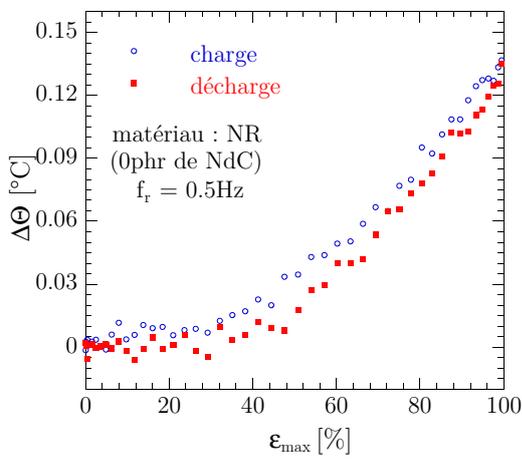


Figure B.2 – Identification de la déformation seuil à partir des mesures thermiques. Illustration avec un NR chargé à 43 phr de noir de carbone.

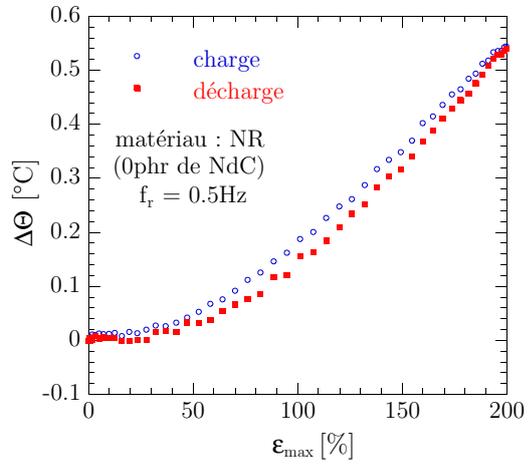
B.3 Quelques résultats...

Ce paragraphe présente quelques signatures thermiques mesurées pour différents matériaux. Les résultats sont donnés à l'état brut et feront bientôt l'objet d'un

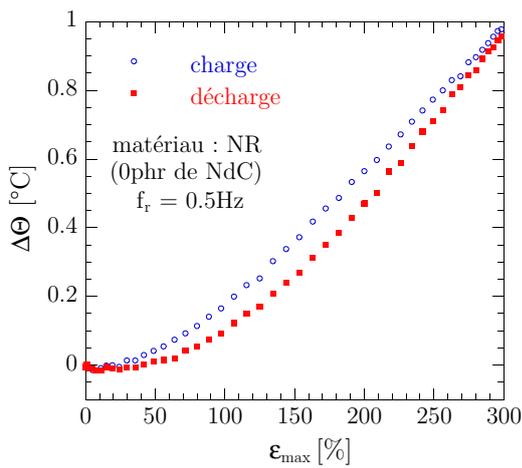
dépouillement plus approfondi. Les différents résultats obtenus seront présentés sous la forme d'une publication.



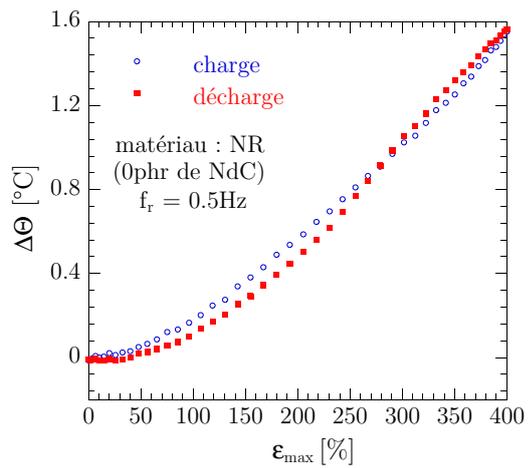
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure B.3 – Quelques signatures thermiques obtenues pour le caoutchouc naturel non chargé.

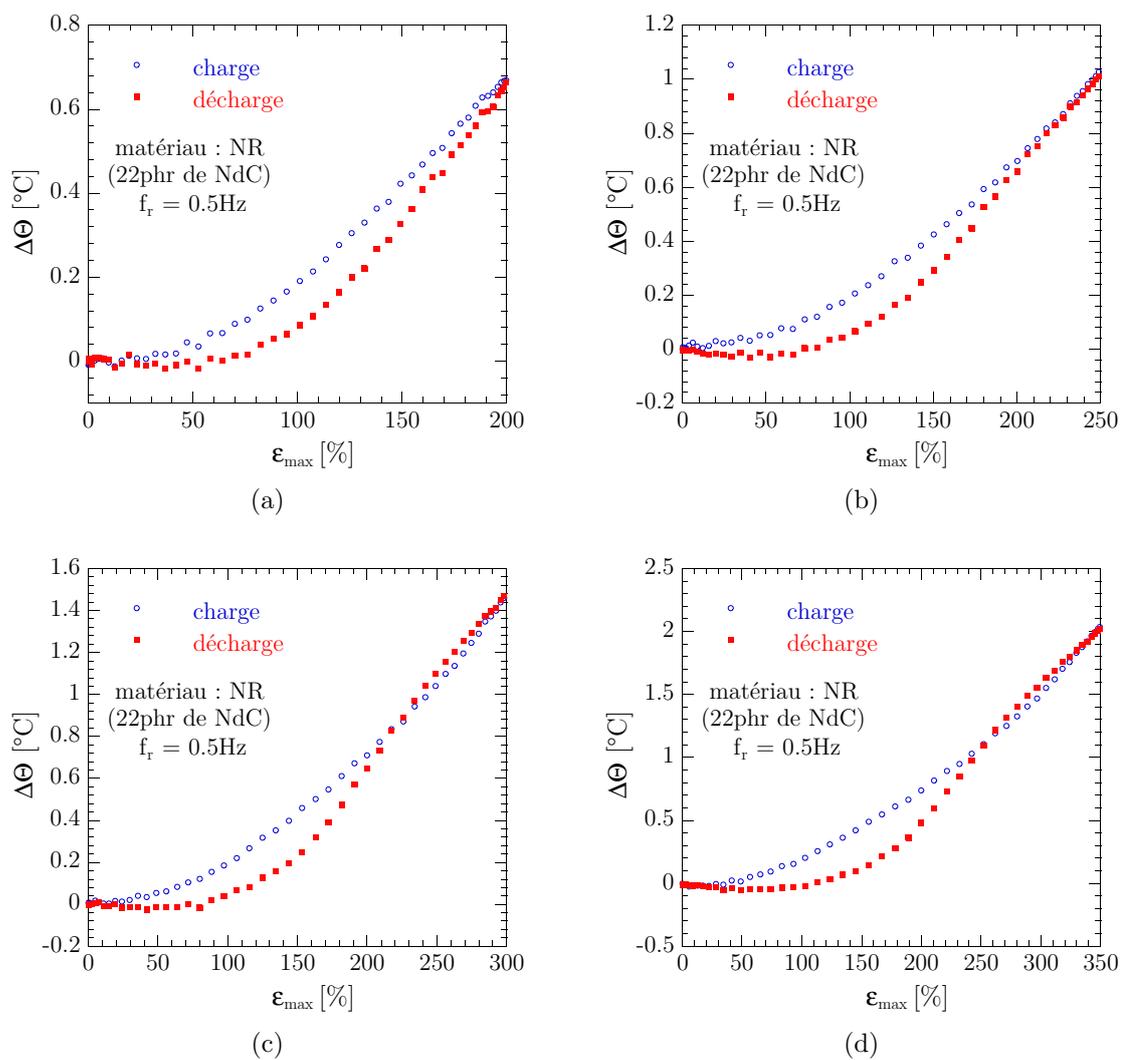


Figure B.4 – Quelques signatures thermiques obtenues pour le caoutchouc naturel chargé à 22 phr de noir de carbone.

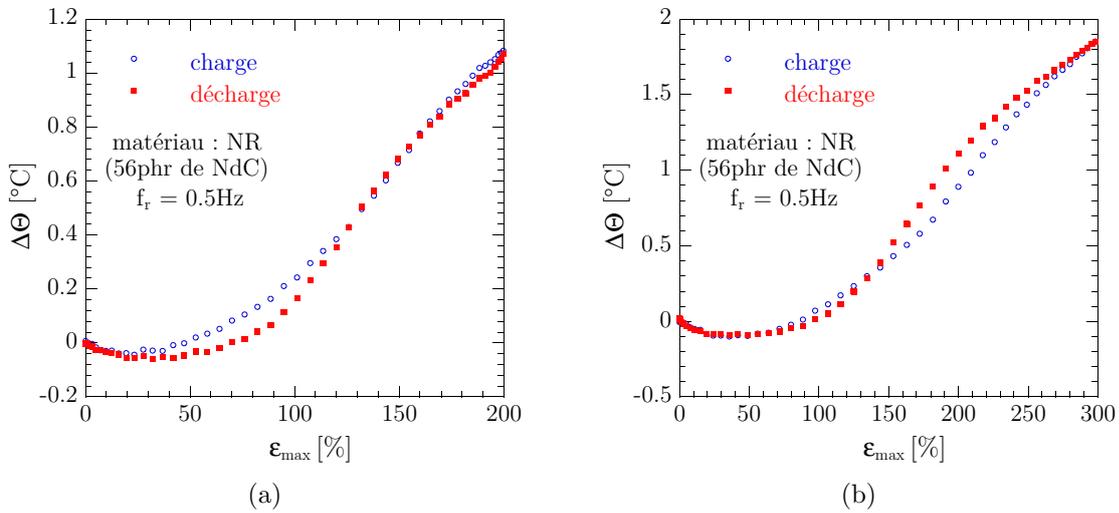


Figure B.5 – Quelques signatures thermiques obtenues pour le caoutchouc naturel chargé à 56 phr de noir de carbone.

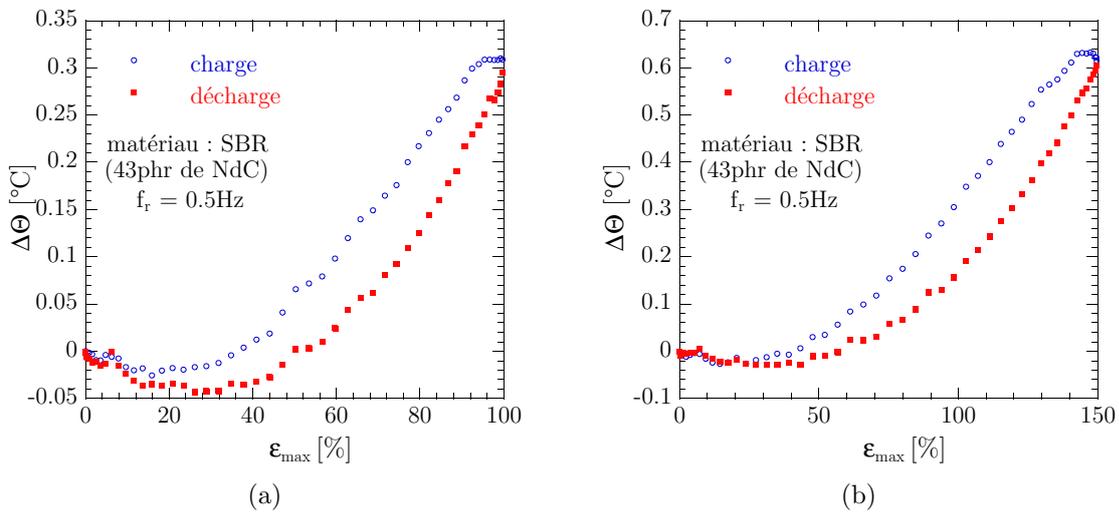


Figure B.6 – Quelques signatures thermiques obtenues pour le SBR chargé à 43 phr de noir de carbone.

Tables de données issues de l'analyse par micro-tomographie

Dans cette annexe, nous donnons les tables de données ayant servi au tracé des figures 3.33, 3.34 et 3.35.

nombre de cycles	tranche	ε_{\max} [%]	r_{moy} [μm]	ϖ_d [mm^{-3}]	p [-]	V_{\max} [mm^3]
0-1 mm	T1	15.7	35.1	0.2774	$8.18 \cdot 10^{-5}$	0.0012
	T2	15.2	34.2	0.2842	$6.40 \cdot 10^{-5}$	0.0011
5 cycles	T3	9.9	33.0	0.1313	$3.87 \cdot 10^{-5}$	0.0026
	T4	6.2	44.8	0.0415	$3.34 \cdot 10^{-5}$	0.0037

Tableau C.1 – Données pour un déplacement macroscopique de 1 mm.

nombre de cycles	tranche	ε_{\max} [%]	r_{moy} [μm]	ϖ_d [mm^{-3}]	p [-]	V_{\max} [mm^3]
0-2 mm 5 cycles	T1	34	35	0.4694	$1.18 \cdot 10^{-4}$	0.0011
	T2	33	32.9	0.3619	$9.09 \cdot 10^{-5}$	0.0027
	T3	19	31.5	0.1835	$3.25 \cdot 10^{-5}$	0.0009
	T4	12	36.2	0.0651	$3.33 \cdot 10^{-5}$	0.0053
0-2 mm (10% N_i) 100 000 cycles	T1	34	45	0.2880	$2.14 \cdot 10^{-4}$	0.0048
	T2	33	43.6	0.1498	$7.90 \cdot 10^{-5}$	0.0035
	T3	19	43.9	0.0883	$4.41 \cdot 10^{-5}$	0.0015
	T4	12	27.9	0.0900	$8.60 \cdot 10^{-5}$	0.0005
0-2 mm (25% N_i) 250 000 cycles	T1	34	30.7	0.7957	$1.18 \cdot 10^{-4}$	0.0008
	T2	33	35.2	0.5777	$1.50 \cdot 10^{-4}$	0.0031
	T3	19	39.3	0.2077	$1.20 \cdot 10^{-4}$	0.0059
	T4	12	31.5	0.1092	$2.20 \cdot 10^{-5}$	0.0008
0-2 mm (50% N_i) 500 000 cycles	T1	34	38.8	0.3780	$2.49 \cdot 10^{-4}$	0.0014
	T2	33	37.9	0.5230	$1.70 \cdot 10^{-4}$	0.0026
	T3	19	36.0	0.3380	$9.02 \cdot 10^{-5}$	0.0025
	T4	12	43.2	0.0698	$6.02 \cdot 10^{-5}$	0.0074
0-2 mm (100% N_i) 1 000 000 cycles fissurée	T1	34	38.9	0.2460	$8.70 \cdot 10^{-5}$	0.0011
	T2	33	34.6	0.2360	$5.70 \cdot 10^{-5}$	0.0012
	T3	19	39.4	0.1940	$7.37 \cdot 10^{-5}$	0.0018
	T4	12	—	—	—	—

Tableau C.2 – Données pour un déplacement macroscopique de 2 mm.

nombre de cycles	tranche	ε_{\max} [%]	r_{moy} [μm]	ϖ_d [mm^{-3}]	p [-]	V_{\max} [mm^3]
0-4 mm 5 cycles	T1	73	29.4	0.4736	$6.26 \cdot 10^{-5}$	0.0006
	T2	70	29.2	0.7199	$1.03 \cdot 10^{-4}$	0.0013
	T3	39	37.5	0.2283	$2.51 \cdot 10^{-5}$	0.0026
	T4	25	39.4	0.0609	$1.93 \cdot 10^{-5}$	0.0009
0-4 mm (10% N_i) 3 500 cycles	T1	73	36.9	1.1400	$3.45 \cdot 10^{-4}$	0.0020
	T2	70	38.2	1.3300	$4.45 \cdot 10^{-4}$	0.0029
	T3	39	36.3	0.6770	$2.26 \cdot 10^{-4}$	0.0063
	T4	25	38.7	0.1420	$8.60 \cdot 10^{-5}$	0.0012
0-4 mm (25% N_i) 8 750 cycles	T1	73	31.7	1.5535	$3.40 \cdot 10^{-4}$	0.0056
	T2	70	31.9	1.1374	$4.01 \cdot 10^{-5}$	0.0017
	T3	39	32.1	0.6321	$4.32 \cdot 10^{-5}$	0.0015
	T4	25	35.6	0.1000	$9.65 \cdot 10^{-6}$	0.0011
0-4 mm (50% N_i) 17 500 cycles fissurée	T1	73	37.7	1.6240	$5.00 \cdot 10^{-4}$	0.0013
	T2	70	39.5	1.4100	$5.30 \cdot 10^{-4}$	0.0024
	T3	39	38.9	1.0160	$3.43 \cdot 10^{-5}$	0.0034
	T4	25	44.1	0.3080	$1.50 \cdot 10^{-4}$	0.0019

Tableau C.3 – Données pour un déplacement macroscopique de 4 mm.

nombre de cycles	tranche	ε_{\max} [%]	r_{moy} [μm]	ϖ_d [mm^{-3}]	p [-]	V_{\max} [mm^3]
0-6 mm 5 cycles	T1	115	34.2	0.7010	$1.91 \cdot 10^{-4}$	0.0013
	T2	109	33.3	0.4143	$4.25 \cdot 10^{-5}$	0.0008
	T3	62	32.0	0.2578	$1.58 \cdot 10^{-5}$	0.0006
	T4	38	37.6	0.0505	$1.87 \cdot 10^{-6}$	0.0055
0-6 mm (10% N_i) 650 cycles	T1	115	39.1	6.5551	$2.78 \cdot 10^{-3}$	0.0123
	T2	109	38.6	5.3600	$5.03 \cdot 10^{-3}$	0.0409
	T3	62	40.6	0.8380	$6.74 \cdot 10^{-4}$	0.0069
	T4	38	39.5	2.6200	$2.14 \cdot 10^{-3}$	0.0042
0-6 mm (25% N_i) 1 625 cycles fissurée	T1	115	34.5	4.0007	$1.26 \cdot 10^{-3}$	0.0050
	T2	109	34.0	3.3285	$3.52 \cdot 10^{-4}$	0.0336
	T3	62	36.2	1.2191	$1.49 \cdot 10^{-4}$	0.0012
	T4	38	37.9	0.1995	$6.50 \cdot 10^{-5}$	0.0012
0-6 mm (50% N_i) 3 250 cycles fissurée	T1	115	35.1	5.1600	$1.59 \cdot 10^{-3}$	0.0139
	T2	109	34.5	2.9200	$2.20 \cdot 10^{-4}$	0.0013
	T3	62	36.3	1.8870	$1.80 \cdot 10^{-4}$	0.0145
	T4	38	40.6	0.4670	$7.58 \cdot 10^{-5}$	0.0022

Tableau C.4 – Données pour un déplacement macroscopique de 6 mm.

Implantation numérique du potentiel d'Edwards-Vilgis

Cette annexe présente les points clés relatifs à l'implantation numérique du modèle d'Edwards-Vilgis dans le code de calcul par éléments finis Abaqus. Seul le cas 3D est abordé. Les modifications à apporter dans le cas de modèles axisymétriques et de contraintes planes sont laissées au soin du lecteur. Bien que l'implantation numérique de lois de comportement soit un problème couramment abordé dans la littérature, il nous a semblé intéressant de détailler cet aspect du travail, en particulier parce que l'implantation numérique de potentiels hyperélastiques écrits en élongation est un problème relativement technique et peu documenté. Soulignons que le point fort de l'implantation numérique proposée est sa nature générique, i.e. qu'elle peut s'appliquer à tous les potentiels hyperélastiques, seuls les coefficients de « contraintes » et « matériels » sont spécifiques au modèle retenu (et peuvent s'obtenir « facilement » suivant la complexité du modèle à partir de logiciels de calculs formels).

Notations

\mathbf{F}	gradient de la transformation
$\bar{\mathbf{F}}$	composante isochore du gradient de la transformation
J	jacobien de la transformation ($\det(\mathbf{F})$)
$\mathbf{1}$	tenseur identité d'ordre 2 : $(\mathbf{1})_{ij} = \delta_{ij}$
\mathbf{D}	taux de déformation
\mathbf{B}	tenseur des déformations de Cauchy-Green gauche (eulérien)
$\bar{\mathbf{B}}$	composante isochore de \mathbf{B} : $\bar{\mathbf{B}} = J^{-2/3}\mathbf{B}$
\mathbf{C}	tenseur des déformations de Cauchy-Green droit (lagrangien)
$\bar{\mathbf{C}}$	composante isochore de \mathbf{C} : $\bar{\mathbf{C}} = J^{-2/3}\mathbf{C}$
$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur des contraintes de Cauchy

$\boldsymbol{\tau}$	tenseur des contraintes de Kirchoff
\mathbf{S}	tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff
I_1	premier invariant de \mathbf{B} : $I_1 = \text{tr}(\mathbf{B})$
I_2	second invariant de \mathbf{B} : $I_2 = \frac{1}{2} (\text{tr}(\mathbf{B})^2 - \text{tr}(\mathbf{B}^2))$
I_3	troisième invariant de \mathbf{B} : $I_3 = \det(\mathbf{B})$
\bar{I}_1	composante isochore de I_1 : $\bar{I}_1 = J^{-2/3} I_1$
\bar{I}_2	composante isochore de I_2 : $\bar{I}_2 = J^{-4/3} I_2$
\bar{I}_3	composante isochore de I_3 : $\bar{I}_3 = J^{-2} I_3$
λ_a	racine carrée des valeurs propres de \mathbf{B} et \mathbf{C}
$\bar{\lambda}_a$	racine carrée des valeurs propres de $\bar{\mathbf{B}}$ et $\bar{\mathbf{C}}$: $\bar{\lambda}_a = J^{-1/3} \lambda_a$
\mathbf{N}_a	vecteurs propres associés à \mathbf{C} et $\bar{\mathbf{C}}$
\mathbf{n}_a	vecteurs propres associés à \mathbf{B} et $\bar{\mathbf{B}}$
$\mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a$	espaces propres lagrangiens
\mathbf{M}_a	espaces propres lagrangiens pondérés : $\mathbf{M}_a = \lambda_a^{-2} \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a$
$\mathbf{n}_a \otimes \mathbf{n}_a$	espaces propres eulériens
\mathbf{m}_a	espaces propres eulériens : $\mathbf{m}_a = \mathbf{n}_a \otimes \mathbf{n}_a$
$\bar{\beta}_a$	coefficients de « contraintes »
$\bar{\gamma}_{ab}$	coefficients « matériels »
\otimes	produit tensoriel : $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ij} B_{kl}$
$\bar{\otimes}$	produit tensoriel symétrique $(\mathbf{A} \bar{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} = \frac{1}{2} (A_{ik} B_{jl} + A_{il} B_{jk})$

D.1 La subroutine UMAT

Le code de calcul par éléments finis Abaqus laisse la possibilité à l'utilisateur d'utiliser sa propre loi de comportement par la programmation en fortran77 d'une subroutine appelée UMAT (User MATERIAL). Le code de calcul fournit toutes les variables internes à l'instant t_n ainsi qu'une prédiction de la déformation à l'instant t_{n+1} par l'intermédiaire du tenseur gradient de la transformation \mathbf{F} . L'utilisateur doit fournir en sortie le tenseur des contraintes de Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}$, et l'opérateur tangent consistant avec la linéarisation opérée, \mathbb{C} . Ces deux quantités doivent être stockées dans les variables STRESS et DDSDE.

Remarque : le code Abaqus propose également la subroutine UHYPER qui facilite grandement l'implantation numérique de potentiels hyperélastiques. Cependant, le formalisme proposé est valable uniquement pour les potentiels écrits en invariants. Cette subroutine ne peut donc pas être utilisée pour le potentiel d'Edwards-Vilgis.

D.2 Quelques notions de MMC

Avant de développer les calculs permettant de définir les variables **STRESS** et **DDSDDE**, nous rappelons dans cette section quelques notions élémentaires de la mécanique des milieux continus utiles pour la compréhension de l'implantation numérique proposée et spécifiques aux modèles écrits en élongation. Pour approfondir les notions évoquées ici de manière très sommaire, le lecteur est invité à se référer, par exemple, aux ouvrages de Bonet et Wood (1997) ou Simo et Hughes (1998).

D.2.1 Décomposition spectrale

Soit $\mathcal{C}_0 \subset \mathbb{R}^3$ la configuration de référence d'un solide et $\mathbf{X} \in \mathcal{C}_0$ les coordonnées des particules matérielles qui le composent. Toute transformation peut être décrite mathématiquement par une fonction bijective et continue φ :

$$\varphi : \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3 \quad (\text{D.1})$$

Soit \mathbf{x} les coordonnées d'une particule matérielle dans la configuration de référence $\mathcal{C} = \varphi(\mathcal{C}_0)$. Le tenseur gradient, \mathbf{F} , qui permet de relier la position relative de deux particules matérielles infiniment proches avant déformation, $d\mathbf{X}$, à leur position relative après déformation, $d\mathbf{x}$, peut être défini par la relation :

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad (\text{D.2})$$

Ce tenseur est un élément clé en grandes transformations car il intervient dans toutes les équations reliant des grandeurs avant déformation à leur valeur pendant ou après la déformation. Par exemple, les tenseurs de déformation de Cauchy-Green droit, \mathbf{C} , et gauche, \mathbf{B} , se calculent à partir du tenseur gradient de la transformation comme suit :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad \mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (\text{D.3})$$

Ces deux tenseurs sont symétriques définis positifs et par conséquent diagonalisables. Les vecteurs propres correspondants sont orthogonaux, linéairement indépendants (seulement si les valeurs propres sont distinctes) et forment une base duale pour \mathbb{R}^3 . L'introduction des vecteurs propres généralisés eulériens, \mathbf{S}_{eul} , et lagrangiens, \mathbf{S}_{lag} , ainsi que du tenseur diagonal $\mathbf{\Lambda}$ donne la représentation :

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}_{lag} \mathbf{\Lambda} \mathbf{S}_{lag}^{-1} \quad \mathbf{S}_{lag} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3] \quad \mathbf{\Lambda} = \text{diag} [\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2] \quad (\text{D.4})$$

et

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}_{eul} \mathbf{\Lambda} \mathbf{S}_{eul}^{-1} \quad \mathbf{S}_{eul} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3] \quad \mathbf{\Lambda} = \text{diag} [\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2] \quad (\text{D.5})$$

Comme les vecteurs propres sont orthogonaux, le théorème de décomposition spectrale conduit à l'expression finale de \mathbf{C} et \mathbf{B} :

$$\mathbf{C} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a^2 \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a \quad \mathbf{B} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a^2 \mathbf{n}_a \otimes \mathbf{n}_a \quad (\text{D.6})$$

avec $\|\mathbf{N}_a\| = 1$ et $\|\mathbf{n}_a\| = 1$. Ce théorème de décomposition spectrale sera primordial par la suite puisque le modèle d'Edwards-Vilgis est écrit en élongation et par conséquent valide dans cet espace de travail. Ainsi, toutes les quantités basées sur ce modèle seront écrites dans la base de vecteurs propres. La décomposition spectrale nécessite la connaissance des valeurs propres λ_a^2 et des espaces associés $\mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a$ et $\mathbf{n}_a \otimes \mathbf{n}_a$. On trouve dans la littérature plusieurs méthodes et bibliothèques (bibliothèques Lapack par exemple) permettant de les déterminer, mais elles sont pour la plupart adaptées à de grandes matrices. Elles ne sont pas adaptées/optimisées pour nos besoins spécifiques (matrices de dimension 3×3). Dans notre cas, la décomposition spectrale a été obtenue par une méthode spécifique que nous allons détailler succinctement dans les deux sections suivantes.

D.2.2 Calcul des valeurs propres

Les valeurs propres λ_a^2 de \mathbf{B} (ou \mathbf{C} puisqu'elles sont identiques) se déterminent en résolvant le problème aux valeurs propres suivant :

$$\det(\mathbf{B} - \lambda_a^2 \mathbf{1}) = 0 \quad a = 1, 2, 3 \quad (\text{D.7})$$

qui conduit à la résolution du polynôme caractéristique, également appelé équation de Cayley-Hamilton :

$$\lambda^6 - I_1 \lambda^4 + I_2 \lambda^2 - I_3 = 0 \quad (\text{D.8})$$

où I_i représente le i^{e} invariant de \mathbf{B} . Cette équation admet une solution analytique basée sur les formules de Cardano et possède trois solutions réelles positives car \mathbf{B} et \mathbf{C} sont symétriques définis positifs. Les racines de cette équation sont (Miehe, 1993) :

$$\lambda_a^2 = \frac{1}{3} \left[I_1 + 2\sqrt{I_1^2 - 3I_2} \cos\left(\frac{\Theta + 2a\pi}{3}\right) \right] \quad a = 1, 2, 3 \quad (\text{D.9})$$

avec

$$\Theta = \arccos \left[\frac{2I_1^3 - 9I_1I_2 + 27I_3}{2(I_1^2 - 3I_2)^{3/2}} \right] \quad (\text{D.10})$$

L'utilisation de cette méthode analytique est à privilégier par rapport à des solutions itératives (type méthode de Jacobi) en raison de la réduction notable du temps de calcul. Cependant, il existe des cas « pathologiques » qui peuvent altérer les performances de l'algorithme de résolution basé sur cette méthode (Kopp, 2008). Pour s'affranchir de ces problèmes, nous avons utilisé un algorithme optimisé pour les matrices 3×3 que nous avons téléchargé gratuitement depuis l'url <http://www.mpi-hd.mpg.de/~jkopp/3x3> et qui s'inspire de l'algorithme proposé par Simo et Hughes (1998).

D.2.3 Calcul des espaces propres

La façon la plus simple pour déterminer les espaces propres est de réaliser le produit tensoriel entre les vecteurs propres associés au problème aux valeurs propres (eq. D.7). Cependant, cette méthode requiert la détermination explicite des vecteurs propres. De plus, comme nous le verrons par la suite lors du calcul de l'opérateur tangent, un calcul de la dérivée de ces espaces propres sera nécessaire. Cette méthode se révèle donc inappropriée puisque nous ne disposons pas d'expressions analytiques. Simo et Taylor (1991) et Miehe (1993) proposent une méthode efficace basée sur le théorème de représentation de Serrin permettant de déterminer les espaces propres sans calcul préalable des vecteurs propres en s'appuyant sur les valeurs propres :

$$\mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a = \lambda_a^2 \frac{\mathbf{C} - (I_1 - \lambda_a^2)\mathbf{1} + I_3 \lambda_a^{-2} \mathbf{C}^{-1}}{D_a} \quad (\text{D.11})$$

$$\mathbf{n}_a \otimes \mathbf{n}_a = \frac{\mathbf{B}^2 - (I_1 - \lambda_a^2)\mathbf{B} + I_3 \lambda_a^{-2} \mathbf{1}}{D_a} \quad (\text{D.12})$$

si et seulement si $D_a \neq 0$, avec :

$$D_a = \prod_{b=1/a}^3 (\lambda_a^2 - \lambda_b^2) \quad (\text{D.13})$$

Ces expressions sont bien entendues valables uniquement dans le cas où les trois valeurs propres sont distinctes. D'un point de vue numérique, nous appliquerons un algorithme de perturbation numérique similaire à celui proposé par Miehe (1993) afin de s'assurer que les valeurs propres sont toujours distinctes.

D.2.4 Transformations pull-back et push-forward

Quelle que soit l'approche retenue pour traiter le problème (lagrangienne ou eulérienne), sa résolution nécessite la connaissance d'un tenseur des contraintes et d'un tenseur d'élasticité. Le passage d'une description à une autre peut se faire simplement grâce aux transformations *pull-back* (eulérien \rightarrow lagrangien), notée ϕ^* , et *push-forward* (lagrangien \rightarrow eulérien), notée ϕ_* . Ces transformations peuvent s'appliquer à des tenseurs d'ordres différents et leur définition est fonction de l'ordre et de la nature du tenseur sur lequel on l'opère. Par exemple, la transformation *push-forward* du vecteur lagrangien $d\mathbf{X}$ depuis la configuration de référence vers la configuration actuelle donne le vecteur eulérien $d\mathbf{x}$ qui vérifie :

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \equiv \phi_* [d\mathbf{X}] \quad (\text{D.14})$$

et l'opération *pull-back* du vecteur eulérien $d\mathbf{x}$ vers la configuration de référence donne le vecteur lagrangien $d\mathbf{X}$:

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x} \equiv \phi^* [d\mathbf{x}] \quad (\text{D.15})$$

De la même manière, les opérations *pull-back* et *push-forward* effectuées sur des tenseurs du second ordre relient les « valeurs » de ces tenseurs entre les configurations lagrangienne et eulérienne. Il faut toutefois remarquer que la définition de ces transformations varie en fonction de la nature du tenseur (contrainte ou déformation). Cette différence provient du fait que l'énergie de déformation, donc le produit contrainte-déformation, doit rester constante durant les opérations *pull-back* et *push-forward*. Le tableau (D.2) résume quelques transformations de tenseurs qui seront utiles par la suite. Enfin, nous définissons également l'opération *push-forward* pour

<i>push-forward</i> ϕ_\star	<i>pull-back</i> ϕ^\star
Tenseurs basés sur des déformations	
$\phi_\star [\bullet] = \mathbf{F}^{-T} [\bullet] \mathbf{F}^{-1}$	$\phi^\star [\bullet] = \mathbf{F}^T [\bullet] \mathbf{F}$
$\phi_\star [\mathbf{C}] = \mathbf{1}$	$\phi^\star [\mathbf{1}] = \mathbf{C}$
$\phi_\star [\dot{\mathbf{E}}] = \mathbf{D}$	$\phi^\star [\mathbf{D}] = \dot{\mathbf{E}}$
Tenseurs basés sur des contraintes	
$\phi_\star [\bullet] = \mathbf{F} [\bullet] \mathbf{F}^T$	$\phi^\star [\bullet] = \mathbf{F}^{-1} [\bullet] \mathbf{F}^{-T}$
$\phi_\star [\mathbf{S}] = \boldsymbol{\tau}$	$\phi^\star [\boldsymbol{\tau}] = \mathbf{S}$
$\phi_\star [\dot{\mathbf{S}}] = \boldsymbol{\tau}^{\nabla c}$	$\phi^\star [\boldsymbol{\tau}^{\nabla c}] = \dot{\mathbf{S}}$

Tableau D.2 – Résumé de quelques opérations *pull-back* et *push-forward* effectuées sur des tenseurs d'ordres deux. $\boldsymbol{\tau}^{\nabla c}$ est la dérivée convective de $\boldsymbol{\tau}$ égale à $\boldsymbol{\tau}^{\nabla c} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{L}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{L}^T = \mathbf{F} \frac{d}{dt} (\mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-T}) \mathbf{F}^T = \mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau}$ (égale à la dérivée de Lie $\mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau}$), le symbole ∇ étant utilisé pour rappeler que l'on travaille avec une dérivée objective. D'après Belytschko *et al.* (2000).

un tenseur d'ordre 4 :

$$\phi_\star [\mathbf{C}] = \frac{1}{J} (\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}^T) : \mathbf{C} : (\mathbf{F}^T \otimes \mathbf{F}) \quad (\text{D.16})$$

D.3 Implémentation dans Abaqus

D.3.1 Gestion de l'incompressibilité

Les matériaux élastomères sont généralement considérés comme incompressibles car leur coefficient de Poisson est très proche de 0.5. Cette caractéristique pose des difficultés numériques qui sont contournées en considérant le matériau comme quasiment incompressible (ou faiblement compressible). Pour stabiliser le schéma d'intégration, la pression hydrostatique est reprise comme variable supplémentaire de l'élément (éléments hybrides à deux inconnues : déplacement et pression). Cette pression hydrostatique doit cependant être calculée dans la UMAT par l'utilisateur. La méthode retenue pour calculer cette pression est une méthode de pénalité consistant à décomposer l'énergie libre, Ψ , en une composante volumique, notée $U(J)$, et une fonction du tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche isochore, notée $\bar{W}(\bar{\mathbf{B}})$:

$$\rho\Psi = U(J) + \bar{W}(\bar{\mathbf{B}}) \quad (\text{D.17})$$

Pour faciliter l'implantation numérique, nous introduisons également une décomposition multiplicative du tenseur gradient \mathbf{F} en une composante volumique et une composante déviatorique :

$$\mathbf{F} = [(\det \mathbf{F})^{1/3} \mathbf{1}] \bar{\mathbf{F}} \quad (\text{D.18})$$

La première partie de \mathbf{F} est la partie sphérique du tenseur gradient ou composante volumique et $\bar{\mathbf{F}}$ est la composante isochore de \mathbf{F} .

D.3.2 Densité d'énergie de déformation

D.3.2.1 Structure générale

La densité d'énergie de déformation du matériau est supposée se décomposer de façon additive en une composante volumique et une composante déviatorique. En prenant en compte le fait que le potentiel d'Edwards-Vilgis est écrit en fonction des élongations déviatoriques $\bar{\lambda}_a$, l'équation (D.17) devient :

$$\rho\Psi = U(J) + \bar{W}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3) \quad (\text{D.19})$$

où $\bar{\lambda}_a$ sont les racines carrées des valeurs propres de $\bar{\mathbf{B}} = (\det \mathbf{F})^{-2/3} \mathbf{F}\mathbf{F}^T$. Elles sont liées aux valeurs propres de \mathbf{B} par la relation $\bar{\lambda}_a = J^{-1/3} \lambda_a$.

D.3.2.2 Composante volumique

La composante volumique de la densité d'énergie de déformation $U(J)$ peut s'exprimer à partir d'une fonction de pénalité dépendant du jacobien de la transformation J . Selon Doll et Schweizerhof (2000), cette fonction doit vérifier 4 conditions :

$$\begin{aligned}
 \lim_{J \rightarrow 0} U &= +\infty & \lim_{J \rightarrow +\infty} U &= +\infty \\
 \lim_{J \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial J} &= -\infty & \lim_{J \rightarrow +\infty} \frac{\partial U}{\partial J} &= +\infty
 \end{aligned} \tag{D.20}$$

Un grand nombre de fonctions $U(J)$ a été proposé dans la littérature. La plus utilisée, et qui est également retenue dans cette étude, a été proposée par Simo (1988) et est basée sur une dépendance quadratique à J :

$$U(J) = \frac{K}{2} (J - 1)^2 \tag{D.21}$$

où K est le module de compressibilité. Nous attirons l'attention sur le fait que la première et la troisième condition ne sont pas vérifiées, mais comme le module de compressibilité est très grand vis à vis des autres paramètres, on considère généralement que ces conditions sont atteintes.

Finalement, l'énergie libre que nous allons considérer dans la suite est la suivante :

$$\begin{aligned}
 \rho\Psi &= \frac{K}{2} (J - 1)^2 \\
 &+ \frac{N_c^*}{2} \left[\frac{(1 - \alpha^2)\bar{I}_1}{1 - \alpha^2\bar{I}_1} + \ln \left(1 - \alpha^2\bar{I}_1 \right) \right] \\
 &+ \frac{N_s^*}{2} \left[\frac{(1 - \alpha^2)(1 + \eta)}{1 - \alpha^2\bar{I}_1} \sum_{i=1}^3 \frac{\bar{\lambda}_i^2}{1 + \eta\bar{\lambda}_i^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \ln \left(1 - \alpha^2\bar{I}_1 \right) + \sum_{i=1}^3 \ln \left(1 + \eta\bar{\lambda}_i^2 \right) \right]
 \end{aligned} \tag{D.22}$$

D.3.3 Tenseur des contraintes de Cauchy

Le tenseur des contraintes de Cauchy s'obtient par dérivation de la densité d'énergie de déformation. A partir de la structure générale de cette densité proposée précédemment (cf. équation D.17), le tenseur des contraintes de Cauchy peut être décomposé de manière additive en une composante déviatorique et une composante volumique :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J} \text{dev} \left(\bar{\mathbf{B}} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\mathbf{B}}} \right) + \frac{\partial U}{\partial J} \mathbf{1} \tag{D.23}$$

où $\text{dev}(\mathbf{X})$ représente la partie déviatorique du tenseur \mathbf{X} vérifiant :

$$\text{dev}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{X}) \mathbf{1} \tag{D.24}$$

Après quelques étapes de calcul, on montre :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \sum_{a=1}^3 \bar{\beta}_a \mathbf{m}_a + \frac{\partial U}{\partial J} \mathbf{1} \quad (\text{D.25})$$

où $\mathbf{m}_a = \mathbf{n}_a \otimes \mathbf{n}_a$ représentent les espaces propres associés aux valeurs propres $\bar{\lambda}_a$ et $\bar{\beta}_a$ représentent les coefficients de « contraintes » définis comme suit :

$$\bar{\beta}_a = \bar{\lambda}_a \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\lambda}_a} - \frac{1}{3} \sum_{b=1}^3 \bar{\lambda}_b \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\lambda}_b} \quad (\text{D.26})$$

Ces coefficients valent dans le cas du modèle d'Edwards-Vilgis :

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_a &= N_c^* \mathcal{F}_1^{EV} \left[\bar{\lambda}_a^2 - \frac{1}{3} \bar{I}_1 \right] + N_s^* \mathcal{F}_2^{EV} \left[\bar{\lambda}_a^2 - \frac{1}{3} \bar{I}_1 \right] \\ &+ N_s^* \frac{(1 - \alpha^2)(1 + \eta)}{1 - \alpha^2 \bar{I}_1} \left[\frac{\bar{\lambda}_a^2}{(1 + \eta \bar{\lambda}_a^2)^2} - \frac{1}{3} \sum_{b=1}^3 \frac{\bar{\lambda}_b^2}{(1 + \eta \bar{\lambda}_b^2)^2} \right] \\ &+ N_s^* \eta \left[\frac{\bar{\lambda}_a^2}{1 + \eta \bar{\lambda}_a^2} - \frac{1}{3} \sum_{b=1}^3 \frac{\bar{\lambda}_b^2}{1 + \eta \bar{\lambda}_b^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

avec

$$\mathcal{F}_1^{EV} = \frac{1 - \alpha^2}{(1 - \alpha^2 \bar{I}_1)^2} - \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2 \bar{I}_1} \quad (\text{D.28})$$

et

$$\mathcal{F}_2^{EV} = \frac{\alpha^2 (1 - \alpha^2)(1 + \eta)}{(1 - \alpha^2 \bar{I}_1)^2} \sum_{b=1}^3 \frac{\bar{\lambda}_b^2}{1 + \eta \bar{\lambda}_b^2} - \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2 \bar{I}_1} \quad (\text{D.29})$$

D.3.4 Tenseur d'élasticité

D.3.4.1 Méthode de calcul

Le tenseur d'élasticité est nécessaire pour garantir la rapidité de convergence de la méthode de Newton-Raphson. Pour le code de calcul Abaqus, il lie la dérivée objective de Jaumann du tenseur de Kirchoff, $\boldsymbol{\tau}^{\nabla J}$, au taux de déformation \mathbf{D} :

$$\boldsymbol{\tau}^{\nabla J} = J \mathbb{C} : \mathbf{D} \quad (\text{D.30})$$

Le calcul de l'opérateur tangent exact est un problème complexe que nous proposons de réaliser en 3 temps :

1. calcul de l'opérateur tangent lagrangien \mathbb{C}^L reliant $\dot{\mathbf{S}}$ à $\dot{\mathbf{C}}$
2. opération *push-forward* pour obtenir un tenseur d'élasticité eulérien $\mathbb{C}^{\sigma T} = \phi_*[\mathbb{C}^L]$
3. ajout des termes de convection, noté \mathbb{C}^{conv} , pour obtenir un tenseur d'élasticité lagrangien réactualisé (spécifique au code de calcul Abaqus)

D.3.4.2 Origine des termes de convection

Le terme de convection vient du fait qu'Abaqus Standard utilise une dérivée de Jaumann comme dérivée objective pour la plupart des éléments. Or, l'opérateur tangent issu de la transformation *push-forward* du tenseur d'élasticité lagrangien, $\phi_*[\mathbb{C}^L]$, peut se définir à partir de la relation :

$$\boldsymbol{\tau}^{\nabla c} = \phi_*[\mathbb{C}^L] : \mathbf{D} = \mathbb{C}^{\tau c} : \mathbf{D} \quad (\text{D.31})$$

Par convention, nous utilisons la notation \mathbb{C}^{ab} pour signifier que l'opérateur tangent est l'opérateur reliant la dérivée objective « b » du tenseur \mathbf{a} , $\mathbf{a}^{\nabla b}$, au taux de déformation \mathbf{D} . Pour relier ce tenseur à l'expression requise par Abaqus, remarquons :

$$\boldsymbol{\tau}^{\nabla c} = J\boldsymbol{\sigma}^{\nabla T} \quad (\text{D.32})$$

où $\boldsymbol{\tau}^{\nabla c}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{\nabla T}$ représentent respectivement la dérivée convective du tenseur de Kirchoff et la dérivée de Truesdell du tenseur de Cauchy. Or, nous avons d'après Belytschko *et al.* (2000) :

$$\mathbb{C}^{\tau J} = J(\mathbb{C}^{\sigma T} + \mathbb{C}') \quad (\text{D.33})$$

avec \mathbb{C}' défini par $\mathbb{C}' : \mathbf{D} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}$ où « \cdot » correspond au produit simplement contracté. On peut donc en déduire, à partir des équations (D.30), (D.31), (D.32) et (D.33) l'opérateur tangent requis par Abaqus :

$$\mathbb{C} = \phi_*[\mathbb{C}^L] + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbb{I} + \mathbb{I} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \phi_*[\mathbb{C}^L] + \mathbb{C}^{conv} \quad (\text{D.34})$$

où \mathbb{I} est le tenseur identité symétrique d'ordre quatre. La définition du produit simplement contracté est rappelée ci dessous :

$$[\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}]_{ijkl} = A_{ipkl}B_{pj} \quad [\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}]_{ijkl} = B_{ik}A_{qjkl} \quad (\text{D.35})$$

Détaillons maintenant les 3 étapes de calcul mentionnées précédemment.

D.3.4.3 Tenseur d'élasticité lagrangien

Le tenseur d'élasticité lagrangien, défini par la relation :

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbb{C}^L : \frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}} \quad (\text{D.36})$$

se calcule à partir de la dérivée du tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff par rapport au tenseur de déformation de Cauchy-Green droit :

$$\mathbb{C}^L = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{D.37})$$

Il nécessite donc la connaissance préalable du tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff.

a. Calcul du tenseur de Piola-Kirchoff

Pour effectuer ce calcul, nous nous appuyons sur les calculs déjà effectués pour le calcul de $\boldsymbol{\sigma}$ et nous pouvons remarquer que l'opération *pull-back* opérée sur le tenseur des contraintes de Kirchoff $\boldsymbol{\tau}$ est égale au tenseur de Piola-Kirchoff \mathbf{S} (Bonet et Wood, 1997). Nous avons donc :

$$\mathbf{S} = J\phi^* [\boldsymbol{\sigma}] \quad (\text{D.38})$$

En utilisant l'expression de $\boldsymbol{\sigma}$ (équation D.25), l'application de l'opération *pull-back* (cf. table D.2) donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= J\mathbf{F}^{-1} \left(\frac{1}{J} \sum_{a=1}^3 \bar{\beta}_a \mathbf{n}_a \otimes \mathbf{n}_a + \frac{\partial U}{\partial J} \mathbf{1} \right) \mathbf{F}^{-T} \\ &= \sum_{a=1}^3 \bar{\beta}_a \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{n}_a \otimes \mathbf{n}_a) \mathbf{F}^{-T} + J \frac{\partial U}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{D.39})$$

Comme $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}) \otimes \mathbf{c}$ et $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{C}^{-T} = \mathbf{a} \otimes (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{b})$, nous avons :

$$\mathbf{S} = \sum_{a=1}^3 \bar{\beta}_a (\mathbf{F}^{-1}\mathbf{n}_a) \otimes (\mathbf{F}^{-1}\mathbf{n}_a) + J \frac{\partial U}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} \quad (\text{D.40})$$

En remarquant que $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{n}_a = \lambda_a^{-1}\mathbf{N}_a$, nous trouvons finalement :

$$\mathbf{S} = \sum_{a=1}^3 \bar{\beta}_a \lambda_a^{-2} \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a + J \frac{\partial U}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} \quad (\text{D.41})$$

En posant $\mathbf{M}_a = \lambda_a^{-2} \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a$, l'expression précédente peut se réécrire¹ :

$$\mathbf{S} = \sum_{a=1}^3 \bar{\beta}_a \mathbf{M}_a + J \frac{\partial U}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} \quad (\text{D.42})$$

Comme pour le tenseur de Cauchy, le tenseur de Piola-Kirchoff peut se décomposer en une contribution isochore \mathbf{S}_{iso} et une contribution volumique \mathbf{S}_{vol} . Cette décomposition additive conduit à un tenseur d'élasticité à deux composantes, notées \mathbb{C}_{iso}^L et \mathbb{C}_{vol}^L :

$$\mathbb{C}_{iso}^L = 2 \frac{\partial \mathbf{S}_{iso}}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{et} \quad \mathbb{C}_{vol}^L = 2 \frac{\partial \mathbf{S}_{vol}}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{D.43})$$

Afin d'éviter de manipuler des expressions trop lourdes, le calcul de ces deux composantes est réalisé de manière séparée.

¹Nous pouvons remarquer que \mathbf{M}_a est construit de telle sorte que nous avons $\mathbf{M}_a = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{m}_a\mathbf{F}^{-T}$.

b. Tenseur d'élasticité lagrangien isochoire

Comme nous venons de le montrer précédemment, le tenseur d'élasticité lagrangien isochoire se calcule à partir de :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{iso}^L &= 2\partial_{\mathbf{C}} \left[\sum_{a=1}^3 \bar{\beta}_a \mathbf{M}_a \right] \\ &= 2 \left[\sum_{a=1}^3 \partial_{\mathbf{C}} \bar{\beta}_a \otimes \mathbf{M}_a + \sum_{a=1}^3 \bar{\beta}_a \partial_{\mathbf{C}} \mathbf{M}_a \right]\end{aligned}\quad (\text{D.44})$$

Avant de poursuivre les calculs, nous pouvons remarquer que les dérivées des coefficients de contraintes $\bar{\beta}_a$ par rapport au tenseur de Cauchy-Green droit peut se calculer facilement en utilisant des dérivées croisées :

$$\frac{\partial \bar{\beta}_a}{\partial \mathbf{C}} = \sum_{b=1}^3 \sum_{c=1}^3 \frac{\partial \bar{\beta}_a}{\partial \bar{\lambda}_b} \frac{\partial \bar{\lambda}_b}{\partial \lambda_c} \frac{\partial \lambda_c}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{D.45})$$

Après quelques manipulations où les relations suivantes $\frac{\partial \bar{\lambda}_b}{\partial \lambda_c} = J^{-1/3} \left[\delta_{bc} - \frac{1}{3} \frac{\bar{\lambda}_b}{\bar{\lambda}_c} \right]$ et $\partial_{\mathbf{C}} \lambda_c = \frac{1}{2} \lambda_c \mathbf{M}_c = \frac{1}{2} J^{1/3} \bar{\lambda}_c \mathbf{M}_c$ ont été utilisées, le premier terme de l'équation (D.44) devient :

$$2 \sum_{a=1}^3 \partial_{\mathbf{C}} \bar{\beta}_a \otimes \mathbf{M}_a = \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 \bar{\gamma}_{ab} \mathbf{M}_b \otimes \mathbf{M}_a \quad (\text{D.46})$$

où $\bar{\gamma}_{ab}$ sont les coefficients « matériels » :

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_{ab} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}_b} \left(\bar{\lambda}_a \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\lambda}_a} \right) \bar{\lambda}_b + \frac{1}{9} \sum_{c=1}^3 \sum_{d=1}^3 \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}_d} \left(\bar{\lambda}_c \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\lambda}_c} \right) \bar{\lambda}_d \\ &\quad - \frac{1}{3} \sum_{c=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}_c} \left(\bar{\lambda}_a \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\lambda}_a} \right) \bar{\lambda}_c + \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}_b} \left(\bar{\lambda}_c \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\lambda}_c} \right) \bar{\lambda}_b \right]\end{aligned}\quad (\text{D.47})$$

Dans le cas du modèle d'Edwards-Vilgis, ces coefficients matériels valent, après

calculs réalisés avec Mathematica, pour les coefficients diagonaux ($a = b$) :

$$\begin{aligned}
 \bar{\gamma}_{aa} = & 2(N_c^* \mathcal{F}_1^{EV} + N_s^* \mathcal{F}_2^{EV}) \left[\frac{1}{9} \bar{I}_1 + \frac{1}{3} \bar{\lambda}_a^2 \right] \\
 & + 2(N_c^* \mathcal{F}_3^{EV} + N_s^* \mathcal{F}_4^{EV}) \left[\bar{\lambda}_a^4 + \frac{1}{9} \bar{I}_1^2 - \frac{2}{3} \bar{\lambda}_a^2 \bar{I}_1 \right] \\
 & - \frac{2(1-\alpha^2)(1+\eta)}{1-\alpha^2 \bar{I}_1} N_s^* \left[\frac{1}{9} \sum_{c=1}^3 \frac{\bar{\lambda}_c^2}{(1+\eta \bar{\lambda}_c^2)^2} + \frac{1}{3} \frac{\bar{\lambda}_a^2}{(1+\eta \bar{\lambda}_a^2)^2} \right] \\
 & + \frac{4(1-\alpha^2)(1+\eta)}{1-\alpha^2 \bar{I}_1} N_s^* \left[\frac{1}{9} \sum_{c=1}^3 \frac{\bar{\lambda}_c^2}{(1+\eta \bar{\lambda}_c^2)^3} + \frac{1}{3} \frac{\bar{\lambda}_a^2}{(1+\eta \bar{\lambda}_a^2)^3} \right] \\
 & + \frac{2\alpha^2(1-\alpha^2)(1+\eta)}{(1-\alpha^2 \bar{I}_1)^2} N_s^* \left[\left(\frac{2}{9} \bar{I}_1 - \frac{2}{3} \bar{\lambda}_a^2 \right) \sum_{c=1}^3 \frac{\bar{\lambda}_c^2}{(1+\eta \bar{\lambda}_c^2)^2} \right. \\
 & \quad \left. + \left(2\bar{\lambda}_a^2 - \frac{2}{3} \bar{I}_1 \right) \frac{\bar{\lambda}_a^2}{(1+\eta \bar{\lambda}_a^2)^2} \right] \\
 & + 2\eta N_s^* \left[\frac{1}{9} \sum_{c=1}^3 \frac{\bar{\lambda}_c^2}{1+\eta \bar{\lambda}_c^2} + \frac{1}{3} \frac{\bar{\lambda}_a^2}{1+\eta \bar{\lambda}_a^2} \right] \\
 & - 2\eta^2 N_s^* \left[\frac{1}{9} \sum_{c=1}^3 \frac{\bar{\lambda}_c^4}{(1+\eta \bar{\lambda}_c^2)^2} + \frac{1}{3} \frac{\bar{\lambda}_a^4}{(1+\eta \bar{\lambda}_a^2)^2} \right]
 \end{aligned} \tag{D.48}$$

avec

$$\mathcal{F}_3^{EV} = \frac{2\alpha^2(1-\alpha^2)}{[1-\alpha^2 \bar{I}_1]^3} - \frac{\alpha^4}{[1-\alpha^2 \bar{I}_1]^2} \tag{D.49}$$

et

$$\mathcal{F}_4^{EV} = \frac{2\alpha^4(1-\alpha^2)(1+\eta)}{[1-\alpha^2 \bar{I}_1]^3} \sum_{a=1}^3 \frac{\bar{\lambda}_a^2}{1+\eta \bar{\lambda}_a^2} - \frac{\alpha^4}{[1-\alpha^2 \bar{I}_1]^2} \tag{D.50}$$

Pour les coefficients non diagonaux ($a \neq b$), nous avons :

$$\begin{aligned}
 \bar{\gamma}_{ab} = & 2(N_c^* \mathcal{F}_1^{EV} + N_s^* \mathcal{F}_2^{EV}) \left[\frac{1}{9} \bar{I}_1 - \frac{1}{3} (\bar{\lambda}_a^2 + \bar{\lambda}_b^2) \right] \\
 & + 2(N_c^* \mathcal{F}_3^{EV} + N_s^* \mathcal{F}_4^{EV}) \left[\bar{\lambda}_a^2 \bar{\lambda}_b^2 + \frac{1}{9} \bar{I}_1^2 - \frac{1}{3} (\bar{\lambda}_a^2 + \bar{\lambda}_b^2) \bar{I}_1 \right] \\
 & - \frac{2(1-\alpha^2)(1+\eta)}{1-\alpha^2 \bar{I}_1} N_s^* \left[\frac{1}{9} \sum_{c=1}^3 \frac{\bar{\lambda}_c^2}{(1+\eta \bar{\lambda}_c^2)^2} - \frac{1}{3} \left(\frac{\bar{\lambda}_a^2}{(1+\eta \bar{\lambda}_a^2)^2} + \frac{\bar{\lambda}_b^2}{(1+\eta \bar{\lambda}_b^2)^2} \right) \right] \\
 & + \frac{4(1-\alpha^2)(1+\eta)}{1-\alpha^2 \bar{I}_1} N_s^* \left[\frac{1}{9} \sum_{c=1}^3 \frac{\bar{\lambda}_c^2}{(1+\eta \bar{\lambda}_c^2)^3} - \frac{1}{3} \left(\frac{\bar{\lambda}_a^2}{(1+\eta \bar{\lambda}_a^2)^3} + \frac{\bar{\lambda}_b^2}{(1+\eta \bar{\lambda}_b^2)^3} \right) \right] \\
 & + \frac{2\alpha^2(1-\alpha^2)(1+\eta)}{(1-\alpha^2 \bar{I}_1)^2} N_s^* \left[\left(\frac{2}{9} \bar{I}_1 - \frac{1}{3} (\bar{\lambda}_a^2 + \bar{\lambda}_b^2) \right) \sum_{c=1}^3 \frac{\bar{\lambda}_c^2}{(1+\eta \bar{\lambda}_c^2)^2} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{3} \bar{I}_1 \left(\frac{\bar{\lambda}_a^2}{(1+\eta \bar{\lambda}_a^2)^2} + \frac{\bar{\lambda}_b^2}{(1+\eta \bar{\lambda}_b^2)^2} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\bar{\lambda}_a^2 \bar{\lambda}_b^2}{(1+\eta \bar{\lambda}_a^2)^2} + \frac{\bar{\lambda}_a^2 \bar{\lambda}_b^2}{(1+\eta \bar{\lambda}_b^2)^2} \right] \\
 & + 2\eta N_s^* \left[\frac{1}{9} \sum_{c=1}^3 \frac{\bar{\lambda}_c^2}{1+\eta \bar{\lambda}_c^2} - \frac{1}{3} \left(\frac{\bar{\lambda}_a^2}{1+\eta \bar{\lambda}_a^2} + \frac{\bar{\lambda}_b^2}{1+\eta \bar{\lambda}_b^2} \right) \right] \\
 & - 2\eta^2 N_s^* \left[\frac{1}{9} \sum_{c=1}^3 \frac{\bar{\lambda}_c^4}{(1+\eta \bar{\lambda}_c^2)^2} - \frac{1}{3} \left(\frac{\bar{\lambda}_a^4}{(1+\eta \bar{\lambda}_a^2)^2} + \frac{\bar{\lambda}_b^4}{(1+\eta \bar{\lambda}_b^2)^2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{D.51}$$

Pour le calcul du dernier terme de l'équation (D.44), on a :

$$\partial_{\mathbf{C}} \mathbf{M}_a = \partial_{\mathbf{C}} \lambda_a^{-2} \otimes [\mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a] + \lambda_a^{-2} \partial_{\mathbf{C}} [\mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a] \tag{D.52}$$

Le calcul du produit tensoriel entre les vecteurs propres est basé sur un résultat proposé par Miehe (1993) :

$$\begin{aligned}
 \partial_{\mathbf{C}} [\mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a] = & \frac{\lambda_a^2}{D_a} \left[\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - I_3 \lambda_a^{-2} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right. \\
 & \left. + \sum_{b=1}^3 (I_3 \lambda_a^{-2} - \lambda_b^4) \mathbf{M}_b \otimes \mathbf{M}_b \right]
 \end{aligned} \tag{D.53}$$

dont la démonstration est laissée au lecteur. Le symbole \otimes représente le produit tensoriel symétrique vérifiant $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijkl} = \frac{1}{2} (A_{ik} B_{jl} + A_{il} B_{jk})$. Le tenseur d'élasticité lagrangien isochore se calcule finalement par simple addition des équations

(D.46) et (D.52) :

$$\mathbb{C}_{iso}^L = \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 \bar{\gamma}_{ab} \mathbf{M}_b \otimes \mathbf{M}_a + 2 \sum_{a=1}^3 \bar{\beta}_a \partial_{\mathbf{C}} \mathbf{M}_a \quad (\text{D.54})$$

avec :

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{C}} \mathbf{M}_a = & -\mathbf{M}_a \otimes \mathbf{M}_a + \frac{1}{D_a} \left[\mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{1} - I_3 \lambda_a^{-2} \mathbf{C}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{C}^{-1} \right. \\ & \left. + \sum_{b=1}^3 \left(I_3 \lambda_a^{-2} - \lambda_b^4 \right) \mathbf{M}_b \otimes \mathbf{M}_b \right] \end{aligned} \quad (\text{D.55})$$

c. Tenseur d'élasticité lagrangien volumique

A partir de la définition de \mathbf{S} donnée par l'équation (D.42), la composante volumique de l'opérateur tangent lagrangien s'exprime :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{vol}^L &= 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left(J \frac{\partial U}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} \right) \\ &= 2 \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \frac{\partial U}{\partial J} \otimes \mathbf{C}^{-1} + 2J \frac{\partial^2 U}{\partial J^2} \otimes \mathbf{C}^{-1} + 2J \frac{\partial U}{\partial J} \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \end{aligned} \quad (\text{D.56})$$

Sachant que $\partial_{\mathbf{C}} J = \frac{1}{2} J \mathbf{C}^{-1}$, nous avons :

$$\mathbb{C}_{vol}^L = J \frac{\partial U}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + J^2 \frac{\partial^2 U}{\partial J^2} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - 2J \frac{\partial U}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{C}^{-1} \quad (\text{D.57})$$

Soit, finalement :

$$\mathbb{C}_{vol}^L = \left(\frac{\partial U}{\partial J} + J \frac{\partial^2 U}{\partial J^2} \right) J \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - 2J \frac{\partial U}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{C}^{-1} \quad (\text{D.58})$$

d. Tenseur d'élasticité lagrangien

Le tenseur d'élasticité lagrangien se calcule simplement en venant sommer les contributions isochore (D.54) et volumique (D.58) :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^L &= \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 \bar{\gamma}_{ab} \mathbf{M}_b \otimes \mathbf{M}_a + 2 \sum_{a=1}^3 \bar{\beta}_a \partial_{\mathbf{C}} \mathbf{M}_a \\ &+ \left(\frac{\partial U}{\partial J} + J \frac{\partial^2 U}{\partial J^2} \right) J \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - 2J \frac{\partial U}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{C}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{D.59})$$

D.3.4.4 Transformation *push-forward*

Le tenseur d'élasticité eulérien s'obtient en transportant le tenseur d'élasticité lagrangien depuis la configuration de référence vers la configuration actuelle en utilisant l'équation (D.16). A partir des propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) : (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) &= (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{DB}) \\
 (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) : (\mathbf{C} \underline{\otimes} \mathbf{D}) &= (\mathbf{ACB}) \underline{\otimes} \mathbf{D} \\
 (\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B}) : (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) &= \mathbf{A} \underline{\otimes} (\mathbf{C}^T \mathbf{B} \mathbf{D}^T)
 \end{aligned} \tag{D.60}$$

on montre :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{C}^e &= \frac{1}{J} \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 \bar{\gamma}_{ab} \mathbf{m}_b \otimes \mathbf{m}_a + \frac{2}{J} \sum_{a=1}^3 \bar{\beta}_a \partial_{\mathbf{g}} \mathbf{m}_a \\
 &\quad + \left(\frac{\partial U}{\partial J} + J \frac{\partial^2 U}{\partial J^2} \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - 2 \frac{\partial U}{\partial J} \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{1}
 \end{aligned} \tag{D.61}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \partial_{\mathbf{g}} \mathbf{m}_a &= -\mathbf{m}_a \otimes \mathbf{m}_a + \frac{1}{D_a} \left[\mathbf{B} \underline{\otimes} \mathbf{B} - I_3 \lambda_a^{-2} \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{1} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{b=1}^3 \left(I_3 \lambda_a^{-2} - \lambda_b^4 \right) \mathbf{m}_b \otimes \mathbf{m}_a \right]
 \end{aligned} \tag{D.62}$$

D.3.4.5 Terme de convection

Le terme de convection s'exprime :

$$\mathbb{C}^{conv} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbb{I} + \mathbb{I} \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{D.63}$$

où \mathbb{I} est le tenseur identité symétrique d'ordre quatre. En utilisant la définition du produit simplement contracté défini précédemment (équation D.35), le terme de convection (D.63) s'exprime en notation indicielle :

$$\mathbb{C}_{ijkl}^{conv} = \frac{1}{2} [\sigma_{iq} (\delta_{qk} \delta_{jl} + \delta_{ql} \delta_{jk}) + \sigma_{pj} (\delta_{ik} \delta_{pl} + \delta_{il} \delta_{pk})] \tag{D.64}$$

$$= \frac{1}{2} [\sigma_{ik} \delta_{jl} + \sigma_{il} \delta_{jk} + \sigma_{jl} \delta_{ik} + \sigma_{jk} \delta_{il}] \tag{D.65}$$

En utilisant l'expression du tenseur des contraintes de Cauchy donné par l'équation (D.25), nous avons :

$$\mathbb{C}_{ijkl}^{conv} = \frac{1}{2J} \left[\sum_{a=1}^3 \bar{\beta}_a (m_{aik} \delta_{jl} + m_{ail} \delta_{jk} + m_{ajl} \delta_{ik} + m_{ajk} \delta_{il}) \right] + \frac{\partial U}{\partial J} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \tag{D.66}$$

qui se met également sous la forme :

$$\mathbb{C}^{conv} = \frac{1}{J} \sum_{a=1}^3 \bar{\beta}_a (\mathbf{m}_a \underline{\otimes} \mathbf{1} + \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{m}_a) + 2 \frac{\partial U}{\partial J} \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{1} \tag{D.67}$$

D.3.4.6 Tenseur d'élasticité lagrangien réactualisé

Le tenseur d'élasticité requis par le code Abaqus est la somme du tenseur eulérien calculé à partir de la transformation *push-forward* du tenseur lagrangien et du terme de convection :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} = & \frac{1}{J} \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 \bar{\gamma}_{ab} \mathbf{m}_b \otimes \mathbf{m}_a \\ & + \frac{1}{J} \sum_{a=1}^3 \bar{\beta}_a (2\partial_{\mathbf{g}} \mathbf{m}_a + \mathbf{m}_a \underline{\otimes} \mathbf{1} + \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{m}_a) \\ & + \left(\frac{\partial U}{\partial J} + J \frac{\partial^2 U}{\partial J^2} \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \end{aligned} \quad (\text{D.68})$$

où \mathbf{m}_a sont les espaces propres défini par la relation :

$$\mathbf{m}_a = \frac{\mathbf{B}^2 - (I_1 - \lambda_a^2) \mathbf{B} + I_3 \lambda_a^{-2} \mathbf{1}}{D_a} \quad (\text{D.69})$$

et $\partial_{\mathbf{g}} \mathbf{m}_a$ sont les dérivées de ces espaces propres :

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{g}} \mathbf{m}_a = & -\mathbf{m}_a \otimes \mathbf{m}_a + \frac{1}{D_a} \left[\mathbf{B} \underline{\otimes} \mathbf{B} - I_3 \lambda_a^{-2} \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{1} \right] \\ & + \frac{1}{D_a} \left[\sum_{b=1}^3 (I_3 \lambda_a^{-2} - \lambda_b^4) \mathbf{m}_b \otimes \mathbf{m}_b \right] \end{aligned} \quad (\text{D.70})$$

D.3.5 Synthèse

Ce paragraphe synthétise les différentes étapes nécessaires à l'implantation numérique du potentiel d'Edwards-Vilgis dans le code de calcul Abaqus. Notons que seuls les termes β_a et γ_{ab} sont spécifiques au modèle retenu. Ainsi, le cadre d'implantation proposé est « générique » et peut donc s'appliquer facilement à tous les potentiels hyperélastiques.

1. calcul du jacobien
 $J = \det \mathbf{F}$
2. calcul du tenseur de déformation de Cauchy-Green \mathbf{B}
 $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$
3. calcul du tenseur de déformation de Cauchy-Green au carré \mathbf{B}^2
 $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B} \mathbf{B}$
4. calcul des invariants de \mathbf{B}
 $I_1 = \text{tr } \mathbf{B}$
 $I_2 = \frac{1}{2} (I_1^2 - \text{tr } \mathbf{B}^2)$
 $I_3 = \det \mathbf{B}$

5. calcul des invariants de $\bar{\mathbf{B}}$

$$\bar{I}_1 = J^{-2/3} I_1$$

$$\bar{I}_2 = J^{-4/3} I_2$$

$$\bar{I}_3 = J^{-2} I_3$$
6. calcul des valeurs propres λ_a^2 ($a = 1, 2, 3$)
$$\lambda_a^2 = \frac{1}{3} \left[I_1 + 2\sqrt{I_1^2 - 3I_2} \cos \left(\frac{\Theta + 2a\pi}{3} \right) \right]$$

avec

$$\Theta = \arccos \left[\frac{2I_1^3 - 9I_1 I_2 + 27I_3}{2(I_1^2 - 3I_2)^{3/2}} \right]$$
7. calcul des valeurs propres isochores $\bar{\lambda}_a^2$ ($a = 1, 2, 3$)
$$\bar{\lambda}_a^2 = J^{-2/3} \lambda_a^2$$
8. calcul des coefficients D_a

$$D_a = \prod_{b=1/a}^3 (\lambda_a^2 - \lambda_b^2)$$
9. calcul de la fonction \mathcal{F}_1^{EV} : cf. équation D.28
10. calcul de la fonction \mathcal{F}_2^{EV} : cf. équation D.29
11. calcul des coefficients de contraintes $\bar{\beta}_a$ ($a = 1, 2, 3$) : cf. équation D.26
12. calcul des espaces propres \mathbf{m}_a ($a = 1, 2, 3$) : cf. équation D.69
13. calcul du tenseur des contraintes de Cauchy : cf. équation D.25
14. stockage de la contrainte de Cauchy dans la variable **STRESS(6)**
15. calcul de la fonction \mathcal{F}_3^{EV} : cf. équation D.49
16. calcul de la fonction \mathcal{F}_4^{EV} : cf. équation D.50
17. calcul des coefficients matériels γ_{ab} : cf. équations D.48 et D.51
18. calcul des dérivées des espaces propres $\partial_{\mathbf{g}} \mathbf{m}_a$: cf. équation D.70
19. calcul du tenseur d'élasticité \mathbb{C} : cf. équation D.68
20. stockage de la matrice tangente dans la variable **DDSDDE(6,6)**

Article sur le critère d'endurance énergétique

Cette annexe présente un article publié par Le Saux et al. (2010c) dans le journal International Journal of Fatigue. Il aborde les notions présentées dans le chapitre 3. On développe plus particulièrement le protocole de suivi de la température, le dépouillement empirique reliant l'auto-échauffement à la déformation à 10^6 cycles, l'analyse sommaire de la population de défauts et enfin la proposition et la validation pour un des matériaux de l'étude du critère d'endurance énergétique. L'article (doi :10.1016/j.ijfatigue.2010.02.014) est donné sous la forme du preprint.

Fast evaluation of the fatigue lifetime of rubber-like materials based on a heat build-up protocol and micro-tomography measurements

V. Le Saux^a, Y. Marco^{*,a}, S. Calloch^a, C. Doudard^a, P. Charrier^b

^a*Laboratoire Brestois de Mécanique et des Systèmes (EA 4325), ENSIETA/Université de Brest/ENIB, 2 rue F. Verny 29806 Brest Cedex 9, France*
^b*Trelleborg Modyn, Z.I. Nantes Carquefou BP 419, 44474 Carquefou Cedex, France*

Abstract

The temperature of rubber-like materials increases under cyclic loadings, due to their dissipative behaviour and low thermal conductivity. This well-known phenomenon, called heat build-up, has attracted the attention of researchers for a long time. But, to our knowledge, no published studies have tried to link this temperature rise to fatigue behaviour, as already done for many metallic materials. Two main points are discussed in this paper. The first one is dedicated to heat build-up measurements: a specific experimental protocol was developed to capture the instantaneous heat build-up and, based on this protocol, a "heat build-up test" was defined in order to link the temperature rise to the principal maximum strain, which is a commonly used variable for fatigue criterion. A discussion on the correlation between these results and the fatigue behaviour is opened. This relation is illustrated for several industrial materials by a comparison between heat build-up measurements and fatigue life duration. The second point investigates the ability to couple X-ray tomography measurements presented elsewhere [1] to the former heat build-up results in order to predict the initiation lifetime. An approach based on a critical energy criterion was proposed and the comparison to a classic Wöhler curve approach gave very good results.

Key words: rubber-like materials, heat build-up, infrared thermography, X-ray micro-tomography, critical energy criterion

*Corresponding author. Tel.: 33 (0)2 98 34 89 11; Fax: 33 (0)2 98 34 87 30
Email address: Yann.Marco@ensieta.fr (Y. Marco)