

# Machine thermique mécanique stochastique

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier la réalisation d'une machine thermique miniature constituée d'un nanofil vibrant sous UHV. Du fait de ses faibles dimensions, cette nano-structure ne peut stocker et échanger que de faibles quantités d'énergie, typiquement quelques  $mk_B T^1$ . Or pour réaliser une machine thermique nous avons besoin de mettre cette structure en contact avec un bain thermique et il se trouve que les fluctuations de ce bain sont du même ordre ou supérieures à ses échanges avec le système. Notre machine thermique se place donc nécessairement dans le domaine de la physique stochastique pour réussir à isoler l'énergie propre de notre structure au milieu des fluctuations de ce bain thermique. Nous utiliserons donc la thermodynamique stochastique[1, 2], adaptée aux petites échelles, qui redéfinit les principes de la thermodynamique macroscopique pour des grandeurs moyennées.

Les fondements de la thermodynamique reposants sur le cycle de Carnot[3], c'est le premier objectif d'étude que nous nous fixons. Le but des travaux présentés est de réussir à reconstituer un cycle complet de Carnot pour un nanofil vibrant, d'être capable de mesurer les énergies pertinentes et finalement de mesurer le rendement de ce cycle. De précédentes études ont confirmé le cadre théorique de la thermodynamique stochastique et une telle machine est capable d'atteindre le rendement ultime de Carnot[4, 5].

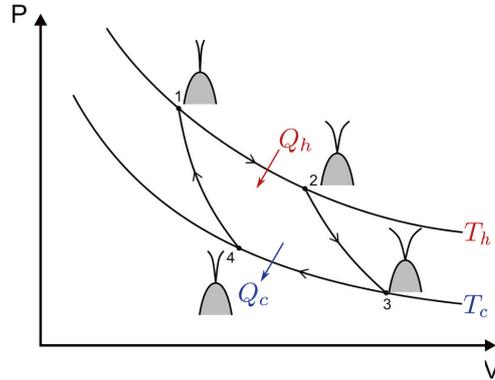
## 3.2 Cycle de Carnot

Dans un premier temps nous expliquons comment réaliser un cycle de Carnot avec un nanofil. Si on prend le cas d'école d'un gaz parfait pour réaliser un cycle thermodynamique moteur on a besoin d'une source chaude à la température  $T_h$ , d'une source froide à la température  $T_c$  et de quatre transformations jouant sur trois paramètres qui sont la température, la pression et le volume. Ces quatre transformations sont :

1. Une expansion isotherme à la température de la source chaude. Durant cette phase la source chaude fournit au gaz une chaleur  $Q_h$  équivalente au travail effectué par

---

1. A lire 'milli  $k_B T$ '. Nous utilisons cette notation pour signifier que nous avons divisé l'énergie par  $k_B T$  pour la normaliser puis multiplié par  $10^3$  pour obtenir un ordre de grandeur plus parlant.



**Figure 3.1** – Représentation en diagramme PV des 4 transformations nécessaires à la réalisation d'un Cycle de Carnot.  $T_c$  et  $T_h$  indiquent les deux courbes isothermes. Les points de départ de chaque transformation sont associés au numéro de la description du cycle dans le corps du texte. On représente pour chacun de ces points la variation d'amplitude de vibration du fil liée à la variation de pression et de température.

celui ci car comme la température est constante l'énergie interne ne varie pas. On a donc  $\Delta U = W + Q = 0$  avec  $W$  le travail,  $Q$  la chaleur et  $U$  l'énergie interne.

2. Une expansion adiabatique. Pendant cette étape le gaz est isolé thermiquement donc la chaleur échangée est nulle.
3. Une compression isotherme à la température de la source froide. Pendant cette étape le gaz fournit une quantité de chaleur  $Q_c$  à la source froide équivalente au travail effectué sur lui, pour la même raison que le point 1.
4. Une compression adiabatique qui ramène le système au point de départ. Le travail exercé sur le gaz compense celui de la phase 2.

A l'issue du cycle le gaz a fourni un travail  $W < 0$  (on prend la convention de l'énergie entrante positive) en contrepartie d'un apport de chaleur  $Q_h$ . On définit le rendement d'un tel cycle comme :

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{W}{Q_h} \\ &= 1 - \frac{T_c}{T_h} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ce rendement qu'on appelle le rendement de Carnot n'est jamais unitaire sauf si la source froide est à  $0K$ . Il est la limite fondamentale du rendement des machines thermiques[3].

Pour faire le lien entre les paramètres du nanofil et ceux d'un gaz parfait nous faisons un parallèle entre l'équation d'état d'un gaz parfait et l'équipartition de l'énergie[6].

$$\begin{aligned} PV &= nRT \\ k \langle x^2 \rangle &= k_B T \end{aligned} \quad (3.2)$$

La moyenne quadratique du déplacement  $x$  est le volume exploré par le nanofil, la raideur est équivalente à la pression.

Il nous manque un moyen de faire varier ces paramètres. Or dans le chapitre 2 nous avons vu en section 2.4.1.3 qu'appliquer une tension DC sur un nanofil ou nanotube permet de changer sa fréquence de résonance et  $k = m\omega^2$ . Pour modifier la température nous utilisons les notions vues dans la section 2.7.3.2. Si nous appliquons une tension entre l'échantillon et une contre électrode du type  $V = \bar{V} + \tilde{V}$ ,  $\bar{V}$  étant une composante DC et  $\tilde{V}$  étant une composante AC, alors une force capacitive  $C'\bar{V}\tilde{V}$  s'exerce sur le fil. Si pour la composante AC on choisit un bruit électrique possédant les caractéristiques d'un bruit blanc gaussien alors cette force est de la même nature que la force thermique à laquelle est soumis l'échantillon et elle s'ajoute à celle ci. Cela revient à avoir une force thermique plus forte appliquée sur l'échantillon, autrement dit une température plus élevée. Une autre façon de voir les choses est que l'on met le système en contact avec un réservoir actif de la même nature qu'un bain thermique et qui lui fournit de l'énergie. Cela a pour effet d'augmenter la température *effective* de l'échantillon[7, 8], à ne pas confondre avec la température associée à l'équilibre thermodynamique avec le bain thermique. La figure 3.1 montre les différentes branches de cycle de Carnot sur un diagramme  $PV$  avec l'évolution concomitante de l'amplitude de vibration du fil.

### 3.3 Théorie de la thermodynamique stochastique

#### 3.3.1 Travail et chaleur

Dans cette section nous exposons les bases théoriques de la thermodynamique stochastique pour notre système. Ce dernier est un nanofil collé sur une pointe. Il peut être modélisé par un oscillateur harmonique à deux degrés de liberté avec une masse effective  $m_{eff} = m/4$  où  $m$  est la masse du nanofil (ceci est valable si l'on étudie l'amplitude de vibration au bout du nanofil)[9], et d'amortissement  $\Gamma_0$ . L'équation qui régit cet oscillateur est alors l'équation de Langevin [10] :

$$m_{eff}\ddot{x} + m_{eff}\Gamma_0\dot{x} + kx = f(t) \quad (3.3)$$

Avec  $k$  la constante de raideur liée à la pulsation de résonance  $\omega_0$  du fil par  $k = m_{eff}\omega_0^2$ .  $f(t)$  est la force de Langevin qui modélise l'interaction entre le nanofil et le bain thermique, *i.e* les chocs entre les particules du bain thermique et le nanofil. Comme nous sommes sous UHV il serait même plus juste de parler d'échange d'énergie au sens large (notamment avec le support du nanofil). Ce type de force sert typiquement à modéliser le mouvement Brownien[11, 12]. Cette force a deux propriétés [13, 14] :

$$\begin{aligned} \langle f(t) \rangle &= 0 \\ \langle f(t)f(t') \rangle &= 2m_{eff}\Gamma_0k_B T\delta(t-t') \end{aligned} \quad (3.4)$$

La première égalité indique qu'en moyenne la force est nulle, si on moyenne suffisamment longtemps on a des chocs dans toutes les directions et la résultante de toutes ces forces s'annule. La deuxième équation stipule que cette force n'a pas de corrélation temporelle, ce qui se passe à  $t$  et  $t'$  n'est pas lié. Si  $t = t'$  alors on trouve le moment d'ordre 2 qui diverge à cause de la distribution de Dirac. Le coefficient multiplicateur découle du théorème de fluctuation dissipation (en utilisant la transformée de Fourier). L'idée de la thermodynamique stochastique est d'introduire les notions de travail, de chaleur et d'énergie interne à partir de l'équation du mouvement (3.3). Pour cela on commence par

définir l'énergie interne du système qui est constitué d'un terme d'énergie potentielle et d'un terme d'énergie cinétique qu'on ne peut négliger car le système est sous amorti (nous sommes sous UHV et  $\Gamma_0 \ll \omega$ ). A partir de ce point nous noterons la masse effective  $m$  par simplicité.

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.5)$$

Le terme de gauche est l'énergie potentielle et celui de droite l'énergie cinétique. Cette énergie est une fonction d'état de  $x$ ,  $v$  et  $k$  (position, vitesse, raideur)(nous ne prenons pas en compte de variation de masse mais cela serait possible, voir la fin de la section 3.10.2.3). L'amplitude de vibration  $x(t)$  sera mesurée dans le référentiel tournant avec un détecteur synchrone. On définit donc :

$$x(t) = X(t)\cos(\omega t) - Y(t)\sin(\omega t) \quad (3.6)$$

avec  $X(t)$  et  $Y(t)$  deux fonctions dont la variation temporelle est lente par rapport au cosinus et au sinus (on négligera leur dérivée première)[15]. Le choix du signe apparaîtra en section 3.6. On peut dès lors écrire :

$$\begin{aligned} x^2(t) &= X^2(t)\cos^2(\omega t) + Y^2(t)\sin^2(\omega t) - 2X(t)Y(t)\cos(\omega t)\sin(\omega t) \\ v^2(t) &= \omega^2 X^2(t)\sin^2(\omega t) + \omega^2 Y^2(t)\cos^2(\omega t) + 2\omega^2 X(t)Y(t)\cos(\omega t)\sin(\omega t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Si l'on moyenne les équations (3.7) on obtient :

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \frac{1}{2} \langle X^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle Y^2 \rangle \\ \langle v^2 \rangle &= \frac{\omega^2}{2} \langle X^2 \rangle + \frac{\omega^2}{2} \langle Y^2 \rangle \\ &= \omega^2 \langle x^2 \rangle \end{aligned} \quad (3.8)$$

Avec (3.5) on peut réécrire l'équation (3.3) :

$$m\ddot{x} + m\Gamma_0\dot{x} + \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{(v,k)} = f(t) \quad (3.9)$$

On va maintenant définir la chaleur dans un premier temps. Pour bien visualiser les échanges énergétiques on a besoin de définir trois ensembles.

- Le système : c'est notre nanofil vibrant. Son état est défini par un point  $(x, p = mv)$  dans l'espace des phases.
- L'environnement thermique : c'est le bain auquel notre système est connecté. L'énergie échangée avec ce bain est par définition de la chaleur. Ce sous ensemble n'est caractérisé que par sa température  $T$  et il est immuable. Toute interaction avec le système est suivie d'un retour instantané à l'équilibre thermodynamique. Le coefficient de friction  $\Gamma_0$  ainsi que la température  $T$  caractérisent son interaction avec le système et donc l'importance de la force de Langevin  $f(t)$
- Le système externe : il s'agit d'un agent extérieur capable de contrôler l'énergie potentielle du système via un paramètre, ici  $k$  la constante de raideur du système. On spécifie externe car l'évolution du paramètre  $k$  n'est pas régie par l'équation (3.3).

### 3.3. THÉORIE DE LA THERMODYNAMIQUE STOCHASTIQUE

Soit un déplacement  $dx$  de notre oscillateur sur une durée  $dt$ . La variation infinitésimale d'énergie du système causée par son interaction avec l'environnement thermique est alors le produit entre la force appliquée par l'environnement thermique sur le système et le déplacement :

$$\delta Q = (-m\Gamma_0\dot{x} + f(t)) \circ dx \quad (3.10)$$

Le symbole  $\circ$  dénote un produit de Stratonovich qui permet de conserver les règles du calcul différentiel pour des grandeurs fluctuantes (voir annexe C)[16]. Si cette énergie est positive alors elle est fournie au système par l'environnement thermique, ce qui est une chaleur par définition (un transfert désordonné d'énergie cinétique par chocs aléatoires). Grâce à l'équation (3.3) en utilisant  $p = mv$  alors on peut remplacer (3.10) par :

$$\delta Q = \left( \frac{dp}{dt} + \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{(p,k)} \right) \circ dx \quad (3.11)$$

Pour définir le travail nous remodelons cette équation. D'une part :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} \circ dx &= \frac{dp}{dx} \frac{dx}{dt} \circ dx \\ &= \frac{p}{m} \circ dp \end{aligned} \quad (3.12)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{(p,k)} \circ dx &= dU(x, p, k) - \frac{\partial U}{\partial p} \Big|_{(x,k)} \circ dp - \frac{\partial U}{\partial k} \Big|_{(x,p)} \circ dk \\ &= dU(x, p, k) - \frac{p}{m} \circ dp - \frac{\partial U}{\partial k} \Big|_{(x,p)} \circ dk \end{aligned} \quad (3.13)$$

En injectant (3.12) et (3.13) dans (3.11) alors on trouve :

$$dU = \delta Q + \frac{\partial U}{\partial k} \Big|_{(x,p)} \circ dk \quad (3.14)$$

Cette équation n'est autre que le premier principe de la thermodynamique. Par identification le terme de droite dans le second membre est donc le travail.

$$\delta W = \frac{\partial U}{\partial k} \Big|_{(x,p)} \circ dk \quad (3.15)$$

En remplaçant les dérivées par leurs valeurs et en moyennant les équations (3.11) et (3.15) afin de pouvoir utiliser l'équation (3.8) on trouve :

$$\begin{aligned} \langle \delta W \rangle &= \frac{1}{2} \langle x^2 \rangle \circ dk \\ \langle \delta Q \rangle &= \frac{1}{2} m \circ d[\omega^2 \langle x^2 \rangle] + \frac{1}{2} k \circ d \langle x^2 \rangle \end{aligned} \quad (3.16)$$

### 3.3.2 Transformations thermodynamiques

Comme nous l'avons vu dans la section 3.2 pour construire une machine thermique de Carnot nous avons besoin de transformations isothermes et adiabatiques. Nous nous intéressons dans la suite au calcul du travail et de la chaleur pour de telles transformations.

#### 3.3.2.1 Transformation isotherme

Nous rappelons l'équipartition de l'énergie pour notre oscillateur  $k_B T = k \langle x^2 \rangle = m\omega^2 \langle x^2 \rangle$  qui lie nos paramètres, avec ici une température constante sur l'ensemble de la transformation. En utilisant l'équipartition dans l'équation (3.16) on trouve en moyenne pour chaque variation infinitésimale de  $k$  une quantité de travail associée :

$$\langle \delta W \rangle = \frac{1}{2} \frac{k_B T}{k} \circ dk \quad (3.17)$$

Pour obtenir le travail total sur la branche on intègre sur toute la transformation :

$$\begin{aligned} \langle W \rangle &= \frac{1}{2} \int \frac{k_B T}{k} \circ dk \\ &= k_B T \ln \left( \frac{\omega_f}{\omega_i} \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Avec  $\omega_i$  la pulsation avant la transformation et  $\omega_f$  la pulsation après. On fait de même pour la chaleur, cependant on peut remarquer que dans l'équation (3.16) le premier terme pour le travail en  $d(\omega^2 \langle x^2 \rangle)$  est nul car cette grandeur est constante sur une branche isotherme. Il ne reste donc que le terme de droite à intégrer.

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &= \frac{1}{2} \int k \circ d \langle x^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{k_B T}{\langle x^2 \rangle} \circ d \langle x^2 \rangle \\ &= -k_B T \ln \left( \frac{\omega_f}{\omega_i} \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Finalement on trouve  $\langle Q \rangle = -\langle W \rangle$  ce qui est le résultat attendu pour une branche isotherme.

#### 3.3.2.2 Transformation adiabatique

Pour ce type de transformation on doit garder le volume de l'espace des phases exploré par le système constant [17, 18]. Pour un gaz parfait la condition adiabatique est donnée par la loi de Laplace  $PV^\gamma = cst$  ou encore  $P^{\gamma-1}/T^\gamma = cst$  avec  $\gamma = C_p/C_v$ .  $C_p$  et  $C_v$  sont respectivement les capacités thermiques isobares et isochores. Pour un gaz parfait monoatomique on a  $C_v = nR/2$  et  $C_p = C_v + R$  avec  $n$  le nombre de degrés de liberté et  $R$  la constante des gaz parfaits.

Mécaniquement nous avons vu que nous traitons notre nanofil comme un oscillateur harmonique amorti du second ordre soumis à une force stochastique. Notre système a donc deux degrés de liberté ce qui nous donne  $C_v = R$ ,  $C_p = 2R$  et  $\gamma = 2$ . La transformation adiabatique doit donc vérifier  $P/T^2 = cst \leftrightarrow k/T^2 = cst$ . Nous avons raisonné par analogie il est évidemment possible de faire une démonstration rigoureuse [19]. Il convient de noter qu'à

cause de la nature de notre système une transformation ne peut être adiabatique à cause des transferts thermiques inévitables entre un système microscopique et son environnement. Une trajectoire unique ne sera donc jamais adiabatique. En revanche la condition que nous avons décrite permet de satisfaire à la condition de microadiabaticité : en moyennant sur un grand nombre de trajectoires l'échange thermique entre le système et l'environnement sera nul.

Pour une transformation on a donc à tout instant pour la raideur et la température :

$$T = \sqrt{\frac{k}{k_i}} T_i \quad (3.20)$$

Ou on a déduit la constante à partir de l'état initial  $i$  de la transformation. En reprenant l'équation (3.16), en passant à l'intégrale, en utilisant l'équipartition de l'énergie et en injectant l'équation précédente on a :

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &= \frac{1}{2} \int d(k_B T) + \frac{1}{2} \int k \circ d\left(\frac{k_B T}{k}\right) \\ &= \frac{k_B T_0}{2\sqrt{k_i}} \int d\sqrt{k} + \frac{k_B T_0}{2\sqrt{k_i}} \int k \circ d\left(\frac{\sqrt{k}}{k}\right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

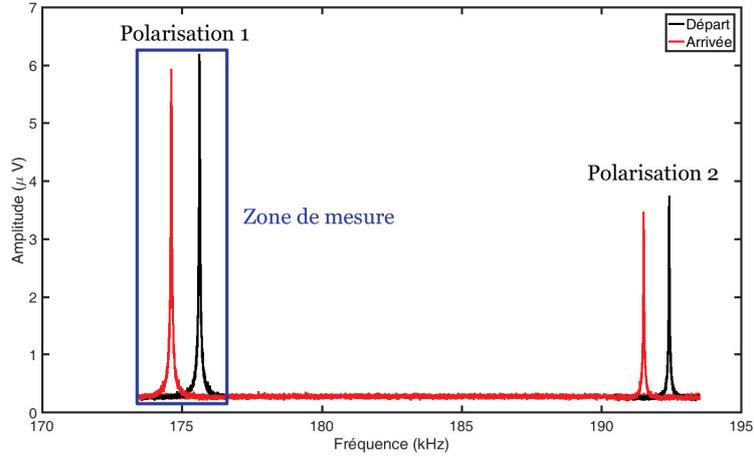
On retrouve bien que la chaleur échangée est nulle pour une transformation adiabatique. On fait de même pour le travail :

$$\begin{aligned} \langle W \rangle &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{k_B T}{k}\right) \circ dk \\ &= \frac{k_B T_i}{2\sqrt{k_i}} \int \left(\frac{\sqrt{k}}{k}\right) \circ dk \\ &= k_B T_i \left(\frac{\omega_f}{\omega_i} - 1\right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

### 3.4 Fabrication des échantillons

Avant toute chose nous avons besoin d'un échantillon adapté à nos besoins. Nous choisissons d'utiliser des nanofils en carbure de silicium (SiC) pour leurs propriétés mécaniques [20, 21, 22] et leur facilité d'accès [23]. Cependant nous avons deux problèmes potentiels avec ce matériau. Premièrement il s'agit d'un matériau résistif, donc en appliquant une tension pour modifier la fréquence de résonance nous risquons d'introduire une dissipation électrostatique qui va parasiter notre signal. Ensuite, nous souhaitons mesurer une seule des deux polarisations mécaniques<sup>2</sup> car nous avons besoin de mesurer des évolutions de signal de résonance en fonction de tensions  $AC$  ou  $DC$  appliquées qui vont modifier la température effective et/ou la fréquence de résonance (en pratique nous mesurons la variance d'un signal dont la fréquence évolue). Or ces effets dépendent de la capacité que l'échantillon forme avec son environnement ainsi que de ses dérivées spatiales. Ces valeurs

2. La vibration d'un cylindre encastré-libre peut se décomposer dans une base avec deux directions privilégiées orthogonales. Si la symétrie est parfaite la fréquence associée à ces deux directions est la même. Une asymétrie de l'objet induit un écart de fréquence. Ces deux directions privilégiées associées chacune à une fréquence différente sont ce qu'on appelle les polarisations mécaniques [24].



**Figure 3.2** – Mesure des deux polarisations mécaniques entre le point de départ et le point d’arrivée de la mesure. La fréquence de résonance et le signal de chacun des pics a évolué à cause de l’application de tensions sur l’échantillon. L’effet des tensions n’étant pas le même pour chacune des polarisations on ne souhaite en mesurer qu’une. On définit une zone de mesure fixe de  $3kHz$  qui contient une des deux polarisations et ses variations de fréquence pendant la mesure. On a intérêt à écarter les deux polarisations afin que la polarisation non mesurée n’empiète pas sur notre zone de mesure quand sa fréquence change.

sont à priori différentes pour les deux polarisations car l’environnement électrostatique est complexe. Nous avons une électrode, une contre électrode mais également des lentilles qui perturbent le champ électrique à proximité. Il est donc dans notre intérêt de séparer les polarisations au maximum en fréquence (donc d’accentuer la dissymétrie du nanofil) pour être capable au maximum de distinguer les signaux issus des deux polarisations. La figure 3.2 illustre le déplacement en fréquence de notre signal et la nécessité de bien séparer les polarisations. Pour réaliser cela nous effectuons un dépôt GIS (Gas Injection System) sous MEB (Microscope Electronique à Balayage) de platine sur le nanofil en SiC.

### 3.4.1 Perturbation de la fréquence de résonance

Nous étudions l’effet d’un ajout de matière sur la fréquence de résonance d’un oscillateur pour essayer d’optimiser l’effet de notre dépôt [25]. Pour cela nous revenons à des notions de mécanique continue évoquées dans la section 2.4.1. Nous rappelons l’équation du mouvement :

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (3.23)$$

En normalisant les temps par  $\sqrt{EI/(\mu L^4)}$  et les distances par  $L$  (longueur du nanofil) et en cherchant des solutions sous la forme  $y(x, t) = Y(x) \exp(j\omega t)$  on a :

$$Y'''' - \kappa^2 Y'' = \omega^2 Y \quad (3.24)$$

Avec  $\kappa = \sqrt{TL^2/(EI)}$ . Nous avons vu que pour cette équation on peut calculer les  $\omega_n$  du système et les déformées  $Y_n(x)$  associées pour les différents modes. Pour voir ce qu’une

perturbation va changer dans ces solutions nous appliquons un équivalent de la théorie des perturbations en physique quantique [26]. On définit alors un produit scalaire :

$$\langle Y_n | Y_m \rangle = \int_0^1 Y_n Y_m dx \quad (3.25)$$

Nous définissons un opérateur  $H = \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  ainsi que son action sur les fonctions de l'espace :

$$\langle Y_n | H | Y_m \rangle = \int_0^1 Y_n \left[ \frac{\partial^4 Y_m}{\partial x^4} - \kappa^2 \frac{\partial^2 Y_m}{\partial x^2} \right] dx \quad (3.26)$$

Dans l'espace des fonctions qui respectent les conditions de bord d'un oscillateur encasté libre que nous avons décrit dans le chapitre 2 cet opérateur est hermitien (ou auto-adjoint) ce qui implique que  $\langle Y_n | H | Y_m \rangle = \langle Y_m | H | Y_n \rangle$  et  $\langle Y_n | Y_m \rangle = \delta_{n,m}$ . Supposons une perturbation de notre opérateur  $\lambda$  qui va impliquer un changement de pulsation  $\omega_n^2 + \delta(\omega_n^2)$  et de déformée  $|Y_n\rangle + |\delta Y_n\rangle$ .

$$(H + \lambda)(|Y_n\rangle + |\delta Y_n\rangle) = (\omega_n^2 + \delta(\omega_n^2))(|Y_n\rangle + |\delta Y_n\rangle) \quad (3.27)$$

Au premier ordre en perturbation cela nous donne :

$$\begin{aligned} H |\delta Y_n\rangle + \lambda |Y_n\rangle &= \omega_n^2 |\delta Y_n\rangle + \delta(\omega_n^2) |Y_n\rangle \\ (H - \omega_n^2) |\delta Y_n\rangle + \lambda |Y_n\rangle &= \delta(\omega_n^2) |Y_n\rangle \end{aligned} \quad (3.28)$$

On suppose que la perturbation ne fait pas sortir la nouvelle déformée de l'espace initial des solutions, soit :

$$\begin{aligned} \langle Y_n + \delta Y_n | Y_n + \delta Y_n \rangle &= 1 \\ \langle Y_n | Y_n \rangle + \langle Y_n | \delta Y_n \rangle + \langle \delta Y_n | Y_n \rangle + \langle \delta Y_n | \delta Y_n \rangle &= 1 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Dans le membre de gauche le premier terme est unitaire par définition du produit scalaire et le dernier terme est négligeable car d'ordre 2. On a alors :

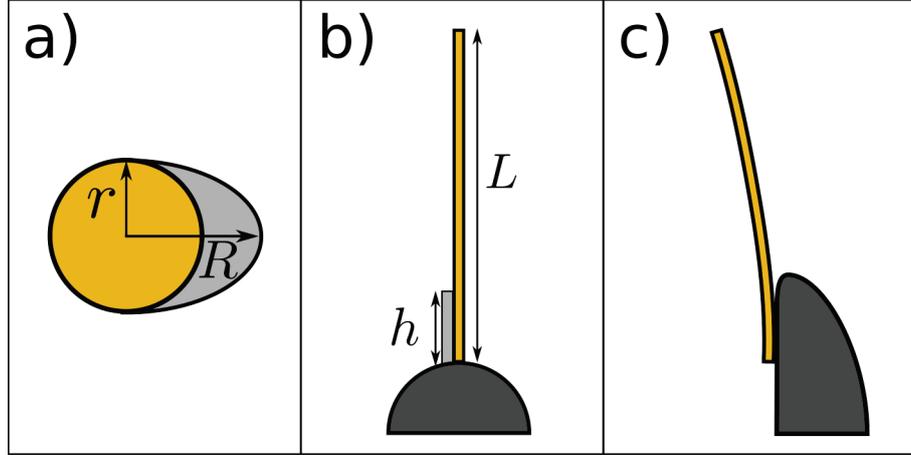
$$\langle Y_n | \delta Y_n \rangle = -\langle \delta Y_n | Y_n \rangle = 0 \quad (3.30)$$

Car le produit scalaire est symétrique. En multipliant l'équation (3.28) par  $\langle Y_n |$  et en utilisant le résultat de (3.30) on obtient :

$$\langle Y_n | \lambda | Y_n \rangle = \delta(\omega_n^2) \quad (3.31)$$

Considérons maintenant un nanofil parfaitement circulaire de rayon  $r$ . On réalise ensuite un dépôt quasi demi elliptique avec un demi petit axe  $r$  et un demi grand axe  $R$ . Le dépôt est fait sur une longueur  $h$  de la longueur totale  $L$  du fil (voir figure 3.3). Le dépôt ne va pas perturber le terme de traction en  $T$ , on ne considère donc qu'une variation du premier terme de l'hamiltonien (issu du terme  $EI\partial^4/\partial x^4$ ). Soit  $\lambda_a$  la perturbation de l'hamiltonien pour la vibration selon l'axe rapide (selon le demi grand axe  $R$ )<sup>3</sup>.

3. Pour un cylindre de rayon  $D$  on a  $I = \pi D^4/64$  donc  $I/S = D^2/16$ . La fréquence vaut  $f = \beta^2/(2\pi L^2)\sqrt{EI/(\rho S)} = R\beta^2/(4\pi L^2)\sqrt{E/\rho}$ . La fréquence dans l'axe avec le plus grand rayon est la plus élevée, on parle donc d'axe rapide



**Figure 3.3** – Diverses représentations du nanofil. **a)** : Vue en coupe du nanofil (jaune) idéalement symétrique de rayon  $r$  et de son dépôt (gris). On considère en première approximation qu'après le dépôt on a une demi ellipse dans la direction du dépôt dont le demi grand axe est  $R$ , dans la direction normale à l'axe du dépôt l'épaisseur n'a pas changée et le demi petit axe est  $r$ . **b)** Vision idéalisée de l'ancrage du nanofil sur la pointe et du dépôt sur une hauteur  $h$  à partir de la base du nanofil. **c)** Vision plus réaliste de l'ancrage.

$$\lambda_a = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{E_a I_a}{EI} \theta(h-x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \quad (3.32)$$

Ou  $E$  et  $E_a$  sont les modules d'Young avant et après dépôt,  $I$  et  $I_a$  les moments d'inertie d'ordre 2 avant et après le dépôt,  $\theta$  la fonction Heaviside. Nous avons pris le ratio des  $EI$  car l'opérateur  $H$  faisant intervenir le terme en  $\partial^4/\partial x^4$  qui est perturbé a été obtenu par normalisation en divisant par  $EI$ . De façon équivalente selon l'axe lent (dans la direction de demi petit axe  $r$ ) :

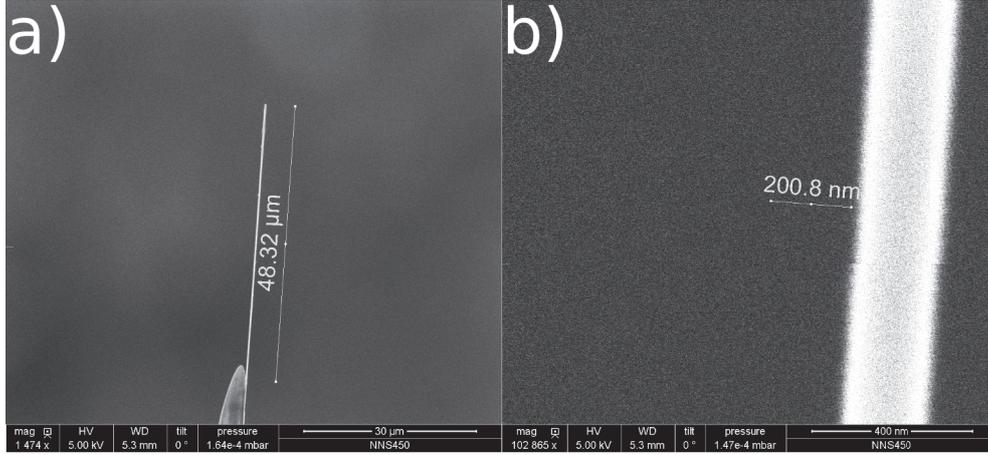
$$\lambda_b = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{E_b I_b}{EI} \theta(h-x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \quad (3.33)$$

La géométrie du problème nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{I_a}{I} &= \frac{R}{r} \\ \frac{I_b}{I} &= \frac{R^3}{r^3} \end{aligned} \quad (3.34)$$

On va considérer que le dépôt change peu le module d'Young en première approximation, soit  $E_1 \sim E_2 \sim E$ . Dans la situation symétrique les deux polarisations ont la même fréquence de résonance fondamentale  $\omega_1$ . On peut écrire au premier ordre en  $(\delta\omega_n)^2$  :  $\omega_n^2 + \delta(\omega_n^2) = (\omega_n + \delta\omega_n)^2 = \omega_n^2 + 2\omega_n\delta\omega_n$ . On va considérer que la tension est nulle donc  $\kappa = 0$  et dans ce cas la forme du fil est  $Y_1$  et nous pouvons l'obtenir à partir de l'équation (2.79) en prenant  $\alpha = 0$  et  $k = q = \beta_1 = 1,8751$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \delta(\omega_{1,a}^2) &= \langle Y_1 | \lambda_a | Y_1 \rangle = 2\omega_1 \delta\omega_{1,a} \\ \delta(\omega_{1,b}^2) &= \langle Y_1 | \lambda_b | Y_1 \rangle = 2\omega_1 \delta\omega_{1,b} \end{aligned} \quad (3.35)$$



**Figure 3.4** – Images MEB du nanofil de SiC collé sur une pointe de tungstène avant le dépôt. Le système utilisé pour l'imagerie est un MEB FEI Nova NanoSEM 450. **a)** : mesure de la longueur du nanofil  $L = 48,32\mu m$ . **b)** : mesure du diamètre du nanofil  $D = 200,8nm$ .

On souhaite exprimer l'écartement relatif en fréquence dû au dépôt. On calcule donc la quantité :

$$\frac{\delta\omega_{1,a} - \delta\omega_{1,b}}{\omega_1} = \frac{\langle Y_1 | \lambda_a | Y_1 \rangle - \langle Y_1 | \lambda_b | Y_1 \rangle}{2\omega_1^2} \quad (3.36)$$

$$\langle Y_1 | \lambda_a | Y_1 \rangle = \int_0^1 Y_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{I_a}{I} \theta(h-x) \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2} \right] dx$$

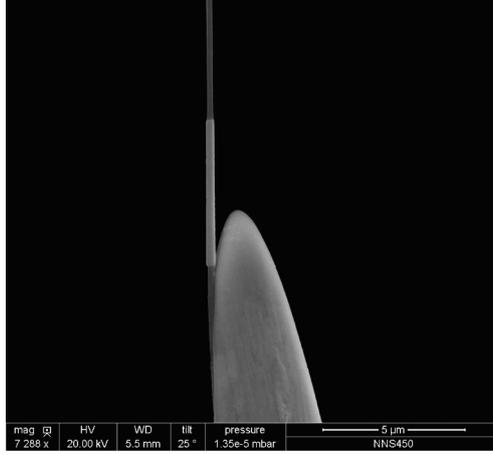
Par intégration par parties en utilisant les conditions de bord on montre que :

$$\frac{\delta\omega_{1,a} - \delta\omega_{1,b}}{\omega_1} = \frac{1}{2\omega_1^2} \int_0^{h/L} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2} \frac{R(R^2 - r^2)}{r^3} dx \quad (3.37)$$

### 3.4.2 Réalisation expérimentale

Nous pouvons à présent estimer le dépôt nécessaire à la modification de l'écartement en fréquence. Pour cela nous commençons par réaliser des mesures de dimension grâce à un passage de l'échantillon dans un MEB. Les images obtenues présentées en figure 3.4 permettent d'obtenir la longueur  $L$  et le diamètre  $D$  du nanofil. L'échantillon consiste en un nanofil de SiC collé sur une pointe en tungstène grâce à une colle à base de scotch carbone. Le collage des nanotubes est réalisé grâce à des micro-manipulateurs sous microscope optique. Le tungstène a été préalablement taillé en pointe avec une méthode similaire à celle décrite dans le chapitre 2.

A partir des dimensions du nanofil et de ses propriétés physiques nous souhaitons estimer quel dépôt il nous faut avoir pour écarter les polarisations d'au moins  $10kHz$  sachant que typiquement pour les échantillons de SiC que nous avons l'écartement des polarisations va de  $100Hz$  à quelques centaines de  $Hz$ . Nous prenons  $E = 450GPa$ ,  $\rho_{fil} = 3,21.10^3 kg/m^3$ ,  $\rho_{dépôt} = 21,45.10^3 kg/m^3$  (ce qui correspond à du platine). Nous considérons un dépôt sur une hauteur de  $5\mu m$  et un épaissement de  $1/10$ ème du rayon initial. Nous avons donc



**Figure 3.5** – Image MEB de l'échantillon après un dépôt de platine. La longueur mesurée du dépôt est de  $5,122\mu m$ .

$r = D/2$  et  $R = D/2 + D/20$ . Pour le premier mode on a  $\beta_1 = 1,8751$  et  $\omega_0 = \beta_1^2$ . Pour le fil on considère un cylindre de diamètre  $D$  et donc la masse est :

$$m_{fil} = \rho_{fil} \frac{\pi D^2}{4} L \quad (3.38)$$

Pour le dépôt on considère la surface de la demi ellipse moins la surface du demi-cercle correspondant au fil. La masse est donc :

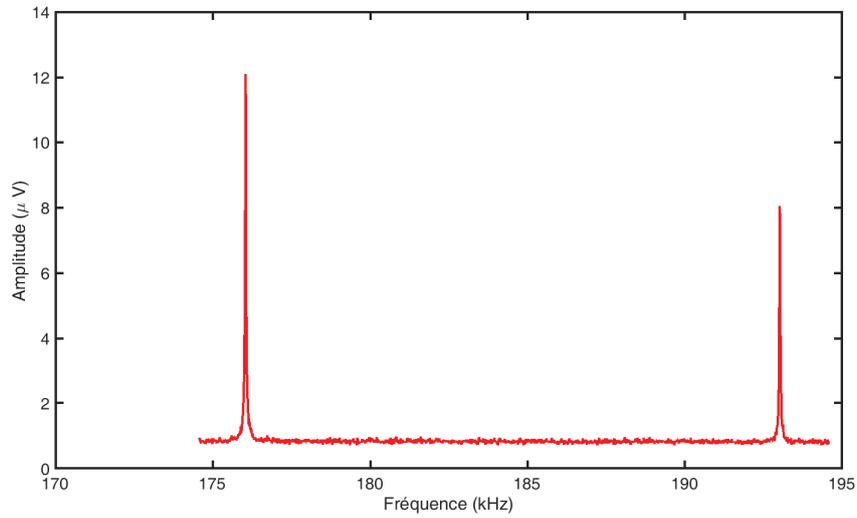
$$m_{dépôt} = \frac{1}{2} \rho_{dépôt} \pi \left[ \frac{D}{2} \left( \frac{D}{2} + \frac{D}{20} \right) - \frac{D^2}{4} \right] h \quad (3.39)$$

On évalue alors pour la fréquence de résonance avant le dépôt :

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{\beta_1^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho_{fil} S}} \\ &= 142,453 kHz \end{aligned} \quad (3.40)$$

Nous évaluons un écartement en fréquence de  $20,697kHz$  suite au dépôt de  $0,17fg$  de platine sur un nanofil pesant  $4,91fg$ . Cette estimation est loin d'être parfaite car la géométrie a été grandement simplifiée. En comparant les images b) et c) de la figure 3.3 nous pouvons voir les différences entre la géométrie à l'ancrage que nous avons considéré et une représentation un peu plus fidèle de la façon dont le fil est collé sur la pointe. Cependant elle nous donne une bonne idée des ordres de grandeur et laisse supposer que la réalisation est possible : la masse à déposer sur 10% de la longueur du fil est un ordre de grandeur en dessous de la masse propre du fil.

Le dépôt est réalisé dans le MEB qui a servi à l'imagerie sur la figure 3.4. L'échantillon que nous avons inséré n'est pas symétrique et les polarisations sont déjà séparées en fréquence. L'idée est d'élargir l'échantillon dans son axe le plus épais pour aller dans le même sens que notre cas théorique. Nous disposons d'un moteur piezo-électriques monté sur le



**Figure 3.6** – Mesure simultanée des deux polarisations de l'échantillon. Après deux ans et plusieurs recuits, sous une tension de  $450V$ , la séparation des fréquences est alors de  $16,977kHz$ .

porte échantillon pour exciter les résonances du nanofil et nous les observons donc en temps réel grâce au faisceau d'électrons secondaires collectés sur le SED (Secondary Electron Detector). Afin d'orienter le dépôt nous utilisons l'inclinaison de la platine du MEB. Si une direction de vibration est orientée dans le même axe que le faisceau d'électrons arrivant sur le SED alors on ne voit plus cette vibration. Nous inclinons donc la platine jusqu'à ce que la polarisation haute fréquence (associée à la direction la plus épaisse) disparaisse. L'injecteur de GIS est orienté dans le même axe que le faisceau électronique et notre zone de dépôt est alors la bonne.

Le dépôt se fait en deux temps. Nous faisons d'abord un dépôt de 5 minutes sur toute la longueur du fil pour le métalliser et diminuer sa résistance afin de réduire les effets d'amortissement électrostatique. Les paramètres utilisés pour le MEB sont une taille de faisceau de 5 (soit un courant de faisceau d'environ  $1nA$  pour une ouverture de  $30\mu m$ ), une tension d'accélération de  $20kV$  et une vitesse de balayage de  $60\mu s$ . Le deuxième dépôt se fait seulement vers la base du fil sur une zone d'environ  $5\mu m$  avec les mêmes paramètres pendant 5 minutes. Le résultat obtenu est montré en figure 3.5.

Suite à ce dépôt et un recuit de l'échantillon nous mesurons les deux polarisations à  $134,214kHz$  et  $155,858kHz$  soit un écartement de  $21,644kHz$ , ce qui correspond aux attentes. La figure 3.6 présente une mesure des deux polarisations de l'échantillon deux ans après sa confection, il a alors été recuit plusieurs fois. De plus lors de cette mesure il est soumis à une tension de  $450V$ , ce qui nous permet d'être dans un régime de tuning linéaire (voir section 2.4.1.3).

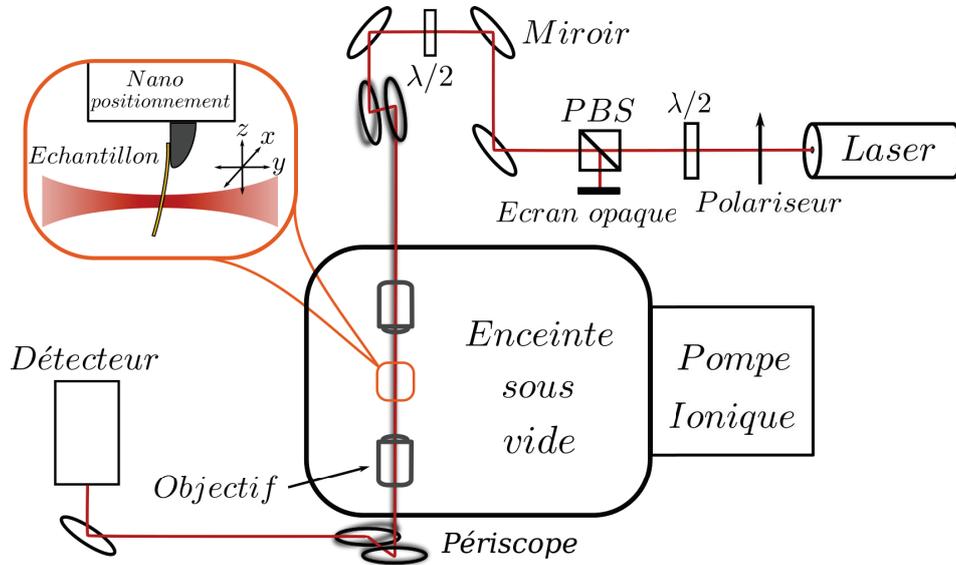
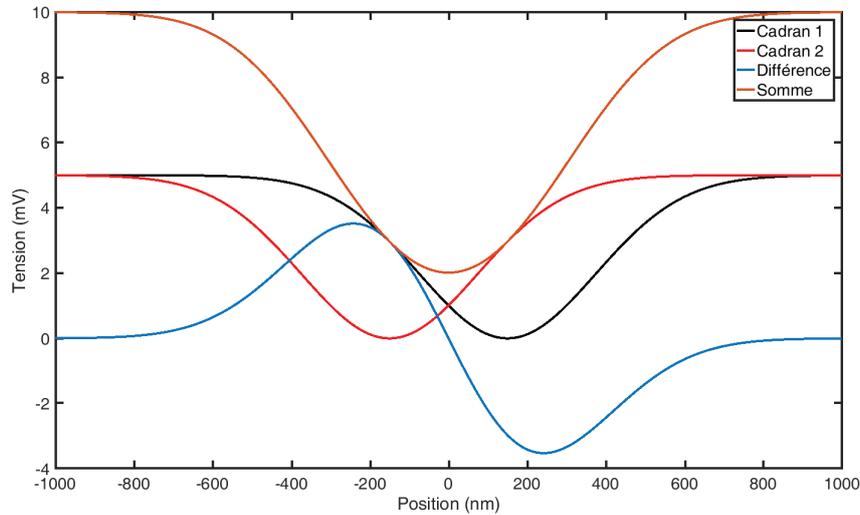


Figure 3.7 – Représentation schématique des divers éléments composant notre ligne optique.

## 3.5 Dispositif expérimental

### 3.5.1 Détection optique

La figure 3.7 présente le système expérimental que nous utilisons. Notre échantillon est placé dans une enceinte sous vide dynamique (typiquement  $10^{-9}$  Torr) entretenu par une pompe ionique. Les vibrations sont mesurées grâce à un système de détection optique. La source est un laser stabilisé Hélium-Néon (Thorlabs HRS015,  $633nm$ ). Nous plaçons ensuite un polariseur pour assurer une polarisation rectiligne de la lumière. Une lame  $\lambda/2$  nous permet de faire tourner la polarisation par rapport à l'orientation fixée par le polariseur. Elle est située devant un cube séparateur polarisant (CM1 PBS251, PBS sur la figure) qui va séparer notre faisceau en deux rayons avec des polarisations rectilignes perpendiculaires. La lame  $\lambda/2$  nous permet en fait de régler l'intensité laser injectée dans l'enceinte sous vide en changeant l'orientation de la polarisation par rapport aux directions privilégiées du PBS (on récupère la projection de la polarisation en entrée du cube sur une des deux directions). Une seconde lame  $\lambda/2$  nous permet éventuellement de changer l'orientation de la polarisation avant l'interaction avec l'échantillon. Le laser est focalisé dans l'enceinte sous vide grâce à une lentille convergente. L'échantillon sera placé dans le waist du laser pour réaliser les mesures. Le nano-positionnement se fait avec des moteurs Attocube reliés à un contrôleur ECC100. Ensuite le faisceau est collecté par une seconde lentille et dirigé dans un détecteur dont nous allons détailler l'utilité. Le détecteur est composé d'une photodiode 4 cadrans regroupés pour former deux cadrans séparés verticalement. Lorsque le laser est focalisé sur l'échantillon et que celui-ci vibre, les variations d'intensité lumineuse sur les deux cadrans sont transformées en tension par le boîtier de détection et utilisées pour les mesures. Le filtrage des tensions permet de récupérer à la fois les signaux haute fréquence (HF) et basse fréquence (BF) sur les cadrans.



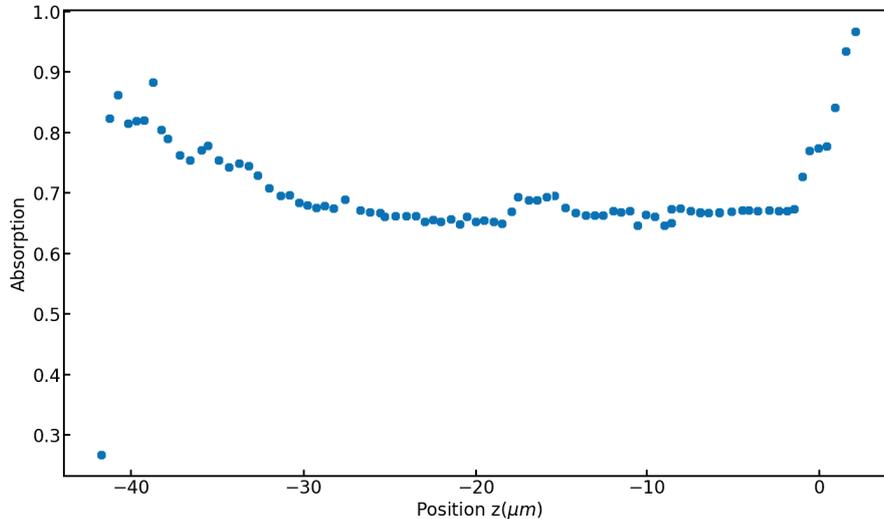
**Figure 3.8** – Tracé des variations typiques de signal BF en sortie du boîtier de mesure en fonction de la position de l'échantillon dans le laser.

### 3.5.2 Mesures basse fréquence

Pour placer l'échantillon dans le faisceau laser on utilise les signaux basse fréquence à savoir la somme et la différence des signaux sur les deux cadrans. Les variations typiques de signal lorsque le laser est centré sur la photodiode et que l'échantillon traverse le waist sont présentées en figure 3.8. On peut y voir que le passage devant chacun des cadrans entraîne une diminution de signal car l'échantillon obstrue le faisceau. Si l'on regarde la somme des signaux on peut voir qu'il existe un minimum de transmission associé à une zone de variation linéaire du signal de différence. Ce point est celui où l'échantillon est bien centré dans le waist. Il s'agit d'un point de fonctionnement assez facile à trouver. Il est possible de choisir une autre position mais il faut toujours être sûr d'avoir une transduction constante entre la position et la tension sur le signal de différence (car on utilise la différence pour le signal HF). On a ainsi une relation linéaire entre la tension et l'amplitude de vibration avec le point de fonctionnement choisi.

Typiquement nous utilisons une puissance laser de  $1\mu W$  en injection (mesuré après la dernière lame  $\lambda/2$ ). Le réglage de l'alignement des miroirs permet de récupérer 70% de ce signal sur le boîtier de détection après passage par les lentilles (qui génèrent le plus de pertes), générant ainsi des tensions de l'ordre de  $10mV$  sur les voies basse fréquence. Le détail du circuit du boîtier est disponible dans la source [27]. Nous choisissons une puissance laser faible pour éviter au maximum que la mesure ne soit perturbative. En effet en absorbant la puissance laser l'échantillon s'échauffe et sa fréquence de résonance change. L'interaction avec le laser crée une force d'origine électromagnétique appelée pression de radiation [28] qui peut également modifier la fréquence de résonance. Plus la puissance est élevée et plus ces effets perturbatifs sont importants, nous cherchons donc à travailler à faible puissance pour être stable en fréquence sans trop sacrifier notre rapport signal sur bruit.

Finalement il nous faut choisir la position à laquelle nous allons focaliser le laser sur la nanofil : proche de l'extrémité ou proche de la base? L'extrémité présente l'avantage d'avoir les plus grandes amplitudes de vibration donc plus de signal. En revanche les effets

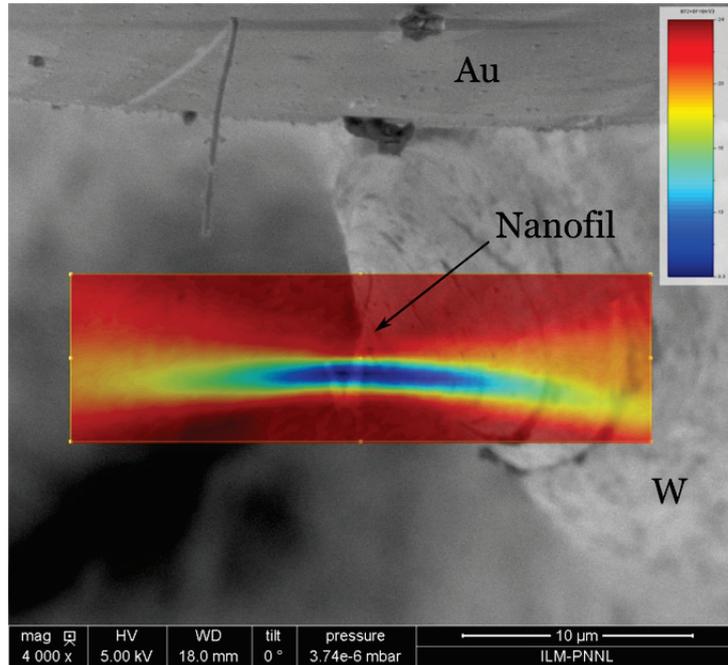


**Figure 3.9** – Profil d’absorption du fil. On mesure le signal de somme  $A_{0max}$  maximal sans le fil dans le laser puis le signal  $A_0$  avec le fil centré dans le waist et l’absorption est obtenue par  $(A_{0max} - A_0)/A_{0max}$ . La pointe est située vers  $z = 0$ .

de déflexion  $y$  seront d’autant plus visibles<sup>4</sup> et le chauffage par le laser  $y$  est aussi plus important. En effet nous sommes sous UHV donc les effets de convection sont négligeables. Il reste donc la radiation qui ne dépend pas de la position et la conduction qui elle en dépend. Quand le fil absorbe de la puissance laser il a tendance à s’échauffer. Une partie de cette chaleur va être évacuée par conduction dans la pointe. Plus le laser est focalisé proche de la base du fil et plus il sera facile d’évacuer cette chaleur dans la pointe (en étant tout de même limité par la résistance thermique de contact à l’ancrage) et donc moins la mesure sera perturbative. Pour améliorer la stabilité et ne pas être gênés par la déflexion nous choisissons donc de nous placer assez proches de la pointe. Pour conserver suffisamment de signal sans trop augmenter la puissance laser nous serons forcés de compenser en injectant plus de bruit électronique dans le fil. Pour choisir notre position le long du fil nous mesurons son profil d’absorption, de l’extrémité jusqu’à la pointe (la variable de position dans cette direction est nommée  $z$ ). Le résultat est présenté sur la figure 3.9.

On peut voir sur la gauche de la courbe le point où le fil commence à rentrer dans le faisceau mais n’est pas encore totalement dedans. L’absorption commence à augmenter mais reste bien plus faible que sur le reste du profil. À droite de la courbe l’absorption augmente rapidement et se rapproche de 1. Nous arrivons vers l’ancrage et la pointe qui est assez grosse pour obstruer totalement le faisceau. Sur la portion  $[-10\mu\text{m}, 0\mu\text{m}]$  on a une zone relativement plate. On va donc se placer vers  $-9\mu\text{m}$ , nous sommes suffisamment proches de l’ancrage pour que la déflexion ne soit plus gênante mais nous restons sur la partie la plus éloignée pour avoir le maximum de signal. Comme la transmission est stable sur au moins  $1\mu\text{m}$  de part et d’autre une dérive dans l’axe  $z$  devrait peu changer le signal.

4. En appliquant des tensions  $DC$  pour changer la fréquence de résonance on tire sur le fil selon un axe qu’on ne contrôle pas totalement à cause de l’environnement électrostatique complexe. On risque donc de changer la position d’équilibre du fil, donc de le défléchir.



**Figure 3.10** – Cartographie du profil spatial du laser basée sur l’absorption du fil. Réalisé grâce aux mesures BF du système de détection optique adapté pour un MEB. Au centre du waïst on distingue le nanofil et en dessous la pointe sur laquelle il est collé (vu par le haut). Sur le haut de l’image on voit une contre électrode qui est une boule d’or. On peut distinguer un fil qui date d’une expérience antérieure collé sur cette boule d’or en haut à gauche de l’image.

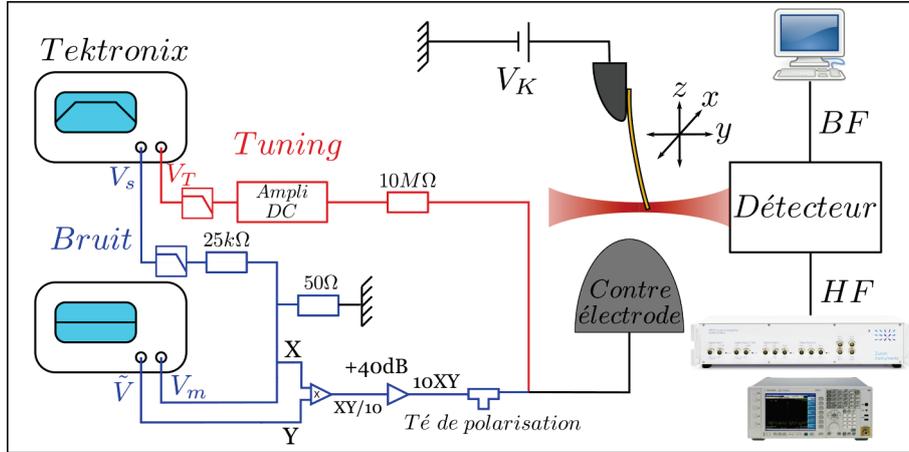
Pour finir avec ces mesures d’absorption on peut reconstituer le profil spatial du faisceau laser par cartographie. La figure 3.10 présente ce genre de mesure. Dans ce cas un boîtier similaire et un système optique compact (lentille+miroirs+moteurs) ont été placés dans un MEB avec le laser injecté par fibre optique. Le déplacement de l’échantillon dans un plan avec une mesure simultanée permet de reconstituer le profil du laser et de le superposer à une image MEB de l’échantillon (ici la géométrie est un peu différente, le fil est orienté apex vers le haut et non vers le bas comme jusqu’à présent). On arrive à observer directement le waïst du laser via la mesure de l’intensité lumineuse transmise par le fil.

### 3.5.3 Mesures haute fréquence

Pour effectuer nos mesures haute fréquence nous pouvons utiliser deux appareils en sortie du boîtier de détection : un analyseur de spectre Agilent MXA Signal Analyzer N9020A ou un détecteur synchrone Zurich Instruments HF2LI. La détection synchrone fera l’objet d’une section et nous détaillerons ici les mesures effectuées à l’analyseur de spectre et le détail des divers appareils servant à appliquer des tensions.

#### 3.5.3.1 Circuit électrique

Les divers éléments présents dans le circuit électrique ont été présentés sur la figure 3.11. On peut y voir d’abord l’échantillon sur lequel est branché un Keithley 6517B qui va nous servir de source de tension. L’échantillon est en permanence soumis à une tension  $V_K = 450V$ . Cela permet deux choses : la première est d’être dans un régime de tuning linéaire, ce qui va nous arranger pour nos transformations thermodynamiques. La seconde



**Figure 3.11** – Schématisation des divers éléments composant le circuit électrique utilisé pour les mesures. La partie en noir est la haute tension constante appliquée par le Keithley pour s’assurer un tuning linéaire sur la plage que nous explorons et pour saturer les phénomènes de déflexion et de rotation des polarisations. La partie en rouge gère les rampes de tension  $V_T$  pour la modification de la fréquence de résonance (tuning). La partie en bleu sert pour l’injection d’un bruit d’intensité variable. Dans cette branche nous avons le bruit en lui même  $\tilde{V}$  qui est constant. Il est multiplié par une tension DC  $V_m$  qui peut être modulée finement par l’addition d’une faible tension  $V_s$ . La multiplication de  $\tilde{V} \times (V_m + V_s)$  permet de créer une rampe de bruit analogique. Les branches bleue et rouge sont combinées dans un té BNC pour être appliquées sur la contre électrode en face de l’échantillon et appliquer capacitivement une force sur ceui-ci.

est que lorsqu’on applique des tensions, l’échantillon peut se défléchir à cause des forces électrostatiques. Le changement de position qui en découle induit un changement de signal qui perturbe les mesures. Également on peut voir apparaître des phénomènes de rotation des polarisations mécaniques (une torsion apparaît dans l’échantillon). Si les polarisations tournent l’interaction avec le faisceau laser change [29] et le signal est perturbé. Appliquer une forte tension en permanence permet de saturer la déflexion, en tendant à aligner le nanofil dans l’axe de la contre électrode, ainsi que la rotation des polarisations. Cet effet s’ajoute au fait que nous mesurons proche de la base du fil.

Le reste des signaux est appliqué directement sur la contre électrode située à  $250\mu\text{m}$  du waist et va induire des forces capacitives sur l’échantillon. Pour générer ces signaux nous utilisons deux Tektronix AFG 3052C. Celui du bas sur la figure génère des signaux d’amplitude constante et l’autre génère des rampes qui vont servir à la réalisation du cycle de Carnot.  $V_T$  est une tension appliquée pour changer la fréquence de résonance de l’échantillon (partie tuning en rouge sur la figure). Elle passe dans un amplificateur DC (Thorlabs MDT694B) avec un gain de  $15\text{V/V}$ . En pratique le Tektronix est prévu pour une impédance de  $50\Omega$  et l’impédance d’entrée de l’amplificateur DC est de  $10\text{k}\Omega$  on a donc un rapport de 30 en théorie et de 29,44 en pratique entre l’affichage du Tektronix et la sortie de l’amplificateur. On met ensuite une résistance de  $10\text{M}\Omega$  pour assurer que la charge sur l’amplificateur de tension DC soit suffisante. En effet il faut au moins  $R = 2,5\text{k}\Omega$  sinon la protection de court circuit va limiter la tension de sortie.

Le reste du circuit est dédié à l’injection de bruit électronique pour modifier la température effective du fil (partie bruit en bleu sur la figure). La tension  $\tilde{V}$  est un bruit blanc gaussien électronique généré directement par le Tektronix. Ce bruit est multiplié par une

tension  $DC$  dont la valeur peut changer afin de créer des rampes de bruit analogiques. Cela permet d'avoir des rampes plus rapides et plus lisses qu'avec une méthode numérique. En effet on aurait pu réaliser une rampe en modifiant directement la fonction de bruit du Tektronix via des commandes Labview, mais dans ce cas l'envoi des ordres prend un certain temps et la rampe obtenue est très digitalisée. Pour obtenir cette tension on a une composante constante  $V_m$  additionnée à une composante variable  $V_s$  qui passe d'abord par un pont diviseur de tension (facteur 1/500) afin de pouvoir appliquer précisément de faibles corrections. L'étape de multiplication se fait en fait en deux temps : on a en premier un multiplicateur avec un gain 1/10 à base d'un amplificateur opérationnel AD633JN. La division par 10 est intégrée au multiplicateur donc on ajoute un amplificateur avec un gain 100 pour pouvoir avoir plus de signal. Nous avons fait le choix d'un multiplicateur actif et non d'un mixer passif car cela permet d'avoir plus de signal. Le mixer avec lequel nous avons réalisé le test sature à  $50mW$  de puissance d'entrée ce qui nous donne environ  $10mV_{RMS}$  de bruit en sortie. Avec notre combinaison multiplicateur/amplificateur nous atteignons  $1,72V_{RMS}$  de bruit injecté (la limite étant maintenant fixée par la saturation de l'amplificateur). On intercale un té de polarisation avant la jonction avec la tension de tuning pour isoler la partie bruit du circuit des hautes tensions. Nous n'utilisons pas la connexion reliée à l'inductance car le té de polarisation ne supporte pas plus de  $30V$  sur sa borne  $DC$ , or nos tensions appliquées peuvent être supérieures à cette valeur.

On a également ajouté un filtre passe bas ( $DC-1,9MHz$ ) sur chacune des sorties du Tektronix qui gère les rampes car cela améliore la qualité du signal. Les deux voies de cet appareil sont synchronisées car cela est nécessaire pour réaliser une rampe adiabatique où la température varie en même temps que la pression (voir section 3.3.2.2). La sortie  $TTL$  est reliée au détecteur synchrone afin de pouvoir synchroniser l'acquisition de données avec le cycle thermodynamique et ainsi reconstituer chacune des quatre transformations. La liaison passe par un découpleur de masse car sinon on forme une boucle de masse qui perturbe la mesure, notamment en faisant apparaître du bruit  $50Hz$  issu du secteur.

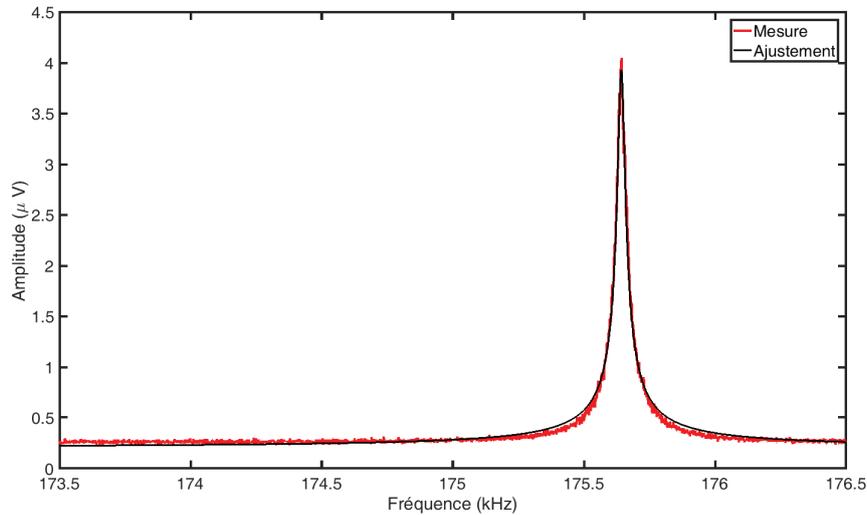
En sortie du boîtier de détection optique nous pouvons traiter les signaux HF avec un des deux appareils (analyseur de spectre ou détecteur synchrone) afin de mesurer les amplitudes de vibration.

### 3.5.3.2 Fréquence et largeur de la résonance

Le signal HF est envoyé dans l'analyseur de spectre et celui-ci nous renvoie la densité spectrale de puissance (PSD) grâce à une transformée de Fourier. Nous avons donc accès à la fonction de réponse fréquentielle de notre oscillateur qui n'est autre qu'une lorentzienne, comme pour les nanotubes de carbone dans le chapitre 2. Par une méthode d'ajustement similaire à celle de ce chapitre nous avons accès à diverses informations. Un spectre typique d'une des polarisations et son ajustement sont présentés en figure 3.12. Nous pouvons en déduire la fréquence de résonance et la largeur de la résonance (soit le facteur de qualité). Pour obtenir le signal de vibration on intègre la PSD mesurée en fonction de la fréquence en utilisant l'égalité de Parseval :

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (V^2(\omega) - V_b^2) d\omega} \quad (3.41)$$

On soustrait le bruit de fond  $V_b$  qui est le signal dans la partie plate du spectre. Les paramètres de spectre typiques sont une bande passante  $BW = 3kHz$  avec 3001 points soit une résolution  $RBW = 1Hz$  et un moyennage sur 100 spectres. Cela nous donne pour la



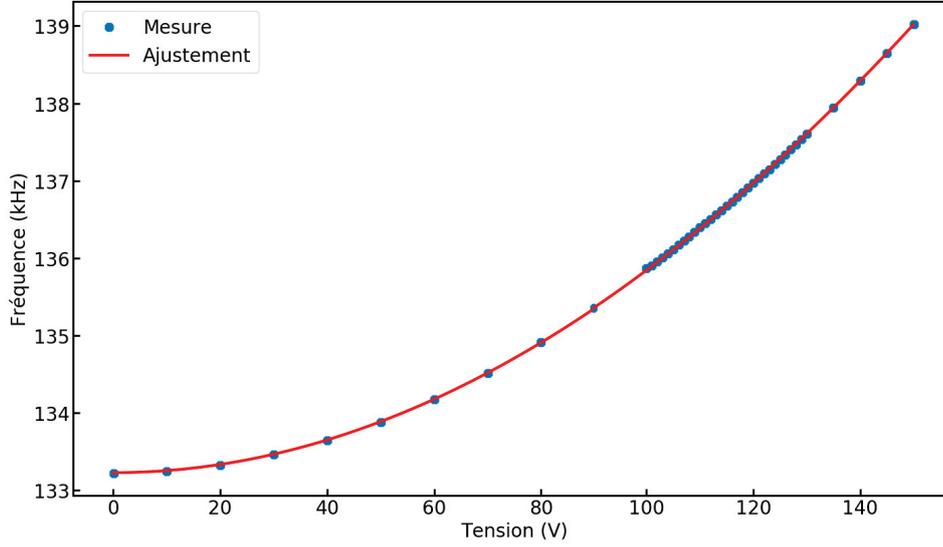
**Figure 3.12** – Mesure à l’analyseur de spectre d’une résonance thermomécanique de nanofil.

figure 3.12 une fréquence  $f_0 = 175,6436 \text{ kHz}$ <sup>5</sup>, une largeur  $\gamma = 28,91 \text{ Hz}$  et un signal de  $28 \mu\text{V}$  pour un bruit de fond de  $0,257 \mu\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$ , soit un rapport signal sur bruit de 1,99, ce qui est représentatif de ce que nous avons en général. Cette mesure a été prise avec  $1 \mu\text{W}$  de puissance laser, dans la zone de transmission plate présentée dans la section précédente, avec une tension  $V_K = 450 \text{ V}$  et du bruit électronique injecté ( $1,5 \tilde{V} \times (4,988 V_m + 0 V_s)$ ).

Avec ce moyen de mesurer la fréquence nous avons pu tracer la courbe de tuning de notre échantillon présentée en figure 3.13. Dans le cas de cette courbe la tension a été appliquée sur la contre électrode avec une tension nulle sur l’échantillon. Nous avons fait des spectres afin de mesurer la fréquence et la largeur de la résonance pour des tensions allant de 0 à 150V. Dans la suite nous avons changé de configuration pour appliquer la tension positive sur la pointe directement. L’effet sur la fréquence est à peu de choses près le même et nous ne risquons pas d’entrer en émission de champ. Le résultat en fréquence peut être ajusté avec un modèle à deux paramètres ( $f_0, V_c$ ) comme dans le chapitre 2 ce qui nous donne  $f_0 = 37890,9 \text{ Hz}$  et  $V_c = 307,45 \text{ V}$ . Nous ne sommes donc pas dans la région linéaire ou  $V > 10 V_c$  [30]. Cependant nous sommes suffisamment loin sur la courbe pour que sur les gammes de variation de fréquence que nous envisageons ( $\sim 1 \text{ kHz}$ ) la variation soit linéaire.

Pour chaque spectre on extrait également  $\gamma$  la largeur de la résonance afin de vérifier qu’elle ne change pas avec la tension, ce qui impliquerait une variation de dissipation appelée dissipation électrostatique [31]. Le résultat est présenté en figure 3.14. Nous pouvons voir que la largeur est constante sur toute la gamme de tension explorée, on peut donc considérer que la dissipation électrostatique a bien été supprimée par la métallisation de l’échantillon. Si ce n’était pas le cas on verrait une augmentation de la largeur avec la tension.

5. Pour rappel cette grandeur n’est pas la fréquence de résonance du mode fondamental mais un paramètre d’ajustement. Il s’agit de la fréquence du mode fondamental qui a été divisée par le  $\beta^2$  de ce même mode.



**Figure 3.13** – Mesure de la fréquence de résonance en fonction de la tension DC appliquée sur la contre électrode face à l'échantillon. La courbe est ajustée avec deux paramètres  $f_0$  la fréquence de résonance à tirage nul divisée par le  $\beta^2$  du mode, et  $V_c$  la tension caractéristique introduite en 2.4.1.3.

### 3.5.3.3 Effet de chauffage

Nous revenons dans cette section sur l'injection de bruit électronique et son effet de modification de la température effective. Pour cela nous repartons de l'équation du mouvement de l'oscillateur soumis à une force électrostatique en plus de la force thermique.

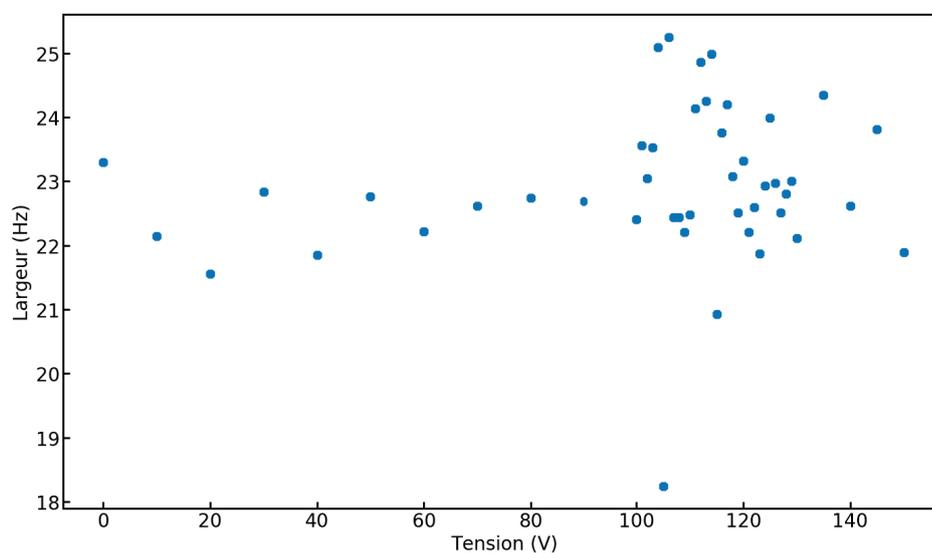
$$m\ddot{x} + m\Gamma_0\dot{x} + m\omega^2x = f_T + \frac{C'}{2}V^2 \quad (3.42)$$

Nous pouvons décomposer  $V$  en un terme DC et un terme AC soit  $V = V_{T,eff} + \tilde{V}_n$ .  $V_{T,eff}$  est la tension DC qui va gouverner le tuning. Ce potentiel est fonction de  $V_K$  et de  $V_T$  mais nous ne connaissons pas son expression car l'environnement électrostatique est complexe (pointe, contre électrode, lentilles...).  $\tilde{V}_n$  est le bruit blanc gaussien injecté dans l'échantillon. Il dépend de  $V_m$ ,  $\tilde{V}$  et  $V_s$ . Dans cette force nous avons le terme en  $V_{T,eff}^2$  qui est un terme constant qui va modifier la position d'équilibre de l'échantillon ; le terme  $\tilde{V}_n^2$  comprend aussi un terme constant qui va avoir ce même effet et des termes dont la fréquence est éloignée de la résonance et qui n'ont donc pas d'effet. La portion de  $\tilde{V}_n^2$  qui coïncide avec la résonance a une amplitude négligeable. Le terme dominant est  $V_{T,eff}\tilde{V}_n$ . Notre équation se résume donc à :

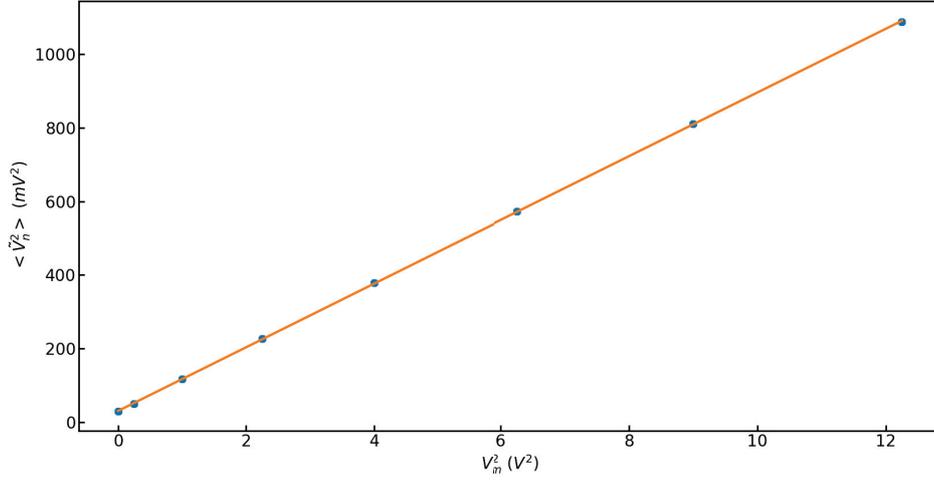
$$m\ddot{x} + m\Gamma_0\dot{x} + m\omega^2x = f_T + C'V_{T,eff}\tilde{V}_n \quad (3.43)$$

Le passage dans l'espace de Fourier (le symbole  $F\{h\}(\omega)$  désigne la transformée de Fourier<sup>6</sup> d'une fonction  $h(t)$ ) avec des solutions  $F\{x\}$  oscillant à la fréquence  $\Omega$  donne :

6. Nous utilisons la convention suivante pour la transformée de Fourier :  $F\{h\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \exp(-i\omega t) dt$



**Figure 3.14** – Variation de la largeur de la résonance en fonction de la tension DC appliquée. Aucune variation sensible autre que l'imprécision de la mesure n'est visible. La métallisation de l'échantillon a donc bien réussi à supprimer la dissipation électrostatique. Dans la zone au delà de 100V nous avons plus d'incertitude sur la mesure sans que nous ne soyons en mesure de l'expliquer. Cependant en moyenne la largeur de la résonance reste constante.



**Figure 3.15** – Valeur RMS du bruit de tension injecté dans la contre électrode en fonction du carré de la tension  $V_m$  qui multiplie le bruit électronique. La relation est linéaire avec une pente de  $86,56mV^2/V^2$  et une origine de  $30,61mV^2$ .

$$\begin{aligned} F\{x\}(\Omega) &= \frac{F_T + C'V_{T,eff}F\{\tilde{V}_n\}}{m(\omega^2 - \Omega^2 + i\Gamma_0\Omega)} \\ &= \chi(F_T + C'V_{T,eff}F\{\tilde{V}_n\}) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Avec  $F_T = F\{f_T\}$  une constante et  $F\{\tilde{V}_n\}$  est également une constante car  $\tilde{V}_n$  est un bruit blanc gaussien. Ce qui nous intéresse est  $\langle V^2 \rangle$ , c'est à dire la tension RMS (Root Mean Square) que l'on mesure sur la voie HF en sortie de détecteur. On calcule donc toujours avec l'égalité de Parseval :

$$\begin{aligned} \langle V^2 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F\{V\}|^2 d\Omega \\ &= \frac{G}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F\{x\}|^2 d\Omega \end{aligned} \quad (3.45)$$

Ou  $G$  est un coefficient qui tient compte de la transduction d'une position en une tension via notre mesure optique. La densité spectrale d'une grandeur  $f$  est définie par  $S_f = |F\{f\}|^2$

$$\langle V^2 \rangle = \frac{G}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{f_T} |\chi|^2 d\Omega + \frac{G}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C'^2 V_{T,eff}^2 S_{\tilde{V}_n} |\chi|^2 d\Omega \quad (3.46)$$

On peut démontrer que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi|^2 d\Omega = \frac{1}{2m\Gamma_0\omega^2} \quad (3.47)$$

Et  $S_{f_T} = 2k_B T m \Gamma_0$  est la densité spectrale de puissance de la force thermique [32]<sup>7</sup>. On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \langle V^2 \rangle &= \frac{Gk_B}{m\omega^2} \left( T + \frac{C'^2}{2k_B m \Gamma_0} V_{T,eff}^2 S_{\tilde{v}_n} \right) \\ &= \frac{Gk_B T_{eff}}{m\omega^2} \end{aligned} \quad (3.48)$$

L'action de la force électrique a donc modifié la température effective de l'échantillon : celui-ci vibre avec une amplitude identique à celle qu'il aurait s'il était en équilibre thermodynamique avec un bain à la température  $T_{eff}$ . Il nous manque encore une dépendance plus claire de cette température sur nos paramètres et notamment sur le paramètre que nous varions en cours d'expérience, *i.e* la tension par laquelle est multipliée le bruit  $\tilde{V}$  (voir section 3.5.3.1). Cette tension multiplicatrice est  $V_m$  (éventuellement corrigée par une tension  $V_s$  additionnée). La figure 3.15 montre  $\langle \tilde{V}_n^2 \rangle$  en fonction de  $V_m^2$ . Les conditions de mesure sont les suivantes : nous fixons l'amplitude de bruit blanc électronique  $\tilde{V} = 1V_{pp}$  (pp→pic à pic) et  $V_s = 0V$  et nous faisons varier  $V_m$  de  $0V$  à  $3,5V$ . Nous mesurons à l'analyseur de spectre le signal avant l'application sur la contre électrode en utilisant l'égalité de Parseval et nous intégrons donc sur la PSD ( $\langle \tilde{V}_n^2 \rangle = \int S_{\tilde{v}_n} df$ ).

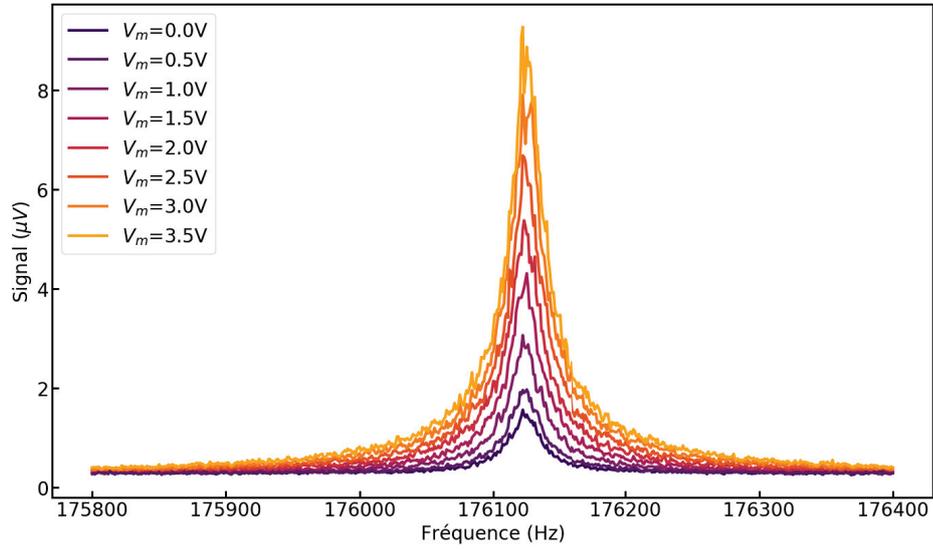
On peut voir que  $\langle \tilde{V}_n^2 \rangle$  varie linéairement avec  $V_m^2$  mais la droite a un offset. Même lorsque  $V_m = 0V$  on a un plancher de bruit qui sort de l'amplificateur. On peut voir sur la figure 3.16 l'effet du chauffage sur le spectre de l'oscillateur. Quand la contre électrode est à la masse nous sommes trop proches de la pointe pour détecter la moindre vibration thermomécanique car l'amplitude est trop faible. Le simple fait de brancher l'injection de bruit même avec  $V_m = 0V$  nous permet d'avoir un pic de résonance. En augmentant  $V_m$  on augmente le signal. Par l'équipartition de l'énergie  $k_B T = m\omega^2 \langle x^2 \rangle$  à fréquence constante (donc à  $V_T$  et  $V_K$  constants) le rapport des tensions  $\langle V^2 \rangle$  nous donne le rapport des températures. Ces tensions sont montrées sur la figure 3.17 où nous avons extrait la tension RMS au carré  $\langle V^2 \rangle$  avec l'égalité de Parseval en soustrayant le carré du bruit de fond. Encore une fois la relation est linéaire. Cette fois la courbe passe par l'origine (modulo les incertitudes) car quand nous n'injectons pas de bruit nous n'avons pas de pic.

Si l'on compare les points à  $V_m = 0V$  qui est notre seuil de détection et  $V_m = 3V$  qui est notre point de fonctionnement nous avons un rapport de signal et donc de température de 30,52. En ce qui concerne le bruit injecté à  $V_m = 0V$  nous avons l'offset qui vaut  $\langle \tilde{V}_n^2 \rangle = 30,61\mu V^2$  et quand nous sommes à  $V_m = 3V$  alors  $\langle \tilde{V}_n^2 \rangle = 809,65\mu V^2$ , ce qui est presque deux ordres de grandeur au dessus. Nous allons donc négliger cet offset et considérer que  $\langle \tilde{V}_n^2 \rangle = aV_m^2$  avec  $a$  une constante. Or  $\langle \tilde{V}_n^2 \rangle = BW \times S_{\tilde{v}_n}$  (avec  $BW$  la bande passante) donc  $S_{\tilde{v}_n} = aV_m^2/BW = a'V_m^2$ . Pour  $\langle V^2 \rangle$  l'offset est nul et nous pouvons donc négliger le terme  $T$  qui est la température effective initiale de l'échantillon sans bruit injecté dans l'équation (3.48).

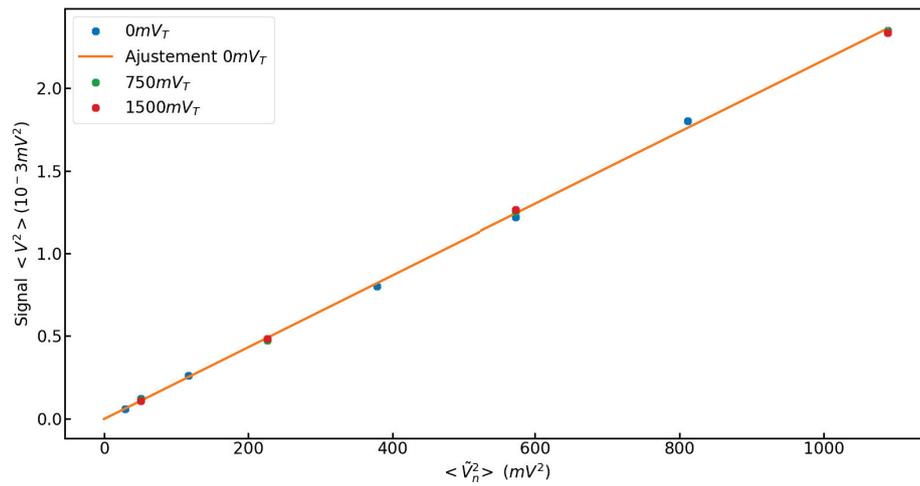
Nous avons donc :

$$\langle V^2 \rangle = \frac{Gk_B}{m\omega^2} \frac{C'^2 a'}{2k_B m \Gamma_0} V_{T,eff}^2 V_m^2 \quad (3.49)$$

7. C'est le cas pour des transformées de Fourier bilatérales, *i.e* allant de  $-\infty$  à  $+\infty$ . En pratique comme on ne peut accéder aux pulsations négatives il est courant d'utiliser la convention unilatérale, soit des intégrales allant de 0 à  $+\infty$ . Dans ce cas  $S_{f_T} = 4k_B T m \Gamma_0$ .



**Figure 3.16** – Variation du spectre en fonction de la tension  $V_m$  donc du bruit électronique injecté. Plus de signal signifie une température effective plus élevée selon l'équipartition de l'énergie.



**Figure 3.17** – Signal intégré  $\langle V^2 \rangle$  mesuré à l'analyseur de spectre (après soustraction du bruit de fond) et sa variation en fonction du bruit injecté.

Nous allons noter  $\langle V^2 \rangle = SV_m^2/\omega^2$  avec  $T_{eff} \propto \omega^2 \langle V^2 \rangle = SV_m^2$ . Donc la température de l'échantillon varie linéairement avec  $V_m^2$ . La dernière chose à se demander est si  $S$  est une constante. En effet si on change la fréquence de résonance on le fait via  $V_T$ , or nous avons mentionné que  $V_{T,eff}$  dépend, non trivialement, de  $V_T$  et  $V_K$  et cette grandeur apparaît dans  $S$ . On peut présupposer, comme  $V_K$  est grand devant les  $V_T$  appliqué (450V contre environ 40V au maximum) que  $V_{T,eff}$  va peu varier si on change  $V_T$  mais cela n'est pas certain. Nous le vérifions donc expérimentalement en reproduisant la mesure de  $\langle V^2 \rangle$  en fonction du bruit injecté soit de  $V_m^2$  (toujours avec un  $\tilde{V}$  constant et  $V_s = 0$ ) pour différents  $V_T$ . Le résultat est présenté en figure 3.17 et nous pouvons voir que les droites sont superposées. On peut donc raisonnablement considérer que  $S$  ne dépend pas de  $V_T$ .

## 3.6 Réglages du détecteur synchrone

Dans cette section nous détaillons les différents réglages du détecteur synchrone et les corrections que nous devons appliquer au signal.

### 3.6.1 Rappels sur la détection synchrone

Nous commençons par quelques rappels sur le principe de détection synchrone. Soit le signal  $s(t)$  périodique que nous voulons mesurer avec une pulsation  $\omega_0$  et une amplitude  $A_s$  et une phase  $\phi$ . Soit  $r(t)$  le signal de référence que le détecteur synchrone va générer à la pulsation  $\omega_r$ .

$$\begin{aligned} s(t) &= A_s \cos(\omega_0 t + \phi) \\ r(t) &= \sqrt{2} e^{-i\omega_r t} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Le détecteur synchrone effectue une multiplication des signaux  $s(t)$  et  $r(t)$  :

$$s.r(t) = \frac{A_s}{\sqrt{2}} \left[ e^{i(\omega_0 - \omega_r)t + i\phi} + e^{-i(\omega_0 + \omega_r)t - i\phi} \right] \quad (3.51)$$

Cela crée une composante lente associée à la différence des fréquences et une composante rapide associée à la somme. Il faut ensuite filtrer le signal pour supprimer la composante rapide. De multiples fonctions peuvent être choisies à cet effet mais pour rester dans un cas simple nous utilisons une moyenne temporelle (une fonction porte dans l'espace de Fourier).

$$\langle s.r \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0 - \frac{\Delta t}{2}}^{t_0 + \frac{\Delta t}{2}} s.r(t) dt \quad (3.52)$$

Avec  $\Delta t$  l'inverse de la bande passante (BW) qui va caractériser notre filtre. Dans le cas général on se place dans le cas  $\omega_0 = \omega_r$ . Le produit devient alors :

$$s.r(t) = \frac{A_s e^{i\phi}}{\sqrt{2}} [1 + e^{-2i\omega_0 t - 2i\phi}] \quad (3.53)$$

Et après la moyenne temporelle nous obtenons :

$$\langle s.r \rangle = \frac{A_s e^{i\phi}}{\sqrt{2}} \quad (3.54)$$

En notant que dans l'équation (3.53) le premier terme est constant et le second est négligeable à cause du filtre passe bas. On définit :

$$\begin{aligned} X &= \Re(\langle s.r \rangle) = \frac{A_s}{\sqrt{2}} \cos(\phi) \\ Y &= \Im(\langle s.r \rangle) = \frac{A_s}{\sqrt{2}} \sin(\phi) \end{aligned} \quad (3.55)$$

On peut détailler l'écriture de  $s(t)$  comme la somme de deux signaux en quadrature de phase :

$$s(t) = A_s \cos(\phi) \cos(\omega_0 t) - A_s \sin(\phi) \sin(\omega_0 t) \quad (3.56)$$

On peut alors réécrire (3.56) en :

$$s(t) = \sqrt{2}X \cos(\omega_0 t) - \sqrt{2}Y \sin(\omega_0 t) \quad (3.57)$$

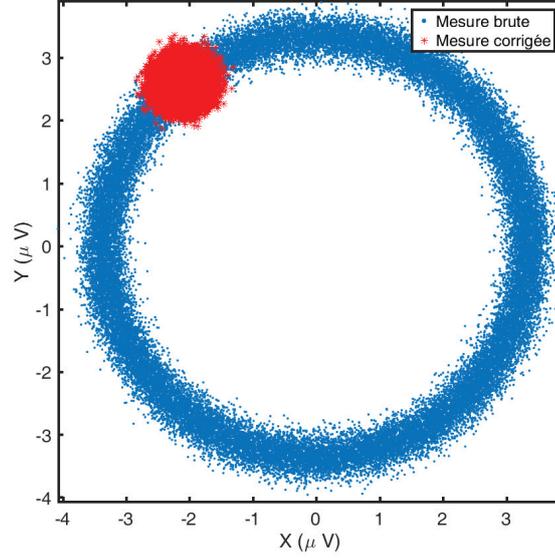
On retrouve donc  $X$  et  $Y$  (à un facteur  $\sqrt{2}$  près) que nous avons défini au début du chapitre en 3.3. Ce sont ces grandeurs que le détecteur synchrone mesure, permettant d'extraire le signal à une fréquence donnée. Cependant dans notre cas la fréquence de résonance de l'échantillon change au cours des transformations thermodynamiques car la pression (paramètre thermodynamique associé) change. Une possibilité serait alors de modifier la fréquence de référence du détecteur, mais cela est trop lent car l'oscillateur interne qui fournit le signal de référence a un temps de stabilisation. La deuxième option est alors de travailler à fréquence de référence fixe et de prendre une bande passante suffisamment grande pour contenir toutes les variations de fréquence. Nous optons pour cette méthode avec une  $BW = 3kHz$ . Or nous ne pouvons plus considérer  $\omega_0 = \omega_r$  dans ce cas. Nous revenons donc sur les équations (3.51) et (3.52) :

$$\langle s.r \rangle = \frac{A_s e^{i\phi}}{\Delta t} \int_{t_0 - \frac{\Delta t}{2}}^{t_0 + \frac{\Delta t}{2}} e^{i\Delta\omega t} dt \quad (3.58)$$

Avec  $\Delta\omega = \omega_0 - \omega_r$ . Le terme haute fréquence est supprimé par le filtre passe bas comme précédemment.  $\omega_0$  et  $\omega_r$  sont différents mais l'écart reste faible (quelques centaines de  $Hz$  pour des fréquence de l'ordre de  $100kHz$ ). Le calcul donne :

$$\begin{aligned} \langle s.r \rangle &= \frac{A_s e^{i\phi}}{\sqrt{2}} e^{i\Delta\omega t_0} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega\Delta t}{2}\right) \\ X_r &= \frac{A_s}{\sqrt{2}} \cos(\Delta\omega t_0 + \phi) \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega\Delta t}{2}\right) \\ Y_r &= \frac{A_s}{\sqrt{2}} \sin(\Delta\omega t_0 + \phi) \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega\Delta t}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.59)$$

On fait alors la distinction entre  $X_r$  mesuré avec cette méthode et  $X$  évalué précédemment (idem pour  $Y$ ). Plus précisément le facteur respectivement en cosinus et en sinus qui était présent dépend maintenant de  $\Delta\omega$  en plus de  $\phi$ . A cause des écarts de fréquence nous sommes dans un référentiel tournant dont la vitesse de rotation est un peu décalée. A cause de cela nous mesurons  $X_r$  et  $Y_r$  qui sont en fait une combinaison de  $X$  et  $Y$ , cette



**Figure 3.18** – Illustration du problème de l'écart entre la fréquence de référence du détecteur  $\omega_r$  et la fréquence de résonance de l'oscillateur  $\omega_0$ . L'application de la matrice de rotation permet de passer d'un tore à un disque dans l'espace des phases.

combinaison étant dépendante du temps. La figure 3.18 illustre ce qu'il se passe alors. Pour faire cette mesure nous avons pris un signal sinusoïdal à la fréquence  $\omega_0/(2\pi) = 170800\text{Hz}$  et nous mesurons au détecteur synchrone avec une fréquence décalée de  $500\text{Hz}$  pendant  $10\text{s}$ , sur une BW de  $3\text{kHz}$  avec  $3000$  échantillons par seconde (Sa/s). L'anneau composé de points bleus correspond au tracé de  $X$  et  $Y$  mesurés tels quels. On peut voir que les facteurs en  $\cos(\Delta\omega t_0 + \phi)$  et  $\sin(\Delta\omega t_0 + \phi)$  induisent une rotation dépendante du temps dans l'espace  $XY$  et le disque que l'on devrait mesurer (ce n'est pas un point à cause des incertitudes) se transforme en anneau.

En utilisant les équations (3.55) et (3.59) on montre facilement :

$$\begin{aligned} X_r &= X \cos(\Delta\omega t_0) \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega\Delta t}{2}\right) - Y \sin(\Delta\omega t_0) \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega\Delta t}{2}\right) \\ Y_r &= Y \cos(\Delta\omega t_0) \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega\Delta t}{2}\right) + X \sin(\Delta\omega t_0) \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega\Delta t}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.60)$$

Un moyennage direct sur  $X_r$  et  $Y_r$  pourrait causer des erreurs en fonction de la vitesse de rotation par rapport à la durée de moyennage. Pour contrer cela on peut appliquer une matrice de rotation pour revenir dans le bon référentiel. On a alors :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_r \\ Y_r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\Delta\omega t_0) & -\sin(\Delta\omega t_0) \\ \sin(\Delta\omega t_0) & \cos(\Delta\omega t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega\Delta t}{2}\right) \\ Y \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega\Delta t}{2}\right) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} X \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega\Delta t}{2}\right) \\ Y \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega\Delta t}{2}\right) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\Delta\omega t_0) & \sin(\Delta\omega t_0) \\ -\sin(\Delta\omega t_0) & \cos(\Delta\omega t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_r \\ Y_r \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.61)$$

L'équation (3.61) met en avant la matrice de rotation à utiliser. Via cette méthode on

obtient les points en rouge sur la figure 3.18. La rotation a été supprimée. Une méthode plus directe consiste à travailler avec le module  $\langle R^2 \rangle = \langle X_r^2 \rangle + \langle Y_r^2 \rangle$ . On voit facilement que dans ce cas la rotation disparaît. La comparaison du calcul du module moyen avec et sans la correction par la matrice de rotation donne un résultat identique pour la mesure de la figure 3.18. Historiquement nous avons commencé à travailler avec  $X$  et  $Y$  pour nos mesures donc cette correction a été appliquée. Puis par la suite nous avons travaillé directement avec le module et donc la nécessité de cette correction est discutable mais elle est restée dans les programmes.

### 3.6.2 Bande passante et échantillonnage

Nous abordons ici succinctement la choix de la bande passante et de l'échantillonnage. Comme nous l'avons dit précédemment nous travaillons à fréquence de référence du détecteur fixe. L'avantage est de pouvoir mesurer plus rapidement, l'inconvénient est qu'il faut prendre une BW plus grande. Et qui dit grande BW dit plus de bruit. En effet la quantité de bruit dépend de la bande passante. Un bruit blanc est caractérisé par une valeur en  $V/\sqrt{Hz}$  (voir annexe C) qui est une constante. Pour savoir le bruit qu'on va mesurer dans la bande passante choisie on doit multiplier cette constante par  $\sqrt{BW}$ . A bruit constant et signal d'intérêt constant plus on augmente la bande passante plus notre ratio signal sur bruit diminue.

L'autre grandeur importante est l'échantillonnage en  $Sa/s$  (Sample/seconde). Le détecteur synchrone échantillonne avec un taux de  $250MSa/s$  mais ne renvoie pas toute ces données à l'utilisateur. L'utilisateur fixe un échantillonnage qui va déterminer le nombre de points par rapport à la durée de la mesure et donc la taille de ses fichiers. Pour passer de ce qu'il mesure à ce dont l'utilisateur a besoin l'appareil effectue un downsampling, c'est à dire qu'il supprime des points jusqu'à avoir le bon taux d'échantillonnage. Le danger avec l'échantillonnage est l'effet de repli des fréquences qui mène à confondre une haute fréquence avec une fréquence plus basse. C'est ce qu'on appelle l'aliasing et ce phénomène peut perturber les mesures. Pour s'en prémunir il faut régler son échantillonnage en fonction de sa bande passante.

Pour régler la bande passante le critère est de s'assurer qu'elle contienne tout le signal. Typiquement quand nous modifions la fréquence l'incursion est d'environ  $2kHz$ . Nous réglons la fréquence de centrage au milieu. Une fois la transformée de Fourier effectuée sur le module il n'y a pas de distinction entre les fréquences positives et négatives, notre écart à la fréquence de centrage sera donc toujours au maximum de  $1kHz$  (au minimum et au maximum de tuning). Notre bande passante doit être supérieure à cela. Nous prenons  $BW = 3kHz$  ainsi nous gardons un peu de marge pour pouvoir éventuellement augmenter le tuning et être certains de ne pas perdre de signal.

L'aliasing va se produire quand les fréquence supérieures au taux d'échantillonnage ne sont pas suffisamment filtrées. Dans notre cas le taux d'échantillonnage doit donc être supérieur à  $3kHz$  et même le plus grand possible pour s'assurer de ne pas avoir de problèmes : les fréquences supérieures proches seront correctement échantillonnées et filtrées. Un critère pour fixer le taux d'échantillonnage en fonction de la bande passante est celui de Shannon-Nyquist [33, 34] qui stipule qu'il faut au moins un taux d'échantillonnage qui soit le double de la bande passante pour éviter l'aliasing, soit  $6kSa/s$  dans notre cas. Nous avons fixé le taux d'échantillonnage à  $14,4kSa/s$  (l'appareil ne permet que certaines valeurs fixées) pour respecter ce critère et repousser au maximum le problème. Au delà de ce taux nous risquons une perte de donnée par la liaison USB entre l'appareil et l'ordinateur qui traite les données.

### 3.6.3 Correction du filtre

#### 3.6.3.1 Théorie

Il nous reste un problème très important dans notre cas, à savoir la correction du filtrage. En effet ce processus n'est pas très important quand la fréquence de référence est proche de la fréquence à mesurer. Mais dans notre cas où notre incursion peut nous en éloigner jusqu'à  $1kHz$  et où les signaux mesurés doivent être comparables sur toute la plage mesurée, il est primordial de compenser la fonction de réponse du filtre. Jusqu'à maintenant nous avons considéré une fonction de réponse simplifiée en une fonction porte. La documentation de l'appareil nous apprend qu'en vérité il s'agit d'un filtre d'ordre 4 dont la fonction de réponse fréquentielle peut être décrite par :

$$H(\omega) = \frac{1}{\left(1 + i\left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_c}\right)\right)^4} \quad (3.62)$$

Avec  $\omega_r$  la fréquence de référence et  $\omega_c$  la fréquence de coupure du filtre liée à la bande passante. Il va nous falloir diviser la mesure par cette fonction de réponse. Après la matrice de rotation (voir section 3.6.1) nous calculons la somme du carré des signaux obtenus qui vaut  $R_{filtré}^2 = (X^2 + Y^2) \text{sinc}^2\left(\frac{\Delta\omega\Delta t}{2}\right)$ . Nous faisons apparaître explicitement le sinus cardinal pour rappeler que ces signaux ont été filtrés. Nous ne connaissons pas la réponse temporelle associée à la fonction de réponse de l'équation (3.62), il nous faut donc trouver par quoi diviser (on pourrait calculer la transformée de Fourier inverse mais ce n'est pas la méthode choisie ici). Nous savons qu'un filtre s'applique sur la PSD.

$$\begin{aligned} S_{R_{filtré}} &= |H(\omega)|^2 S_R \\ |H(\omega)|^2 &= \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_c}\right)^2\right)^4} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Nous voulons maintenant savoir ce qu'on a pour  $\langle R_{filtré}^2 \rangle$  et cette information s'obtient avec le théorème de Parseval.

$$\begin{aligned} \langle R_{filtré}^2 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{R_{filtré}} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_R \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_c}\right)^2\right)^4} d\omega \end{aligned} \quad (3.64)$$

L'idée pour effectuer ce calcul est de considérer que l'intégrande est non négligeable seulement lorsque  $\omega \sim \omega_0$  (la partie mécanique donne une lorentzienne centrée sur  $\omega_0$  et  $\omega_r$  reste relativement proche de  $\omega_0$ ).

$$\begin{aligned}
 \langle R_{filtré}^2 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_R \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\omega_0 - \omega_r}{\omega_c}\right)^2\right)^4} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\omega_0 - \omega_r}{\omega_c}\right)^2\right)^4} \int_{-\infty}^{\infty} S_R d\omega \\
 &= \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\omega_0 - \omega_r}{\omega_c}\right)^2\right)^4} \langle R^2 \rangle
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

Nous savons donc maintenant par quoi diviser et la correction appliquée ne concerne que la fréquence de l'oscillateur.

### 3.6.3.2 Mesure de la fonction de réponse

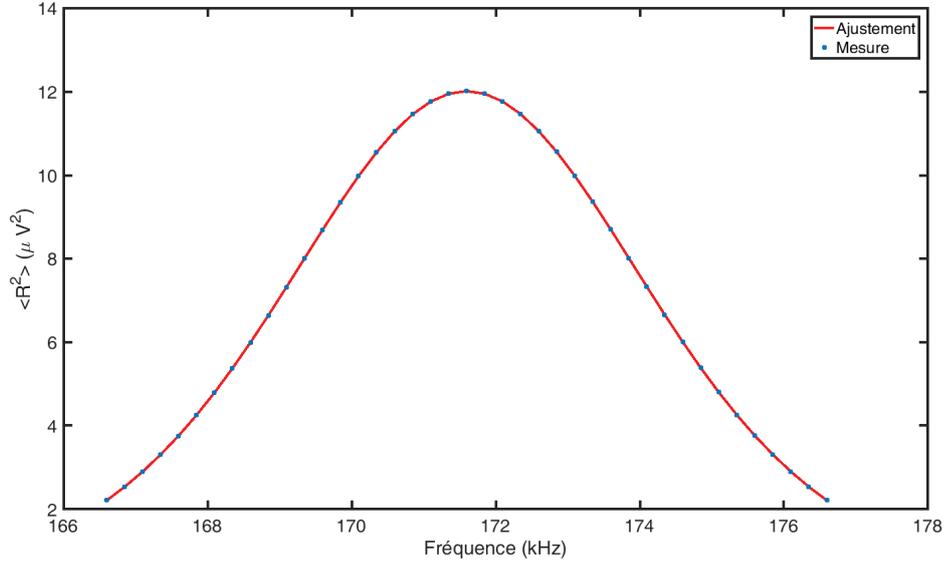
Pour appliquer la correction il nous manque encore la connaissance précise de  $\omega_r$  et  $\omega_c$ . Pour cela nous mesurons directement la fonction de réponse fréquentielle de la Zurich. Nous utilisons un Tektronix générant un signal sinusoïdal de  $10mV_{pp}$  pour une fréquence variant de  $166600Hz$  à  $176600Hz$ . Sur cette plage nous relevons le signal en 40 points, chaque mesure durant 40s. La bande passante est de  $3kHz$  avec  $14,4kSa/s$  comme nous l'avons évoqué précédemment. Le résultat est présenté en figure 3.19. On trouve alors que  $\omega_c = 2\pi \times 6896 rad/s$  (qui est supérieur au  $3kHz$  nominal de consigne) et que  $\omega_r = 2\pi \times (f_r + 2,49 Hz) rad/s$  avec  $f_r$  la valeur de la fréquence de référence réglée par l'utilisateur soit dans le logiciel de commande soit avec un langage tiers permettant de piloter l'appareil (Labview dans notre cas). Nous avons donc un léger offset de la fréquence centrale qui est de  $2,49Hz$ . Ce résultat est obtenu en ajustant la fonction de réponse mesurée avec la fonction en (3.65).

Pour faire le meilleur ajustement possible nous soustrayons au préalable le plancher de bruit. Il conviendra donc de faire de même pour les données expérimentales. Nous avons aussi d'autres raisons de soustraire le bruit que nous détaillerons dans la section 3.8.2.

## 3.7 Réalisation d'un cycle de Carnot

### 3.7.1 Paramètres pertinents

Nous avons déjà fait les liens entre les grandeurs importantes pour la thermodynamique d'un gaz parfait (P,V,T) et les grandeurs équivalentes pour la thermodynamique d'un nanofil ( $\omega^2, \langle x^2 \rangle, T$ ). Nous avons également abordé la dépendance de ces grandeurs en fonction des paramètres que nous contrôlons. Pour réaliser un cycle nous avons besoin, comme il l'a été évoqué dans la section 3.2, de deux transformations isothermes à deux températures différentes (source chaude et source froide) et de deux transformations adiabatiques pour les relier. Pour les transformations isothermes nous gardons la température constante donc  $\tilde{V}$ ,  $V_m$  et  $V_s$  sont constants et  $V_T$  change pour modifier  $\omega^2$  (la pression). Comme nous avons vu dans la section 3.5.3.3 la température effective ne dépend pas de  $V_T$  (voir figure 3.17) nous pouvons donc laisser  $V_m$  et  $V_s$  constants. Si cela n'avait pas été le cas nous aurions dû modifier  $V_m + V_s$  pour contrebalancer l'effet de  $V_T$  sur la température effective et ainsi conserver l'isothermicité. Sur une branche adiabatique l'échange de chaleur doit être nul, et le critère qui permet d'accomplir ceci est  $k/T^2 = cst$  comme vu en section 3.3.2.2. Nous changeons la température via un  $V_s(t)$  qui permet de conserver  $k/T^2$  constant en accord



**Figure 3.19** – Mesure de la fonction de réponse fréquentielle du détecteur synchrone et ajustement avec un filtre d'ordre 4. On trouve  $\omega_r = 2\pi \times (f_r + 2,49)$  rad/s et  $\omega_c = 2\pi \times 6896$  Hz.

avec  $V_T(t)$ .

Les numérotations que nous allons utiliser pour les différentes branches du cycle sont basées sur la figure 3.1. Dans la suite nous décrivons la procédure pour constituer un cycle thermodynamique de Carnot.

### 3.7.2 Mise en équation du cycle de Carnot

Un cycle de Carnot n'a qu'un nombre restreint de paramètres libres. Nous devons donc savoir pour la suite quels sont les paramètres que nous pouvons choisir et quels seront alors les paramètres sous contraintes. Nous rappelons ici que le coefficient de transduction d'un signal mécanique en signal électrique est  $G$  et  $\langle V^2 \rangle = G \langle x^2 \rangle$  (comme défini dans l'équation (3.45)). Dans l'équation (3.8) nous avons défini que pour l'amplitude de vibration  $\langle x^2 \rangle = (\langle X^2 \rangle + \langle Y^2 \rangle) / 2 = \langle R^2 \rangle / 2$  avec  $X$  et  $Y$  les composantes de la position dans le référentiel tournant et  $R^2 = X^2 + Y^2$  le module de la position dans ce référentiel. Avec le détecteur synchrone on mesure les tensions associées aux composantes de la position dans le référentiel tournant :  $\langle V_X^2 \rangle = G \langle X^2 \rangle$ ,  $\langle V_Y^2 \rangle = G \langle Y^2 \rangle$  et donc  $\langle V_R^2 \rangle = G \langle R^2 \rangle$  (à noter que ces égalités restent vraies sans les valeurs moyennes). On en déduit finalement que  $\langle x^2 \rangle = \langle V_R^2 \rangle / (2G)$ .

Sur la branche isotherme  $1 \rightarrow 2$  qui se fait à la température de la source chaude  $T_h$  l'équipartition de l'énergie nous donne :

$$\begin{aligned}
 m\omega_1^2 \frac{\langle V_R^2 \rangle_1}{2G} &= m\omega_2^2 \frac{\langle V_R^2 \rangle_2}{2G} = k_B T_h \\
 \omega_1^2 \langle V_R^2 \rangle_1 &= \omega_2^2 \langle V_R^2 \rangle_2
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

### 3.7. RÉALISATION D'UN CYCLE DE CARNOT

Les indices 1, 2, 3 et 4 font référence aux extrémités des différentes branches du cycle. Sur une branche adiabatique, par exemple  $2 \rightarrow 3$  on doit avoir :

$$\begin{aligned} \frac{k}{T^2} &= cst \\ \frac{m\omega_2^2 k_B^2}{\left(m\omega_2^2 \frac{\langle V_R^2 \rangle_2}{2G}\right)^2} &= \frac{m\omega_3^2 k_B^2}{\left(m\omega_3^2 \frac{\langle V_R^2 \rangle_3}{2G}\right)^2} \\ \omega_2^2 \langle V_R^2 \rangle_2^2 &= \omega_3^2 \langle V_R^2 \rangle_3^2 \end{aligned} \quad (3.67)$$

Ou nous avons exprimé  $k = m\omega^2$  et  $1/T^2$  avec l'équipartition de l'énergie. Ces relations appliquées au cycle complet nous donnent :

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow 2 : \quad \omega_1^2 \langle V_R^2 \rangle_1 &= \omega_2^2 \langle V_R^2 \rangle_2 \\ 2 \rightarrow 3 : \quad \omega_2^2 \langle V_R^2 \rangle_2^2 &= \omega_3^2 \langle V_R^2 \rangle_3^2 \\ 3 \rightarrow 4 : \quad \omega_3^2 \langle V_R^2 \rangle_3 &= \omega_4^2 \langle V_R^2 \rangle_4 \\ 4 \rightarrow 1 : \quad \omega_4^2 \langle V_R^2 \rangle_4^2 &= \omega_1^2 \langle V_R^2 \rangle_1^2 \end{aligned} \quad (3.68)$$

Nous avons un jeu de 4 équations avec 8 paramètres, nous pouvons donc en fixer 4 et les 4 autres seront contraints. Nous choisissons de fixer  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  et la température de la source chaude via  $\langle V_R^2 \rangle_1$  ( $T_h \propto \omega_1^2 \langle V_R^2 \rangle_1$ ). En effet comme dit dans la section 3.5.3.3 nous sommes obligés de chauffer pour observer un signal, il est donc naturel de fixer la température d'une des sources. Ensuite il ne nous reste plus qu'à fixer 3 fréquences par 3 valeurs de  $V_T$ . Comme l'amplificateur de tension  $DC$  ne supporte pas de tensions négatives nous appliquons  $V_T \geq 0$ . Or comme nous appliquons une tension  $V_K > 0$  constamment sur la pointe qui supporte l'échantillon, appliquer  $V_T$  sur la contre électrode diminue la différence de potentiel entre la pointe et la contre électrode, donc la fréquence de résonance du fil diminue. En prenant comme principe que l'on démarre à  $V_T = 0V$  alors le point 1 est au début de la rampe isotherme à la température de la source chaude (à partir de ce point la pression, donc la fréquence de résonance, diminue). Conséquemment on déduit les équations pour le reste du cycle :

$$\begin{aligned}
 1 \rightarrow 2 : \quad \langle V_R^2 \rangle_2 &= \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \langle V_R^2 \rangle_1 \\
 2 \rightarrow 3 : \quad \langle V_R^2 \rangle_3^2 &= \frac{\omega_1^4}{\omega_3^2 \omega_2^2} \langle V_R^2 \rangle_1^2 \\
 \frac{T_c}{T_h} &= \frac{\omega_3^2 \langle V_R^2 \rangle_3}{\omega_1^2 \langle V_R^2 \rangle_1} \\
 \frac{T_c}{T_h} &= \frac{\omega_3}{\omega_2} \\
 3 \rightarrow 4 : \quad \omega_4^2 \langle V_R^2 \rangle_4 &= \omega_3^2 \langle V_R^2 \rangle_3 \\
 4 \rightarrow 1 : \quad \langle V_R^2 \rangle_4 &= \frac{\omega_1}{\omega_4} \langle V_R^2 \rangle_1 \\
 \frac{T_c}{T_h} &= \frac{\omega_4^2 \langle V_R^2 \rangle_4}{\omega_1^2 \langle V_R^2 \rangle_1} \\
 \frac{\langle V_R^2 \rangle_4}{\langle V_R^2 \rangle_1} &= \frac{\omega_1^2 \omega_3}{\omega_4^2 \omega_2} = \frac{\omega_1}{\omega_4} \\
 \frac{\omega_1}{\omega_4} &= \frac{\omega_2}{\omega_3}
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

Ici nous avons deux conditions plus particulièrement importantes qui nous donnent la quatrième et dernière fréquence du cycle ainsi que le rapport des températures des sources chaude et froide, soit le rendement du cycle (voir 3.7.4).

### 3.7.3 Valeur attendues de travail et de chaleur

Nous détaillons à présent avec quelle valeur nous allons comparer nos résultats de mesure sur les différentes portions du cycle. Toutes les valeurs d'énergie seront référencées à  $k_B T$  à la fois car cela nous affranchit d'avoir à connaître la température, dont la calibration est très délicate, et cette normalisation apparaît assez naturelle. La température de référence pour  $k_B T$  sera toujours la même et nous choisissons la température de la première phase du cycle à savoir  $T_h$  la température de la source chaude.

#### 3.7.3.1 Transformation 1 $\rightarrow$ 2 : détente isotherme

Pour le travail nous utilisons l'équation (3.18) avec  $T = T_h$ ,  $\omega_f = \omega_2$ ,  $\omega_i = \omega_1$ .

$$\frac{\langle W \rangle}{k_B T_h} = \ln \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \tag{3.70}$$

Et nous avons déjà calculé que la chaleur est la valeur opposée.

#### 3.7.3.2 Transformation 2 $\rightarrow$ 3 : détente adiabatique

Pour le travail nous utilisons l'équation (3.22) avec  $T_0 = T_h$  car nous avons défini  $T_0$  comme étant la température initiale avant la détente adiabatique,  $\omega_f = \omega_3$ ,  $\omega_i = \omega_2$ .

$$\frac{\langle W \rangle}{k_B T_h} = \frac{\omega_3}{\omega_2} - 1 \tag{3.71}$$

Et la chaleur est nulle.

### 3.7.3.3 Transformation 3 → 4 : compression isotherme

Pour le travail nous utilisons l'équation (3.18) avec  $T = T_c$ ,  $\omega_f = \omega_4$ ,  $\omega_i = \omega_3$ .

$$\begin{aligned} \frac{\langle W \rangle}{k_B T_h} &= \frac{T_c}{T_h} \ln \left( \frac{\omega_4}{\omega_3} \right) \\ &= \frac{\omega_3}{\omega_2} \ln \left( \frac{\omega_4}{\omega_3} \right) \end{aligned} \quad (3.72)$$

En reprenant le ratio des températures évalué avec l'équation (3.69).

### 3.7.3.4 Transformation 4 → 1 : compression adiabatique

Pour le travail nous utilisons l'équation (3.22) avec  $T_0 = T_c$ ,  $\omega_f = \omega_1$ ,  $\omega_i = \omega_4$ .

$$\begin{aligned} \frac{\langle W \rangle}{k_B T_h} &= \frac{T_c}{T_h} \left( \frac{\omega_1}{\omega_4} - 1 \right) \\ &= \frac{\omega_3}{\omega_2} \left( \frac{\omega_1}{\omega_4} - 1 \right) \end{aligned} \quad (3.73)$$

On peut vérifier, avec les contraintes de l'équation (3.69) que :

$$\begin{aligned} \frac{\langle W \rangle_{4 \rightarrow 1}}{k_B T_h} &= \frac{\omega_3}{\omega_2} \left( \frac{\omega_1}{\omega_4} - 1 \right) \\ &= \frac{\omega_3}{\omega_2} \left( \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_3 \omega_1} - 1 \right) \\ &= 1 - \frac{\omega_3}{\omega_2} \\ &= - \frac{\langle W \rangle_{2 \rightarrow 3}}{k_B T_h} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Ce qui encore une fois est caractéristique d'un cycle de Carnot.

### 3.7.4 Valeur attendue de rendement

Par définition le rendement de Carnot est défini par  $\eta = -W/Q_h$  avec  $-W$  le travail extrait et  $Q_h$  le flux de chaleur entre la source chaude et le fluide, c'est à dire l'énergie injectée dans le système. Par le premier principe de la thermodynamique on a  $-W = Q_c + Q_h$ , avec dans notre cas  $Q_h = Q_{1 \rightarrow 2}$  et  $Q_c = Q_{3 \rightarrow 4}$ . En utilisant les résultats de la section précédente :

$$\begin{aligned}
 \eta &= \frac{-k_B T_h \ln\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) - k_B T_c \ln\left(\frac{\omega_4}{\omega_3}\right)}{-k_B T_h \ln\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)} \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) - \frac{T_c}{T_h} \ln\left(\frac{\omega_3}{\omega_4}\right)}{\ln\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)} \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) - \frac{\omega_3}{\omega_2} \ln\left(\frac{\omega_3}{\omega_4}\right)}{\ln\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)} \\
 &= 1 - \frac{\omega_3}{\omega_2} \frac{\ln\left(\frac{\omega_3}{\omega_4}\right)}{\ln\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)}
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

L'utilisation de la contrainte des fréquences trouvée en équation (3.69) nous donne :

$$\begin{aligned}
 \eta &= 1 - \frac{\omega_3}{\omega_2} \\
 &= 1 - \frac{T_c}{T_h}
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

Nous avons donc bien retrouvé toutes les caractéristiques d'un cycle de Carnot avec un gaz parfait.

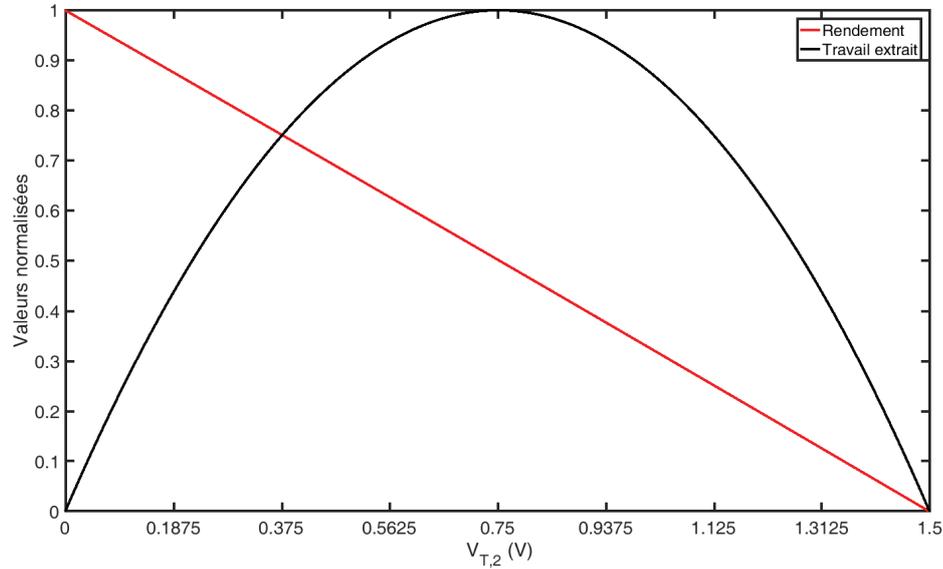
### 3.7.5 Choix des paramètres

Pour fixer la température de la source chaude nous sommes restreints par : avoir un signal détectable en borne inférieure, ne pas faire saturer l'amplificateur en borne supérieure. Le choix de la fréquence de résonance du nanofil au point 1 se fait comme nous l'avons dit précédemment par  $V_T = 0V$ . Pour fixer la tension au point 3 qui correspond à l'excursion maximale en fréquence nous prenons la tension maximale qui autorise toujours une mesure juste. En effet si la tension appliquée sur la contre électrode est trop grande nous risquons de voir à nouveau surgir des effets de déflexion ou de rotation des polarisations mécaniques. La tension maximale pour laquelle nous avons des mesures non perturbées est  $V_T = 1,5V$ . Reste ensuite à fixer la fréquence au point 2 et le choix ne paraît pas évident.

Pour illustrer ce choix nous allons tracer le rendement du cycle et le travail extrait en fonction de la tension  $V_{T,2}$ . Le rendement du cycle est défini par  $\eta = 1 - T_h/T_c = 1 - \omega_3/\omega_2$ . Les définitions d'énergie que nous avons prises jusqu'à maintenant sont issues de considérations thermodynamiques classique et le travail que nous avons défini est positif s'il est entrant dans le système et négatif sinon. Pour obtenir le travail extrait (positif s'il est sortant) nous avons donc besoin de l'opposé. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
 \frac{W_{\text{extrait}}}{k_B T_h} &= -\frac{\langle W_{1 \rightarrow 2} \rangle}{k_B T_h} - \frac{\langle W_{3 \rightarrow 4} \rangle}{k_B T_h} \\
 &= -\ln\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) - \frac{\omega_3}{\omega_2} \ln\left(\frac{\omega_4}{\omega_3}\right)
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

On rappelle que  $W_{2 \rightarrow 3} + W_{4 \rightarrow 1} = \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \Delta U_{4 \rightarrow 1} = 0$  car la variation d'énergie interne sur le cycle complet est nulle et  $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{3 \rightarrow 4} = 0$  car ces branches sont isothermes.



**Figure 3.20** – Travail extrait (normalisé à sa valeur maximale  $3,29\mu k_B T_h$ ) et rendement (normalisé à sa valeur maximale 1,14%) en fonction de  $V_{T,2}$ . Le tracé est réalisé pour  $\omega_1 = 2\pi \times 175kHz$  ( $V_{T,1} = 0V$ ) et  $\omega_3 = 2\pi \times 173kHz$  ( $V_{T,3} = 1,5V$ ).

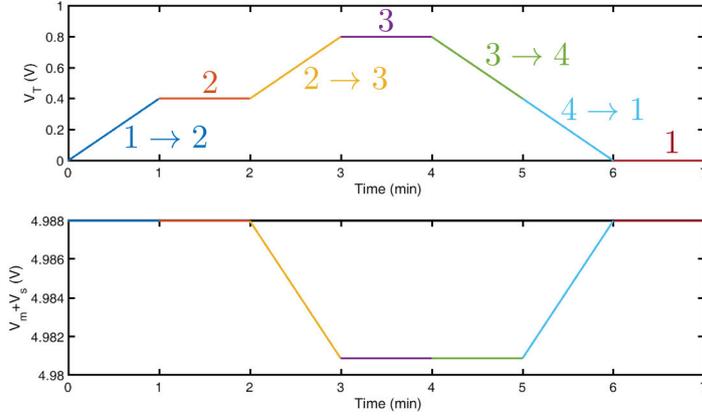
La figure 3.20 présente ce tracé. Nous avons pris des valeurs standard à titre d'illustration. Nous prenons donc  $\omega_1 = 2\pi \times 175kHz$  pour  $V_{T,1} = 0V$  et un tuning de  $2kHz$  pour  $V_T = 1,5V$ . Soit  $\omega_3 = 2\pi \times 173kHz$  pour  $V_{T,3} = 1,5V$ . Nous prenons entre ces deux points une variation linéaire de la fréquence en fonction de la tension défini comme :  $\omega = \omega_1 - \beta V_T$ . Avec  $\beta = 8,38.10^3 rad.s^{-1}.V^{-1}$  obtenu avec le point 3.

Nous avons alors deux choix plus évidents que les autres. Soit nous choisissons le point d'intersection non trivial des deux courbes pour  $V_{T,2} = 0,38V$  pour lequel on a la meilleure balance entre le rendement et le travail extrait (on a alors 75% à la fois du travail extrait maximal et du rendement maximal). Ou alors nous prenons la tension  $V_{T,2} = 0,75V$  qui maximise le travail extrait avec 50% du rendement maximal. C'est le second choix que nous avons réalisé.

### 3.7.6 Rampes de tension

Nous avons maintenant suffisamment d'informations pour définir les rampes de tension à appliquer. Nous avons besoin de deux rampes : une pour  $V_T$  qui va contrôler la fréquence du système et une pour  $V_s$  qui va contrôler la température. Ces rampes sont présentées en figure 3.21. La tension  $V_T$  varie de 0 à 0,8V en passant par 0,4V (afin de maximiser le travail extrait). Les plateaux servent à vérifier que les rapports de tension aux extrémités des branches vérifient bien la relation (3.66) ou (3.67) (en fonction de la nature de la branche : isotherme ou adiabatique). On place 3 paliers pour contrôler deux de ces rapports de tension. La tension varie linéairement entre ces plateaux pour faire varier linéairement la fréquence. Toutes les rampes et paliers ont été pris avec la même durée de 1 minute.

Revenons maintenant au cas de  $V_m$  dont nous avons discuté en 3.5.3.3. Pour rappel cette tension DC multiplie le bruit  $\tilde{V}$  et sa variation permet de réaliser des rampes de bruit



**Figure 3.21** – Rames de tension nécessaires à la réalisation d'un cycle. La tension  $V_T$  varie de 0 à 0,8V en passant par 0,4V (pour un tuning maximal de  $2kHz$ ). La tension  $V_m$  vaut 4,988V et la tension  $V_s$  varie entre 0V et  $-3,51V$  pour produire cette courbe. Ici la durée des rampes a été prise égale à 1 minute.

analogiques afin de faire varier la température effective de l'échantillon. Nous avons besoin que la tension multipliant le bruit soit assez grande pour maximiser notre rapport signal sur bruit. Cependant les variations de température ne sont pas très grandes comparativement à notre température effective de référence, nous utilisons donc une tension constante  $V_m$  de quelques Volts (nous assurant un signal correct) que nous modifions avec l'addition d'une tension  $V_s$  de l'ordre de quelques  $mV$  afin d'assurer le changement de température dans les parties adiabatiques du cycle de Carnot. Nous avons dit en section 3.5.3.3 suite à l'équation (3.49) que  $\langle V^2 \rangle = SV_m^2/\omega^2$ . Nous en déduisons donc pour une transformation isotherme (par exemple  $1 \rightarrow 2$ ) :

$$\begin{aligned} \omega_1^2 \langle V_R^2 \rangle_1 &= \omega_2^2 \langle V_R^2 \rangle_2 \\ SV_{m,1}^2 &= SV_{m,2}^2 \\ \frac{V_{m,2}}{V_{m,1}} &= 1 \end{aligned} \quad (3.78)$$

Comme le bruit injecté ne dépend pas de  $V_T$  il n'y a pas besoin de modifier  $V_m$  (donc  $V_s$ ) sur une branche isotherme. Sur une branche adiabatique (par exemple  $2 \rightarrow 3$ ) nous avons :

$$\begin{aligned} \omega_3^2 \langle V_R^2 \rangle_3 &= \omega_2^2 \langle V_R^2 \rangle_2 \\ \frac{1}{\omega_3^2} S^2 V_{m,3}^4 &= \frac{1}{\omega_2^2} S^2 V_{m,2}^4 \\ \frac{V_{m,3}}{V_{m,2}} &= \sqrt{\frac{\omega_3}{\omega_2}} \end{aligned} \quad (3.79)$$

Nous sommes dans un régime où la tension dépend linéairement de la tension  $V_T$ . Nous avons donc  $\omega = \omega_1 - \beta V_T$  avec  $\beta > 0$ . La référence est le point 1 car c'est celui où nous sommes en l'absence de tuning. En chaque instant  $t$  nous avons donc :

$$V_{m,2\rightarrow 3}(t) = \sqrt{\frac{\omega_1 - \beta V_{T,2\rightarrow 3}(t)}{\omega_2}} V_{m,2} \quad (3.80)$$

Avec  $V_{T,2\rightarrow 3}(t)$  la rampe  $V_T$  correspondante à cette portion du cycle. Typiquement  $\beta$  est calculé avec deux points, en général 1 et 3 (le maximum d'incursion en fréquence) et  $\beta = (\omega_1 - \omega_3)/V_{T,3}$ . Nous fixons  $V_m$  pour que le  $\Delta V$  théorique soit une valeur ronde et nous ajustons  $V_s$  expérimentalement pour obtenir le bon  $\Delta V$  en sortie du té BNC avant le multiplicateur dans la partie bruit (en bleu) de la figure 3.11 (nous avons un pont diviseur après  $V_s$  et le té BNC a sa réponse propre). Par exemple un  $V_m$  de 4,988V nous donne un  $\Delta V = -50mV$  avec les valeurs de tuning suivantes :  $\omega_1 = 2\pi \times 175,645kHz$ ,  $\beta = 7,857.10^3 rad/s/V$  et  $V_{T,3} = 0,8V$ ,  $\omega_2 = \omega_1 - \beta V_{T,2} = 2\pi \times 175,145kHz$ ,  $V_{T,2} = 0,4V$ . Pour obtenir ce  $\Delta V$  en pratique on doit régler  $V_s = -3,51V$ . Les rampes obtenues sont illustrées sur la figure 3.21.

## 3.8 Mesure des grandeurs thermodynamiques

Cette section s'intéresse au traitement des données issues de la mesure du cycle, c'est à dire au moyen d'extraire un travail et une chaleur. Nous explorerons aussi l'utilité et la nécessité de soustraire le bruit de fond dans nos mesures.

### 3.8.1 Discrétisation sur une branche

Pour définir le travail et la chaleur dans le cadre de la théorie de la thermodynamique stochastique nous avons défini des grandeurs intégrales. Or pour traiter nos données nous allons avoir besoin d'une version discrète de ces formules car nous mesurons un ensemble fini de points. Nous allons donc repartir de l'équation (3.16). Avant cela nous avons besoin de quelques informations complémentaires. Nous ne mesurons pas un déplacement  $x(t)$  mais une tension (en module)  $V_R(t)$ . Un coefficient de transduction  $G$  permet de passer de l'un à l'autre :  $\langle V_R^2 \rangle = G \langle R^2 \rangle = 2G \langle x^2 \rangle$ . Ce coefficient de transduction peut être exprimé en fonction de la tension mesurée à un point de référence (le point 1 dans notre cas) via l'équipartition de l'énergie :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}k_B T_h &= \frac{1}{2}m\omega_1^2 \langle x^2 \rangle_1 \\ &= \frac{1}{4G}m\omega_1^2 \langle V_R^2 \rangle_1 \\ \frac{1}{G} &= \frac{2k_B T_h}{m\omega_1^2 \langle V_R^2 \rangle_1} \end{aligned} \quad (3.81)$$

Nous passons alors à la version discrète de la formule en commençant par le travail. Le travail effectué pendant une transformation est la somme de chaque quantité infinitésimale de travail évaluée à chaque point d'échantillonnage. Nous moyennons ensuite cette quantité sur plusieurs réalisations de la transformation.

$$\begin{aligned}
 \delta W_t &= \frac{1}{2} x_t^2 \circ dk \\
 \delta W_t &= \frac{1}{4} R_t^2 \circ dk \\
 &= \frac{1}{4G} V_{R,t}^2 \circ dk \\
 &= \frac{k_B T_h}{2m\omega_1^2} \frac{V_{R,t}^2}{\langle V_R^2 \rangle_1} \circ dk \\
 &= \frac{k_B T_h}{2\omega_1^2} \frac{V_{R,t}^2}{\langle V_R^2 \rangle_1} \circ d\omega^2
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

$d\omega^2$  est calculé avec la relation linéaire entre la pulsation et la tension  $V_T$  :

$$d\omega^2 = \omega_{t+dt}^2 - \omega_t^2 = (\omega_1 - \beta V_{T,t+dt})^2 - (\omega_1 - \beta V_{T,t})^2 \tag{3.83}$$

Finalement, comme nous traitons des processus stochastiques nous devons traiter les intégrales avec un produit de Stratonovich car dans ce cas l'intégrale au sens de Riemann ne fonctionne pas (voir annexe C). Pour chaque segment nous utilisons donc le point médian.

$$\frac{\delta W_t}{k_B T_h} = \frac{1}{4\omega_1^2} \frac{V_{R,t}^2 + V_{R,t+dt}^2}{\langle V_R^2 \rangle_1} (\omega_{t+dt}^2 - \omega_t^2) \tag{3.84}$$

Au final on a :

$$\frac{\langle W \rangle}{k_B T_h} = \left\langle \sum \frac{\delta W_t}{k_B T_h} \right\rangle \tag{3.85}$$

On fait de même pour la chaleur :

$$\begin{aligned}
 \delta Q_t &= \frac{1}{2} m \circ d[\omega_t^2 x_t^2] + \frac{1}{2} k_t \circ d[x_t^2] \\
 &= \frac{1}{4} m \circ d \left[ \frac{\omega_t^2 V_{R,t}^2}{G} \right] + \frac{1}{4} k_t \circ d \left[ \frac{V_{R,t}^2}{G} \right] \\
 &= \frac{k_B T_h}{2\omega_1^2} \circ d \left[ \frac{\omega_t^2 V_{R,t}^2}{\langle V_R^2 \rangle_1} \right] + \frac{k_B T_h}{2\omega_1^2} \omega_t^2 \circ d \left[ \frac{V_{R,t}^2}{\langle V_R^2 \rangle_1} \right]
 \end{aligned} \tag{3.86}$$

En appliquant Stratonovich on obtient :

$$\frac{\delta Q_t}{k_B T_h} = \frac{1}{2\omega_1^2} \left[ \frac{\omega_{t+dt}^2 V_{R,t+dt}^2 - \omega_t^2 V_{R,t}^2}{\langle V_R^2 \rangle_1} \right] + \frac{1}{4\omega_1^2} (\omega_t^2 + \omega_{t+dt}^2) \left[ \frac{V_{R,t+dt}^2 - V_{R,t}^2}{\langle V_R^2 \rangle_1} \right] \tag{3.87}$$

### 3.8.2 Impact du bruit

Nous avons déjà avancé un argument pour soustraire le bruit de fond qui est celui de l'amélioration de la correction de mesure sur le détecteur synchrone. Nous voulons à présent étudier l'effet du bruit sur les grandeurs thermodynamiques pour avoir une autre perspective

sur son impact. Supposons que nous mesurons un bruit blanc gaussien  $x_b$  en plus de notre déplacement  $x$ , les deux signaux étant décorrélés. Pour le travail le calcul devient alors :

$$\begin{aligned}
 \langle W \rangle &= \left\langle \int \frac{1}{2} (x + x_b)^2 \circ dk \right\rangle \\
 &= \frac{1}{2} \int (\langle x^2 \rangle + \langle x_b^2 \rangle + 2 \langle x x_b \rangle) \circ dk \\
 &= \frac{1}{2} \int (\langle x^2 \rangle + \langle x_b^2 \rangle + 0) \circ dk \\
 &= \frac{1}{2} \int \langle x^2 \rangle dk + \frac{\langle x_b^2 \rangle}{2} (k_f - k_i)
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

On définit  $\Delta k = k_f - k_i$ . Comme l'écart entre les états initial et final est faible on peut écrire au premier ordre  $\ln(k_f/k_i) = \ln(1 + \Delta k/k_i) \sim \Delta k/k_i$ . Tant que l'écart en fréquence et donc en raideur est faible on peut donc écrire, tant pour une branche isotherme que pour une branche adiabatique :

$$\begin{aligned}
 \langle W \rangle &\sim \frac{k_B T}{2} \frac{\Delta k}{k_i} + \frac{\langle x_b^2 \rangle}{2} (k_f - k_i) \\
 &= \frac{\langle x^2 \rangle_i}{2} (k_f - k_i) + \frac{\langle x_b^2 \rangle}{2} (k_f - k_i)
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

Ou on a appliqué le théorème de l'équipartition de l'énergie au point de départ  $i$  de la branche. Comme notre ratio signal sur bruit est faible (typiquement 2)  $\langle x_b^2 \rangle$  et  $\langle x^2 \rangle_i$  sont proches et les deux termes de l'équation précédente sont du même ordre. Pour une mesure correcte du travail il est donc indispensable de soustraire le bruit.

On fait le même raisonnement avec le calcul de la chaleur :

$$\begin{aligned}
 \langle Q \rangle &= \left\langle \int k(x + x_b) \circ d(x + x_b) \right\rangle \\
 &= \frac{1}{2} \int k \circ d \langle (x + x_b)^2 \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \int k \circ d \langle (x^2 + x_b^2 + 2x x_b) \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \int k \circ d \langle x^2 \rangle + \frac{1}{2} \int k \circ d \langle x_b^2 \rangle + 0
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

Le premier terme est celui que nous cherchons, le second s'annule car la valeurs RMS du bruit de fond n'est pas impactée par la transformation ( $d \langle x_b^2 \rangle = 0$ ). Pour la chaleur la soustraction du bruit n'est pas utile.

Le rendement est évalué à partir d'un ratio entre un travail et une chaleur. Comme la mesure du travail est impactée par le bruit et que la mesure de la chaleur ne l'est pas il est certain que la mesure de rendement va être faussée également. Nous avons donc tout intérêt à soustraire le bruit de fond.

## 3.9 Moyennage du signal

### 3.9.1 Reproduction des données d'une rampe

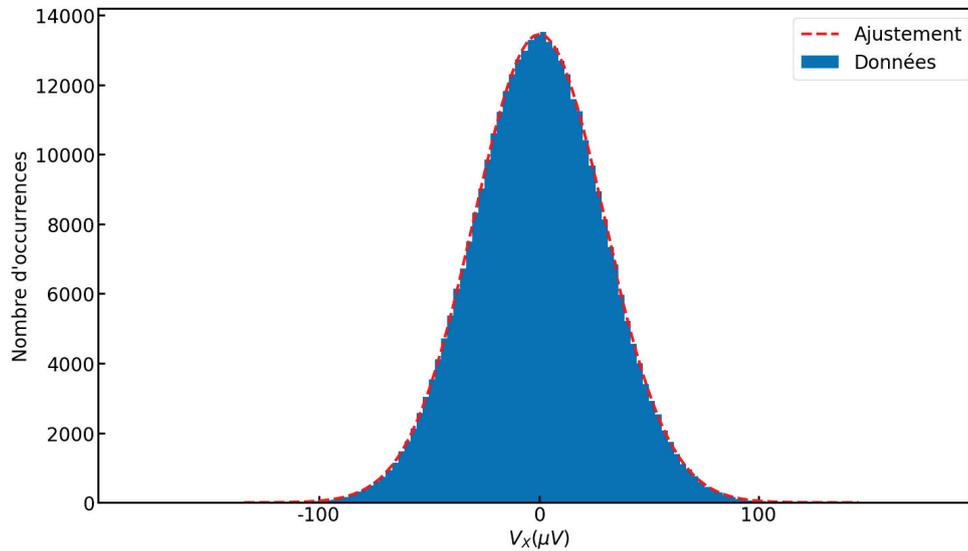
Dans cette section nous allons nous intéresser à la reproduction de données en vue de simulations. Notre problématique est la suivante : la mesure de la chaleur est extrêmement bruitée. Pour les variations de fréquence que nous avons l'ordre de grandeur du travail et de la chaleur est de l'ordre du  $mk_B T$ . Comme nous le verrons par la suite l'incertitude sur le travail est en deçà, ce qui nous permet de le mesurer assez facilement. En revanche l'incertitude sur la chaleur est de l'ordre de  $k_B T$ , ce qui rend sa mesure délicate. Pour obtenir sa valeur il faut donc au choix : faire une mesure assez longue pour sortir du bruit, ce qui implique la stabilité du système sur un temps suffisamment long, ou bien trouver un moyen de réduire l'incertitude. Les simulations ont pour but d'explorer cette deuxième possibilité, il nous faut donc être capable de générer aléatoirement des données correspondant à une transformation thermodynamique. Pour cela nous allons dans un premier temps nous intéresser à la distribution statistique des signaux de tension mesurés sur un palier pour ensuite reproduire une rampe isotherme. Ces simulations sont réalisées avec Python.

Dans un premier temps nous nous intéressons au signal de tension en phase  $V_X$  issu d'une mesure au détecteur synchrone. Nous nous plaçons à  $V_T = 0V$  et l'injection de bruit est constante avec  $V_s = 0V$ . La mesure se fait pendant une minute avec un échantillonnage de  $14400Sa/s$ . Ce signal est aléatoire car il est issu de l'excitation de l'échantillon par un bruit blanc gaussien et nous sommes dans le cas d'un mouvement Brownien. Le nombre d'échantillons obtenus est grand au vu de la durée de l'acquisition et du taux d'échantillonnage, donc d'après le théorème de la limite centrale [35, 36, 37] la distribution statistique qui décrit notre mesure sera une gaussienne de toute façon.

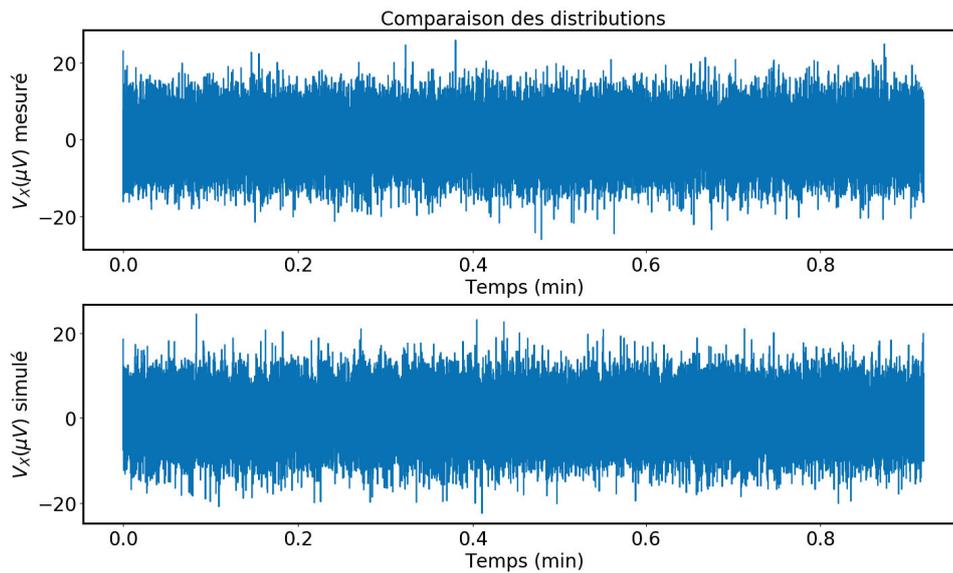
La figure 3.22 montre l'histogramme tiré de cette mesure et l'ajustement par une distribution gaussienne. Cela nous permet d'en tirer la moyenne et l'écart type caractéristique de notre vibration. On trouve alors pour la moyenne  $\mu = 4,95nV$  et pour l'écart type  $\sigma = 29,64\mu V$ . C'est ce qui est attendu pour un mouvement Brownien : en moyenne le déplacement est nul mais l'écart type non nul indique que le système explore une certaine portion de l'espace qui l'entoure.

On peut maintenant simuler une autre mesure de  $V_X$  en générant aléatoirement un jeu de données issu d'une distribution Gaussienne avec les mêmes caractéristiques (variance et moyenne). On utilise pour cela le package *random* de *numpy*. Ceci est illustré en figure 3.23. On peut voir qu'on a un généré un jeu de données dont l'évolution temporelle est différente mais qui répond à la même statistique.

On veut maintenant être capables de simuler une rampe. Or lors de ce type de mesure on utilise  $V_R^2 = V_X^2 + V_Y^2$ .  $V_X$  et  $V_Y$  ont les mêmes distributions car la phase est aléatoire. Si  $V_X$  a une distribution gaussienne de moyenne  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$  on peut alors définir la variable centrée réduite  $V'_X = (V_X - \mu)/\sigma$  qui suit une loi normale de moyenne nulle et d'écart type unitaire. Nous allons nommer  $\varphi(x)$  la densité de probabilité d'une telle loi normale et  $\chi^2(x, k)$  la densité de probabilité d'une distribution chi carré de dimension  $k$  [38].



**Figure 3.22** – Histogramme de la mesure de  $V_X$  sur une durée de 1 minute avec un échantillonnage de  $14400 Sa/s$ . Cet histogramme est ajusté avec une gaussienne et on trouve pour la moyenne  $\mu = 4,95 nV$  et pour l'écart type  $\sigma = 29,64 \mu V$ .



**Figure 3.23** – Comparaison des histogrammes obtenus via les données de mesure et la génération aléatoire de données issues d'une statistique Gaussienne.

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\ \chi^2(x, k) &= \begin{cases} \frac{x^{k/2-1} \exp(-\frac{x}{2})}{2^{k/2} \Gamma(\frac{k}{2})} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.91)$$

Avec  $\Gamma(k/2)$  la fonction gamma, notamment  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ . Nous connaissons la distribution de  $V'_X$  mais nous avons besoin de la distribution de  $V_X'^2$ . Pour cela nous utilisons la technique de transformation des distributions. Soit  $X$  une variables aléatoire suivant une densité de probabilité connue  $f_X(x)$ . Soit une nouvelle variable aléatoire  $Y$  obtenue par transformation monotone de  $X : Y = g(X)$ . Alors la densité de probabilité de la variable aléatoire  $Y$  est obtenue par :

$$f_Y(y) = \left| \frac{d}{dy} (g^{-1}(y)) \right| f_X(g^{-1}(y)) \quad (3.92)$$

Avec  $g^{-1}$  la fonction réciproque de  $g$ . Dans le cas qui nous intéresse nous avons  $X = V'_X$ ,  $Y = V_X'^2$  et  $g : x \rightarrow x^2$  qui n'est pas monotone (pour une valeur de  $x^2$  nous avons deux valeurs possibles de  $x$ ). La fonction inverse est la fonction racine. Dans ce cas nous pouvons utiliser une extension de la formule (3.92) sur chaque sous ensemble où la fonction  $g$  est monotone :

$$f_Y(y) = \sum_{k=1}^n \left| \frac{d}{dy} (g_k^{-1}(y)) \right| f_X(g_k^{-1}(y)) \quad (3.93)$$

Où  $n$  est le nombre de solutions de  $g(x) = y$  et  $g_k^{-1}(y)$  sont ces solutions. Pour notre fonction  $g$  nous avons comme dit précédemment deux solutions et les fonctions inverses sont  $x = \pm\sqrt{y}$ . L'application de la formule (3.93) nous donne :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{y}^2\right) + \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{y}^2\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.94)$$

On trouve donc que si  $V'_X$  suit une loi normale de moyenne nulle et d'écart type unitaire alors  $V_X'^2$  suit une distribution  $\chi^2$  de dimension 1 . En sachant cela on peut générer :

$$V_X^2 = \sigma^2 V_X'^2 + 2\mu V_X - \mu^2 \quad (3.95)$$

Avec  $V_X'^2$  décrit par la loi  $\chi^2$  et  $V_X$  décrit par la loi gaussienne avec les paramètres estimés précédemment. On conserve le  $\mu$  mesuré car il n'est pas exactement nul même s'il est proche de 0.

Pour générer une rampe isotherme, on applique une tension  $V_T$ , ce qui a pour effet de changer la fréquence du système et donc  $\langle V_R^2 \rangle$  via l'équipartition de l'énergie. Simuler une rampe revient donc à impacter la variance de nos distributions. Comme précédemment nous allons comparer le résultat de simulation avec une expérience pour vérifier que nous

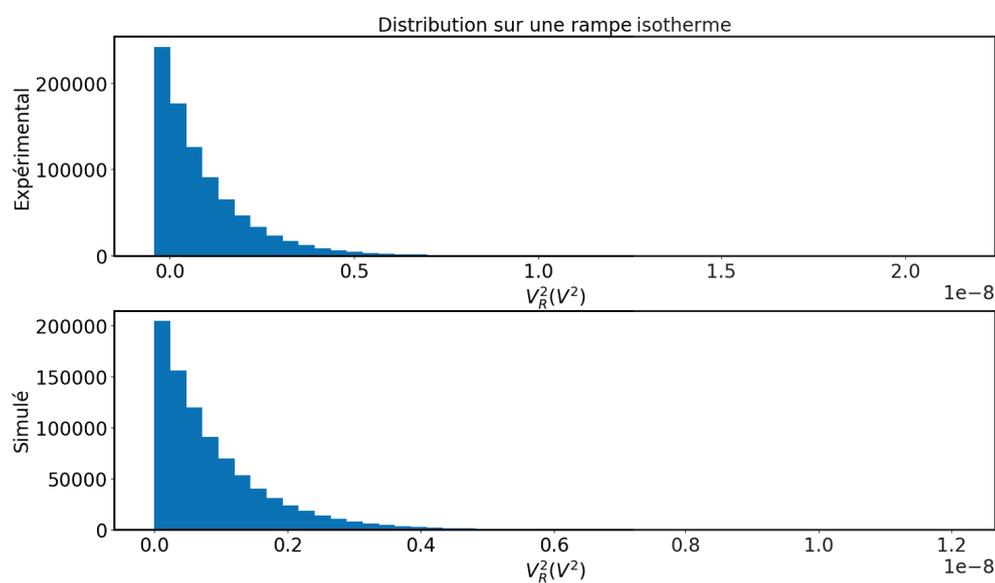
sommes fidèles aux données que l'on mesure. La mesure est effectuée avec une rampe de  $V_T$  similaire à ce qui est présenté en figure 3.21 mais sans la partie adiabatique ; nous avons donc une rampe montante, un plateau à  $V_T = 0,8V$  (que nous allons repérer par l'indice 2) soit environ  $1kHz$  de tuning dans ce cas, un rampe descendante et un plateau à  $V_T = 0V$  (que nous allons repérer par l'indice 1). Chaque partie dure 1 minute et  $V_R^2$  est mesuré avec un échantillonnage de  $14400Sa/s$ . Un logiciel Labview qui gère l'acquisition des données se charge également de séparer les points des différentes parties de la transformation (les plateaux et les rampes) grâce au signal TTL sorti du Tektronix qui gère la rampe et mesuré par le détecteur synchrone (signal auxiliaire en face arrière de l'appareil).

Pour la simulation nous allons seulement utiliser le plateau à  $V_T = 0V$  qui va nous donner  $\langle V_R^2 \rangle_1$  et la rampe montante qui va nous donner notre distribution de référence. Pour obtenir les variances sur toute la rampe on utilise l'équipartition de l'énergie. On sait que sur une rampe isotherme où la température est constante les états 1 et 2 sont reliés par la relation :  $f_1^2 \langle V_R^2 \rangle_1 = f_2^2 \langle V_R^2 \rangle_2$ . Nous créons donc une rampe de variance avec le même nombre de points régulièrement espacés que sur les données  $V_R^2$  de la rampe montante. Les valeurs varient entre le  $\langle V_R^2 \rangle_1$  mesuré et  $\langle V_R^2 \rangle_2 = \langle V_R^2 \rangle_1 f_1^2 / f_2^2$  (nous avons besoin pour cela de mesurer les fréquences). Pour générer la tension associée à cette nouvelle variance de la distribution nous utilisons l'équation (3.95) en chaque point de la rampe. Comme  $V_X$  et  $V_Y$  ont quasiment la même distribution on a  $\langle V_X^2 \rangle \sim \langle V_Y^2 \rangle = \langle V_R^2 \rangle / 2$ . Nous générons deux points pour avoir  $V_X^2$  et  $V_Y^2$ , la moyenne  $\mu$  reste la même mais nous utilisons la variance  $\langle V_R^2 \rangle / 2$  du point où nous sommes actuellement. Finalement nous sommions pour avoir  $V_R^2$ . Le résultat obtenu est montré en figure 3.24. On peut voir qu'on reproduit les mêmes caractéristiques statistiques (la distribution est dominée par la partie en  $\chi^2$ ). On remarque que dans la distribution expérimentale on a un certain nombre de valeurs négatives. Cela vient du fait que l'on soustrait un bruit. Nous ne cherchons pas à reproduire cette caractéristique dans nos simulations.

Avec les valeurs de  $V_R^2$  et de fréquences associées on peut calculer un travail et une chaleur sur cette rampe unique simulée. Pour les fréquences on utilise les fréquences mesurées lors d'une expérience de rampe. Cette mesure de fréquence se fait de la façon suivante : on mesure la fréquence à  $V_T = 0V$  et à  $V_T > 0V$  avant l'expérience. La tension varie linéairement en fonction de  $V_T$  entre ces deux points et ces mesures nous donnent le coefficient directeur. En cours d'expérience la mesure de  $V_T$  sur le détecteur synchrone nous permet de remonter à la valeur de la fréquence.

Remarque : dans le descriptif expérimental final nous avons précisé ne pas mesurer la fréquence pour diminuer le bruit. Ces simulations ont été faites lorsque la mesure de fréquence était encore effectuée en cours de rampe. Nous verrons l'effet du passage à des fréquences simulées dans la section 3.10.2.1. L'incidence sur les résultats de simulation est minimale et concerne l'écart type sur le travail.

Avec les valeurs de fréquence mesurées aux extrémités de la rampe on en déduit que le travail théorique est de  $-5,74mk_B T$  (avec l'équation (3.18)) et la chaleur est l'opposé. Sur cette rampe simulée on trouve  $-4.447mk_B T$  pour le travail et  $1704,989mk_B T$  pour la chaleur. Ceci illustre bien le problème, pour le travail nous sommes proches de la bonne valeur et donc moyenné sur plusieurs rampes nous permettra de converger assez rapidement. Par contre pour la chaleur nous sommes trois ordres de grandeur au dessus de la valeur attendue. En pratique nous avons un écart type  $\sigma$  élevé et il nous faudra un nombre conséquent de points pour converger (car l'erreur diminue en  $\sigma/\sqrt{N}$  avec  $N$  le nombre de mesures).



**Figure 3.24** – Comparaison de l’histogramme des valeurs de  $V_R^2$  sur la mesure d’une rampe isotherme et sur une simulation. On a utilisé  $\langle V_R^2 \rangle_1 = 8,87 \cdot 10^{-10} V^2$ ,  $f_1 = 175684,16 Hz$  et  $f_2 = 174678,69 Hz$ . Les fréquences ont été mesurées séparément à l’analyseur de spectre. On remarque sur l’histogramme du haut que le premier bin est situé à gauche de 0 et nous avons donc des valeurs négatives. Cela vient du fait que pendant la mesure nous soustrayons le bruit de fond mesuré en amont.

### 3.9.2 Statistique sur plusieurs rampes

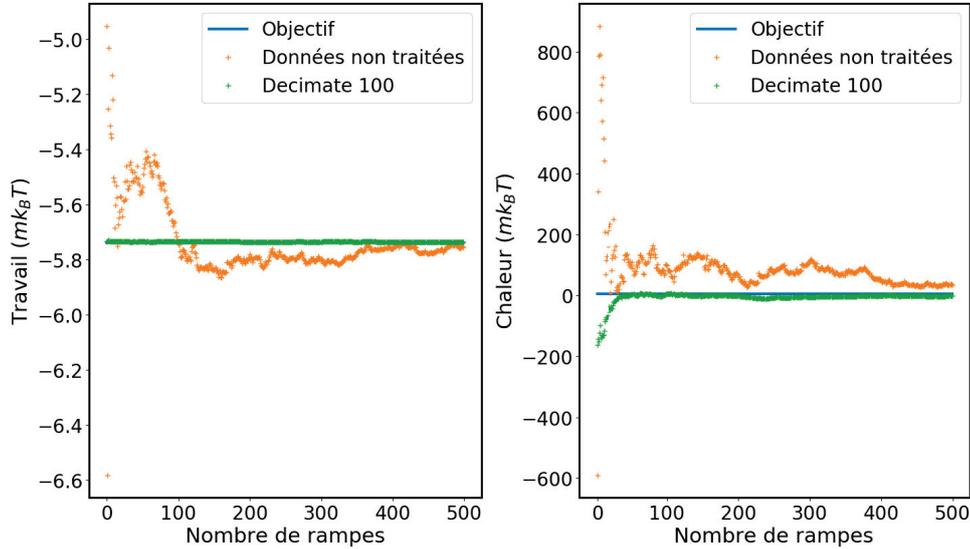
Nous savons maintenant reproduire une rampe numériquement, ce qui nous permet de faire des test sur le traitement de données. On reprend la méthode précédente mais on génère 500 rampes différentes. Ensuite on peut extraire un travail moyen et une chaleur moyenne sur ces rampes. En plus de cela nous allons appliquer sur les données de  $V_R^2$  un *decimate* (ou moyenne glissante). Le principe est de réduire l'échantillonnage en moyennant des paquets de points. Concrètement supposons qu'on ait  $N$  points et qu'on applique un *decimate* avec un taux de 100 au final on aura  $n = N/100$  points et chaque point de l'ensemble  $\{n\}$  est la moyenne de 100 points adjacents de l'ensemble  $\{N\}$  (les groupes de 100 points ne se chevauchant pas). L'objectif est de réduire l'écart type sur  $V_R^2$  et de voir si l'écart type sur la chaleur s'en trouve réduit sans générer pour autant de biais statistique. Étant donné qu'analytiquement on a une formule complexe le problème n'est pas évident à traiter. Pour cette raison il est plus simple d'effectuer des simulations. Les résultats seront présentés avec un taux de *decimate* croissant.

La figure 3.25 présente les résultats pour le travail et la chaleur avec un *decimate* de 100 (sachant que sur la rampe nous avons 863576 points). Les valeurs théoriques sont représentées par la ligne pleine bleue. Les valeurs obtenues ainsi que les écarts types sont résumés dans la table 3.1. On peut voir que la valeur de travail converge au bout de 500 rampes pour le travail sans *decimate*. Cependant l'application d'un *decimate* même faible réduit drastiquement le temps de convergence. Cela se voit sur l'écart type puisqu'on gagne environ deux ordres de grandeur. La valeur moyenne atteinte est la bonne, nous n'avons pas généré de biais. Au premier abord sur la courbe on gagne en temps de convergence et en précision pour la chaleur. En effet sans *decimate* la chaleur n'a toujours pas convergé avec 500 rampes. Cependant en regardant les valeurs, bien qu'on ait gagné en écart type (un ordre de grandeur), celui-ci reste deux ordres de grandeur supérieur à la valeur moyenne théorique. Le *decimate* de 100 n'est donc pas encore suffisant pour la chaleur, nous pouvons encore pousser le processus plus loin.

	Travail ( $mk_B T$ )	Chaleur ( $mk_B T$ )
Valeur théorique	-5,7401	5,7401
Brute	$-5,7561 \pm 1,517$	$34,6932 \pm 1394,34$
Decimate 100	$-5,7364 \pm 6,67.10^{-3}$	$-1,1076 \pm 139,3$
Decimate 5000	$-5,6801 \pm 6,08.10^{-3}$	$6,4146 \pm 20,67$
Decimate 15000	$-5,5758 \pm 6,27.10^{-3}$	$5,6617 \pm 11,19$

**Table 3.1** – Valeurs obtenues par simulation pour le travail et la chaleur pour différents *decimate* ainsi que les écarts types associés. La valeur attendue et le résultats sans *decimate* sont indiqués à titre de comparaison. Ces résultats sont issus de la génération de 500 rampes.

La figure 3.26 présente les résultats avec un *decimate* bien plus élevé de 5000. Pour le travail on note toujours une accélération de la convergence. En revanche on voit aisément que la valeur moyenne atteinte n'est plus la bonne. Pour le travail un *decimate* trop important dégrade la mesure, on se limitera donc à un taux de 100 dans la partie expérimentale. Pour la chaleur en revanche on converge toujours vers la bonne valeur et la zone de variation se resserre. On voit dans les valeurs de la table 3.1 qu'on a encore gagné un ordre de grandeur dans l'écart type. On a maintenant le bon signe pour la valeur moyenne et celle-ci est bien plus proche de la valeur théorique (on a 12% d'erreur contre plus de 100% auparavant).

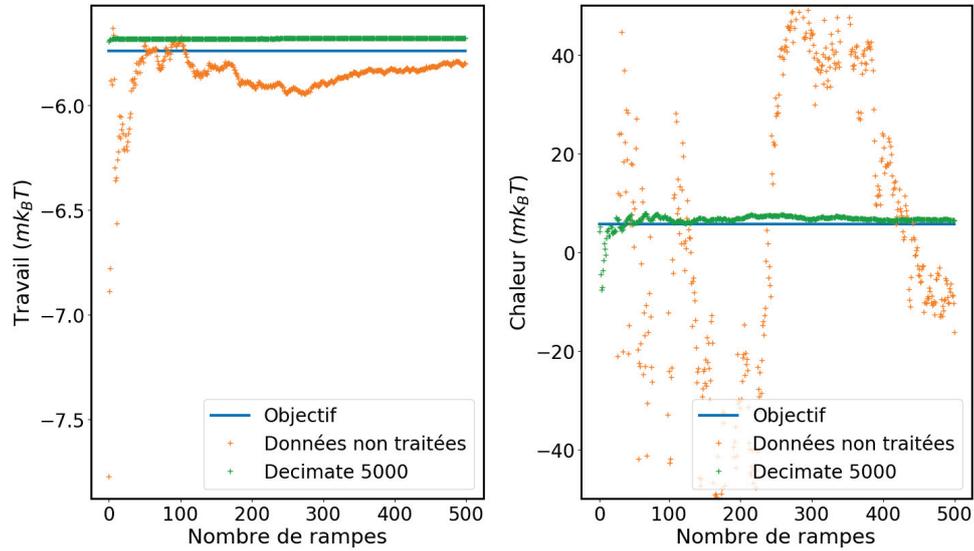


**Figure 3.25** – Convergence du travail et de la chaleur pour 500 rampes isothermes simulées. Le decimate appliqué est de 100 sur 863576 points, il nous reste 8635 points sur la rampe.

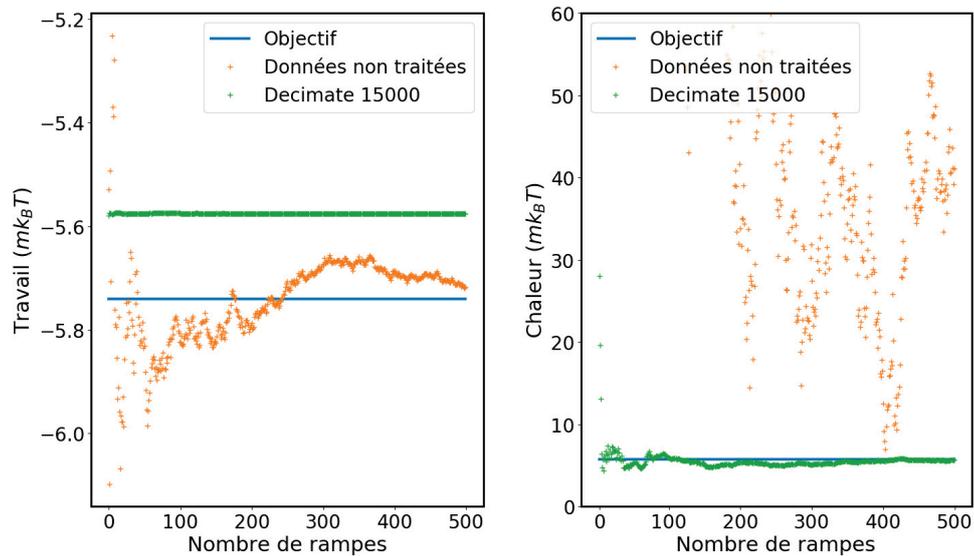
La figure 3.27 présente les résultats avec un dernier decimate de 15000. La conclusion reste la même pour le travail, la nouvelle augmentation du decimate a encore dégradé la valeur moyenne vers laquelle les simulations convergent. Au niveau de l'écart type nous n'avons d'ailleurs rien gagné en passant de 100 à 5000 ou 15000. Pour la chaleur l'effet est encore positif. Le gain est réduit sur l'écart type où nous avons gagné un facteur 2, ce qui reste appréciable. L'erreur sur la valeur moyenne est de 1,4% cette fois. Ces résultats semblent indiquer qu'il n'y a pas de limite au decimate que l'on peut appliquer sur la chaleur et l'on serait tenté d'augmenter encore le taux. Cependant il faut noter qu'avec ce decimate de 15000 il ne nous reste plus que 57 points sur la rampe, ce qui commence à faire peu. De plus nous verrons par la suite qu'expérimentalement nous obtenons des écarts types plus élevés qu'en simulation, ce qui nuance le gain du passage de 5000 à 15000. Pour éviter de trop réduire le nombre de points sur les rampes, ce qui fatalement devrait entraîner des erreurs, nous nous limiterons en général à des decimate inférieurs à 10000.

### 3.10 Réalisation expérimentale

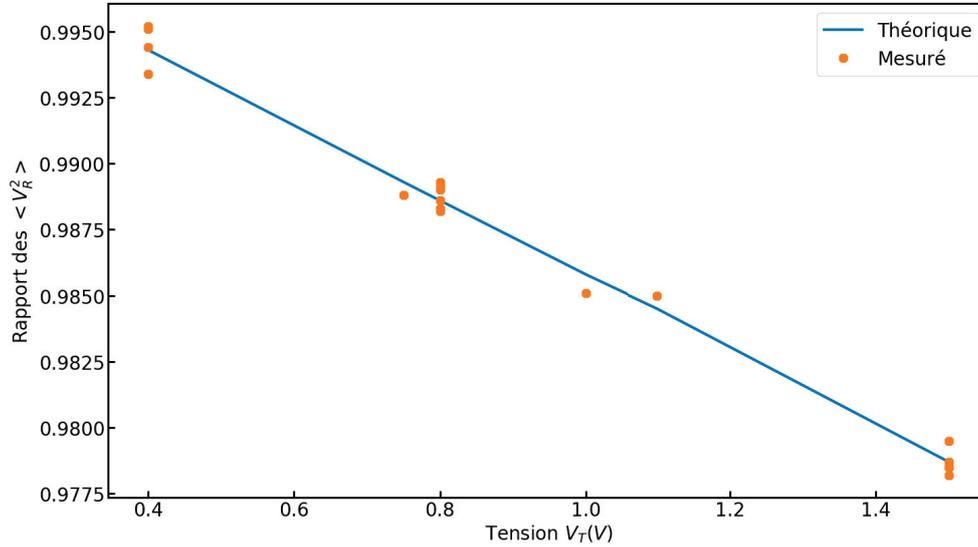
Nous présentons les résultats de mesure que nous avons obtenus. Cette section traitera en premier de l'obtention de rapports fiables entre les plateaux dans les rampes de tension (pour les cycles ces plateaux nous servent de point de contrôle), soit une étude statique. Nous passerons ensuite à la partie dynamique avec dans un premier temps la réalisation de rampes isothermes seules qui illustreront les résultats de simulation sur le decimate et l'intérêt de la correction de la fonction de réponse du détecteur synchrone. Puis dans un second temps nous présenterons les premiers résultats de cycle complet de Carnot que nous avons obtenus. Nous aborderons tout au long de cet exposé les difficultés qui ont limité nos résultats.



**Figure 3.26** – Convergence du travail et de la chaleur pour 500 rampes isothermes simulées. Le decimate appliqué est de 5000 sur 863576 points, il nous reste 172 points sur la rampe. Nous zoomons sur la courbe de chaleur pour avoir une meilleure visibilité.



**Figure 3.27** – Convergence du travail et de la chaleur pour 500 rampes isothermes simulées. Le decimate appliqué est de 15000 sur 863576 points, il nous reste 57 points sur la rampe. Nous zoomons sur la courbe de chaleur pour avoir une meilleure visibilité.



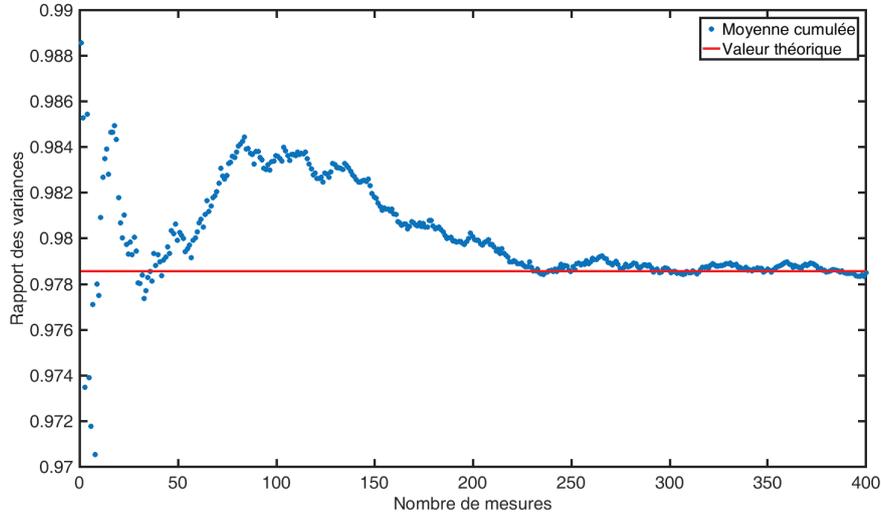
**Figure 3.28** – Rapports de variance mesurés en fonction de la tension de tuning  $V_T$ . Le rapport théorique est déterminé par le rapport des fréquences. Les résultats présentés sont pour les extrémités de transformation isothermes. L’erreur avec le rapport théorique est inférieure à 0,1% pour tous les points.

### 3.10.1 Mesures statiques

Cette première partie s’intéresse aux résultats obtenus dans un régime statique, c’est à dire que l’on mesure seulement les plateaux de la rampe de tension en figure 3.21. Plus précisément on mesure la tension  $V_R^2$  (moins le bruit et avec la correction du détecteur synchrone) pendant 60s pour deux valeurs de  $V_T$  successivement (on part toujours de  $V_T = 0V$  qui est le départ du cycle puis on applique un  $V_T > 0$ ). Ensuite pour chaque tronçon de 60s on évalue la variance  $\langle V_R^2 \rangle$  et on vérifie qu’en moyenne le rapport de ces variances converge vers la valeur fixée par l’équipartition de l’énergie. Donc pour une rampe isotherme  $\langle V_R^2 \rangle_1 / \langle V_R^2 \rangle_2 = (f_2/f_1)^2$  et pour une rampe adiabatique  $\langle V_R^2 \rangle_2 / \langle V_R^2 \rangle_3 = f_3/f_2$  (voir équations (3.66) et (3.67)). Les mesures statiques ont toujours été testées sur des rampes isothermes mais la dernière égalité est utile pour les vérifications de rapport sur le cycle complet.

Les résultats de ces mesures sont présentés en figure 3.28. On peut y voir l’évolution du rapport en fonction de la tension  $V_T$ . Les points de mesures sont répartis sur une gamme de  $1,5V_T$  qui est notre incursion maximale. L’écart entre les points de mesure et la théorie est inférieur à 0,1% pour chaque point, pourtant au vu de la variation du rapport en fonction de la tension il peut être difficile de discriminer des rapports pour des tensions  $V_T$  proches. Il vaut donc mieux utiliser notre incursion au maximum. Typiquement pour ces résultats nous avons mesuré 400 à 500 plateaux (pour chaque tension), ce qui représente 13 à 14 heures de mesures. Quelques mesures ont duré un ou deux jours et une mesure a convergé rapidement avec une centaine de plateaux soit 3 heures environ.

Pour les tensions auxquelles nous avons le plus de points nous observons une certaine



**Figure 3.29** – Moyenne cumulée du rapport des  $V_R^2$  en fonction du nombre de mesures. La moyenne converge pour fluctuer faiblement autour d’une valeur stable. Dans ce cas la mesure converge vers la valeur théorique (trait rouge plein).

reproductibilité dans les mesures. Les mesures pour 0.8, 1, 1.1 et une partie de  $1.5V_T$  ont été effectuées d’affilée pendant une période restreinte de quelques jours et toutes les mesures ont convergé vers la bonne valeur. Nous n’avons pas de points au delà de  $1.5V_T$  qui a été l’incursion maximale utilisée pour tous nos tests. On s’attend à une tension limite au delà de laquelle les rapports se dégradent par rapport à la théorie pour des raisons évoquées précédemment. On peut commencer à voir apparaître des déflexions qui modifient le signal en fonction de la tension appliquée, le bruit injecté peut devenir dépendant de  $V_T$ , on peut avoir une rotation des polarisations mécaniques qui modifie le signal également...

Pour contrôler la valeur de rapports obtenue nous utilisons le tracé en figure 3.29 qui présente la moyenne cumulée du rapport des variances en fonction du nombre de mesures. Avec peu de mesures le rapport moyen fluctue beaucoup. Le nombre de points augmentant, les fluctuations diminuent pour osciller plus faiblement autour d’une valeur stable. Dans les cas où la mesure est bonne cette valeur est la valeur théorique. Sur la figure 3.29 on a bien une convergence du rapport moyen vers la valeur théorique attendue qui est représentée par un trait plein en rouge. Sur cette mesure on avait  $r_{th} = 0,9786$  et on a mesuré  $\langle V_{R,1}^2/V_{R,2}^2 \rangle = 0,9785 \pm 1,2 \cdot 10^{-3}$  où l’erreur est obtenue via  $\sigma/\sqrt{N}$  avec  $\sigma$  l’écart type de la série de donnée et  $N$  le nombre de points (ici  $N = 400$ ). Ceci est une valeur typique d’erreur pour nos mesures. Sur des mesures avec plus de points on peut descendre dans les quelques  $10^{-4}$ .

Nous sommes donc capables de mesurer les tensions avec suffisamment de précision pour obtenir les bons rapports en fonction du tuning, le signal suit l’évolution attendue. Nous pouvons dès lors réaliser des mesures dynamiques en appliquant les rampes de tension.

### 3.10.2 Mesures dynamiques

#### 3.10.2.1 Rampes isothermes

Dans un premier temps nous présentons des mesures de rampes isothermes qui nous ont servi de cas d'étude pour les tests de moyennage et de correction de la fonction de réponse. La rampe de tension est appliquée à l'échantillon (via la contre électrode). Le signal  $V_R^2$  est mesuré en continu sur une bande passante de  $3kHz$  autour de la fréquence centrale du détecteur synchrone (qui est choisie médiane par rapport aux fréquences des extrémités de la rampe). Le taux d'échantillonnage est de  $14400Sa/s$ . Le signal TTL du générateur de la rampe nous permet en cours de mesure de séparer les différentes portions de la transformation (rampes et plateaux). La fréquence est simulée comme variant linéairement entre les deux valeurs sur les plateaux mesurées en amont et renseignées dans le programme. Les corrections suivantes sont appliquées dans l'ordre au signal de tension  $V_R^2$  : rotation pour repasser dans le bon référentiel, soustraction du bruit, correction de la réponse du détecteur synchrone. Ensuite on calcule le travail et la chaleur trois fois : une fois normalement et deux fois avec deux decimate différents, ce qui permet de comparer les valeurs obtenues. Par soucis de mémoire nous ne pouvons pas sauvegarder toutes les valeurs de tension pour toutes les rampes. Cependant à la première itération nous stockons ces valeurs et à chaque itération suivante nous sommions les nouvelles valeurs. En post processing il ne reste plus qu'à diviser ces valeurs par le nombre de rampes mesurées pour obtenir la valeur moyenne du signal en chaque point d'acquisition sur la rampe. Le résultat est présenté en figure 3.30, nous avons en outre appliqué un decimate de 5000 en post processing pour améliorer la visibilité. En trait plein rouge nous avons la valeur moyenne de tension mesurée pour les plateaux et l'évolution théorique du signal calculée à partir des fréquences et de la valeur moyenne du signal sur le plateau bas pour les rampes. On voit donc que la valeur atteinte sur le plateau haut est un peu inférieure à la valeur attendue, ce qui implique un rapport  $\langle V_{R,1}^2/V_{R,2}^2 \rangle$  plus grand que prévu (en théorie on attend 0,9886, en pratique on mesure  $0,9893 \pm 1,2 \cdot 10^{-3}$ <sup>8</sup>).

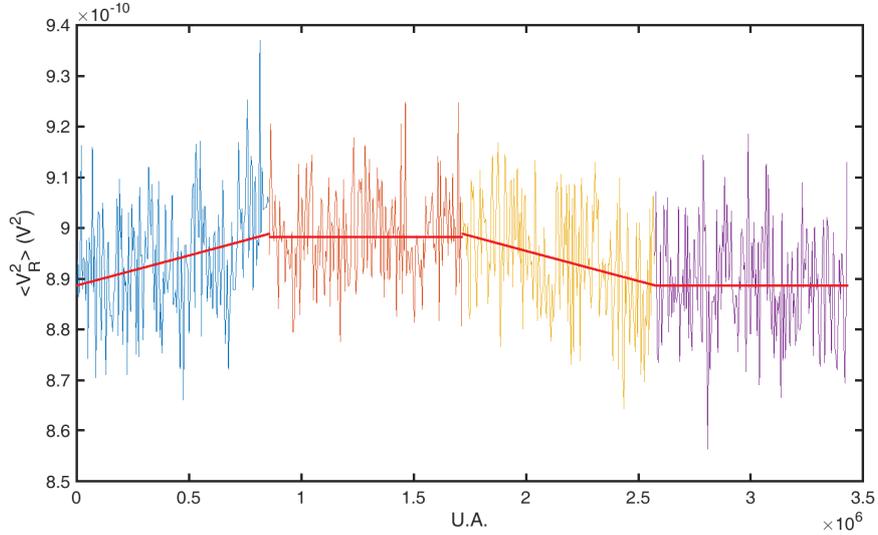
La table 3.2 présente les résultats pour le travail et la chaleur sur les rampes et ce pour les différentes valeurs de decimate. Nous avons 212 rampes de 240s (60s par portion) sur cette mesure soit environ 14h d'acquisition.

	Travail montant	Chaleur montante	Travail descendant	Chaleur descendante
Valeur théorique	-5,7382	5,7382	5,7382	-5,7382
Brute	$-5,7326 \pm 1,49$	$77,07 \pm 2180$	$5,7422 \pm 1,62$	$194,704 \pm 990$
Decimate 5000	$-5,685 \pm 94,5 \cdot 10^{-3}$	$15,83 \pm 248$	$5,6771 \pm 98,10^{-3}$	$-7,92 \pm 250$
Decimate 15000	$-5,5804 \pm 93,3 \cdot 10^{-3}$	$12,3 \pm 151$	$5,5752 \pm 96,2 \cdot 10^{-3}$	$-0,12 \pm 155$

**Table 3.2** – Résultats pour le travail et de la chaleur sur les différentes portions de la rampe (montant et descendant), avec des decimate différents. La valeur après  $\pm$  est l'écart type de la série de données. On a ici 212 mesures et le tuning est de  $V_T = 0,8V$ . Les énergies sont exprimées en  $mk_B T$ .

En ce qui concerne le travail la conclusion est la même que pour la partie simulations : appliquer un decimate trop important dégrade la valeur de convergence. Dans ce cas il vaut mieux utiliser les données sans decimate. L'écart type sans decimate est du même ordre de grandeur que celui des simulations. En revanche quand on applique le decimate l'écart type est plus grand lors des mesures. Dans les simulations nous avons considéré que la statistique dont les données sont issues était immuable, ce qui n'est pas le cas en pratique à cause des

<sup>8</sup>. Après  $\pm$  on donne l'erreur soit  $\sigma/\sqrt{N}$  avec  $\sigma$  l'écart type de la série et  $N$  le nombre de points).



**Figure 3.30** – Mesure de rampe isotherme montante et descendante, plus les deux plateaux pour vérifier qu’on a le bon rapport. Les abscisses représentent le nombre de points. Les traits pleins rouges représentent la valeur moyenne du signal pour les plateaux. Pour les rampes il s’agit de l’évolution théorique du signal calculée à partir des valeurs de fréquence et de la valeur moyenne du signal sur le plateau bas. Entre le plateau haut et le plateau bas on applique  $V_T = 0,8V$ .

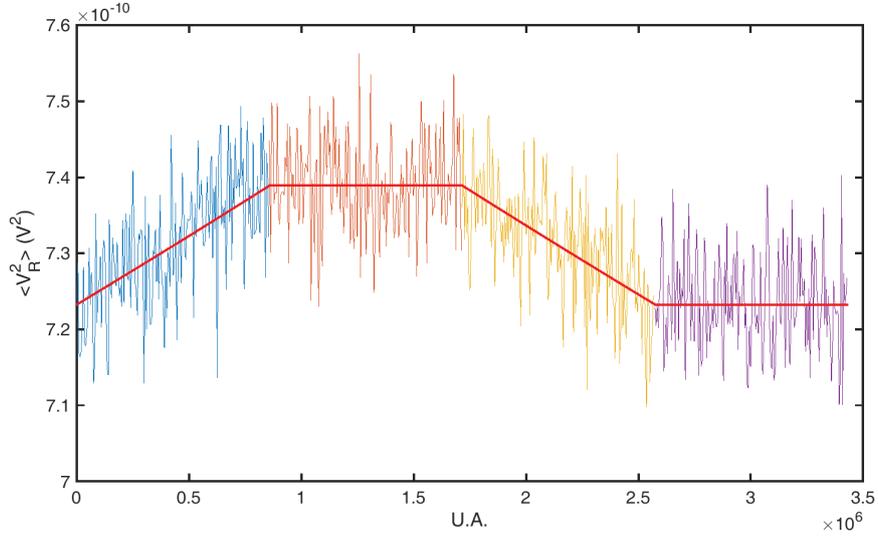
dérives. De même la fréquence de résonance change. Il n’est donc pas surprenant d’avoir un écart type plus grand en pratique car nous n’avons pas pris en compte toutes les sources de bruit dans la simulation.

En ce qui concerne la chaleur nous constatons une diminution intéressante de l’écart type lors du decimate. On arrive à des valeurs moyennes qui sont du bon ordre de grandeur, sans arriver toutefois à converger vers la bonne valeur car l’écart type est de l’ordre de  $100mk_B T$  pour une valeur d’attente de  $10mk_B T$  (ce qui impliquerait d’avoir 10000 points pour réduire l’erreur à 1%). Le passage de 5000 à 15000 en decimate n’apporte pas grand chose niveau écart type et les valeurs atteinte sont un peu meilleures pour le decimate de 5000.

A cette mesure nous ajoutons les points d’une autre mesure prise le lendemain. les valeurs obtenues sont présentées dans la table 3.3.

	Travail montant	Chaleur montante	Travail descendant	Chaleur descendante
Valeur théorique	-5,7678	5,7678	5,7678	-5,7678
Brute	$-5,7632 \pm 108.10^{-3}$	$87,98 \pm 2470$	$5.7748 \pm 101.10^{-3}$	$62,339 \pm 1200$
Decimate 5000	$-5.7060 \pm 107,5.10^{-3}$	$-12,609 \pm 209$	$5.7177 \pm 100.10^{-3}$	$-4,698 \pm 234$
Decimate 15000	$-5.6057 \pm 105,8.10^{-3}$	$2,2266 \pm 144$	$5.6165 \pm 98,6.10^{-3}$	$6,431 \pm 133$

**Table 3.3** – Résultats pour le travail et de la chaleur sur les différentes portions de la rampe (montant et descendant), avec des decimate différents. La valeur après  $\pm$  est l’écart type de la série de données. Cette mesure a été faite le lendemain de la mesure de la table précédente. On a ici 218 mesures et le tuning est de  $V_T = 0,8V$ . Les énergies sont exprimées en  $mk_B T$ .



**Figure 3.31** – Mesure de rampe isotherme montante et descendante, plus les deux plateaux pour vérifier qu’on a le bon rapport. Les abscisses représentent le nombre de points. Les traits pleins rouges représentent la valeur moyenne du signal pour les plateaux. Pour les rampes il s’agit de l’évolution théorique du signal calculée à partir des valeurs de fréquence et de la valeur moyenne du signal sur le plateau bas. Entre le plateau haut et le plateau bas on applique  $V_T = 1,5V$ .

On peut voir que les résultats sont similaires dans les deux cas. On remarque cependant que la valeur attendue a changé de quelques centièmes de  $mk_B T$ . Cela vient d’une dérive en fréquence de notre échantillon : nous sommes passé d’une fréquence de résonance de  $175661.5Hz$  avec une tuning de  $-1005,1Hz$  pour  $V_T = 0,8V$  à une fréquence de  $175682.93$  avec un tuning de  $-1010,4Hz$  pour la même tension. Cette dérive en fréquence sur  $24h$  est typique. Pour le travail sur lequel nous avons une bonne précision cumuler ces données n’a pas trop de sens mais pour la chaleur dont les fluctuations sont de toute façon plus grandes on peut concaténer les données pour voir ce qu’on gagne. Nous avons alors 430 mesures et pour les données de decimate 5000 (meilleur résultat) on obtient sur la partie montante  $Q = 6,89 \pm 207mk_B T$  et sur la partie descendante  $Q = -4,46 \pm 220mk_B T$ . Malgré un écart type toujours élevé nous nous approchons des bonnes valeurs, on peut donc espérer obtenir les valeurs attendues sans avoir à mesurer 10000 rampes. Finalement on peut aussi remarquer que l’écart type sur le travail sans decimate a bien diminué, cela vient du fait qu’entre les deux mesures on est passé d’une mesure où l’on déduit la fréquence de la mesure de  $V_T$  (avec la formule  $\omega = \omega_1 - \beta V_T$  déjà vue en section 3.7.6 par exemple) à un système où la fréquence est simulée (Dans ce cas on considère que sur une portion de cycle  $\omega = \omega_i + (\omega_f - \omega_i)t/N$  avec  $\omega_i$  et  $\omega_n$  les fréquences en début et fin de rampe ou de palier,  $N$  le nombre de points en temps et  $t$  le point actuel). Comme grossièrement  $\delta W/k_B T \propto x^2 \circ d\omega^2$  et que l’on supprime le bruit sur la fréquence en la simulant cela diminue l’écart type sur le travail.

La figure 3.31 présente la même mesure que la figure 3.30 mais avec  $V_T = 1,5V$ . Le rapport théorique est de  $0,9787$  et nous obtenons  $0,9787 \pm 9.10^{-4}$ . La variation de signal est plus visible sur ce deuxième exemple. Les valeurs de travail et de chaleur sont présentées en table 3.4. Cette fois le decimate appliqué est de 100 et 10000.

Les résultats sur le decimate restent similaires. Les valeurs de  $Q$  sont améliorées sans

### 3.10. RÉALISATION EXPÉRIMENTALE

	Travail montant	Chaleur montante	Travail descendant	Chaleur descendante
Valeur théorique	-10,7637	10,7637	10,7637	-10,7637
Brute	$-10,7703 \pm 191, 5 \cdot 10^{-3}$	$-302,74 \pm 2324$	$10,7656 \pm 185, 3 \cdot 10^{-3}$	$178,1 \pm 1338$
Decimate 100	$-10,7683 \pm 191, 6 \cdot 10^{-3}$	$-63,35 \pm 1161$	$10,7634 \pm 185, 3 \cdot 10^{-3}$	$-82,28 \pm 1153$
Decimate 10000	$-10,6006 \pm 189, 4 \cdot 10^{-3}$	$3,252 \pm 164$	$10,5958 \pm 181, 1 \cdot 10^{-3}$	$-13,68 \pm 161$

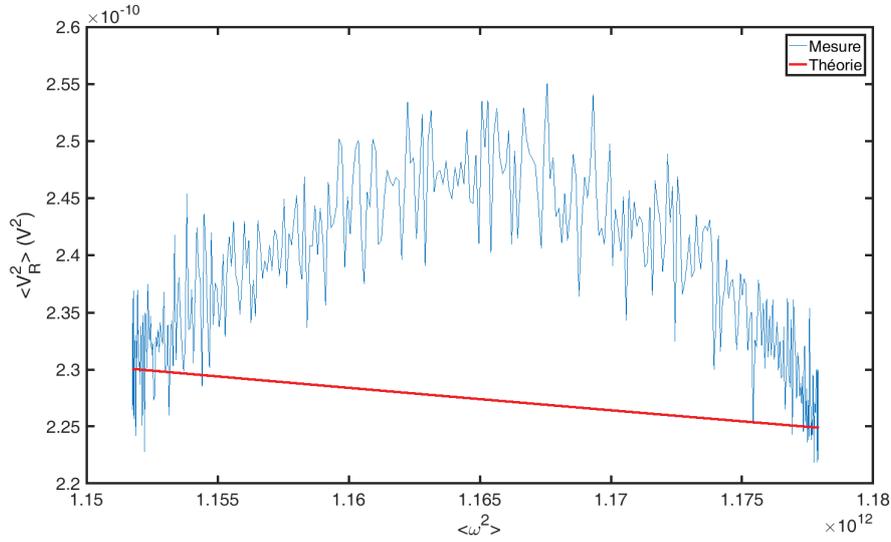
**Table 3.4** – Résultats pour le travail et de la chaleur sur les différentes portions de la rampe (montant et descendant), avec des decimate différents. La valeur après  $\pm$  est l'écart type de la série de données. Cette mesure a été faite le lendemain de la mesure de la table précédente. On a ici 385 mesures et le tuning est de  $V_T = 1,5V$ . Les énergies sont exprimées en  $mk_B T$ .

pour autant réussir à atteindre la bonne valeur par manque de mesures. Ici on a testé une valeur de 100 pour le decimate. L'effet sur  $Q$  n'est pas intéressant car le moyennage est trop peu étendu. En revanche on note une amélioration sur la valeur de  $W$ , comme nous l'avions prévu avec les simulations. Nous pouvons donc effectivement nous permettre d'appliquer un decimate de 100 pour le travail et pour la chaleur il faut conserver une valeur de plusieurs milliers.

Pour terminer la figure 3.32 montre ce qu'il se produit lorsque la correction de la fonction de réponse du détecteur synchrone n'est pas appliquée. On peut voir une courbe en cloche dont le maxima se situe à la fréquence centrale du détecteur synchrone. De part et d'autre le signal est moindre à cause du filtrage (il est atténué par la fonction de réponse). Cette mesure a été réalisée avec  $V_T = 1,5V$ , sur une bande passante de  $3kHz$  avec  $3kSa/s$ , avec une rampe de tension de  $200s$  ( $50s$  par portion). Comme la fréquence de centrage est choisie approximativement au milieu des fréquences à  $V_T = 0V$  et  $V_T = 1,5V$  aux extrémités de la rampe on retombe à peu près sur les bonnes valeurs. Cependant comme la fréquence centrale n'est pas exactement médiane on induit une erreur sur le rapport des variances. Théoriquement on attendait pour cette mesure  $0,9776$  et on mesure  $0,9763 \pm 1,2 \cdot 10^{-3}$ . Il en découle également une erreur sur les grandeurs thermodynamiques car le signal ne suit plus la courbe théorique. Cela se voit très bien sur le travail. On attendait pour cette mesure  $11,308mk_B T$  et on a mesuré  $11,9184 \pm 3,17mk_B T$ . Nous voyons donc qu'il est très important de corriger ce biais.

#### 3.10.2.2 Cycle complet

Dans cette partie nous présentons les résultats obtenus pour un cycle de Carnot complet, c'est à dire en appliquant les rampes de tension présentées en figure 3.21. La première mesure a été réalisée avec une rampe de tuning  $V_{T,2} = V_{T,4} = 0,4V$ ,  $V_{T,3} = 0,8V$  et une rampe de chauffage avec  $V_m = 4,988V$  constant et  $V_s$  variant de  $0V$  à  $-3,51V$  sur la partie adiabatique pour satisfaire à la condition (3.79) sur la tension juste avant le multiplicateur (en pratique une baisse de  $5mV$  en sortie de l'addition de  $V_m$  et  $V_s$ ). La bande passante est toujours de  $3kHz$  avec  $14400Sa/s$  et le cycle total dure  $420s$  avec  $60s$  pour chacune des 7 étapes du cycle (on a 7 étapes pour les 4 branches du cycle car on mesure en plus 3 paliers, voir section 3.7.6). Pour le rapport des variances entre les extrémités de la première branche isotherme nous attendons théoriquement  $0,9943$  et nous mesurons  $0,9915 \pm 1,1 \cdot 10^{-3}$  soit une erreur de  $0,28\%$ . Pour le rapport du carré des variances entre les extrémités de la première branche adiabatique nous attendons théoriquement  $0,9943$  et nous mesurons  $0,9965 \pm 1,9 \cdot 10^{-3}$  soit une erreur de  $0,22\%$  (on obtient ces valeurs en sachant que pour  $V_T = 0V$  alors la fréquence de résonance est de  $175644,96Hz$ , que pour  $V_T = 0,8V$  la fréquence est de  $174644,64Hz$  et que la variation est linéaire). La mesure comporte 356 cycles et s'est étendue sur presque deux jours ( $41h30$ ).



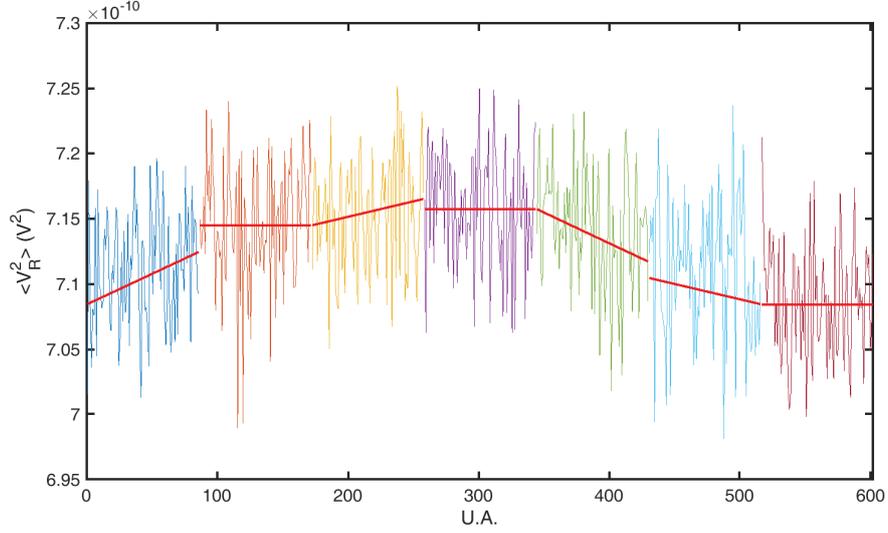
**Figure 3.32** – Exemple de mesure de rampe isotherme sans appliquer la correction du détecteur synchrone. Au lieu de suivre la courbe théorique on a un maximum quand la fréquence est proche de la fréquence de centrage du détecteur. De part et d'autre on observe l'impact de l'atténuation du filtre sur le signal. La réponse n'est pas plate sur l'ensemble de la bande passante.

L'évolution du signal obtenu est présentée en figure 3.33. Les grandeurs thermodynamiques mesurées sont présentées en table 3.5. Nous avons pris un decimate de 100 pour le travail et un decimate de 8000 pour la chaleur. Le constat est toujours le même : les valeurs de travail sont proches de la valeur attendue mais la convergence est difficile pour les valeurs de chaleur, encore plus particulièrement sur les rampes adiabatiques où les valeurs atteintes sont supérieures aux valeurs des branches isothermes alors qu'elles devraient être nulles. On remarque que l'allongement du temps de mesure a dégradé la mesure des rapports : comme on acquiert les valeurs de rapport plus lentement le système a plus le temps de dériver.

Rampe	Travail		Chaleur	
	Théorique	Mesuré	Théorique	Mesuré
1 $\rightarrow$ 2	-2,8516	$-2,8587 \pm 63,1 \cdot 10^{-3}$	+2,8516	$4,9 \pm 187,22$
2 $\rightarrow$ 3	-2,8557	$-2,8602 \pm 64,2 \cdot 10^{-3}$	0	$5,02 \pm 182,42$
3 $\rightarrow$ 4	+2,8435	$2,8455 \pm 58,7 \cdot 10^{-3}$	-2,8435	$-4,401 \pm 181,85$
4 $\rightarrow$ 1	+2,8557	$2,8691 \pm 55,9 \cdot 10^{-3}$	0	$-7,5 \pm 181,91$

**Table 3.5** – Grandeurs thermodynamiques associées à la mesure de la figure 3.33. Les résultats sont présentés sur 356 cycles de 420s avec un tuning maximal de  $V_T = 0,8V$ . Les énergies sont exprimées en  $mk_B T$ .

Une valeur qui nous intéresse est celle du rendement global du cycle. Théoriquement on mesure le rendement par le rapport du travail extrait par la chaleur injectée. Dans cette



**Figure 3.33** – Évolution du signal  $\langle V_R^2 \rangle$  sur un cycle de Carnot complet. En trait plein rouge on a représenté l'évolution théorique des rampes en prenant comme point de départ la valeur moyenne obtenue sur les plateaux. Les mauvais raccords viennent donc des erreurs de rapports mesurés. On a moyenné sur 356 cycles de 420s.

optique on calculerait le rendement via :

$$\eta = -\frac{W_{1 \rightarrow 2} + W_{3 \rightarrow 4}}{Q_{1 \rightarrow 2}} \quad (3.96)$$

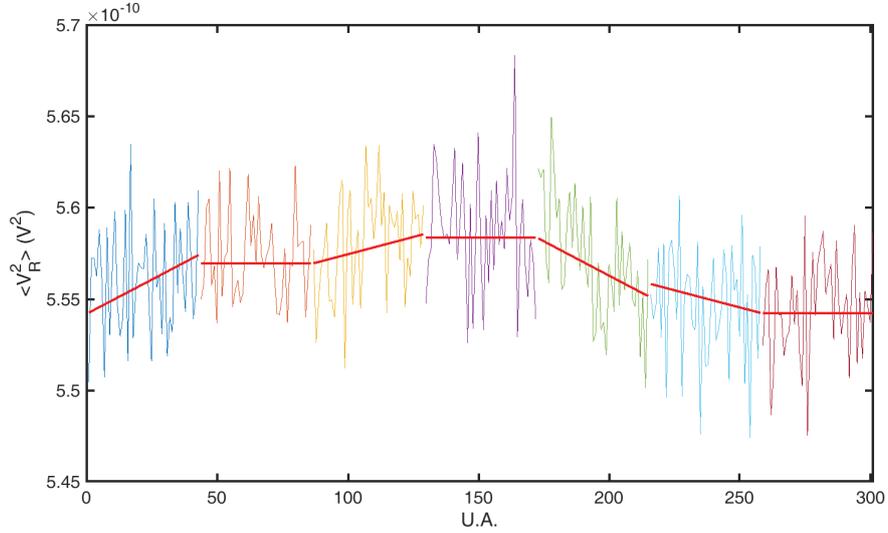
Mais dans ce cas on considère que les travaux sur les deux branches adiabatiques se compensent exactement et que la chaleur est nulle sur ces branches. Or nous n'atteignons pas cette précision dans nos mesures. Une définition plus juste est [5] :

$$\eta = -\frac{W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 4} + W_{4 \rightarrow 1}}{Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{4 \rightarrow 1}} \quad (3.97)$$

Nous sommes alors sûrs de comptabiliser le travail total sur le cycle ainsi que l'énergie réellement injectée dans le système. En appliquant cette formule avec les valeurs moyennes des différentes grandeurs issues de la mesure nous trouvons pour le rendement  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-3} \pm 0,196$ . En théorie nous attendons  $\eta = 1 - \omega_3/\omega_2 = 2,9 \cdot 10^{-3}$ . On peut voir que malgré les fortes fluctuations de  $Q$  nous obtenons une valeur assez correcte sur le rendement. L'écart type est important car il est dominé par l'écart type sur  $Q$ . La valeur atteinte est inférieure à la valeur attendue car les valeurs de  $Q$  sont toujours trop grandes.

Pour le rendement nous ne pouvons pas utiliser la moyenne cumulée en estimant le rendement sur chaque cycle successif. En effet dans ce cas le dénominateur est très fluctuant et la somme des chaleurs change de signe régulièrement. La moyenne cumulée du rendement tend donc vers 0 en général et il est préférable de calculer la valeur moyenne du numérateur et du dénominateur avant de faire le rapport [39].

Nous présentons ensuite une seconde mesure réalisée sur une durée plus courte : nous avons mesuré 511 cycles de 210s soit environ 30h d'acquisition. L'évolution du signal est



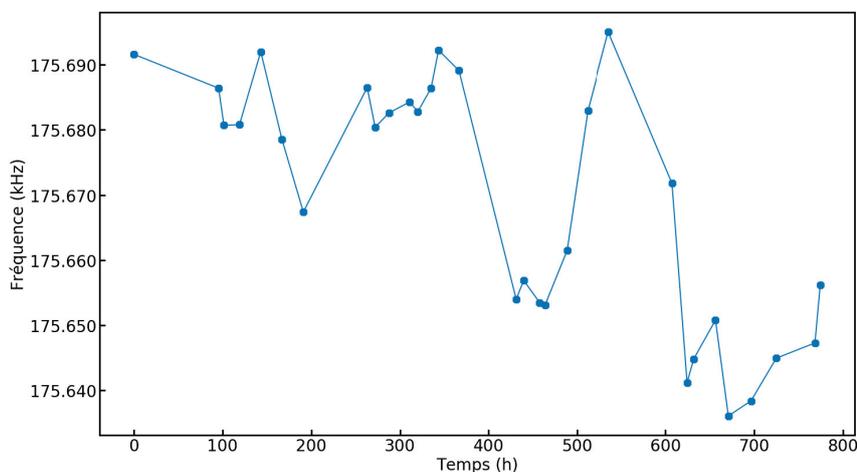
**Figure 3.34** – Évolution du signal  $\langle V_R^2 \rangle$  sur un cycle de Carnot complet. En trait plein rouge on a représenté l'évolution théorique des rampes en prenant comme point de départ la valeur moyenne obtenue sur les plateaux. Les mauvais raccords viennent donc des erreurs de rapports mesurés. On a moyenné sur 511 cycles de 210s.

présentée en figure 3.34 et les grandeurs thermodynamiques en table 3.6. Cette fois nous avons un decimate de 8000 sur la chaleur mais pas de decimate sur le travail (ce qui a priori peu diminuer un peu les résultats). Pour le rapport des variances entre les extrémités de la première branche isotherme nous attendons théoriquement 0,9942 et nous mesurons  $0,9951 \pm 1,3 \cdot 10^{-3}$  soit une erreur de 0,094%. Pour le rapport du carré des variances entre les extrémités de la première branche adiabatique nous attendons théoriquement 0,9942 et nous mesurons  $0,9949 \pm 2,5 \cdot 10^{-3}$  soit une erreur de 0,074%. La convergence des rapports a été meilleure sur cette mesure plus courte.

	Travail		Chaleur	
Rampe	Théorique	Mesuré	Théorique	Mesuré
1 $\rightarrow$ 2	-2,9176	$-2,9201 \pm 77,4 \cdot 10^{-3}$	+2,9176	$13,87 \pm 183,1$
2 $\rightarrow$ 3	-2,9219	$-2,9217 \pm 77,9 \cdot 10^{-3}$	0	$2,5479 \pm 182,6$
3 $\rightarrow$ 4	+2,9091	$2,9171 \pm 76,5 \cdot 10^{-3}$	-2,8435	$-11,02 \pm 188,9$
4 $\rightarrow$ 1	+2,9219	$2,9124 \pm 76,3 \cdot 10^{-3}$	0	$-2,57 \pm 192,4$

**Table 3.6** – Grandeurs thermodynamiques associées à la mesure de la figure 3.34. Les résultats sont présentés sur 511 cycles de 210s avec un tuning maximal de  $V_T = 0,8V$ . Les énergies sont exprimées en  $mk_B T$ .

Les résultats sont similaires malgré la réduction de la durée des cycles, il reste sans doute une marge de manœuvre sur ce paramètre. Si jamais la durée du cycle devenait trop courte nous quitterions le régime quasi-statique car alors chaque changement de tension



**Figure 3.35** – Mesures successives de la fréquence de résonance de l'échantillon sur une période de 1 mois.

se ferait plus vite que le temps de réponse caractéristique du système  $1/\gamma$ . Comme  $\gamma$  est de l'ordre de  $20Hz$  soit un temps caractéristique de  $50ms$  nous avons encore de la réserve. Le rendement calculé avec la formule (3.97) et les données de la table 3.6 nous donne  $0,874 \cdot 10^{-3} \pm 12,3 \cdot 10^{-3}$  contre une valeur théorique toujours à  $2,9 \cdot 10^{-3}$ . L'augmentation du nombre de cycles grâce à la diminution de la durée ne permet toujours pas d'avoir la précision nécessaire mais les résultats se maintiennent : les valeurs de chaleur sur les branches adiabatiques sont plus proches de 0, au détriment des valeurs sur les branches isothermes qui sont plus éloignées de la valeur théorique. Le rendement mesuré reste dans le même ordre de grandeur (proche de  $10^{-3}$ ). Les résultats obtenus sur les cycles complets vont dans le bon sens mais nous n'avons pas encore atteint la résolution nécessaire pour une mesure fiable et reproductible.

### 3.10.2.3 Discussion

Nous abordons ici les principales difficultés rencontrées pour ces mesures. La première source d'erreur que nous pouvons quantifier est la stabilité en fréquence de l'oscillateur. Nous avons remarqué que suite au dépôt de platine pour séparer les polarisations mécaniques la fréquence était instable et qu'il fallait faire un recuit de l'échantillon pour y remédier. La qualité du vide joue également sur la stabilité de la fréquence car si la chambre contient plus de molécules l'échantillon va se salir plus vite. Et si de la matière se dépose sa fréquence change. La figure 3.35 illustre les variations de fréquence de résonance relevées sur un mois environ. On peut y voir des augmentations et diminutions successives. La tendance globale est à une diminution légère, ce qui est normal car en première approche  $\omega = \sqrt{k/m}$  et un dépôt de matière augmente la masse sans changer la constante de raideur (fixation faible). Cependant la fréquence peut changer jusqu'à  $20Hz$  en deux jours, ce qui est la période de mesure la plus longue que nous avons.

Comme la correction de la mesure du détecteur synchrone que nous appliquons dépend de la fréquence de l'oscillateur nous induisons une erreur de mesure si celle-ci évolue. Cette erreur est quantifiable. En reprenant l'équation (3.65) nous savons que :

$$\begin{aligned}\langle V_R^2 \rangle &= C \langle V_{R,filtré}^2 \rangle \\ C &= \left( 1 + \left( \frac{f - f_r}{f_c} \right)^2 \right)^4\end{aligned}\quad (3.98)$$

Avec  $f$  la fréquence de l'oscillateur dans l'état où on le mesure,  $f_r$  la fréquence centrale du détecteur synchrone et  $f_c$  la fréquence de coupure du filtre. Le rapport entre les deux extrémités d'une branche isotherme  $1 \rightarrow 2$  est donc exprimé comme suit :

$$\begin{aligned}r &= \left( \frac{f_2}{f_1} \right)^2 \\ &= \frac{\langle V_R^2 \rangle_1 C(f_1)}{\langle V_R^2 \rangle_2 C(f_2)}\end{aligned}\quad (3.99)$$

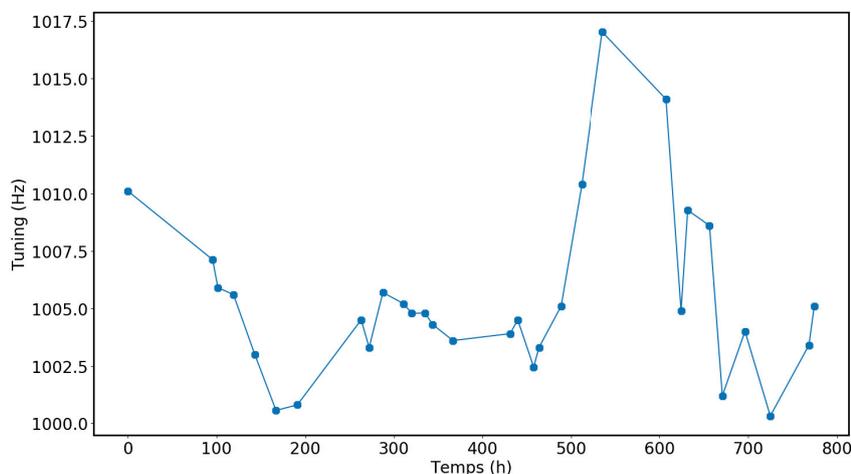
Supposons dans un premier temps qu'on fasse une erreur  $\Delta f$  sur les deux fréquences (la même dans le même sens, soit un tuning constant) et qu'on veuille estimer l'erreur induite sur le rapport  $r$ , l'erreur sur la correction étant la seule source d'erreur. Par la méthode des logarithmes on calcule :

$$\Delta r = \left( \frac{f_2}{f_1} \right)^2 \frac{8}{f_c^2} \left[ \frac{f_1 - f_r}{1 + \left( \frac{f_1 - f_r}{f_c} \right)^2} + \frac{f_2 - f_r}{1 + \left( \frac{f_2 - f_r}{f_c} \right)^2} \right] \Delta f \quad (3.100)$$

Nous prenons comme valeurs :  $f_1 = 175661,5Hz$  et  $f_2 = 174651,5Hz$ , soit un tuning qui correspond à  $V_T = 0,8V$ . Les paramètres du détecteur synchrone sont ceux de la section 3.6.3.2, en supposant que nous avons réglé la fréquence centrale sur  $175157Hz$ . On trouve alors une erreur de  $3,3 \cdot 10^{-3}$  pour une valeur attendue de  $0,9885$ , ce qui est loin d'être négligeable par rapport à nos erreurs de mesure. Ceci est un majorant car la variation de fréquence se fait continuellement mais cela nous donne un ordre de grandeur. Si nous avons une erreur de cet ordre sur le rapport nous attendons également des erreurs sur les grandeurs thermodynamiques. De plus le tuning évolue également au cours du temps comme le montre la figure 3.36.

Nous voyons donc que le tuning (mesuré par application d'une tension sur la contre électrode avec une tension fixe sur le générateur de tension relié à l'échantillon) oscille de quelques  $Hz$  autour de la même valeur d'environ  $1005Hz$ , ce qui est assez stable. Nous avons cependant quelques périodes de variation plus importante, notamment une variation de presque  $20Hz$  sur deux jours. Si l'on prend le même calcul que précédemment avec  $\Delta f_1 = 20Hz$  et  $\Delta f_2 = 40Hz$  pour prendre en compte ce changement de tuning alors on trouve  $\Delta r = 5 \cdot 10^{-3}$ . Outre les erreurs de mesure le changement de la fréquence de résonance et du tuning modifie les valeurs théoriques des rapport et des grandeurs thermodynamiques, ce qui peut compliquer l'accumulation de données sur une grande période si les variations sont trop importantes.

L'erreur précédente est à peu près quantifiable si l'on mesure la fréquence de résonance, ce que nous faisons très régulièrement. Cependant il nous arrive régulièrement de mesurer des rapports dont l'écart à la théorie est loin d'être explicable par une erreur de correction. Cela nous a posé un réel problème de reproductibilité voire d'interprétation des données expérimentales. Nous avons évoqué dans les sections précédentes une limite au tuning

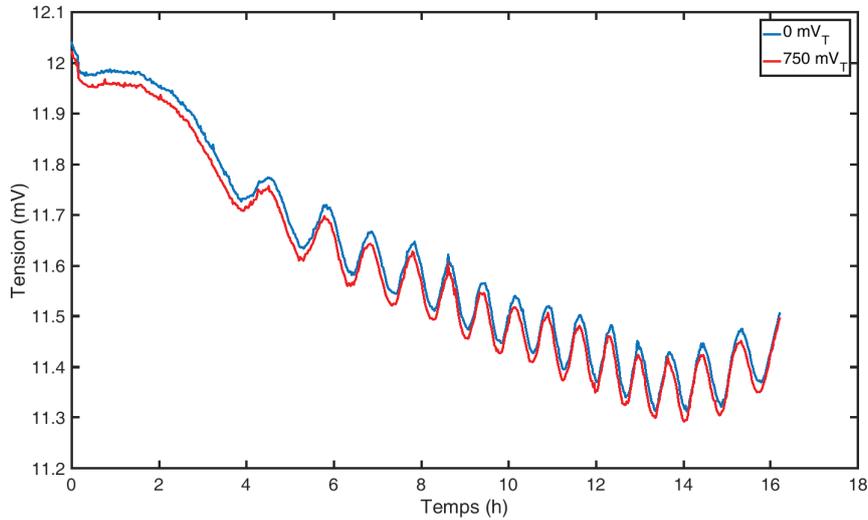


**Figure 3.36** – Évolution du tuning pour  $V_T = 0,8V$  sur la même période que la figure 3.35.

applicable permettant une mesure juste. Nos erreurs de rapport nous ont conduit à croire pendant un certain temps que cette limite était à  $V_T = 0,8V$ . C'est pourquoi nos cycles présentés se font avec une incursion maximale de  $V_T = 0,8V$  et pas  $V_T = 1,5V$  alors que cette situation aurait été plus favorable. Nous avons ensuite manqué de temps pour reproduire des résultats avec  $V_T = 1,5V$ . Nous n'avons pas encore réussi à cerner la cause de ces erreurs mais nous l'associons à un bruit parasite circulant dans le système. Son origine vient probablement de plusieurs sources croisées et son apparition est intermittente, ce qui le rend difficile à pister. Il en résulte des périodes propices aux mesures dont sont issus les résultats présentés et des périodes où les résultats ne sont plus fiables ni reproductibles.

Voici quelques indices de dysfonctionnement dans le circuit dont les origines sont encore mystérieuses. Lors des mesures de rapport nous mesurons en plus des signaux de tension HF en sortie du boîtier les signaux BF qui servent de mesure de contrôle : stabilité de l'absorption, absence de déflexion qui se traduirait par une variation du signal BF lors de l'application de la tension de tuning. La figure 3.37 présente un premier phénomène inexplicable et intermittent. Le signal de somme des signaux BF (et celui de différence aussi) présente des oscillations en général avec une périodicité d'une heure. Sur des mesures longues cette période peut varier. Cet effet n'est pas présent sur toutes les mesures.

Nous avons pensé à un effet dû aux défauts de monochromaticité du laser et nous avons essayé d'ajouter une fibre optique pour supprimer le phénomène mais sans succès. Le second indice est également visible dans les signaux BF. Nous relevons une valeur moyennée des signaux BF par rapport à l'échantillonnage de la carte d'acquisition et nous relevons également l'écart type sur ces signaux. Or sur certaines périodes l'écart type devient anormalement élevé sans que nous ayons pu en déterminer la cause. La figure 3.38 présente un exemple d'écart type obtenu pendant une mesure statique des rapports sur une rampe isotherme. On peut voir ici une alternance entre des valeurs hautes et basses au cours de la mesure. Les valeurs basses correspondent environ à ce que l'on mesure en l'absence de ce bruit intermittent, c'est à dire quelques  $\mu V$ . Dans les cas les plus extrêmes on dépasse même les  $10^{-4}V$  comme le montre la figure 3.39. Des observations similaires sont faites sur le



**Figure 3.37** – Variation du signal de somme des tensions pour les deux cadrans de la photodiode. On y voit des oscillations dont la période est d’un peu moins d’une heure.

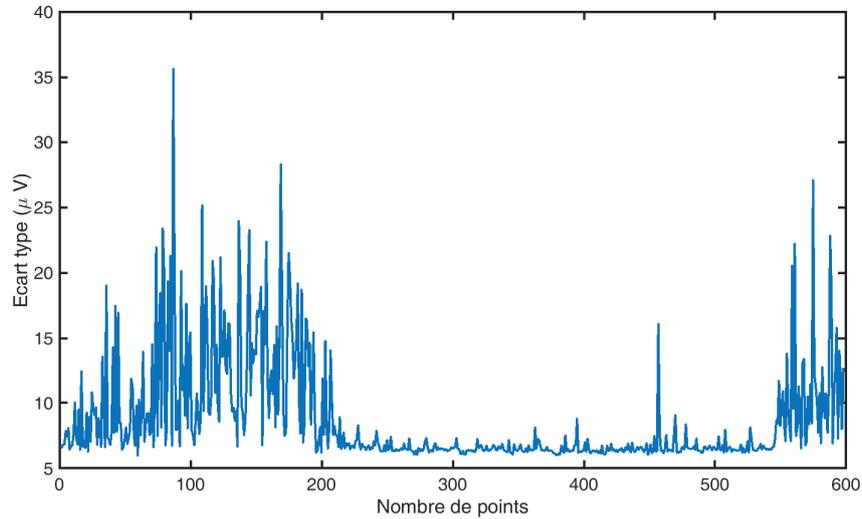
signal de différence des cadrans BF. Nous avons également tenté de supprimer ce bruit sans succès, la première piste étant l’alimentation du boîtier de détection que nous avons mis sur batterie au lieu de le laisser sur le secteur. Nous avons également débranché la pompe ionique pour éventuellement couper le bruit qui passerait par la pompe puis la carcasse de la cuve et trouverait son chemin jusqu’à l’échantillon (le boîtier étant isolé électriquement de la table optique).

Finalement nos dernières suspicions se sont portées sur les moteurs piezo-électriques pour le nano-positionnement qui ont montré quelques dysfonctionnements. Suite à une panne partielle des moteurs nous avons eu des soucis sur les boucles de rétroaction sur la position et avons dû les désactiver car elles entraînaient des instabilités. La position de l’échantillon était donc plus sujette aux dérives. Nous avons également supposé que du bruit électrique pouvait transiter à travers le contrôleur piezo puis les moteurs car les contrôleurs sont allumés en permanence et le contrôle de la tension est automatisé par ce dernier. On ne contrôle pas ce qu’il se passe quand nous ne sommes pas en train de déplacer l’échantillon. Nous avons donc essayé de passer à un modèle plus ancien de contrôleurs piezo qui permet un contrôle manuel des tensions appliquées sur les moteurs (modèle ANC 150). Nous avons ainsi pu remettre les moteurs à la masse et les débrancher du contrôleur sans générer de saut de tension entraînant une dérive de position empêchant toute mesure. Encore une fois cela n’a pas été concluant.

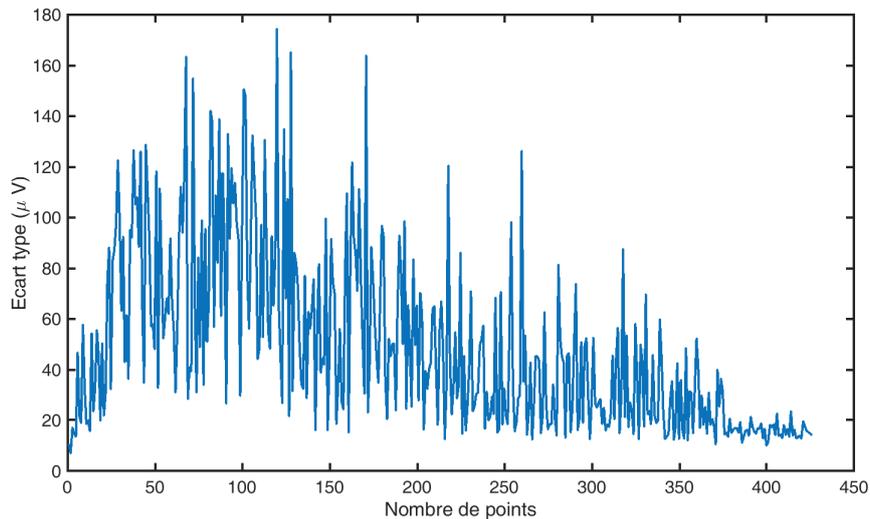
Pour clore cette section nous abordons l’effet du tuning sur la masse effective. En effet pour calculer la masse effective [9] il faut deux informations : la position de mesure le long du fil et la déformée du fil. En supposant la masse volumique du fil homogène alors on a :

$$m_{eff}(x_0) = m \frac{\int_0^1 |Y(x)|^2 dx}{|Y(x_0)|^2} \quad (3.101)$$

Avec  $m$  la masse du nanofil,  $x_0$  la position de mesure (les distances étant normalisées à



**Figure 3.38** – Ecart type sur le signal somme des tensions pour les deux cadrans de la photodiode. On peut voir que sur une certaine durée pendant la mesure il augmente, ce qui indique un dysfonctionnement dans la mesure.



**Figure 3.39** – Ecart type sur le signal somme des tensions pour les deux cadrans de la photodiode. L'écart type est ici trop grand par rapport aux valeurs habituelles (quelques  $\mu V$ ) pendant la quasi totalité de la mesure.

$L$  la longueur du nanofil) et  $Y(x)$  la déformée du nanofil obtenue avec l'équation (2.79) en prenant  $\alpha = 0$ . On voit que la masse effective dépend de la position à laquelle on étudie la vibration le long du nanofil. Dans notre cas nous sommes assez proches de la base, à environ 20% du fil soit  $x_0 = 0,2$ . En changeant le tuning donc la force de tirage dans le nanofil nous changeons la déformée et donc la masse effective. Pour étudier l'impact du tirage nous reprenons les paramètres de l'ajustement de la fréquence de résonance en fonction de la tension de tuning obtenu en 3.5.3.2 (pour rappel  $f_0 = 37890,9Hz$  et  $V_c = 307,45V$ ). La connaissance de  $V_c$  nous permet de connaître  $\kappa^2 = (V/V_c)^2$  et de trouver  $k$  et  $q = \sqrt{k^2 + \kappa^2}$  en résolvant l'équation transcendante (2.34). On trouve ainsi la fréquence de résonance de l'oscillateur. En prenant  $V = 450V$  (la tension  $V_K$  typique sur le Keithley) et  $V = 438V$  cela nous donne  $2kHz$  de tuning. Cette deuxième valeur de tension correspond à la tension qu'il faudrait régler directement sur le Keithley pour reproduire l'effet que l'on a sur la fréquence de résonance du nanofil en appliquant nos signaux sur la contre électrode. Connaissant  $k$  et  $q$  pour ces deux valeurs de tension on peut également calculer la déformée dans les deux cas et la masse effective associée en normalisant à  $x_0 = 0,2$ . On trouve alors une variation de 1,1% de masse effective. Or les rapports que l'on mesure sont en  $k_i \langle x^2 \rangle_i / k_f \langle x^2 \rangle_f$  que nous avons simplifié en  $\omega_i^2 \langle x^2 \rangle_i / \omega_f^2 \langle x^2 \rangle_f$  en supposant que la masse effective ne change pas, ce qui n'est pas le cas à priori. Toutes choses étant égales par ailleurs l'erreur que l'on fait sur le rapport  $\Delta r/r$  est directement l'erreur sur la masse effective  $\Delta m/m = 1,1\%$  ce qui est grand devant le 0,1% d'erreur annoncé.

Ce calcul n'est pas exact car la masse volumique n'est certainement pas homogène à cause du dépôt notamment et ce même dépôt risque de perturber la déformée, ce qui n'a pas été pris en compte dans le calcul précédent. La situation réelle est sans doute moins dramatique que l'estimation présentée. Cependant ce calcul met en avant la nécessité de prendre en compte la masse effective pour nos mesures. Nous nous sommes situés dans la zone du dépôt pour réduire les phénomènes de déflexion mais cela se fait au détriment de la stabilité sur la masse effective (qui varie moins quand on se rapproche de l'extrémité du nanofil). De plus même sans le tuning une simple dérive de l'échantillon dans le faisceau laser peut changer la masse effective du fait de la forte inhomogénéité de masse volumique dans la zone du dépôt. Pour améliorer les résultats il serait sans doute nécessaire de s'éloigner un peu de cette zone pour améliorer le compromis déflexion/stabilité de la masse effective.

### 3.11 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons exploré la réalisation d'une machine thermique stochastique à base de nanofil vibrant. Ce type de machine présente un intérêt fondamental car un système qui stocke de petites quantités d'énergie échange avec un bain thermique qui lui en possède des quantités gigantesques. L'étude de ces machines et de leur thermodynamique se situe donc nécessairement dans le domaine de la physique statistique. Le cadre de cette physique est connu, il s'agit de la thermodynamique stochastique. Nous avons appliqué cette théorie à notre système, à savoir un nanofil de SiC et montré quels sont les paramètres pertinents pour réaliser un cycle de Carnot à savoir : la fréquence de résonance et la variance de l'amplitude de vibration. Nous avons également vu la nouvelle définition du travail et de la chaleur dans ce cadre. Nous avons ensuite décrit le système expérimental qui permet de modifier ces paramètres de la façon souhaitée grâce à des forces électriques couplées à la vibration mécanique, mais aussi de mesurer l'amplitude de vibration avec un détecteur synchrone. Le signal étant très faible (*i.e.* le rapport signal sur bruit est proche de 1) nous avons besoin de toute la précision possible pour traiter les données et des corrections sont nécessaires, comme la soustraction du bruit de fond et le redressement de la fonction de réponse du filtre du détecteur synchrone. Nous avons ensuite présenté les mesures préliminaires qui

montrent le contrôle des paramètres du cycle via l'application de signaux électriques afin de vérifier que la réponse du système est en adéquation avec la théorie. Avec ces briques de base nous nous sommes attelés à la construction d'un cycle de Carnot en commençant par l'étude la plus simple des rampes isothermes. Cependant la durée nécessaire pour la convergence de la chaleur nous a amené à chercher des stratégies pour réduire le temps de mesure. Nous avons conclu via des simulations qu'un pré-moyennage des données avant le calcul du travail et de la chaleur permet de réduire le bruit. La mise en pratique nous a montré que le système répond de la façon attendue aux contraintes appliquées et nous avons été en mesure de réaliser des rampes isothermes et adiabatiques. Nous avons donc atteint la précision nécessaire pour observer un effet qualitatif. En revanche nous ne pouvons encore conclure sur les aspects quantitatifs. La mesure du travail, la plus simple, est validée et donne les résultats escomptés. Mais la mesure de la chaleur et donc du rendement atteint les bons ordre de grandeur mais ne converge pas encore avec suffisamment de précision.

Il reste donc deux défis pour la suite. Le premier est de traquer les bruits parasites et intermittents qui sont encore présents dans le système. Plusieurs pistes ont été explorées sans succès, mais les origines de ces bruits étant probablement multiples et non décorréelées, il est difficile de trouver le moyen de les supprimer. Des défauts de matériel (potentiellement sur plusieurs appareils) sont suspectés et une remise à plat du système expérimental avec un remplacement partiel du matériel est envisagé pour assainir les bases. Une fois ces problèmes écartés il reste le problème du temps de convergence pour la mesure de la chaleur. Même avec le moyennage des données celui-ci reste supérieur aux deux jours d'acquisition dans les conditions où nous nous étions placé. Pour cela plusieurs pistes sont possibles. Un premier problème est la stabilité de la fréquence. Sur l'étude de l'évolution de fréquence que nous avons montré le dernier étuvage du système n'était pas récent. Un étuvage complet du système et de la pompe pourrait donc améliorer le vide dans le système. De plus l'échantillon peut encore être recuit à une température plus haute que les premiers recuits que nous avons effectués, ce qui pourrait encore améliorer la stabilité. Il est également possible d'implémenter un recalibrage de la fréquence de résonance en cours de mesure. Ensuite augmenter le rapport signal sur bruit aide la mesure, il est donc envisageable d'augmenter la quantité de bruit électronique injecté pour maximiser le signal, la limite étant la saturation de l'amplificateur. Il nous reste un peu de marge sur cet aspect. Enfin nous pouvons augmenter le tuning, ce qui permettrait d'augmenter la valeur de travail et de chaleur à mesurer. En effet nous avons cru pendant un temps être limité à  $V_T = 0,8V$  avant de pouvoir faire des mesures correctes à  $V_T = 1,5V$  et la limite se trouve encore probablement au delà. Finalement nous pouvons encore réduire la durée des cycles tout en restant dans le régime quasi statique, ce qui nous permet de mesurer plus de cycles plus vite et donc de converger plus rapidement à durée de mesure égale.

Une fois le cycle de Carnot fonctionnel il ouvre des possibilités d'études plus étendues, notamment sur le rendement à puissance maximale [40, 41, 5] qui est vérifié sur ce type de moteur. Un paramètre intéressant est la durée des cycles. En effet on peut accélérer les cycles jusqu'à passer en dessous de la limite quasi statique dans laquelle nous sommes resté dans notre étude. Il a été prédit que dans ce cas le nombre de cycle pour lesquels le rendement dépasse le rendement de Carnot augmente [39, 42]. Cependant le rendement moyen vers lequel le moteur converge sur plusieurs cycles est toujours celui de Carnot. Une étude récente a également ouvert la voie de l'étude de moteurs thermiques mésoscopiques (avec un cycle de Stirling) alimentés par des bains thermiques actifs avec une distribution non gaussienne [43], ce qui permettrait de booster l'énergie extraite et l'efficacité de tels cycles.

## Références

- [1] K. SEKIMOTO. *Stochastic energetics*. T. 799. Springer, 2010.
- [2] U. SEIFERT. “Stochastic thermodynamics, fluctuation theorems and molecular machines”. Dans : *Reports on progress in physics* 75 (2012), p. 126001.
- [3] S. CARNOT. *Réflexions sur la puissance motrice du feu*. 26. Vrin, 1978.
- [4] V. BLICKLE et C. BECHINGER. “Realization of a micrometre-sized stochastic heat engine”. Dans : *Nature Physics* 8 (2012), p. 143.
- [5] I.A. MARTINEZ et al. “Brownian carnot engine”. Dans : *Nature physics* 12 (2016), p. 67.
- [6] J.J. WATERSON. “On the Physics of media that are composed of free and perfectly elastic molecules in a state of motion”. Dans : *Abstracts of the Papers Communicated to the Royal Society of London*. The Royal Society London. 1851, p. 604-604.
- [7] J.R. GOMEZ-SOLANO et al. “Steady-state fluctuation relations for systems driven by an external random force”. Dans : *EPL (Europhysics Letters)* 89 (2010), p. 60003.
- [8] I.A. MARTINEZ et al. “Effective heating to several thousand kelvins of an optically trapped sphere in a liquid”. Dans : *Physical Review E* 87 (2013), p. 032159.
- [9] B.D. HAUER et al. “A general procedure for thermomechanical calibration of nano/micro-mechanical resonators”. Dans : *Annals of Physics* 339 (2013), p. 181-207.
- [10] P. LANGEVIN. “Sur la théorie du mouvement brownien”. Dans : *Compt. Rendus* 146 (1908), p. 530-533.
- [11] R. BROWN. “XXVII. A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies”. Dans : *The Philosophical Magazine* 4 (1828), p. 161-173.
- [12] D.S. LEMONS et A. GYTHIEL. “Paul Langevin’s 1908 paper “on the theory of Brownian motion”[“Sur la théorie du mouvement brownien,” CR Acad. Sci.(Paris) 146, 530–533 (1908)]”. Dans : *American Journal of Physics* 65 (1997), p. 1079-1081.
- [13] A. EINSTEIN. “On the motion of small particles suspended in liquids at rest required by the molecular-kinetic theory of heat”. Dans : *Annalen der physik* 17 (1905), p. 549-560.
- [14] R. KUBO. “The fluctuation-dissipation theorem”. Dans : *Reports on progress in physics* 29 (1966), p. 255.
- [15] J. GIESELER et al. “Dynamic relaxation of a levitated nanoparticle from a non-equilibrium steady state”. Dans : *Nature nanotechnology* 9 (2014), p. 358.
- [16] C.W. GARDINER. *Handbook of stochastic methods*. T. 3. springer Berlin, 1985.
- [17] I.A. MARTINEZ et al. “Adiabatic processes realized with a trapped Brownian particle”. Dans : *Physical review letters* 114 (2015), p. 120601.
- [18] K. SEKIMOTO, F. TAKAGI et T. HONDOU. “Carnot’s cycle for small systems : Irreversibility and cost of operations”. Dans : *Physical Review E* 62 (2000), p. 7759.
- [19] S. BO et A. CELANI. “Entropic anomaly and maximal efficiency of microscopic heat engines”. Dans : *Physical Review E* 87 (2013), p. 050102.
- [20] M.A. MAKEEV, D. SRIVASTAVA et M. MENON. “Silicon carbide nanowires under external loads : An atomistic simulation study”. Dans : *Physical Review B* 74 (2006), p. 165303.

- [21] G. CHENG et al. “Mechanical properties of silicon carbide nanowires : effect of size-dependent defect density”. Dans : *Nano letters* 14 (2014), p. 754-758.
- [22] H.K. SEONG et al. “Optical and electrical transport properties in silicon carbide nanowires”. Dans : *Applied Physics Letters* 85 (2004), p. 1256-1258.
- [23] M. BECHELANY et al. “Chemical surface transformation of SiC-based nanocables”. Dans : *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials* 8 (2006), p. 638.
- [24] L. MEIROVITCH. *Fundamentals of vibrations*. Waveland Press, 2010.
- [25] E. GIL-SANTOS et al. “Nanomechanical mass sensing and stiffness spectrometry based on two-dimensional vibrations of resonant nanowires”. Dans : *Nature nanotechnology* 5 (2010), p. 641.
- [26] D.J. GRIFFITHS et D.F. SCHROETER. *Introduction to quantum mechanics*. Cambridge University Press, 2018.
- [27] A. GLOPPE. “Nano-optomécanique au coeur d’un faisceau laser focalisé : cartographie du champ de force optique et action en retour bidimensionnelle”. Thèse de doct. Grenoble, 2014.
- [28] E. GIL-SANTOS et al. “Optical back-action in silicon nanowire resonators : bolometric versus radiation pressure effects”. Dans : *New Journal of Physics* 15 (2013), p. 035001.
- [29] A. GLOPPE et al. “Bidimensional nano-optomechanics and topological backaction in a non-conservative radiation force field”. Dans : *Nature nanotechnology* 9 (2014), p. 920.
- [30] S. PERISANU et al. “Mechanical properties of SiC nanowires determined by scanning electron and field emission microscopies”. Dans : *Physical Review B* 77 (2008), p. 165434.
- [31] G. JOURDAN et al. “Tuning the effective coupling of an AFM lever to a thermal bath”. Dans : *Nanotechnology* 18.47 (oct. 2007), p. 475502.
- [32] T.B. GABRIELSON. “Mechanical-thermal noise in micromachined acoustic and vibration sensors”. Dans : *IEEE transactions on Electron Devices* 40 (1993), p. 903-909.
- [33] E. CLAUDE et C.E. SHANNON. “Communication in the presence of noise”. Dans : *Proc. Inst. Radio Eng* 371 (1934).
- [34] H. NYQUIST. “Certain topics in telegraph transmission theory”. Dans : *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers* 47 (1928), p. 617-644.
- [35] A. De MOIVRE. “The doctrine of chances”. Dans : *Annotated Readings in the History of Statistics*. Springer, 2001, p. 32-36.
- [36] P.S. LAPLACE. *Théorie analytique des probabilités*. Courcier, 1820.
- [37] A.M. LJAPUNOV. *Nouvelle forme du théoreme sur la limite de probabilité*. 1901.
- [38] M. ABRAMOWITZ et I.A. STEGUN. “Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables”. Dans : Courier Corporation, 1965. Chap. 26.
- [39] S. RANA et al. “Single-particle stochastic heat engine”. Dans : *Physical review E* 90 (2014), p. 042146.
- [40] F.L. CURZON et B. AHLBORN. “Efficiency of a Carnot engine at maximum power output”. Dans : *American Journal of Physics* 43 (1975), p. 22-24.
- [41] M. ESPOSITO et al. “Efficiency at maximum power of low-dissipation Carnot engines”. Dans : *Physical review letters* 105 (2010), p. 150603.

- [42] K. PROESMANS, B. CLEUREN et C. Van den BROECK. “Stochastic efficiency for effusion as a thermal engine”. Dans : *EPL (Europhysics Letters)* 109 (2015), p. 20004.
- [43] S. KRISHNAMURTHY et al. “A micrometre-sized heat engine operating between bacterial reservoirs”. Dans : *Nature Physics* 12 (2016), p. 1134.