



**HAL**  
open science

# Panneaux en maçonnerie renforcés à l'aide de matériaux composites : approche de type calcul à la rupture et étude expérimentale

Ramzi Sahlaoui

## ► To cite this version:

Ramzi Sahlaoui. Panneaux en maçonnerie renforcés à l'aide de matériaux composites : approche de type calcul à la rupture et étude expérimentale. Matériaux. Université Paris-Est, 2011. Français. NNT : 2011PEST1119 . pastel-00672356

**HAL Id: pastel-00672356**

**<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00672356>**

Submitted on 21 Feb 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-EST  
ECOLE DOCTORALE SCIENCE INGÉNIERIE ET  
ENVIRONNEMENT

## THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme de

**DOCTEUR DE  
L'UNIVERSITÉ PARIS-EST**

Spécialité : *Structures et Matériaux*

par

**Ramzi SAHLAOUI**

Sujet de la thèse :

Analyse par le calcul à la rupture des murs en  
maçonnerie en vue de leur renforcement par des  
composites collés

Thèse soutenue le 12 juillet 2011 devant le jury composé de :

<i>Président :</i>	<b>Patrick DE BUHAN</b>
<i>Rapporteurs :</i>	<b>Patrice HAMELIN Luc DAVENNE</b>
<i>Examineurs :</i>	<b>Jean-Vivien HECK Julien MERCIER</b>
<i>Invités :</i>	<b>Marc QUIERTANT</b>
<i>Directeur de thèse :</i>	<b>Karam SAB</b>



*A ma mère, A mon père,  
A ma femme, A mes soeurs, A mes frères,  
A tous ceux qui me sont chers...*





---

# Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et ma gratitude à toutes celles et tous ceux qui m'ont aidé, tant au niveau scientifique, que personnel dans le bon déroulement de la thèse et l'achèvement de ce présent manuscrit. Une certaine émotion accompagne inévitablement la fin d'une telle expérience, que les éventuels oubliés me pardonnent.

Je remercie Mr Patrick DE BUHAN de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Mes remerciements vont également à Mr Patrice HAMELIN, Mr Luc DAVENNE, Mr Julien MERCIER et Mr Marc QUIERTANT pour leur important travail de relecture, pour les discussions enrichissantes que nous avons échangées et pour leurs conseils éclairés qui m'ont permis d'améliorer ce mémoire de thèse.

Je tiens à adresser des remerciements tout particuliers aux personnes qui m'ont encadré durant cette thèse : à Mr Karam SAB pour sa disponibilité, sa rigueur scientifique, ses commentaires toujours avisés et sa bonne humeur, à Jean Vivien HECK pour m'avoir suivi tout au long de ma thèse et pour m'avoir fait partager son expérience, son enthousiasme et sa passion qui m'ont permis de m'épanouir pleinement dans ce travail.

Merci également à mes laboratoires d'accueil, le Département Sécurité, Structures et Feu (DSSF) au CSTB et le laboratoire Navier (UMR 8205) de l'École des Ponts Paris-Tech (ENPC), au sein desquels j'ai pris plaisir à travailler.

Ensuite un remerciement à tous les doctorants et stagiaires du laboratoire Navier avec qui j'ai partagé un bureau, un café, un repas, une sortie, des rires. C'était un véritable plaisir de vous côtoyer tous les jours. La liste est longue mais je tiens à remercier particulièrement Firas SAID AHMED, l'ami des soirs et des week-ends au

laboratoire et Salma BARBOURA. Vous n'étiez pas juste des collègues mais aussi de véritables amis. Merci aussi à Wafa, Anissa et Rabie. Merci à vous tous!

Que ces remerciements s'envolent également vers mes parents, M'na et Mohamed, pour leur soutien inconditionnel et leur présence, malgré la distance qui nous séparait durant ces années, dans les moments heureux et moins heureux. Une dédicace spéciale à toutes mes soeurs et mes frères ainsi que tous mes proches.

Finalement, et non le moindre, je suis très reconnaissant envers Rahma, ma chère épouse, pour son amour et son support au cours de ces années. Elle a su m'encourager dans les moments difficiles et être patiente dans les moments d'intense travail et de stress.

---

# Résumé

La maintenance, la réparation et le renforcement de murs en maçonnerie par matériaux composites collés nécessitent le développement de méthodes et techniques d'évaluation de l'aptitude au service et de requalification tant pour leur restauration fonctionnelle que pour leur adaptation à de nouvelles contraintes (évolution du zonage sismique par exemple). Le présent travail de thèse a pour objectif de proposer un outil d'évaluation par calcul de l'état limite ultime de murs en maçonnerie, renforcés par composites collés, chargés dans leur plan.

Les travaux effectués concernent la modélisation par homogénéisation de murs en maçonnerie et une campagne expérimentale de caractérisation du transfert de charge entre un renfort en tissu de fibres de carbone et un support en blocs creux de béton par le biais d'un joint de colle. Pour modéliser la résistance des murs maçonnés, nous proposons une loi élastique parfaitement plastique pour le comportement dans le plan d'une maçonnerie constituée de blocs liés par des joints de mortier. Le convexe de plasticité est obtenu par une technique d'homogénéisation périodique qui prend en compte la nature tridimensionnelle de la cellule de base. On obtient alors un convexe limité par plusieurs surfaces de charge. Un algorithme numérique original est ensuite proposé et programmé dans le logiciel aux Eléments Finis ABAQUS. Des simulations numériques utilisant le module développé sont présentées.

**Mots-clés** : Interface, Joint adhésif, Analyse Limite, Homogénéisation, Maçonnerie, Drucker-Prager, Mohr-Coulomb, TFC, Simulation numérique.



---

# Abstract

Maintenance, repair and reinforcing of masonry walls with composite materials glued require the development of methods and techniques for evaluating the suitability for service and retraining for both their functional restoration for their adaptation to new constraints (changes seismic zoning for example). This thesis aims to propose an evaluation tool by calculating the limit state of masonry walls, reinforced bonded composite, loaded in their plane.

The work done on modeling by homogenization of masonry walls and a campaign experimental characterization of charge transfer between a reinforcement of carbon fiber fabric and a backing of hollow blocks concrete by means of an adhesive joint. To model the resistance of masonry walls, we propose a law for elastic perfectly plastic behavior in the plane formed of masonry blocks connected by mortar joints. The convex plasticity is obtained by periodic homogenization technique which takes into account the three dimensional nature of the basic cell. This gives a convex bounded by several surfaces of charge. An algorithm digital original is then proposed and programmed in the finite element software ABAQUS. Numerical simulations using the developed module are presented.

***Keywords*** : Interface, Adhesive Joint, Limit Analysis, Homogenization, Masonry, Drucker-Prager, Mohr-Coulomb, FRP, Numerical Simulation.



---

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Table des figures</b>	<b>6</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>7</b>
<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>Notations</b>	<b>15</b>
<b>1 Les maçonneries, phénoménologies de leurs comportements</b>	<b>19</b>
1.1 Caractéristiques des constituants de la maçonnerie . . . . .	20
1.1.1 Les briques . . . . .	20
1.1.1.1 Briques de laitier . . . . .	20
1.1.1.2 Briques silico-calcaires . . . . .	21
1.1.2 Les joints de mortier . . . . .	21
1.2 Propriétés mécaniques de la maçonnerie . . . . .	23
1.2.1 Comportement sous sollicitation de compression uniaxiale . . . . .	23
1.2.2 Comportement sous sollicitation de traction uniaxiale . . . . .	24
1.2.3 Comportement biaxial . . . . .	25
1.2.4 Comportement au cisaillement . . . . .	27
1.2.5 Essais de PAGE (1980, 1981, 1983) . . . . .	29

1.3	Modélisation des structures maçonnées . . . . .	31
1.3.1	Modélisation macro-mécanique des structures maçonnées . . . . .	32
1.3.2	Modélisation micro-mécanique des structures maçonnées . . . . .	33
1.3.3	Modélisation multi-échelle des structures maçonnées . . . . .	34
1.4	Conclusion . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Analyse limite et homogénéisation périodique des plaques</b>	<b>37</b>
2.1	Rappels sur les domaines convexes . . . . .	38
2.1.1	Domaines de plasticité ou de résistance . . . . .	38
2.1.2	Fonction d'appui . . . . .	39
2.1.3	Frontière du domaine de plasticité . . . . .	41
2.1.3.1	Caractérisation directe ou statique . . . . .	41
2.1.3.2	Caractérisation cinématique . . . . .	41
2.2	Théorie des plaques : généralités . . . . .	42
2.2.1	Efforts généralisés de plaque . . . . .	43
2.2.2	Equation d'équilibre . . . . .	44
2.2.3	Cinématique . . . . .	44
2.2.3.1	Le modèle de Love-Kirchhoff . . . . .	44
2.2.3.2	Le modèle de Reissner-Mindlin . . . . .	47
2.3	Homogénéisation périodique des plaques . . . . .	49
2.3.1	Détermination du domaine de résistance homogénéisé $G_p^{hom}$ . . . . .	50
2.3.2	Plaques périodiques symétriques . . . . .	52
2.3.3	Convexe de résistance dans le plan . . . . .	54
2.3.4	Cas des plaques invariantes dans le sens 3 : $G(\mathbf{y}) = G(y_1, y_2)$ . . . . .	54
2.4	Cas des blocs séparés par des interfaces . . . . .	55
2.4.1	Interface de Mohr-Coulomb . . . . .	57
2.4.2	Interface de Mohr-Coulomb tronqué par le critère de Rankine en traction . . . . .	62
2.5	Conclusion . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Homogénéisation numérique des structures maçonnées</b>	<b>65</b>
3.1	Modèle des joints : passage du 3D au 2D . . . . .	65
3.2	Résistance à la compression verticale d'un panneau en maçonnerie . . . . .	67

3.3	Calcul numérique périodique en 3D . . . . .	70
3.3.1	Conditions de périodicité . . . . .	72
3.3.2	Mode de chargement . . . . .	74
3.3.2.1	Compression uni-axiale dans le plan ( $\theta = 0$ et $\xi = 1$ ) . . . . .	75
3.3.2.2	Etudes expérimentales : résistance en compression des éléments de maçonnerie (CSTB) . . . . .	78
3.3.2.3	Traction-compression bi-axiale dans le plan . . . . .	81
3.3.2.4	Charge uni-axiale de traction dans le plan ( $\xi = -1$ ) . . . . .	85
3.3.3	Confrontation entre les résultats numériques et analytiques . . . . .	86
3.3.3.1	Traction uni-axiale dans le plan ( $\xi = -1$ ) . . . . .	86
3.3.3.2	Charge bi-axiale de traction-compression . . . . .	87
3.4	Proposition d'un critère de rupture pour les murs en maçonnerie . . . . .	89
3.5	Validation expérimentale du critère de rupture . . . . .	93
3.6	Conclusion . . . . .	95
<b>4</b>	<b>Implantation du critère dans un code élément finis</b>	<b>97</b>
4.1	Rappel sur le comportement élastoplastique . . . . .	97
4.1.1	Décomposition additive des déformations . . . . .	97
4.1.2	Potentiel "énergie libre spécifique" et la loi de comportement élastique . . . . .	98
4.1.3	Fonction de charge et critère de plasticité . . . . .	99
4.1.3.1	Fonction de charge dans l'état initial . . . . .	99
4.1.3.2	Fonction de charge et écrouissage . . . . .	99
4.1.4	Lois d'écoulement généralisées . . . . .	101
4.1.5	Résumé : modèle élastoplastique généralisé . . . . .	101
4.1.6	Opérateur élastoplastique tangent . . . . .	102
4.2	Algorithme d'intégration numérique . . . . .	103
4.2.1	La problématique . . . . .	103
4.2.2	Problème incrémental . . . . .	103
4.2.3	Algorithme de prédiction élastique/correction plastique . . . . .	105
4.2.4	Algorithme de retour radial . . . . .	107
4.3	Implantation du modèle dans ABAQUS . . . . .	108
4.3.1	Routine UMAT . . . . .	108

4.3.2	Etat de contrainte et matrice tangente . . . . .	110
4.3.3	Algorithme de la UMAT . . . . .	111
4.4	Validation de l'implémentation de la loi de comportement . . . . .	115
4.4.1	Flexion - cisaillement d'un trumeau . . . . .	121
4.4.2	Cisaillement d'un mur en maçonnerie . . . . .	123
4.4.3	Cisaillement d'un mur en maçonnerie avec baie . . . . .	124
4.5	Conclusion . . . . .	126
<b>5</b>	<b>Longueur d'ancrage d'un TFC : Support en béton creux</b>	<b>127</b>
5.1	Programme expérimental . . . . .	128
5.2	Composition des corps d'épreuves . . . . .	131
5.2.1	Blocs de béton et mortier . . . . .	131
5.2.2	Renfort : TFC . . . . .	132
5.2.3	Résine . . . . .	133
5.2.4	Mèche d'ancrage standard . . . . .	133
5.2.5	Mèche d'ancrage à chas . . . . .	134
5.3	Fabrication des corps d'épreuve . . . . .	134
5.4	Dispositif d'essais . . . . .	138
5.4.1	Bâti d'essai . . . . .	138
5.4.2	Instrumentation . . . . .	139
5.5	Résultats et analyses . . . . .	141
5.5.1	Comportement sous charge monotone croissante des ancrages simples . . . . .	141
5.5.1.1	Comportement expérimental de l'ancrage simple . . . . .	141
5.5.1.2	Modèle de comportement pour ancrage simple . . . . .	147
5.5.1.3	Détermination de la longueur d'ancrage . . . . .	152
5.5.2	Comportement sous charge monotone croissante des ancrages avec mèche standard . . . . .	154
5.5.3	Comportement sous charge monotone croissante des ancrages avec mèche à chas . . . . .	156
5.5.4	Comportement sous charge cyclique répétée croissante . . . . .	158
5.5.4.1	ancrage simple . . . . .	158
5.5.4.2	ancrage mèche standard . . . . .	159

---

5.5.4.3	ancrage mèche à chas . . . . .	160
5.5.5	Comportement sous charge cyclique répétée constante . . . . .	161
5.5.5.1	ancrage simple . . . . .	161
5.5.5.2	ancrage mèche standard . . . . .	162
5.5.5.3	ancrage mèche à chas . . . . .	163
5.6	conclusion . . . . .	164
<b>Conclusions et Perspectives</b>		<b>167</b>
<b>Annexes</b>		<b>171</b>
<b>A Calcul à la rupture</b>		<b>171</b>
A.1	Principe du calcul à la rupture . . . . .	171
A.1.1	Domaine des chargements potentiellement supportables . . . . .	172
A.1.2	Approche statique par l'intérieur de $\mathbf{K}$ . . . . .	173
A.1.3	Approche par l'extérieur de $\mathbf{K}$ . . . . .	174
<b>B Homogénéisation des milieux périodiques en calcul à la rupture</b>		<b>179</b>
B.1	Principe général de la méthode . . . . .	179
B.2	Critère de résistance macroscopique . . . . .	182
B.2.1	Définition d'un mode chargement sur la cellule de base . . . . .	182
B.2.2	Définition statique . . . . .	184
B.2.3	Définition cinématique (duale) . . . . .	184
<b>C Subroutine UMAT</b>		<b>187</b>



---

# Table des figures

1.1	<i>Comportement de la maçonnerie sous l'effet d'un effort normal aux joints horizontaux (a) cas d'un empilement simple de briques. (b) Spécimen RILEM. (c) Diagramme contrainte - déformation d'un essai compression sur un prisme de maçonnerie (<math>500 \times 250 \times 600\text{mm}^3</math>) <math>f_{m0}</math> : [9] : résistance à la compression du mortier. D'après [95]</i> . . . . .	24
1.2	<i>Essai de traction dans la direction parallèle aux joints horizontaux (a) Phase de construction (b) Dispositif de l'essai de traction. D'après [45]</i>	25
1.3	<i>Diagramme contrainte -déplacement pour un essai de traction suivant la direction parallèle aux joints horizontaux : (a) Rupture induite par le glissement dans les joints horizontaux et une perte d'adhérence dans les joints verticaux (b) Rupture totale des joints et des briques. D'après [45].</i>	26
1.4	<i>Essai biaxial sur des panneaux de maçonnerie. D'après [71, 72]</i> . . . . .	27
1.5	<i>Modes de rupture d'un mur en maçonnerie soumis un chargement biaxial</i>	28
1.6	<i>Dimensions de la maçonnerie utilisée dans les expériences de PAGE (article [50])</i> . . . . .	30
1.7	<i>Test biaxial traction-compression (d'après [71, 72])</i> . . . . .	31
2.1	<i>Plaque homogène</i> . . . . .	43
2.2	<i>Cinématique de Love-Kirchhoff</i> . . . . .	46
2.3	<i>Cinématique de Reissner-Mindlin</i> . . . . .	47
2.4	<i>Structure 3D hétérogène, cellule de base et plaque homogène équivalente.</i>	51
2.5	<i>Cellule de base</i> . . . . .	56
2.6	<i>Mode de chargement [50]</i> . . . . .	59
2.7	<i>Approche cinématique de la contrainte de rupture <math>\Sigma</math></i> . . . . .	60
2.8	<i>Approche cinématique de la contrainte de rupture <math>\Sigma</math></i> . . . . .	61

2.9	<i>Approche cinématique de la contrainte de rupture <math>\Sigma</math></i> . . . . .	61
2.10	<i>Approche cinématique de la contrainte de rupture <math>\Sigma : \xi = -1</math></i> . . . . .	63
2.11	<i>Approche cinématique de la contrainte de rupture <math>\Sigma : \xi = 0</math></i> . . . . .	63
2.12	<i>Approche cinématique de la contrainte de rupture <math>\Sigma : \xi = 0.8</math></i> . . . . .	63
3.1	<i>Mur en maçonnerie 3D</i> . . . . .	66
3.2	<i>Joint de mortier 3D</i> . . . . .	67
3.3	<i>Mur en maçonnerie et cellule de base</i> . . . . .	70
3.4	<i>Partition de la cellule de base</i> . . . . .	73
3.5	<i>Mode de chargement</i> . . . . .	74
3.6	<i>Mode de chargement du mur</i> . . . . .	75
3.7	<i>Distribution de la charge dans un panneau en maçonnerie en compression</i>	76
3.8	<i>Courbe contrainte-déformation</i> . . . . .	77
3.9	<i>(a) : maillage de la cellule de base ; (b) : La distribution de la contrainte <math>\sigma_{33}</math></i> . . . . .	77
3.10	<i>(I) , (III) et (V) : les distributions de contraintes <math>\sigma_{11}</math>, <math>\sigma_{22}</math> et <math>\sigma_{22}</math> respectivement ; (II), (IV) et (VI) : les distributions de déformations totales <math>d_{11}</math>, <math>d_{22}</math> et <math>d_{33}</math> respectivement</i> . . . . .	78
3.11	<i>Essais de compression. (a) : échantillon <math>B_1</math> ; (b) : charge de compression partielle ; (c) : échantillon <math>B_2</math></i> . . . . .	79
3.12	<i>Mode de rupture de l'échantillon <math>B_2</math></i> . . . . .	80
3.13	<i>Distribution des contraintes dans le cas de compression partielle des briques</i>	81
3.14	<i>Distribution de la charge dans un panneau en maçonnerie</i> . . . . .	84
3.15	<i>(a) et (b) : les distributions de contraintes <math>\sigma_{11}</math> et <math>\sigma_{22}</math> respectivement ; (c) et (d) : les distributions de déformations totales <math>d_{11}</math> et <math>d_{22}</math> respectivement</i>	84
3.16	<i>Mode de rupture dans la cellule de base et son équivalent sur le vraie mur : essai de traction-compression</i> . . . . .	85
3.17	<i>(a) : Essai de traction directe sur une seule brique ; (b) : Essai de traction-cisaillement sur une seule brique</i> . . . . .	85
3.18	<i>Distribution de la charge dans un panneau en maçonnerie</i> . . . . .	85
3.19	<i>(a) et (b) : les distributions de contraintes <math>\sigma_{11}</math> et <math>\sigma_{22}</math> successivement ; (c) et (d) : les distributions de déformations totales <math>d_{11}</math> et <math>d_{22}</math> successivement</i>	86
3.20	<i>Mode de rupture dans la cellule de base et son équivalent sur le vrai mur : essai de traction</i> . . . . .	86

3.21	<i>La variation de la contrainte, <math>\Sigma</math>, à la rupture en fonction de l'orientation des joints horizontaux . . . . .</i>	87
3.22	<i>La variation de la contrainte, <math>\Sigma</math>, à la rupture en fonction de l'orientation des joints horizontaux : <math>\xi = 0</math> . . . . .</i>	88
3.23	<i>(a), (b) et (c) sont les variations de la contrainte, <math>\Sigma</math>, à la rupture en fonction de l'orientation des joints horizontaux pour les cas de chargement <math>\xi = 0.5</math>, <math>\xi = 0.714</math> et <math>\xi = 0.8</math> respectivement . . . . .</i>	89
3.24	<i>Convexe de résistance <math>G^\Sigma</math> dans le plan <math>(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})</math> . . . . .</i>	91
3.25	<i>Convexe de résistance <math>G^\Sigma</math> dans le plan <math>(\Sigma_{11}, \Sigma_{12})</math> . . . . .</i>	91
3.26	<i>Convexe de résistance <math>G^\Sigma</math> dans le plan <math>(\Sigma_{22}, \Sigma_{12})</math> . . . . .</i>	92
3.27	<i>Convexe de résistance <math>G^\Sigma</math> dans le plan <math>(X = \Sigma_{11} = \Sigma_{22}, \Sigma_{12})</math> . . . . .</i>	92
3.28	<i>(a), (b) et (c) sont les variations de la capacité portante du panneau en maçonnerie en fonction de l'orientation des joints horizontaux pour les cas de chargement <math>\xi = -1</math>, <math>\xi = 0</math> et <math>\xi = 0.8</math> successivement . . . . .</i>	94
4.1	<i>Écrouissage : entraîne de <math>C(\mathbf{A})</math> par <math>\boldsymbol{\sigma}</math> dans <math>\mathbb{R}^6</math> . . . . .</i>	100
4.2	<i>Interprétation géométrique du schéma général de retour radial : (a) écrouissage ; et (b) élastoplastique parfait [30]. . . . .</i>	106
4.3	<i>Diagramme de résolution d'un problème élastoplastique . . . . .</i>	107
4.4	<i>Entrées et sorties de la UMAT . . . . .</i>	109
4.5	<i>Schématisation de la loi de comportement codée sous ABAQUS®. . . . .</i>	116
4.6	<i>Traction parallèle aux joints horizontaux . . . . .</i>	117
4.7	<i>Courbe contrainte/déformation : traction parallèle aux joints horizontaux</i>	117
4.8	<i>Traction perpendiculaire aux joints horizontaux . . . . .</i>	117
4.9	<i>Courbe contrainte/déformation : Traction perpendiculaire aux joints horizontaux . . . . .</i>	117
4.10	<i>Traction-compression dans le plan . . . . .</i>	118
4.11	<i>Courbe contrainte/déformation : Traction-compression dans le plan . . . . .</i>	118
4.12	<i>Traction-compression dans le plan . . . . .</i>	118
4.13	<i>Courbe contrainte/déformation : Traction-compression dans le plan . . . . .</i>	118
4.14	<i>Compression dans le plan . . . . .</i>	119
4.15	<i>Courbe contrainte/déformation : Compression dans le plan . . . . .</i>	119
4.16	<i>Compression dans le plan . . . . .</i>	119
4.17	<i>Courbe contrainte/déformation : Compression dans le plan . . . . .</i>	119

4.18	<i>Confrontation entre les résultats UMAT et EF-3D . . . . .</i>	120
4.19	<i>Mode chargement de la structure maçonnée . . . . .</i>	121
4.20	<i>Distribution de contrainte <math>\sigma_{11}</math> et de déformation <math>\varepsilon_{11}</math> dans la structure maçonnée . . . . .</i>	122
4.21	<i>Distribution de contrainte <math>\sigma_{22}</math> et de déformation <math>\varepsilon_{22}</math> dans la structure maçonnée . . . . .</i>	122
4.22	<i>Courbe des forces de réaction horizontales du trumeau en fonction du déplacement imposé . . . . .</i>	122
4.23	<i>Mode chargement de la structure maçonnée . . . . .</i>	123
4.24	<i>Distribution de contrainte <math>\sigma_{11}</math> et de déformation <math>\varepsilon_{11}</math> dans la structure maçonnée . . . . .</i>	123
4.25	<i>Distribution de contrainte <math>\sigma_{22}</math> et de déformation <math>\varepsilon_{22}</math> dans la structure maçonnée . . . . .</i>	124
4.26	<i>Courbe des forces de réaction horizontales du mur en fonction du déplacement imposé . . . . .</i>	124
4.27	<i>Mode chargement de la structure maçonnée . . . . .</i>	125
4.28	<i>Distribution de contrainte <math>\sigma_{11}</math> et de déformation <math>\varepsilon_{11}</math> dans la structure maçonnée . . . . .</i>	125
4.29	<i>Distribution de contrainte <math>\sigma_{22}</math> et de déformation <math>\varepsilon_{22}</math> dans la structure maçonnée . . . . .</i>	125
4.30	<i>Courbe des forces de réaction horizontales du mur en fonction du déplacement imposé . . . . .</i>	126
5.1	<i>Essai de caractérisation du comportement de l'interface d'adhésion développé par l'AFGC [3] . . . . .</i>	128
5.2	<i>Principe de l'essai . . . . .</i>	129
5.3	<i>Echantillon à ancrage simple . . . . .</i>	129
5.4	<i>Echantillon à ancrage mèche standard . . . . .</i>	130
5.5	<i>Echantillon à ancrage mèche à chas . . . . .</i>	130
5.6	<i>Élément de maçonnerie . . . . .</i>	131
5.7	<i>Bande de TFC . . . . .</i>	132
5.8	<i>Description d'une mèche standard . . . . .</i>	133
5.9	<i>Tête à chas liée à une tige filetée <math>\phi 16</math> . . . . .</i>	134
5.10	<i>Schéma du corps d'épreuve à ancrage simple . . . . .</i>	135

---

5.11	<i>Perçage des trous d'ancrage</i>	136
5.12	<i>Mise en place du TFC</i>	136
5.13	<i>Injection de colle dans les trous</i>	137
5.14	<i>Préparation de la mèche</i>	137
5.15	<i>Scellement d'une mèche</i>	137
5.16	<i>Incorporation et fermeture</i>	137
5.17	<i>Mèche à chas liée à une tige filetée</i>	137
5.18	<i>Fixation de ma mèche</i>	137
5.19	<i>Mise en place du TFC</i>	138
5.20	<i>Imprégnation des fibres de carbone</i>	138
5.21	<i>Passage de la mèche dans la tête à chas</i>	138
5.22	<i>Incorporation et fermeture</i>	138
5.23	<i>Fixation de l'échantillon dans le bâti d'essai</i>	139
5.24	<i>Essai de traction</i>	139
5.25	<i>Installation du capteur de déplacement sur le TFC</i>	140
5.26	<i>Jauges de déformation</i>	141
5.27	<i>Courbes force/déplacement : ancrage simple</i>	142
5.28	<i>Délaminage observé lors des essais sans ancrage</i>	143
5.29	<i>Positions des jauges de déformation : face 1 et face 2</i>	144
5.30	<i>Courbe force/déformation de l'échantillon à ancrage simple</i>	144
5.31	<i>Courbe force /déformation sur la zone libre du TFC</i>	144
5.32	<i>Courbe force/déformation de l'échantillon à ancrage simple</i>	145
5.33	<i>Modèle de comportement simplifié de l'essai</i>	145
5.34	<i>Schéma du joint collé étudié</i>	147
5.35	<i>Schéma du joint collé avec les conditions aux limites AFGC</i>	149
5.36	<i>Schéma du joint collé avec les conditions aux limites CSTB</i>	150
5.37	<i>Profil de cisaillement le long du joint collé</i>	151
5.38	<i>Profil de cisaillement le long du joint collé (repère semi-logarithmique)</i>	151
5.39	<i>Déformations du composite - E5 face 1</i>	153
5.40	<i>Cisaillement de la colle - E5 face 1</i>	154
5.41	<i>Délaminage puis rupture du TFC au niveau de la couche de recouvrement</i>	155
5.42	<i>Délaminage puis rupture du TFC au niveau de la mèche d'ancrage</i>	155

5.43	<i>Courbes force/déplacement : ancrage avec mèche standard . . . . .</i>	155
5.44	<i>Mode de rupture observé lors des essais avec ancrage de type mèche à chas</i>	156
5.45	<i>Courbes force/déplacement : ancrage avec mèche à chas . . . . .</i>	157
5.46	<i>Mode de chargement . . . . .</i>	158
5.47	<i>Courbe force/déplacement . . . . .</i>	159
5.48	<i>Courbe force/déplacement : rupture au niveau de la fibre du carbone en liaison avec la mèche d'ancrage . . . . .</i>	160
5.49	<i>Courbe force/déplacement : rupture au niveau de la mèche d'ancrage . .</i>	161
5.50	<i>Mode de chargement . . . . .</i>	161
5.51	<i>Courbe force/déplacement : échantillon à ancrage simple . . . . .</i>	162
5.52	<i>Courbe force/déplacement : Échantillon avec ancrage mèche standard .</i>	163
5.53	<i>Courbe force/déplacement : Échantillon avec ancrage mèche à chas . .</i>	164
A.1	<i>Etudes de stabilité d'un mur en maçonnerie . . . . .</i>	173
A.2	<i>Approche par l'intérieur de <math>K</math> . . . . .</i>	174
A.3	<i>Exemple de mécanisme virtuel de rupture . . . . .</i>	176
A.4	<i>Approche par l'extérieur de <math>K</math> . . . . .</i>	177
B.1	<i>Mur en maçonnerie et cellule de base . . . . .</i>	180
B.2	<i>Schéma résumant la méthode d'homogénéisation en calcul à la calcul à la rupture . . . . .</i>	182
B.3	<i>Antipériodicité du champ de contrainte . . . . .</i>	183
B.4	<i>Approche cinématique du domaine de résistance macroscopique <math>G^{hom}</math> .</i>	185

---

# Liste des tableaux

1.1	Propriétés mécaniques des briques. D'après [43]	20
1.2	Propriétés mécaniques des mortiers suivant leur composition. D'après [43]	22
1.3	Modes de rupture d'une maçonnerie constituée de briques à base d'argile soumise à un chargement biaxial. D'après [35]	29
1.4	Paramètres identifié par PAGE 1983	30
2.1	Paramètres de calcul	60
3.1	Paramètres de calcul	71
3.2	Paramètres de calcul	71
3.3	Résultats d'essais de compression	80
3.4	Paramètres de calcul	93
4.1	Paramètres de calcul	120
5.1	Programme d'essais	131
5.2	Position des jauges de déformation à partir du bord haut	143
5.3	Valeurs utilisées pour la détermination du profil de cisaillement (ces valeurs correspondent à l'essai CSTB)	150
5.4	Tableau récapitulatif du cas de chargement monotone croissant	157



---

# Introduction

Depuis plus de quinze ans, des recherches engagées au plan national et international (U. Meier [63], K. Neale [68], P. Hamelin [42], E. Ferrier [39], A. Triantafillou [93], J-L Clément [21], ont mis en évidence que les matériaux composites (matrices polymères - renforts textiles) pouvaient assurer la protection, la réparation, le renforcement de structures béton armé, béton précontraint, métallique, bois mais aussi d'éléments structuraux maçonnés. Les technologies de mise en oeuvre sont de trois types (stratification au contact, collage de plats composites pultrudés, moulage au sac) et les matériaux concernés sont essentiellement les fibres de carbone, de verre, d'aramide associées à des matrices thermodurcissables type époxydes. La performance du système de renforcement est essentiellement liée au transfert de charge entre le renfort et son support par l'intermédiaire d'un joint de colle.

L'exploitation des travaux de recherche a permis d'établir des recommandations, des règles de calcul et de dimensionnement pour les poutres (flexion et effort tranchant) dans le cas des chargements quasi-statiques prenant en considération les conditions d'état limite de service et d'état limite ultime (ACI 440 [2], ISIS Canada [48], JCI Japan [49], AFGC [3], Fib TG9.3 [40]). Pour autant, un certain nombre d'éléments manque encore à la bonne connaissance du fonctionnement de ces procédés et on est conduit à adopter des dispositions compensatoires et des coefficients de sécurité élevés.

Dans ce contexte, le programme de recherche "INPERMISE" pour "INGénierie PERformantielle pour la MIse en SEcurité des ouvrages par renforcement composites" a été lancé sous l'égide de l'Agence Nationale pour la Recherche (ANR). La réalisation de ce programme repose sur la contribution de trois laboratoires de recherche : le Centre Scientifique et Technique du Bâtiment (CSTB), le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC) et le Laboratoire de Génie Civil et d'Ingénierie Environnementale (LGCIE) et de deux industriels : FREYSSINET et VINCI - CONSTRUCTION. La répartition des tâches entre les partenaires est la suivante : Le CSTB s'intéresse aux

murs en maçonnerie renforcés, le LCPC travaille sur le renforcement des poteaux en béton et le LGCIE sur celui des voiles en béton, tandis que FREYSSINET et VINCI - CONSTRUCTION apportent leur concours à la réalisation de l'ensemble des tâches. On précise que le partenaire LGCIE coordonne le projet en la personne du Professeur Hamelin.

En dehors des zones géographiques dans lesquelles des actions horizontales importantes sont à prendre en compte dans le dimensionnement des ouvrages, les murs maçonnés des structures de type "maison individuelle" étaient traditionnellement réalisés jusqu'à il y a peu sans chaînages verticaux. Ce constat est cohérent avec le fait que la norme Française "DTU 20.1" portant sur les parois et murs en maçonnerie de petits éléments n'exige la présence de chaînages verticaux à tous les niveaux que depuis sa révision de 2008.

La résistance en traction des parois maçonnées étant faible et erratique, celle-ci n'est pas prise en compte dans le dimensionnement. Il en découle que les parois maçonnées non chaînées ne peuvent supporter que des efforts horizontaux suffisamment faibles pour que, sous leurs sollicitations combinées à celles nées des charges gravitaires, la maçonnerie reste partout comprimée.

Il s'ensuit que les ouvrages en maçonnerie non chaînée nécessitent d'être renforcés lorsque, du fait par exemple d'une modification du zonage sismique ou de la déclaration d'une zone comme relevant d'un plan de prévention des risques technologiques, il devient nécessaire de considérer des actions horizontales importantes, non prévues à l'origine de la construction.

Faute de connaissances suffisantes, on constate que la capacité de contreventement qu'offrirait le renforcement par composites collés aux murs maçonnés non chaînés est encore très peu exploitée. La recherche proposée va donc dans le sens d'une meilleure utilisation des parois maçonnées présentes dans le bâti existant dans les situations, largement majoritaires, où la conception initiale de l'ouvrage avait considéré la descente des charges pour seule contribution structurale.

Le programme de travail du CSTB pour INPERMISE repose sur une approche mixte expérimentation-modélisation. Dans ses grandes lignes, ce programme intègre la construction d'un modèle de comportement pour la maçonnerie non renforcée sollicitée dans son plan, la réalisation d'une campagne expérimentale de caractérisation du comportement de l'interface maçonnerie/renfort composite, l'enrichissement du modèle de comportement par la prise en compte du renfort par composite collé et la réalisation de sept essais en vraie grandeur sur murs maçonnés pour aboutir à une méthode de dimensionnement formant la synthèse des résultats obtenus.

La thèse, qui fait l'objet de ce mémoire, s'inscrit dans le cadre d'une collaboration entre le Centre Scientifique et Technique du Bâtiment (CSTB) à Marne-La-Vallée et le

laboratoire Navier (UMR 8205) de l'École des Ponts Paris-Tech (ENPC) dont l'objectif est une contribution forte aux tâches du programme INPERMISE dévolues au CSTB. Bien que le travail de thèse ait porté sur l'ensemble des tâches présentées précédemment, le présent mémoire ne rapporte que les travaux portant sur le développement d'un modèle de comportement pour les maçonneries non renforcées et sur la campagne expérimentale de caractérisation du comportement de l'interface maçonnerie/renfort composite. En effet, ces deux contributions étant déjà importantes et l'enrichissement du modèle pour la prise en compte des renforts et la campagne d'essais sur murs n'étant pas totalement achevés, nous avons préféré ne pas ajouter la présentation de ces deux dernières tâches.

Après une étude bibliographique, notre choix de modélisation des murs en maçonnerie s'est porté sur la méthode d'homogénéisation périodique en analyse limite. En effet, cette dernière nous permet de construire des modèles macro-mécaniques basés sur des considérations micro-mécaniques de la structure. Le milieu périodique hétérogène est ainsi remplacé par un milieu homogène équivalent. Par cette méthode, nous obtenons des simulations qui allient une bonne description du comportement à la robustesse nécessaire au calcul de structures complexes.

Nos travaux concernant la modélisation par homogénéisation des murs en maçonnerie sont décrits dans les chapitres un à quatre, alors que le dernier chapitre est consacré à notre contribution à l'étude expérimentale du renforcement des murs en maçonnerie. Ainsi, nous proposons dans les premiers chapitres une loi élastique parfaitement plastique pour le comportement dans le plan d'une maçonnerie constituée de blocs liés par des joints de mortier. Le convexe de plasticité est obtenu par une technique d'homogénéisation périodique qui prend en compte la nature tridimensionnelle de la cellule de base. On obtient alors un convexe limité par plusieurs surfaces de charge. Un algorithme numérique original est ensuite proposé et programmé dans le logiciel aux Eléments Finis ABAQUS grâce à la procédure UMAT, routine permettant à un utilisateur d'introduire la loi de comportement de son choix. Des simulations numériques utilisant le nouveau module UMAT seront présentées.

Dans le premier chapitre, nous présentons une étude bibliographique qui décrit d'abord les constituants les plus usuels en maçonnerie. Ensuite nous abordons les aspects liés à la modélisation de leur comportement et à la modélisation des interfaces dans ces structures. Puis finalement, nous analysons les difficultés liées à la modélisation de telles structures. Cette étude bibliographique nous permet de fixer nos objectifs de modélisation et de définir les moyens à mettre en oeuvre dans cette thèse.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons les principes généraux de la méthode d'homogénéisation en analyse limite des milieux périodiques. Nous donnons ensuite quelques propriétés liées aux symétries de la microstructure. Nous montrons comment les propriétés de symétrie et de périodicité permettent de simplifier la résolution du problème d'analyse limite posé sur la cellule de base. Finalement, nous mettons en oeuvre ces résultats pour estimer analytiquement le convexe de résistance macroscopique d'un panneau en maçonnerie sollicité dans son plan dans le cas où les blocs constituant la maçonnerie sont infiniment résistants par rapport aux interfaces.

Après avoir souligné les limites d'une telle approche analytique, nous procédons au troisième chapitre à la mise au point d'une méthode numérique de détermination du critère de résistance macroscopique tenant compte de la résistance finie des blocs. Nous montrons que l'utilisation d'un modèle d'interface bidimensionnel pour les joints lors de l'analyse limite d'une structure maçonnée conduit à une estimation par excès des capacités portantes de la structure, quand l'épaisseur des joints tend vers zéro. Nous proposons dans cette partie un critère de rupture pour les panneaux en maçonnerie sollicités dans leur plan et nous le validons par comparaison avec des données expérimentales.

Le quatrième chapitre traite de l'implémentation du modèle sous le logiciel de calcul par éléments finis Abaqus et des résultats numériques. Les simulations et les données expérimentales, provenant du chapitre précédent, sont comparées afin de conclure sur la pertinence comme sur les limitations de la modélisation proposée. Des simulations numériques sur trois types de structures maçonnées (un trumeau, un simple panneau en maçonnerie et un panneau en maçonnerie avec une réservation au milieu) sont faites également.

Dans le dernier chapitre, nous nous intéressons au renforcement des éléments de maçonnerie (blocs de béton creux) par des bandes de tissus de fibres de carbone (TFC). Le renfort est collé grâce une résine époxy. L'étude porte sur la caractérisation du comportement de l'interface entre le renfort et l'élément de maçonnerie pour définir la longueur d'ancrage du renfort, longueur de transfert nécessaire pour pouvoir solliciter le renfort au maximum de sa capacité. Nous présentons dans un premier temps le type d'essai qui a été réalisé pour étudier le comportement de l'interface d'adhésion lorsqu'elle est soumise à un cisaillement, puis nous décrivons les trois types d'échantillon testés : un échantillon à ancrage simple et deux échantillons dont l'ancrage est renforcé par la présence de deux types de mèches. Ces deux types de mèches correspondent à des situations différentes d'ancrage : dans un chaînage pour le premier et dans une semelle de fondation pour le second. Le dispositif d'essai est

ensuite amplement détaillé pour ce qui concerne la préparation des corps d'épreuve, l'instrumentation, puis les conditions de chargement. Dans la partie résultats et analyse, nous voyons l'efficacité du renfort sur la maçonnerie, puis nous entrons dans les détails des modes de défaillance de ces renforts en faisant une étude de chacune des conditions de défaillances. Pour finir nous utilisons des modèles de comportement des composites pour déterminer la longueur d'ancrage.

Un bilan des travaux réalisés et des prolongements envisagés achève le mémoire.



---

# Notations

Les Notations suivantes sont utilisées dans le texte :

## Vecteurs et tenseurs

### Quantités

$a$  : Scalaire

$\mathbf{a}$  : Vecteur  $(a_i)$

$\mathbf{A}$  : Tenseur de seconde ordre  $(A_{ij})$

$\mathbf{A}$  : Tenseur d'ordre quatre  $(A_{ijkl})$

### Opérateurs

$:$  : Produit contracté

$\nabla$  : Opérateur nabla

$\otimes$  : Produit tensoriel

$\otimes^s$  : Produit tensoriel symétrisé

### Notations

$b$  : Longueur des blocs utilisés

$a$  : Largeur des blocs utilisés

$t$  : Épaisseur du panneau en maçonnerie

$e_v$  : Épaisseur du joint de mortier vertical

$e_h$  : Épaisseur du joint de mortier horizontal

- $\Omega$  : Domaine de la plaque  
 $\partial\Omega$  : Frontière extérieur de  $\Omega$   
 $\omega$  : Surface moyenne de la plaque  
 $\omega^J$  : Surface moyenne du joint d'interface  
 $Y$  : Volume de la cellule de base  
 $y$  : Coordonnées d'un point de la cellule de base  
 $\partial Y$  : Frontière extérieur de  $Y$   
 $\mathbf{n}$  : Normale extérieur unitaire au bord considéré  
 $\theta$  : Angle entre un joint et l'axe horizontal  
 $\varphi$  : Angle de frottement d'un matériau de Mohr-Coulomb  
 $\beta$  : Angle de frottement d'un matériau de Drucker-Prager  
 $c$  : La cohésion  
 $\nu$  : Coefficient de poisson  
 $E_b$  : Module d'young des briques  
 $E_J$  : Module d'young des joints d'interface  
 $\mathbf{u}$  : Déplacement microscopique  
 $\boldsymbol{\sigma}$  : Tenseur de contrainte microscopique  
 $\mathbf{s}$  : Partie déviatorique de  $\boldsymbol{\sigma}$   
 $p$  : Pression hydrostatique  
 $q$  : Contrainte équivalente de Von Mises  
 $\boldsymbol{\varepsilon}$  : Tenseur de déformation totale microscopique  
 $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  : Tenseur de déformation élastique microscopique  
 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  : Tenseur de déformation plastique  
 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  : Taux de déformation totale microscopique  
 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$  : Taux de déformation élastique microscopique  
 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  : Taux de déformation plastique microscopique  
 $\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$  : Tenseur de contrainte macroscopique  
 $f$  : Fonction de charge  
 $\mathbf{N}$  : Tenseur des efforts membranaires  
 $\mathbf{M}$  : Tenseur des moments fléchissants  
 $\mathbf{D}$  : Tenseur taux de déformation membranaire  
 $\boldsymbol{\chi}$  : Tenseur taux de courbure  
 $\mathbf{V}$  : Vitesse virtuelle des plaques

- $G$  : Domaine de résistance  
 $G_p^{hom}$  : Domaine de résistance homogénéisé d'une plaque périodique  
 $G^b$  : Domaine de résistance des briques  
 $G^J$  : Domaine de résistance des joints d'interface  
 $G^{Num}$  : Domaine de résistance trouvé par homogénéisation numérique 3D  
 $G^s$  : Domaine de résistance en compression des panneaux en maçonnerie  
 $G^T$  : Domaine de résistance en traction des panneaux en maçonnerie  
 $\pi$  : Fonction d'appui d'un convexe  
 $\pi_p^{hom}$  : Fonction d'appui d'un convexe homogénéisé  
 $\pi^b$  : Fonction d'appui du domaine de résistance des briques  
 $\pi^J$  : Fonction d'appui du domaine de résistance des joints d'interface  
 $CA$  : Ensemble des champs de vitesses cinématiquement admissibles  
 $SA$  : Ensemble des champs de contraintes statiquement admissibles  
 $\psi$  : Énergie libre spécifique  
 $\psi^e$  : Partie élastique de l'énergie libre spécifique  
 $\psi^p$  : Partie plastique de l'énergie libre spécifique  
 $\mathbf{A}$  : Force thermodynamique d'écrouissage  
 $\mathbf{G}$  : Module de cisaillement  
 $\mathbf{K}$  : Module d'élasticité à la pression isostatique  
 $\mathbf{C}^e$  : Matrice de rigidité élastique  
 $\mathbf{C}^{ep}$  : Matrice tangente  
 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  : Incrément de déformation  
 $\gamma$  : Multiplicateur plastique  
 $\Delta\gamma$  : Multiplicateur plastique



---

# Les maçonneries, phénoménologies de leurs comportements

Généralement, les structures maçonnées sont soumises à plusieurs facteurs extérieurs et intérieurs qui les rendent vulnérables. Le temps, l'espace (lieu, environnement,...) et les matériaux de construction sont parmi les facteurs déterminants pour la survie de ces structures. De plus le rôle (principal ou secondaire) attribué aux éléments en maçonnerie dans une structure influence également leur résistance. La maçonnerie est un matériau anisotrope, composé de brique et de mortier, dont le comportement suivant les deux directions perpendiculaire et parallèle au joint horizontal de mortier est différent. Par ailleurs, la connaissance et la détermination de leur comportement mécanique est indispensable afin de prédire leur tenue et leur avenir. En effet, de nombreux auteurs (expérimentateurs) se sont penchés sur cette question dans le but de comprendre le comportement de ces structures sous les différentes sollicitations auxquelles elles sont soumises régulièrement :

- la compression uniaxiale
- la traction uniaxiale
- le chargement biaxial
- le cisaillement

Dans ce chapitre, nous allons présenter une synthèse bibliographique sur le comportement des constituants et des structures en maçonnerie. Ensuite nous abordons les aspects liés à la modélisation de leur comportement. Puis finalement, nous analyserons les difficultés liées à la modélisation de telles structures.

## 1.1 Caractéristiques des constituants de la maçonnerie

### 1.1.1 Les briques

Les briques sont des pierres artificielles à base de terres argileuses (briques de terre moulée et cuites), de laitier (brique de laitier) ou à base de chaux et de silice (briques silico-calcaires). Ce sont des unités prismatiques disponibles dans une grande variété de tailles, de textures, de couleurs et de formes. Elles peuvent être pleines, perforées ou creuses. D'une manière générale, elles sont caractérisées par leur résistance à la compression et à la traction comme indiqué dans le tableau 1.1 :

Les propriétés des briques varient avec le mode de fabrication. Si l'on casse une brique produite par agglomération, on constate que l'état de surface de la cassure est "gréneux" (mauvaise compacité). Alors que pour les briques fabriquées à la filière (la pâte est pressée dans un tuyau et ensuite passée par un laminoir avant d'être coupée en briques) la cassure est "lisse" (meilleure compacité).

- La densité étant liée à la compacité, les briques médiocres ont une densité voisine de 1,4 alors que les briques résistantes ont une densité supérieure à 2.
- La résistance à la compression des briques de bonne qualité est voisine de 40 MPa.
- La résistance à la traction, mesurée par flexion, ne dépasse pas 12 MPa [72].

Propriétés	Masse volumique ( $Kg/m^3$ )	Module élastique ( $Mpa$ )	Coefficient de Poisson	Résistance Compression ( $Mpa$ )	Résistance Traction ( $Mpa$ )
Granite	2600	50000	0.3	170	-
Calcaire	2000-2600	45000	0.2	5-25	25
Béton	2400	40000	0.3	10-40	4
Brique creuse	3000	5000	0.3	20	8
Brique pleine	3000	15000	0.2	40	4

*Tableau 1.1* — Propriétés mécaniques des briques. D'après [43]

#### 1.1.1.1 Briques de laitier

Les briques de laitier s'obtiennent par le mélange sous presse (pression d'environ 30 GPa) d'un mélange de laitier et de liant (chaux grasse, chaux au laitier ou ciment de laitier). La fabrication de ces briques est totalement mécanisée. En France, elles ont des dimensions assez réduites puisqu'il faut en général 145 briques pour la construction d'un

mètre carré de mur de 22cm d'épaisseur. Elles sont surtout employées comme matériau de parement.

- Les briques pleines ont une résistance à la compression qui se situe autour de 15MPa
- Les briques de céramique ont des résistances qui avoisinent les 40 MPa.
- En traction, les résistances varient entre 6 et 12MPa. Elles ont également un module d'élasticité compris entre 9 et 14 GPa. Ce qui donne en moyenne pour un mur de briques de premier choix un module de 15 GPa [29].

### 1.1.1.2 Briques silico-calcaires

La fabrication des briques silico-calcaires consiste à comprimer un mélange de silice 90% et de la chaux grasse à une pression de 30 MPa et à soumettre ce mélange à un jet de vapeur d'eau sous pression pendant plusieurs heures. Ces briques sont des matériaux de remplissage, la rugosité des surfaces permet l'accrochage des enduits. L'emploi des silico-calcaires légers ou denses donne des résistances à la compression qui peuvent aller respectivement jusqu'au 7 MPa pour des densités de l'ordre de 0.8 et jusqu'à 60 MPa pour les densités d'ordre de 2.2.

## 1.1.2 Les joints de mortier

Les caractéristiques mécaniques du mortier dépendent essentiellement de la phase de préparation (mise en oeuvre) et de la phase finale c'est-à-dire après le durcissement.

La première phase est fonction de l'ouvrabilité du mortier. Cette caractéristique est généralement définie par le maçon. On ne peut pas lui donner une signification précise par manque de norme spécifique le concernant. Ce qu'il faut retenir c'est que pendant cette phase, le mortier doit avoir une certaine viscosité, être facile à écarter avec une truelle et impérativement coller sur les surfaces verticales.

Les ingrédients qui peuvent augmenter l'ouvrabilité du mortier sont la taille des agrégats et la quantité d'eau utilisée pour le malaxage. L'entraînement d'air est un additif qui crée des bulles d'air minuscules dans le mélange. Ces bulles vont aider les ingrédients du mortier à se déplacer plus librement. Par ailleurs, elles vont réduire la résistance du matériau puisque la densité et la surface de liaison entre les unités de maçonnerie vont être naturellement affaiblies.

L'hétérogénéité des constituants du mortier, les phénomènes de prise, de durcissement, de retrait et de fluage donnent à ce matériau une certaine spécificité qui est souvent difficile à prendre en compte dans les calculs. Ces paramètres du mortier sont contrôlés par le choix des granulats et des liants et par leurs pourcentages respectifs dans le mélange. Le sable est généralement le granulat employé. Il est inerte dans la

réaction chimique d'hydratation, mais participe à la compacité du mortier durci. Dans les constructions modernes, il doit répondre à des exigences de granulométrie pour conférer plus au moins au mortier son homogénéité. Les liants sont de nature variée ce qui leur donne des caractéristiques mécaniques différentes. Ils sont donc très différents suivant leur conception et leur emploi.

Les mortiers anciens étaient à base de chaux, ils possédaient une très bonne viscosité, mais leur résistance mécanique était faible et leur durcissement lent. La chaux grasse, obtenue par extinction de la chaux vive, est la base du mortier traditionnel rencontré dans les édifices anciens. Pour des raisons de coût, la chaux hydratée sèche est la plus utilisée aujourd'hui.

- La terre argileuse est un type de liant qui a été utilisé dans les constructions traditionnelles. On le reconnaît à sa résistance qui est mauvaise avec le temps.
- Les ciments usuels sont aussi appelés liants hydrauliques car ils ont la propriété de s'hydrater en présence d'eau et parce que cette hydratation transforme la pâte liante. Cette dernière a une consistance de départ plus ou moins fluide, se transforme en un solide pratiquement insoluble dans l'eau.

La résistance à la compression du mortier est parfois considérée comme critère principal pour choisir le type de mortier, puisqu'elle est relativement facile à mesurer. Elle se relie généralement à quelques autres propriétés, comme la résistance à la traction et le pouvoir de rétention d'eau du mortier. La résistance à la compression du mortier dépend en grande partie du contenu du ciment (la chaux et le sable) utilisé et du rapport (E/C) eau-ciment. Par exemple, le rapport E/C est égal à 0,5 pour un mortier normal de type (EN 196-1).

Le tableau ci-dessus donne un aperçu des propriétés mécaniques des mortiers.

Type de mortier			Résistance en compression(MPa)	
Ciment/chaux /sable	Ciment de maçonnerie /sable	Ciment /sable+adjuvant	Test laboratoire	Test in-situ
1/0.25/3	-	-	16	11
1/0.5/4-4.5	1/ 2.5-3.5	1/3-4	6.5	4.5
1/1/5-6	1/4-5	1/5-6	3.6	2.5
1/2/8-9	1/5.5-6.5	1/7-8	1.5	1.0

**Tableau 1.2** — Propriétés mécaniques des mortiers suivant leur composition.  
D'après [43]

## 1.2 Propriétés mécaniques de la maçonnerie

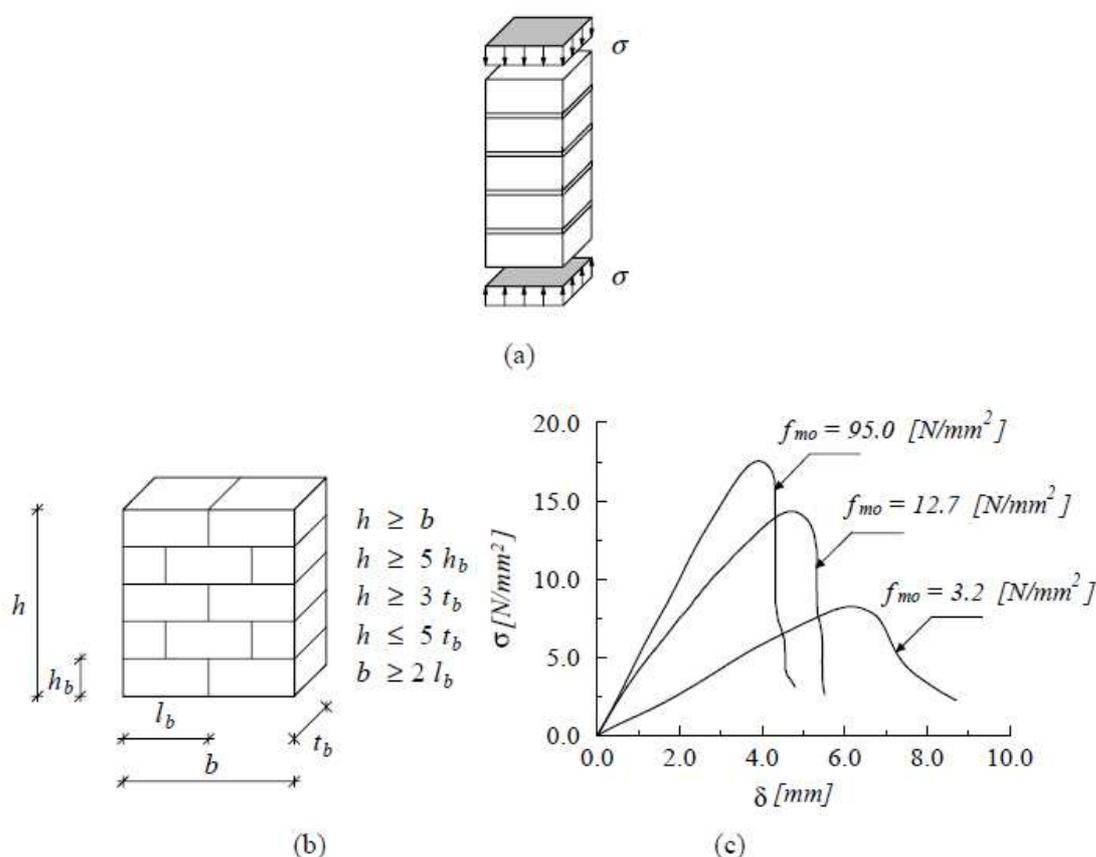
### 1.2.1 Comportement sous sollicitation de compression uniaxiale

La résistance à la compression des maçonneries dans la direction normale aux joints horizontaux est généralement considérée comme le seul critère qui permette de définir la résistance globale de la structure qui est un matériau composite. Les essais usuels qui sont utilisés pour obtenir cette résistance à la compression uniaxiale sont présentés sur la Figure 1.1.

Le premier cas représenté est un essai sur une pile de briques (Figure 1.1-a) qui reste un essai peu représentatif de la maçonnerie du fait de la résistance de l'échantillon pendant l'essai [59]. Le deuxième cas d'essai montré sur la figure 1.1-b est appelé essai de RILEM [95]. Le spécimen RILEM est assez large et représentatif. Depuis les travaux de Hilsdorf [43], il a été accepté par la communauté scientifique que la rupture des structures maçonnées est induite essentiellement par la différence des propriétés mécaniques entre les briques et les joints de mortier.

La compression uniaxiale de la maçonnerie conduit à un état de compression triaxiale dans le mortier et à une compression et à une traction biaxiale dans les éléments de briques. Il est observé dans [59] que des fissures verticales apparaissent initialement sur les briques tout au long de la ligne médiane du spécimen, qui se continue au niveau des joints de mortier verticaux. Avec l'évolution des déformations, les fissures verticales apparaissent de plus en plus, ce qui conduit à la rupture du prisme par une cassure au milieu de celui-ci. L'exemple illustrant ce cas est montré par la Figure 1.1-c. Le diagramme force-déplacement est obtenu sur un prisme de  $500 \times 250 \times 600 \text{ mm}^3$ , composé de briques pleines en boue. On remarque que l'augmentation de la vitesse de chargement mène à une rupture de plus en plus fragile.

L'essai uniaxial dans la direction parallèle aux joints horizontaux a reçu une attention moins importante par la communauté scientifique. Cependant, la maçonnerie représente un matériau anisotrope et la résistance à l'effort de compression appliqué suivant les joints horizontaux peut avoir une influence sur la force ultime de rupture. D'après Hoffmann et Schubert [44], le ratio entre les résistances à la compression parallèle et normale au joint horizontal est compris entre 0.2 et 0.8. Ces résultats ont été observés sur des éprouvettes de maçonnerie qui sont constituées par des briques pleines et perforées à base d'argile, de calcium silicate et aussi du béton léger.



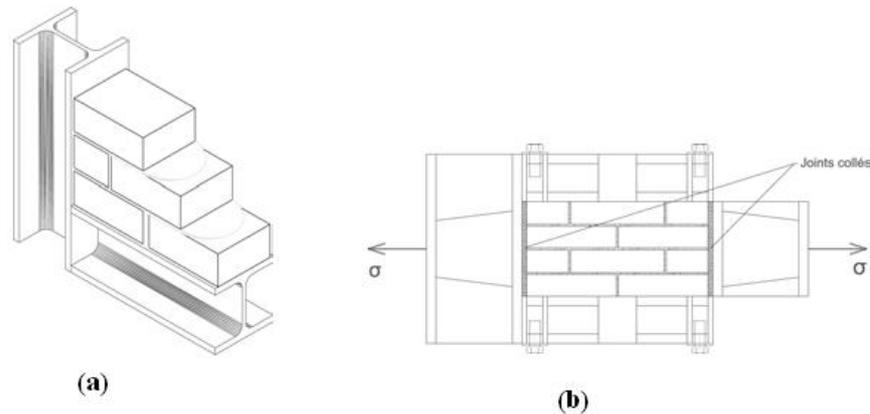
**Figure 1.1** — Comportement de la maçonnerie sous l'effet d'un effort normal aux joints horizontaux (a) cas d'un empilement simple de briques. (b) Spécimen RILEM. (c) Diagramme contrainte - déformation d'un essai compression sur un prisme de maçonnerie ( $500 \times 250 \times 600 \text{mm}^3$ )  $f_{m0}$  : [9] : résistance à la compression du mortier. D'après [95]

## 1.2.2 Comportement sous sollicitation de traction uniaxiale

Pour une structure maçonnée soumise à une charge de traction dans le sens perpendiculaire aux joints horizontaux, la rupture est généralement causée par le décollement entre les briques et le mortier. Le comportement à la traction peut être caractérisé par la résistance d'adhérence entre la brique et le joint de mortier, donc par la tenue en traction de l'interface élément/mortier. Il faut signaler que le mécanisme d'adhérence entre les briques et le mortier est peu connu, ce qui explique notre intérêt pour ce sujet et fait l'objet de notre étude.

Des essais ont été effectués par Backes [45] pour étudier le comportement des maçonneries soumises à un chargement de traction parallèle aux joints horizontaux. Le spécimen est réalisé sur une structure métallique comme on peut le voir sur la figure 1.2-a ; les deux profilés métalliques utilisés doivent former un angle droit pour obtenir

la précision souhaitée. Le chargement est effectué via les plateaux d'acier attachés au spécimen par une colle très résistante à la traction (Figure 1.2- b).



**Figure 1.2** — Essai de traction dans la direction parallèle aux joints horizontaux  
(a) Phase de construction (b) Dispositif de l'essai de traction. D'après [45]

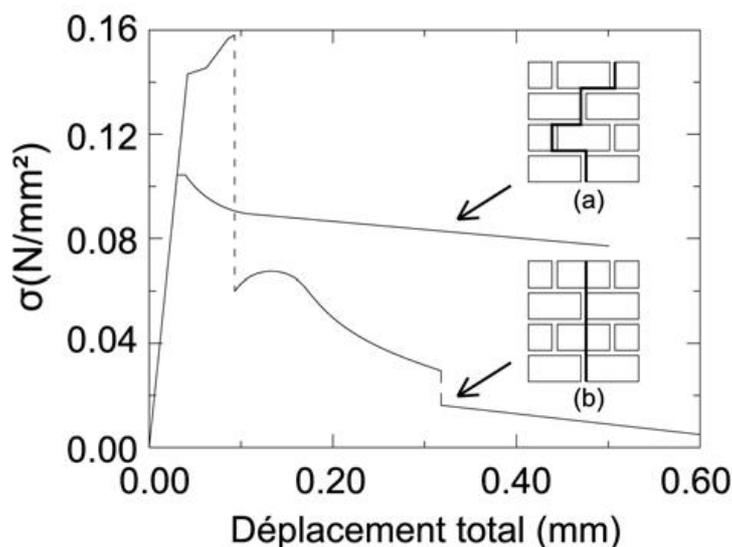
Les diagrammes contrainte - déplacement sont présentés sur la Figure 1.3 (a - b). Les résultats ont montré que :

- La rupture est produite le plus souvent par un glissement dans les joints horizontaux et une perte d'adhérence dans les joints verticaux.
- Lorsque la résistance à la traction des briques est plus faible que l'adhérence entre ces dernières et le mortier (dans le cas d'un mortier résistant par rapport aux briques perforées ou creuses), la rupture peut se produire par le dépassement de la résistance à la traction des briques. Ceci peut influencer la résistance à la traction globale de la maçonnerie qui est finalement dominée par la résistance à la traction des briques.

### 1.2.3 Comportement biaxial

L'anisotropie d'un élément en maçonnerie engendrée par la faiblesse des joints par rapport aux briques et/ou blocs nécessite l'analyse du comportement sous chargement biaxial. Le comportement doit être décrit par un tenseur de contraintes complet, c'est-à-dire tenir compte de l'anisotropie du matériau maçonnerie, qui implique des comportements différents suivant les axes matériels.

La plupart des cas étudiés expérimentalement sur des maçonneries soumises à un



**Figure 1.3** — Diagramme contrainte -déplacement pour un essai de traction suivant la direction parallèle aux joints horizontaux : (a) Rupture induite par le glissement dans les joints horizontaux et une perte d'adhérence dans les joints verticaux (b) Rupture totale des joints et des briques. D'après [45].

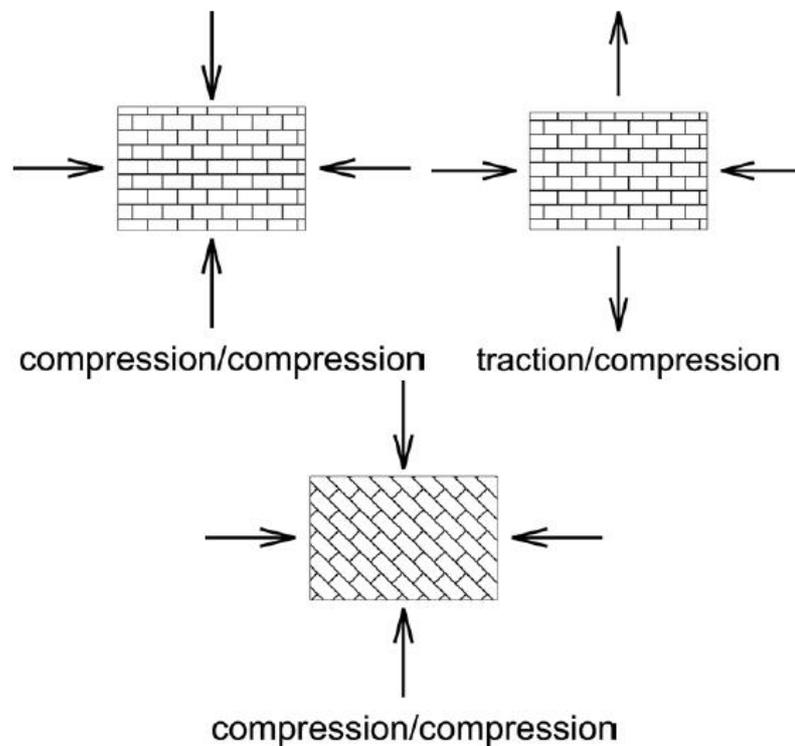
chargement biaxial sont montrés par la Figure 1.4 [71, 72]. Ces tests ont été effectués sur des prismes représentatifs en briques à base d'argile. L'orientation des contraintes principales par rapport aux axes du matériau et le rapport des contraintes principales influent considérablement sur le mode de rupture et bien évidemment sur la résistance ; les différents modes de ruptures sont illustrés par la Figure 1.5.

Pour une traction uniaxiale, la rupture est produite par des fissures et le glissement des joints verticaux et horizontaux. La contrainte de compression latérale diminue la résistance à la traction, ce qui peut être expliqué par l'endommagement induit sur la maçonnerie par les glissements des joints et par les microfissures au niveau des briques.

Dans le cas de chargement compression- traction, la rupture est induite soit par le glissement soit par la fissuration des joints combinés dans certains cas avec la fissuration des briques. Des cas similaires de rupture sont constatés pour la compression uniaxiale. Les plans de rupture sont toujours perpendiculaires au plan du panneau.

Concernant le tableau 1.3, l'angle  $\theta$  mesure l'orientation des efforts principaux par rapport aux axes horizontal et vertical. Pour ce qui est de l'essai biaxial, pour la plupart des rapports de contraintes principales  $\sigma_1/\sigma_2$ , la rupture apparaît dans un plan parallèle aux surfaces libres du panneau, indépendamment de l'orientation des axes principaux. Ce mode de rupture se rencontre couramment dans les cas des murs doubles (composites) ou à âme remplie, où les interfaces entre les différentes couches

verticales sont des surfaces mécaniquement faibles. Si une des contraintes principales est dominante, la rupture se produisant de façon perpendiculaire aux surfaces libres, est provoquée par le glissement dans les joints. Dans ce dernier cas, l'anisotropie due à l'orientation des joints joue un rôle considérable.



*Figure 1.4 — Essai biaxial sur des panneaux de maçonnerie. D'après [71, 72]*

### 1.2.4 Comportement au cisaillement

Les murs en maçonnerie peuvent être soumis à des efforts horizontaux, tels que le vent, les poussées de terre et les tremblements de terre, dans leurs plans et aussi suivant le plan perpendiculaire aux murs. L'évaluation de la résistance des maçonneries due aux efforts de cisaillement permet de prévoir et estimer la stabilité et la fiabilité de la structure.

Dans le cas d'un cisaillement dans le plan, le mur est soumis à des efforts horizontaux, en plus d'un chargement vertical dans le plan du mur. Ce chargement biaxial est simplifié par le schéma proposé par la Figure 1.5. Le mur est soumis à un chargement vertical uniforme le long de la partie supérieure qui vient s'ajouter une charge horizontale concentrée.

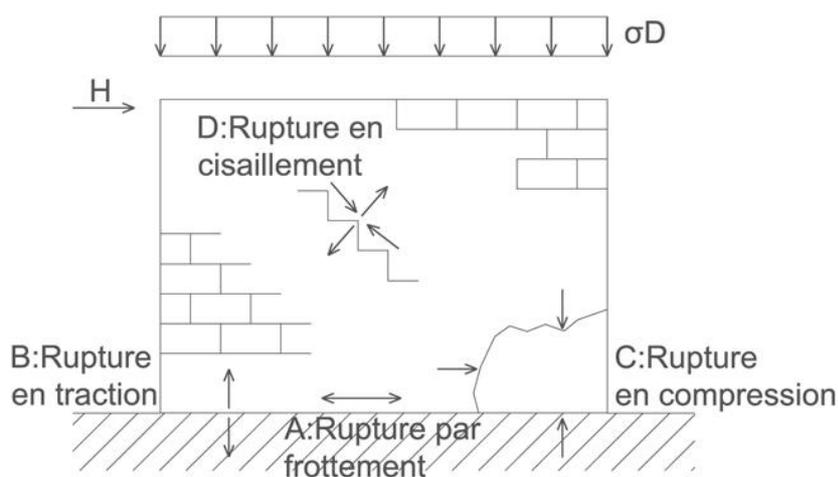
Les différents modes de rupture obtenus sont :

1. Rupture due au frottement et au cisaillement horizontal au niveau des joints horizontaux,
2. Rupture en traction dans les joints inférieurs du mur causée par le moment d'encastrement,
3. Rupture en compression de la maçonnerie à la base du mur induite par la force de traction transversale dans les unités et enfin rupture due au cisaillement.

Dans ce dernier cas, la combinaison des efforts de compression et de traction conduit à une rupture diagonale du mur. Ce mode de rupture peut être décomposé en une rupture des joints horizontaux et une rupture en traction des briques.

Pour un effort vertical et une force de cisaillement faibles, la rupture diagonale se produit le long des joints verticaux et horizontaux et prend une forme d'escalier. Pour le cas d'un effort vertical de forte intensité et une faible force de traction dans les briques, la rupture diagonale passe à travers les briques et le long des joints verticaux. Ce dernier mode est appelé aussi rupture fragile ou effondrement. Il est généralement causé par la dégradation de la rigidité de la maçonnerie.

D'autre part, la rupture des joints est considérée comme étant une rupture ductile parce que même après l'apparition de fissures en forme d'escalier, des forces horizontales peuvent encore induire du frottement.



**Figure 1.5** — Modes de rupture d'un mur en maçonnerie soumis un chargement biaxial

Angle $\theta$	Traction uniaxiale	Traction/compression	Compression uniaxiale	Compression biaxiale
$\theta = 0^0$				Rupture au milieu 
$\theta = 22,5^0$				
$\theta = 45^0$				
$\theta = 67,5^0$				
$\theta = 90^0$				

**Tableau 1.3** — Modes de rupture d'une maçonnerie constituée de briques à base d'argile soumise à un chargement biaxial. D'après [35]

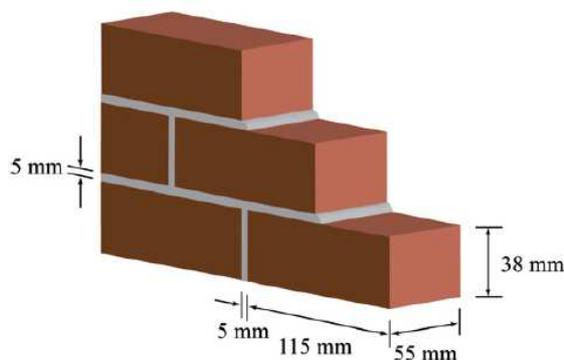
### 1.2.5 Essais de PAGE (1980, 1981, 1983)

On peut dire que l'une des études les plus complètes réalisées à ce jour sur les caractéristiques de résistance de la maçonnerie est l'étude faite par PAGE (1981, 1983). Il s'agissait d'une série de traction biaxiale, compression biaxiale et des essais biaxiaux de traction-compression à différentes orientations des joints de mortier par rapport à la direction de chargement. Tous les essais ont été effectués dans le plan, c'est à dire aucune information n'est disponible sur le comportement hors plan. Les panneaux ont été construits avec des briques de dimensions  $115\text{mm} \times 55\text{mm} \times 38\text{mm}$  et des joints d'épaisseur  $5\text{mm}$ , figure 1.6. En plus des essais sur les panneaux de maçonnerie, les propriétés de résistance des constitutions, c'est à dire briques et mortier, ont également identifiés. le tableau 1.4 contient les données communiquées par PAGE dans l'article de 1983.

Comme on l'a précisé précédemment, les critères biaxiaux permettent de mettre en évidence l'anisotropie engendrée par l'appareil. Cette anisotropie est principalement due à la faiblesse relative des joints devant les éléments. Elle peut être accentuée par l'anisotropie éventuelle des éléments (briques creuse, agglomérés). Nous donnons ici quelques résultats caractéristiques d'essais biaxiaux dus à PAGE (1980, 1981, 1983).

Propriétés	valeurs
Résistance à la compression des briques (MPa)	15.4
Résistance à la compression du mortier (MPa)	5.08
Cisaillement pur du mortier (MPa)	0.3
Résistance à la traction de panneaux dans (MPa)	0.24

**Tableau 1.4** — Paramètres identifié par PAGE 1983



**Figure 1.6** — Dimensions de la maçonnerie utilisée dans les expériences de PAGE (article [50])

Sur la figure 1.7, le critère de rupture est représenté dans le plan  $(\sigma_1, \sigma_2)$  pour un essai de traction compression. On note que le critère de rupture décroît brutalement avec l'angle.

Pour un angle de  $\theta = 90^\circ$ , on retrouve un essai de traction directe où l'on peut constater que le seuil de rupture varie linéairement avec la pression de confinement. L'ensemble des autres courbes présente une concavité plus au moins marquée souvent synonyme de rupture fragile. Selon PAGE (1983), la rupture se produit principalement suivant des plans normaux au panneau, dans des mécanismes mettant en jeu le plus souvent la rupture des joints, en particulier, lorsque la compression est faible.

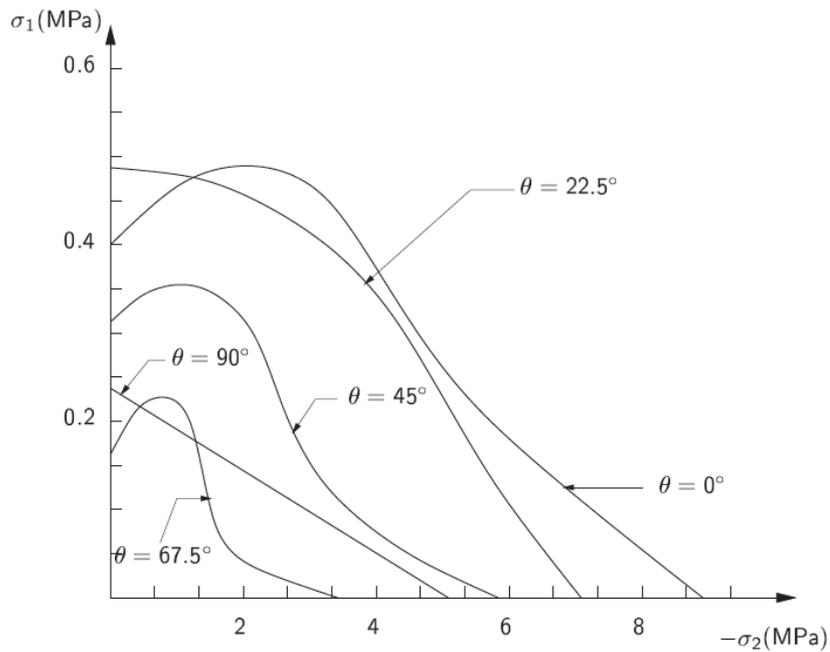


Figure 1.7 — Test biaxial traction-compression (d'après [71, 72])

### 1.3 Modélisation des structures maçonnées

La connaissance des propriétés des matériaux constitutifs de la maçonnerie n'est pas suffisante pour déterminer le comportement de la maçonnerie elle-même. Il faut en effet tenir compte de la micro-structure, des proportions des constituants ou du comportement des interfaces. Ainsi, la forte hétérogénéité et la grande diversité de ses matériaux constitutifs et de leur arrangement rendent la maçonnerie particulièrement difficile à modéliser. La maçonnerie peut ainsi être traitée à deux échelles différentes :

- l'échelle macroscopique, c'est-à-dire celle de la structure, où l'on peut considérer la maçonnerie comme homogène et continue ;
- l'échelle microscopique, c'est-à-dire celle des éléments (blocs ou joints), où la maçonnerie est hétérogène.

Les modèles de maçonnerie proposés dans la littérature prennent à la fois en compte la spécificité de la maçonnerie étudiée ainsi que le niveau d'information souhaité et, éventuellement, les données expérimentales dont on dispose.

Malgré l'abondance et la diversité des études sur le sujet, on peut dégager trois grandes approches correspondant au choix de l'échelle d'étude du matériau.

### 1.3.1 Modélisation macro-mécanique des structures maçonnées

Dans ce type de modélisation, on considère la maçonnerie comme un matériau homogène et continu auquel on peut appliquer les principes de la mécanique des milieux continus. Différentes hypothèses de comportement sont alors possibles en fonction des phénomènes que l'on veut modéliser et des données expérimentales à disposition.

**Modélisation en plasticité parfaite.** Les notions de plasticité parfaite permettent de mettre au point des modèles de structures maçonnées en faisant intervenir un minimum de paramètres caractéristiques du matériau.

On peut évaluer simplement la stabilité de la maçonnerie par la théorie du calcul à la rupture. Le calcul à la rupture permet de déterminer le domaine de chargement potentiellement supportable par la structure en se basant sur la seule connaissance des efforts qui lui sont imposés et de la capacité de résistance du matériau. La difficulté reste la caractérisation de cette capacité de résistance : on s'appuie généralement sur une résistance limite en compression, une résistance faible en traction et un critère de frottement de Coulomb. C'est à Coulomb (1773) que l'on doit les travaux précurseurs sur le sujet, qui seront ensuite développés par Méry (1840) puis Delbecq (1983). Cette méthode est expliquée en détail en annexe A.

L'analyse limite et les travaux de Heyman (1966) introduisent de nouvelles hypothèses qui vont permettre de qualifier la relation contraintes-déformations et de définir ainsi une nouvelle classe de matériau adapté au cas de la maçonnerie que sont les *Non-Tension Materials*, des matériaux qui ont une résistance illimitée en compression, une résistance nulle à la traction et dans lesquels aucun glissement n'est autorisé.

**Modélisation en élasticité linéaire.** La méthode des éléments finis en élasticité linéaire a été abondamment utilisée pour modéliser des édifices monumentaux en maçonnerie, comme la Basilique St Marc à Venise (Mola et Vitaliani, 1997) ou la façade de la Basilique St Pierre de Rome (Macchi, 2001). Ce type de calcul permet de montrer l'influence de la géométrie sur le comportement de la structure : il pointe ainsi les zones sensibles, c'est-à-dire celles susceptibles d'être sollicitées en traction. La difficulté réside dans la caractérisation des différents paramètres élastiques du matériau. D'autre part, ce type de modélisation est très coûteux en temps de calcul et il est souvent difficile de déterminer la rupture de la structure.

**Prise en compte des phénomènes inélastiques.** La maçonnerie peut être considérée comme un géomatériau quasi-fragile ; à ce titre, il peut être intéressant de prendre en

compte les phénomènes inélastiques propres à ces matériaux que sont la plasticité non associée et l'endommagement fragile.

Lourenço et al. (1997) proposent un modèle de maçonnerie en plasticité non associée en s'appuyant sur les travaux réalisés pour le béton, permettant de simuler les comportements inélastiques du matériau en compression comme en traction.

Oñate et al. (1997) ont adapté les modèles numériques de calcul en endommagement du béton au cas de la maçonnerie.

Or, les géomatériaux sont en réalité soumis au couplage de ces deux phénomènes. Lotfi et Shing (1991) ont proposé un modèle d'endommagement fragile et de plasticité couplés appliqué au cas particulier des maçonneries chaînées et armées.

Les modèles macro-mécaniques permettent de donner une première appréciation du comportement des structures maçonnées qui fournit des résultats cohérents avec les données expérimentales ; ils peuvent séduire par leur relative simplicité de mise en oeuvre. Néanmoins, ces modélisations n'autorisent pas la localisation des déformations au sein de la structure et ne permettent donc pas de rendre compte de la fragilité avérée de la maçonnerie au niveau des joints.

### 1.3.2 Modélisation micro-mécanique des structures maçonnées

L'approche micro-mécanique consiste à se placer à une échelle permettant la prise en compte de l'hétérogénéité du matériau. La maçonnerie est alors considérée comme un milieu polyphasé dont chaque composant est intégré dans la modélisation. On distingue les modélisations micro-mécaniques selon qu'elles considèrent le matériau comme continu ou discret.

**Modèles micro-mécaniques discrets.** Dans les modèles micro-mécaniques discrets, la maçonnerie est considérée comme un ensemble d'éléments reliés entre eux par des lois de contact simulant l'action du joint.

Le modèle discret le plus employé dans l'étude des maçonneries est la méthode des éléments distincts (MED). Cette méthode, initiée et développée par Cundall en 1971 pour l'analyse des massifs rocheux fissurés, a été utilisée par de nombreux chercheurs pour modéliser les structures maçonnées (Lemos, 1997 ; Idris et al., 2008). Ici, les blocs sont modélisés par des solides rigides ou déformables liés entre eux par des lois de contact régulières et dont le mouvement est décrit par les équations de Newton-Euler ; le problème est ensuite résolu par des schémas explicites.

On peut également introduire des lois de contact non-régulières type conditions

de Signorini ou frottement sec de Coulomb; la résolution passe alors nécessairement par l'emploi de schémas implicites, ce qui rend les temps de calcul plus longs. On citera parmi ces méthodes non-régulières la méthode Non-Smooth Contact Dynamics (NSCD) initiée par Moreau (1988) et Jean (1999) qui a été utilisée pour modéliser des structures maçonnées (Acary, 2001 ; Chetouane et al., 2005 ; Rafiee et al., 2008).

Ces modèles permettent de simuler les mécanismes de ruine par grande déformation qui interviennent dans la maçonnerie pour un coût de calcul qui reste raisonnable. Elles demandent un grand nombre de paramètres, notamment au niveau des lois de contact, qu'il n'est pas toujours facile de mesurer.

**Modèles micro-mécaniques continus.** Les modèles micro-mécaniques continus ont été introduits pour rendre compte des phénomènes de plasticité et d'endommagement de la maçonnerie. Le milieu est considéré comme hétérogène mais continu ; on exclut donc les possibilités de désolidarisation d'une partie de la structure. Les premiers travaux remontent à Page (1978) ; on pourra plus récemment se reporter aux travaux de Lotfi et Shing (1994), Lourenço et Rots (1997) ou Shieh-Beygi et Pietruszczak (2008).

Ces modélisations permettent une évaluation précise des phénomènes non-linéaires qui interviennent dans la maçonnerie mais leur résolution numérique est souvent complexe et l'évaluation des paramètres nécessaires à leur mise en oeuvre souvent difficile.

Les modèles micro-mécaniques permettent de rendre compte précisément des phénomènes qui interviennent dans la maçonnerie, notamment au niveau des joints, faisant ainsi apparaître une faible résistance du matériau à la traction ainsi qu'un mécanisme de frottement sec. Le problème tient ici au coût de calcul de telles modélisations ainsi qu'à la caractérisation des différents paramètres nécessaires au modèle.

### 1.3.3 Modélisation multi-échelle des structures maçonnées

La modélisation multi-échelle fournit une alternative aux deux approches présentées précédemment en construisant des modèles macro-mécaniques basés sur des considérations micro-mécaniques.

Le milieu hétérogène est ainsi remplacé par un milieu homogène équivalent, c'est-à-dire un milieu homogène qui aura les mêmes caractéristiques mécaniques que le milieu hétérogène de départ. On distingue deux types de méthode d'homogénéisation :

- les méthodes de bornes, bien adaptées aux maçonneries de blocage ;
- l'homogénéisation périodique, à privilégier pour les maçonneries régulières.

Ensuite, on étudie le milieu homogénéisé en recourant à des modèles similaires à ceux décrits dans la modélisation macro-mécanique.

Pande et al. (1989) ont été les premiers à développer cette méthode pour déterminer les propriétés élastiques d'une maçonnerie périodique; cette méthode a ensuite été formalisée par Anthoine (1995). De Buhan & de Felice (1997) et Sab (2003) ont appliqué la théorie, dans des travaux séparés, de l'homogénéisation périodique au calcul à la rupture. Les recherches portent désormais sur la modélisation en plasticité (Lopez et al., 1999; Zucchini et Lourenço, 2007) et en endommagement (Luciano et Sacco, 1997; Zucchini et Lourenço, 2004; Calderini et Lagomarsino, 2006).

Ces méthodes permettent d'intégrer le caractère hétérogène de la structure tout en conservant la simplicité des calculs sur milieux homogènes. Elles donnent des résultats intéressants dans la modélisation des phénomènes linéaires; la modélisation des comportements non-linéaires est encore en cours de recherche.

Ce tour d'horizon des différentes études sur la maçonnerie nous a permis de voir que le sujet était difficile à traiter compte tenu de la grande variété des types de maçonnerie et de la complexité des phénomènes physiques qui interviennent. Trois grands types d'approche ont émergé, correspondant chacun à un choix d'échelle d'étude du matériau, selon qu'on le considère comme homogène, homogénéisé ou hétérogène. Les différents modèles s'attachent à caractériser un ou plusieurs modèles de comportement (plasticité parfaite, élasto-plasticité, plasticité non associée, endommagement fragile) de la maçonnerie en s'appuyant sur des observations empiriques ou sur des données expérimentales.

## 1.4 Conclusion

Au début de ce chapitre, une présentation des différents types de constituants de maçonnerie a été faite à travers une nomenclature succincte.

L'ensemble des travaux expérimentaux qui ont été recensés considère la maçonnerie comme un matériau, à part entière, homogène et continu. Implicitement, le caractère hétérogène et microstructural est alors négligé au profit d'une description phénoménologique macroscopique. Les résultats de ce type d'essais ont souvent bornés à l'estimation de critère de rupture et peu d'informations sont données sur les phénomènes inélastiques qui se produisent dans le matériau. Ceci est peut être le résultat de l'hypothèse homogénéité du matériau maçonnerie qui est très restrictive.

Afin de mieux comprendre les phénomènes inélastiques qui peuvent se produire, le comportement mécanique des maçonneries a été replacé dans le contexte plus général des géomatériaux quasi-fragiles. Deux conclusions principales émergent dans ce travail :

- La prise en compte de plusieurs échelles d'études semble s'imposer si l'on veut décrire le comportement des maçonneries. Dans ce chapitre, trois échelles principales ont été mises en évidence : une échelle macroscopique, une échelle

mésoscopique et une échelle microscopique. A chacune des ces échelles, des hypothèses doivent être faites conférant à la maçonnerie un caractère homogène ou hétérogène, continu ou discret.

- Deux phénomènes inélastiques caractérisent le comportement de la maçonnerie à ces différentes échelles. Le premier est l'endommagement fragile et le second la plasticité non associée. Ces phénomènes sont intimement couplés et conduisent à des comportements globaux complexes.

Les enseignements qui peuvent être tirés des ces conclusions sommaires, sont à la base des modélisations qui seront présentées dans les chapitres suivants. Nous donnerons un aperçu au chapitre suivant, des modélisations multi-échelles en 3D qui s'appuient sur des mécaniques fortes pour décrire les comportements des maçonneries.

# CHAPITRE 2

---

## Analyse limite et homogénéisation périodique des plaques

L'homogénéisation des plaques périodiques a été déjà largement étudiée dans différents cadres : matériaux constitutifs élastiques, élasto-plastiques ou rigides parfaitement plastiques. Nous exposons brièvement par la suite l'essentiel des travaux sur de telles problématiques.

L'homogénéisation de plaques périodiques *élastiques* a été étudiée par beaucoup d'auteurs ((Duvaut et Metellus, 1976), (Caillerie, 1984), (Kohn et Vogelius, 1984) et (Lewinski et Telega, 1999), par exemple). Pour une valeur fixe de la taille caractéristique de la plaque  $L$ , le problème d'homogénéisation consiste à trouver la solution asymptotique quand l'épaisseur  $t$  et la période  $\epsilon$  tendent vers zéro. Caillerie (1984) a considéré une plaque hétérogène d'épaisseur constante et a abouti à un modèle de plaque de Love-Kirchhoff équivalent. Toutefois, comme il a été montré dans (Caillerie, 1984) et (Kohn et Vogelius, 1984), le schéma d'homogénéisation dépend de l'ordre de convergence vers 0 de  $t$  et  $\epsilon$ . En effet, lors du processus d'homogénéisation, l'ordre de passage à la limite de ces deux paramètres ne commutent pas et conduit à différents résultats.

La méthode d'homogénéisation pour la détermination du domaine de résistance global d'un milieu 3D périodique hétérogène a été initialement introduite dans (Suquet, 1983), (de Buhan, 1986) et (Bouchitté, 1986-1987) pour les milieux continus périodiques, par Sab (1994) pour les milieux continus aléatoires et dans (Florence et Sab, 2006) pour les milieux discrets. Pour un milieu continu 3D périodique dans les trois directions, il a été prouvé dans (Bouchitté, 1986-1987) que la charge limite pour le vrai matériau hétérogène est asymptotiquement égale à la charge limite pour la plaque homogénéisée, quand la taille de l'hétérogénéité tend vers 0 et lorsque les conditions limites sont telles qu'il n'y ait pas d'effets de bord libre. C'est effectivement le cas quand tous les déplacements sont imposés aux frontières de la structure. Par ailleurs,

on trouvera un contre-exemple dans (de Buhan, 1986) où la charge limite pour le domaine du matériau hétérogène réel est asymptotiquement strictement inférieure à la charge limite pour la matériau homogène équivalent.

Dans leurs travaux, Bourgeois et al. (1998) et Sab (2003) ont proposé de manière indépendante de substituer la plaque 3D périodique dans le plan par une plaque homogène de Love-Kirchhoff équivalente dont le domaine de résistance macroscopique homogénéisé est déterminé à partir de la résolution d'un problème auxiliaire sur la cellule de base 3D. Cette procédure est une généralisation à l'analyse limite des travaux de Caillerie (1984) sur les plaques minces élastiques.

Un mur en maçonnerie peut être considéré comme une plaque périodique dans son plan et dont l'épaisseur et la taille de la période dans le plan sont du même ordre de grandeur. Ainsi, on s'intéresse dans ce chapitre à l'homogénéisation en analyse limite de telles plaques. Dans la partie introductive, on rappelle brièvement quelques propriétés du domaine convexe, ainsi que les théories de plaque (milieu bidimensionnel). Par la suite, on présente aussi quelques rappels concernant les grands principes de l'analyse limite et de l'homogénéisation périodique. Finalement, on applique ces méthodes pour déterminer le convexe de résistance homogénéisé dans le plan d'une maçonnerie constituée des blocs infiniment résistants séparés par des interfaces.

## 2.1 Rappels sur les domaines convexes

### 2.1.1 Domaines de plasticité ou de résistance

On introduit le domaine de plasticité ou de résistance  $G(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^6$  du matériau au point  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  de la structure. Il caractérise les contraintes plastiquement admissibles en ce point  $\boldsymbol{\sigma} \in G(\mathbf{x})$ . Le domaine  $G(\mathbf{x})$  possède les caractéristiques suivantes (expérimentalement intuitives) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \in G(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

c'est-à-dire que la contrainte nulle est admissible plastiquement. Et également :

$$\begin{cases} \forall \boldsymbol{\sigma}^1 \in G(\mathbf{x}), \forall \boldsymbol{\sigma}^2 \in G(\mathbf{x}), \forall \alpha \in [0; 1] \\ \alpha \boldsymbol{\sigma}^1 + (1 - \alpha) \boldsymbol{\sigma}^2 \in G(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{2.2}$$

qui traduit la convexité du domaine (des hypothèses plus restrictives peuvent être adoptées, mais on ne les détaillera pas ici : voir (Salençon, 1983)). On supposera également que le domaine est fermé. Dans la plupart des critères courants (Coulomb, Tresca, Von-Mises,...), le domaine de résistance est associé à une fonction seuil  $f$  qui est

aussi convexe et différentiable presque partout par rapport au tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$ .

L'équivalence s'écrit de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} \in G(\mathbf{x}) \Leftrightarrow f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) \leq 0. \quad (2.3)$$

Citons en exemple, le critère de plasticité de Mohr-Coulomb :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sup_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}} \{(1 + \sin \varphi) \sigma_i - (1 - \sin \varphi) \sigma_j - 2c \cos \varphi\} \quad (2.4)$$

Où les  $\sigma_i$  sont les contraintes principales,  $c$  est la cohésion,  $\varphi$  est l'angle de "frottement interne" ; on posera  $H = c \cot \varphi$ , appelée "pression de cohésion", qui apparaît comme la limite de résistance en traction triple. Dans le cas d'un matériau hétérogène, les valeurs de  $\varphi$  et  $c$  dépendent de la position du point  $\mathbf{x}$ .

### 2.1.2 Fonction d'appui

Tout domaine convexe fermé est uniquement déterminé par une fonction convexe positivement homogène de degré 1. On appelle cette fonction la fonction support ou fonction d'appui du domaine convexe (Ekeland et Temam, 1976). La fonction d'appui  $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{d})$  du domaine  $G(\mathbf{x})$  est définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{x}, \mathbf{d}) &= \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in G(\mathbf{x})} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \\ &\Leftrightarrow \\ G(\mathbf{x}) &= \{\boldsymbol{\sigma} \mid \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \leq \pi(\mathbf{x}, \mathbf{d}), \forall \mathbf{d}\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

où  $\mathbf{d} = (d_{ij})$  est un taux de déformation (plastique), représenté par un tenseur symétrique d'ordre 2. La donnée de la fonction d'appui au point  $\mathbf{x}$  pour tout  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^6$  est équivalente à la donnée de  $G(\mathbf{x})$  lui-même. Ainsi, si le domaine  $G$  est décrit par une fonction seuil  $f$ , on a :

$$\pi(\mathbf{x}, \mathbf{d}) = \sup_{\boldsymbol{\sigma}, f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) \leq 0} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \quad (2.6)$$

La fonction d'appui a des propriétés intéressantes :

–  $\pi$  est une fonction positive. (Comme la contrainte nulle est admissible, il suffit

de prendre la valeur en ce point dans (2.6))

–  $\pi$  est positivement homogène de degré 1, i.e. :

$$\forall \alpha \geq 0, \forall \mathbf{d}, \pi(\mathbf{x}, \alpha \mathbf{d}) = \alpha \pi(\mathbf{x}, \mathbf{d}) \quad (2.7)$$

–  $\pi$  est convexe.

On notera, enfin, que si le domaine de plasticité est borné dans toutes les directions de l'espace, le "sup" dans la fonction  $\pi$  est atteint pour un ou plusieurs états de contraintes (selon la stricte convexité du domaine ou non). Si le domaine est non borné, il existe des valeurs du taux de déformation  $\mathbf{d}$  pour lesquelles la valeur de la fonction  $\pi$  est infinie. On appelle souvent cette fonction d'appui la fonction de densité de dissipation plastique. Par exemple, dans le cas d'un critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction, on a ((Salençon, 1983)) :

$$\pi(\mathbf{x}, \mathbf{d}) = \begin{cases} c(|d_1| + |d_2| + |d_3| - tr \mathbf{d}) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) & \text{si } tr \mathbf{d} \geq A \\ +\infty & \text{si } tr \mathbf{d} < A \end{cases} \quad (2.8)$$

Avec :

$$A = (|d_1| + |d_2| + |d_3|) \cdot \sin \varphi$$

où  $d_1, d_2, d_3$  sont les valeurs propres de  $\mathbf{d}$ .

Une définition cinématique du domaine de résistance à partir de la fonction  $\pi$  revient à dire que  $G(\mathbf{x})$  est l'ensemble des tenseurs de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  tels que le minimum de la fonction,  $\mathbf{d} \mapsto (\pi(\mathbf{x}, \mathbf{d}) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d})$ , sur la sphère unité  $\|\mathbf{d}\| = 1$  est positif.

$$G(\mathbf{x}) = \left\{ \boldsymbol{\sigma} \mid \inf_{\|\mathbf{d}\|=1} (\pi(\mathbf{x}, \mathbf{d}) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}) \geq 0 \right\} \quad (2.9)$$

On peut utiliser la fonction  $\pi$  pour caractériser le domaine par sa fonction seuil  $F$  définie par :

$$F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) = \sup_{\|\mathbf{d}\|=1} \{ \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \pi(\mathbf{x}, \mathbf{d}) \} \quad (2.10)$$

Sur les surfaces de discontinuité de vitesse de normale sortant  $\mathbf{n}$  au point  $\mathbf{x}$ , la fonction d'appui  $\pi(\mathbf{n} \otimes^s [\mathbf{v}])$  est définie par :

$$\pi(\mathbf{n} \otimes^s [\mathbf{v}]) = \sup \{ \mathbf{T} \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{x})] \mid \mathbf{T} \in g(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})) \} \quad (2.11)$$

$\mathbf{n}(\mathbf{x})$  est la normale au point  $\mathbf{x}$  à la surface de discontinuité et  $[\mathbf{v}(\mathbf{x})]$  est le saut de la vitesse au même point. Le vecteur  $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$  étant évidemment linéaire en  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ , il en résulte que lorsque  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  parcourt  $G(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{T}$  parcourt le domaine  $g(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}))$  dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  des vecteurs-contraintes, et  $g(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}))$  possède dans cet espace les mêmes propriétés que celle énoncées précédemment pour le domaine  $G(\mathbf{x})$  dont il est issu, dans  $\mathbb{R}^6$ .

### 2.1.3 Frontière du domaine de plasticité

#### 2.1.3.1 Caractérisation directe ou statique

On sait qu'un état de contrainte,  $\boldsymbol{\sigma}$  est sur la frontière du domaine de plasticité,  $G(\mathbf{x})$  notée  $\partial G(\mathbf{x})$ , si et seulement si le minimum de l'équation (2.9) est égal à 0. Ainsi, on écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial G(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \exists \mathbf{d} \neq 0, \boldsymbol{\sigma} \in \partial \pi(\mathbf{x}, \mathbf{d}) \quad (2.12)$$

où  $\partial \pi(\mathbf{x}, \mathbf{d})$  est le sous différentiel de la fonction  $\pi$  au point  $\mathbf{d}$ .

En pratique, on notera que le sous-différentiel de la fonction  $\pi$  en un point  $\mathbf{d}$ ,  $\partial \pi(\mathbf{x}, \mathbf{d})$ , se réduit à l'expression de sa dérivée  $\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{d}}(\mathbf{x}, \mathbf{d})$  si la fonction  $\pi$  est différentiable au point  $\mathbf{d}$ .

On remarquera également que la fonction  $\pi$  n'est pas différentiable au point  $\mathbf{d} = 0$  (par construction) et que le sous-différentiel en 0 est justement le domaine de résistance  $G(\mathbf{x})$  (le produit  $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}$  étant nul partout au point  $\mathbf{d} = 0$  tous les états de contrainte dans le domaine de résistance réalisent le maximum du produit, i.e 0).

#### 2.1.3.2 Caractérisation cinématique

On peut également caractériser la frontière du domaine de plasticité (ou de résistance)  $\partial G(\mathbf{x})$  de la manière suivante :

Pour un état de contrainte fixé non nul,  $\boldsymbol{\sigma} \neq 0$ , on note  $b(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) \geq 0$  la fonction réelle positive telle que  $b(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) \times \boldsymbol{\sigma} \in \partial G(x)$

$$b(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) = \inf_{\{\mathbf{d} : \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} = 1\}} \pi(\mathbf{x}, \mathbf{d}). \quad (2.13)$$

Ainsi, la frontière du domaine de plasticité  $\partial G(\mathbf{x})$  peut être générée en considérant

toutes les directions de l'espace des contraintes comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial G(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' = 1, b(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}') < \infty, \boldsymbol{\sigma} = b(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}') \times \boldsymbol{\sigma}'. \quad (2.14)$$

L'équation (2.12) peut être qualifiée de méthode *directe* pour la détermination de  $G(\mathbf{x})$  et les équations (2.13-2.14) de méthode *cinématique*.

Classiquement, la fonction support du domaine de plasticité  $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{d})$  est la densité de puissance de dissipation correspondant à une règle *normale d'écoulement*. Dans sa version la plus générale, la règle *normale d'écoulement*, qui relie le taux de déformation à la contrainte, s'écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &\in G(\mathbf{x}) \\ (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}') : \mathbf{d} &\geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\sigma}' \in G(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Quand le critère de plasticité  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma})$  est différentiable par rapport aux contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$ , la règle d'écoulement ci-dessus est équivalente à la règle d'écoulement classique de la plasticité parfaite :

$$\mathbf{d} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \text{ avec } \lambda \geq 0, \leq 0 \text{ et } \lambda f = 0 \quad (2.16)$$

où  $\lambda(\mathbf{x})$  est le champ multiplicateur de Lagrange sur le domaine considéré.

## 2.2 Théorie des plaques : généralités

Les plaques sont des structures planes pour lesquelles une surface moyenne peut être identifiée, deux dimensions étant prépondérantes par rapport à la troisième. Sur la Figure 2.1, le domaine global est donc  $\Omega = w \times ]-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}[$  avec  $w \subset \mathbb{R}^2$ .

L'idée de toute théorie de plaque est de substituer à la structure  $3D$  présentant une faible épaisseur par une structure  $2D$  qui lui soit équivalente, présentant plus de simplicité pour les calculs. On présentera, ci-dessous, une manière de définir la plaque équivalente au  $3D$ , en développant les équations constitutives de celle-ci dans le cadre de l'élasticité.

Dans la suite, on munit l'espace d'un repère orthonormé  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . On note  $(x_1, x_2, x_3)$  les variables d'espaces associées. De plus, la notation  $u_{,\alpha}$  signifie la dérivée partielle du champ  $\mathbf{u}$  par rapport à la variable d'espace  $x_\alpha$ . Enfin, les indices grecs parcourent 1, 2 et les indices latin parcourent 1, 2, 3.

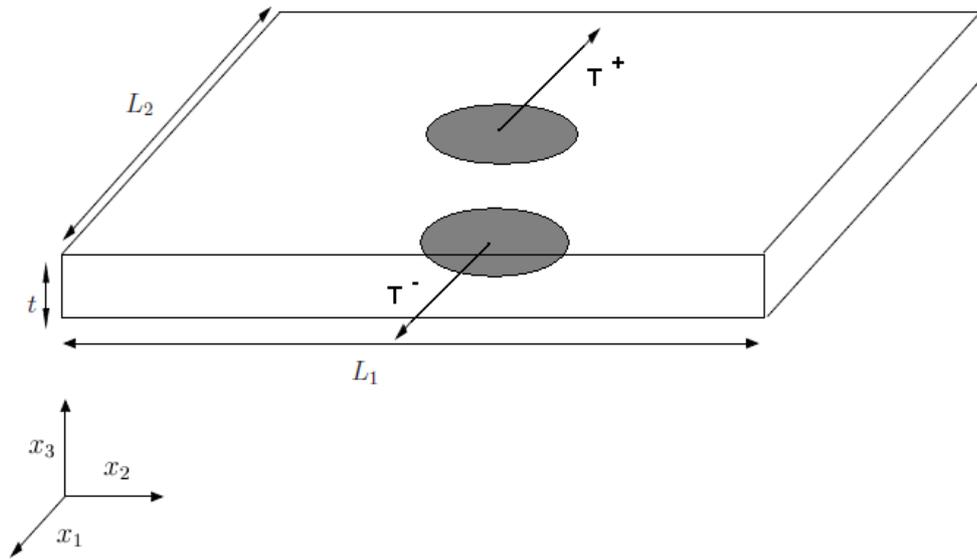


Figure 2.1 — Plaque homogène

### 2.2.1 Efforts généralisés de plaque

On considère une plaque d'épaisseur  $t$  qui occupe le volume  $\Omega = w \times ]-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}[$  de  $\mathbb{R}^3$ . Cette plaque est encastée sur son bord latéral  $\partial\Omega_l = \partial w \times ]-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}[$ . Elle est soumise à des champs de forces surfaciques  $\mathbf{T}^-$  sur sa face inférieure  $\partial\Omega_3^-$  et  $\mathbf{T}^+$  sur sa face supérieure  $\partial\Omega_3^+$ . On se place dans l'hypothèse de petites perturbations. Le matériau constituant la plaque est supposé homogène et élastique. Le comportement s'écrit :

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \text{ ou } \sigma_{ij} = R_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

Où les  $\sigma_{ij}$  sont les composantes du tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et les  $\varepsilon_{ij}$  les composantes du tenseur de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

On introduit alors les efforts généralisés suivants associés à la contrainte 3D,  $\boldsymbol{\sigma}$  :

- $\mathbf{N}$  tenseur des efforts membranaires,
  - $\mathbf{M}$  tenseur des moments fléchissants,
  - $\mathbf{Q}$  vecteur des efforts tranchants
- définis par :

$$\begin{aligned}
N_{\alpha\beta} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \\
M_{\alpha\beta} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} x_3 \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \text{ et} \\
Q_\alpha &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{\alpha 3} dx_3
\end{aligned} \tag{2.17}$$

## 2.2.2 Equation d'équilibre

En intégrant l'équation d'équilibre  $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0$  sur l'épaisseur de la plaque et en utilisant les conditions aux limites, on trouve les équations d'équilibre généralisées suivantes :

$$\begin{cases} N_{\alpha\beta,\beta} + T_\alpha^+ + T_\alpha^- = 0, \\ M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha + \frac{t}{2} (T_\alpha^+ - T_\alpha^-) = 0, \\ Q_{\alpha,\alpha} + T_3^+ + T_3^- = 0, \end{cases} \tag{2.18}$$

avec  $\alpha, \beta = 1, 2$ .

## 2.2.3 Cinématique

### 2.2.3.1 Le modèle de Love-Kirchhoff

Dans ce modèle, on ne considère que les efforts généralisés  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{M}$  dans l'écriture de l'énergie élastique. L'énergie due aux cisaillements est donc négligée.

On le construit en faisant des hypothèses mixtes sur la forme des contraintes et des déformations. Premièrement, si l'épaisseur  $t$  est très petite devant les autres dimensions caractéristiques, les contraintes hors-plan  $\sigma_{i3}$  sont très petites devant les contraintes dans le plan  $\sigma_{\alpha\beta}$  (contraintes planes). On peut donc les négliger dans l'énergie élastique et les prendre nulles  $\sigma_{i3} = 0$  pour  $i = 1, 2, 3$ . Ce sera la première hypothèse. Il a été démontré dans (Ciarlet et Destuynder, 1979) que cette hypothèse était vérifiée quand l'élanement de la plaque  $\frac{L}{t}$  tendait vers l'infini.

On suppose ensuite que la déformation 3D dans le plan est affine en fonction de l'épaisseur et peut s'écrire :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta} + x_3\chi_{\alpha\beta} \quad (2.19)$$

Avec cette hypothèse, on trouve par la loi de comportement que la forme des contraintes dans le plan est :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{N_{\alpha\beta}}{t} + x_3 \frac{M_{\alpha\beta}}{I} \quad (2.20)$$

$$\text{où } I = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} x_3 dx_3 = \frac{t^3}{12}$$

Les déplacements généralisés associés au champ de déplacement 3D  $\mathbf{u}$  sont :

$$\begin{aligned} V_i(x_1, x_2) &= \frac{u_i(x_1, x_2, -\frac{t}{2}) + u_i(x_1, x_2, \frac{t}{2})}{2} \\ \phi_i(x_1, x_2) &= \frac{u_i(x_1, x_2, \frac{t}{2}) - u_i(x_1, x_2, -\frac{t}{2})}{t} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Les déformations généralisées du modèle sont :

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(V_{\alpha,\beta} + V_{\beta,\alpha}) \\ \chi_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ainsi, on peut voir :

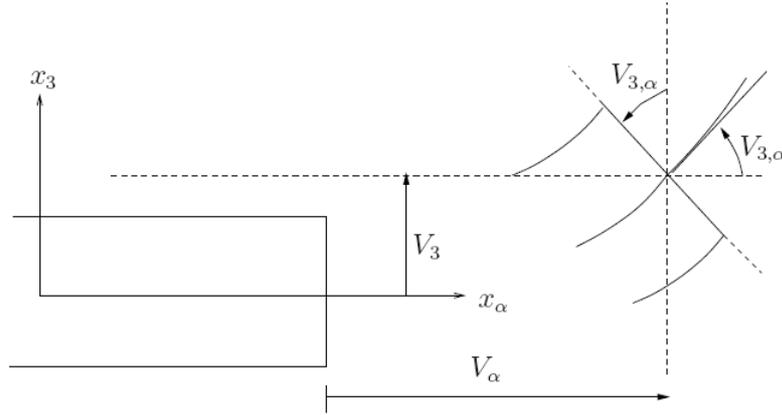
- $V_\alpha(x_1, x_2)$  comme le déplacement de la surface moyenne dans la direction  $\alpha$ .
- $V_3(x_1, x_2)$  comme le déplacement vertical ou la flèche de la surface moyenne.
- $V_{3,\alpha}$  : la rotation due à la flexion (sans cisaillement)

Dans la cinématique de Love-Kirchhoff (Kirchhoff, 1850), les segments matériels situés sur la normale à la surface moyenne sont indéformables et restent normaux à la surface moyenne au cours de la transformation.(2.2)

Le champ de déplacements 3D de Love-Kirchhoff s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned} u_\alpha^{3D}(x_1, x_2, x_3) &= V_\alpha(x_1, x_2) - x_3 V_{3,\alpha}(x_1, x_2) + u_\alpha^1(x_3), \quad \alpha = 1, 2 \\ u_3^{3D}(x_1, x_2, x_3) &= V_3(x_1, x_2) + u_3^1(x_3) \end{aligned} \quad (2.23)$$

On reconnaît dans cette expression le champ de vitesse de Love-Kirchhoff classique



**Figure 2.2** — Cinématique de Love-Kirchhoff

auquel vient s'ajouter un terme prenant en compte l'effet de Poisson et permettant d'assurer cinématiquement l'hypothèse de contraintes planes  $\sigma_{i3} = 0$ .

Ainsi, on a également que :

$$\chi_{\alpha\beta}(x_1, x_2) = -V_{3,\alpha\beta} \quad (2.24)$$

Le comportement de la plaque s'écrit classiquement sous la forme :

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta} &= A_{\alpha\beta\lambda\mu} E_{\lambda\mu} \\ M_{\alpha\beta} &= D_{\alpha\beta\lambda\mu} \chi_{\lambda\mu} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta\lambda\mu} &= R_{\alpha\beta\lambda\mu}^{CP} t \\ D_{\alpha\beta\lambda\mu} &= R_{\alpha\beta\lambda\mu}^{CP} I \end{aligned} \quad (2.26)$$

Où les termes  $R_{\alpha\beta\lambda\mu}^{CP}$  sont les termes de la matrice de rigidité en contraintes planes.

On trouvera les preuves mathématiques de convergence de ces modèles lorsque l'élanement de la plaque  $\frac{L}{t}$  tend vers l'infini dans (Ciarlet et Destuynder, 1979) et (Lewinski et Telega, 1999).

On notera que le modèle de Love-Kirchhoff ne fait pas intervenir les contraintes de cisaillement. L'effort tranchant est négligeable par rapport aux autres efforts généralisés du modèle. On sait, cependant, que pour les plaques "épaisses" où l'épaisseur n'est pas négligeable devant la taille caractéristique de la plaque, les effets de cisaillement peuvent être importants. Plusieurs modèles ont cherché à intégrer ces effets. On présente dans la suite celui de Reissner-Mindlin.

### 2.2.3.2 Le modèle de Reissner-Mindlin

Dans le modèle de Reissner-Mindlin, on choisit de prendre en compte l'effet des cisaillements transverses. Ainsi les efforts généralisés de l'énergie élastique sont  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{Q}$ .

Les constantes élastiques relatives aux efforts normaux et aux moments fléchissants (les matrices  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$ ) doivent être les mêmes que celles du modèle de Love-Kirchhoff car les deux modèles sont asymptotiquement équivalents lorsque  $\frac{L}{t}$  tend vers 0. Historiquement, l'idée pour l'identification des termes relatifs aux cisaillements hors plan de la matrice d'élasticité est de reprendre la solution de contraintes 3D du modèle de Love-Kirchhoff et d'ajouter un terme à celle-ci qui respecte la condition d'équilibre des contraintes 3D (Reissner, 1985), (Cecchi et Sab, 2007).

Dans l'approche mixte, on garde l'hypothèse sur l'affinité de la déformation plane dans l'épaisseur, mais l'hypothèse sur les contraintes hors-plan est modifiée. On suppose que les  $\sigma_{\alpha 3}$  sont quadratiques dans l'épaisseur de la plaque et que  $\sigma_{33}$  reste nulle. Les contraintes de cisaillement prennent des valeurs nulles en bord de plaque  $\sigma_{\alpha 3}(\pm \frac{t}{2}) = 0$  et on a  $\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{\alpha 3} dx_3 = Q_\alpha$ . La donnée de l'effort tranchant  $Q_\alpha$  suffit donc à déterminer  $\sigma_{\alpha 3}$  et l'énergie élastique associée.

Par dualisation du problème, on obtient une cinématique de Reissner-Mindlin (Mindlin, 1951) dans laquelle la normale reste droite (indéformable) mais non orthogonale à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (Figure 1.3).

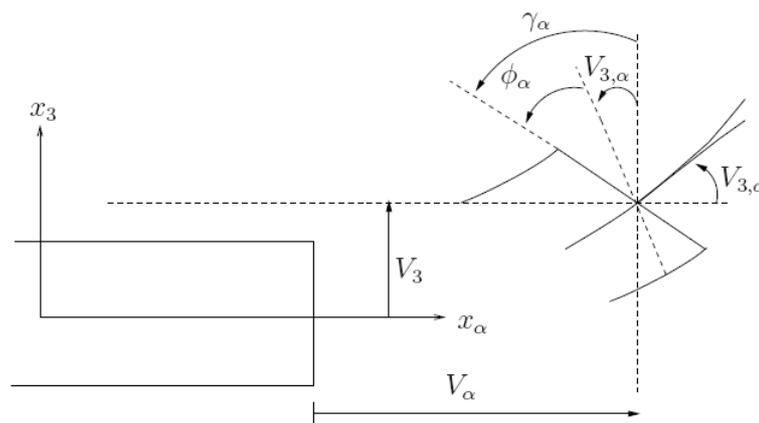


Figure 2.3 — Cinématique de Reissner-Mindlin

Ainsi, une approximation du champ de déplacements 3D de Reissner-Mindlin s'écrit alors :

$$\begin{aligned} u_\alpha(x_1, x_2, x_3) &= V_\alpha(x_1, x_2) - x_3 \phi_\alpha(x_1, x_2) + u_\alpha^2(x_3), \quad \alpha = 1, 2 \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= V_3(x_1, x_2) + u_3^2(x_3) \end{aligned} \quad (2.27)$$

- $V_\alpha(x_1, x_2)$  le déplacement de la surface moyenne dans la direction  $\alpha$ .
- $V_3(x_1, x_2)$  le déplacement vertical ou la flèche de la surface moyenne.
- $\phi_\alpha(x_1, x_2)$  : la rotation due à la flexion  $\chi_\alpha$ .

Ainsi, on peut définir les déformations généralisées  $\mathbf{D}$  et  $\boldsymbol{\chi}$  introduites précédemment :

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} (V_{\alpha,\beta}(x_1, x_2) + V_{\beta,\alpha}(x_1, x_2)), \quad \alpha = 1, 2, \quad \beta = 1, 2 \\ \chi_{\alpha\beta}(x_1, x_2) &= \phi_{\alpha,\beta} \end{aligned} \quad (2.28)$$

et également  $\gamma$  la déformation de cisaillement transverse mesurée à la surface moyenne. Elle est telle que :

$$\gamma_\alpha = \phi_\alpha + V_{3,\alpha} \quad (2.29)$$

Le comportement de la plaque s'écrit alors :

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta} &= A_{\alpha\beta\lambda\mu} D_{\lambda\mu} \\ M_{\alpha\beta} &= D_{\alpha\beta\lambda\mu} \chi_{\lambda\mu} \\ Q_\alpha &= F_{\alpha\beta} \gamma_\beta \end{aligned} \quad (2.30)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta\lambda\mu} &= R_{\alpha\beta\lambda\mu}^{CP} t \\ D_{\alpha\beta\lambda\mu} &= R_{\alpha\beta\lambda\mu}^{CP} I \\ F_{\alpha\beta} &= \frac{5}{6} R_{\alpha 3 \beta 3} t \end{aligned} \quad (2.31)$$

En plasticité, la démarche est formellement la même qu'en élasticité, mais ce n'est plus la loi de comportement qui reliera les contraintes et les déformations, mais la règle d'écoulement, définie à partir du critère de plasticité. Les espaces des champs de vitesses et de contraintes admissibles sont les mêmes qu'en élasticité. En revanche, la fonctionnelle à minimiser n'est plus l'énergie élastique mais la dissipation plastique.

Cette dernière est positivement homogène de degré 1 alors qu'en élasticité, l'énergie est quadratique.

## 2.3 Homogénéisation périodique des plaques

L'objectif de cette partie est de se munir d'une méthode d'homogénéisation des plaques hétérogènes périodiques, rigides-parfaitement plastiques en partant du problème 3D, c'est-à-dire une structure périodique dans le plan, avec une faible épaisseur en regard de ses autres tailles caractéristiques.

Il s'agit de définir le domaine de résistance de plaque de Love-Kirchhoff équivalente à la plaque hétérogène 3D et de savoir comment on le détermine. Voir (Dallot et Sab 2008) pour une justification formelle par la méthode des développements asymptotiques.

La plaque hétérogène considérée occupe un domaine noté :

$$\Omega = w \times \left] -\frac{t}{2}, \frac{t}{2} \right[$$

où  $w$  est la surface moyenne de la plaque et  $t$  son épaisseur. La frontière géométrique de cette plaque,  $\partial\Omega$ , peut être décomposée en trois parties, les peaux, supérieure et inférieure, et la frontière latérale :

$$\partial\Omega = \partial\Omega_l \cup \partial\Omega_3^+ \cup \partial\Omega_3^-, \text{ avec } \partial\Omega_l = \partial w \times \left] -\frac{t}{2}, \frac{t}{2} \right[ \text{ et } \partial\Omega_3^\pm = w \times \left\{ \pm \frac{t}{2} \right\}$$

La plaque exhibe une structure périodique dans les directions 1 et 2 (plan de la plaque) de sorte qu'on puisse en extraire une cellule de base. Cette dernière permet de reproduire exactement la plaque par de simples translations. Elle contient toute l'information nécessaire à la description physique de la plaque. On note cette cellule de base comme suit :

$$Y = A \times \left] -\frac{t}{2}, \frac{t}{2} \right[ ,$$

Où  $A \subset \mathbb{R}^2$ ; la frontière  $\partial Y$  de  $Y$  est décomposée en trois parties :

$$\partial Y = \partial Y_l \cup \partial Y_3^+ \cup \partial Y_3^-, \text{ avec } \partial Y_3^\pm = A \times \left\{ \pm \frac{t}{2} \right\}$$

et  $\partial Y_l$  est la partie latérale de la frontière de  $Y$ .

On fait l'hypothèse que l'épaisseur de la plaque  $t$  est du même ordre de grandeur

que la taille de l'hétérogénéité, c'est-à-dire la taille caractéristique de  $A$  (Figure 2.4) et que  $t$  est également très petit par rapport à la taille de la structure (i.e. de la plaque), c'est à dire la taille caractéristique de  $w$ .

Dans leurs travaux, Bourgeois (1997) et Sab (2003) ont indépendamment proposé de remplacer la structure 3D représentée sur la Figure 2.4 par une plaque homogène de Love-Kirchhoff selon la procédure d'homogénéisation que nous allons décrire par la suite.

Cette procédure est une généralisation à l'analyse limite des travaux de Caillerie (1984) sur les plaques minces élastiques.

On introduit les efforts généralisés de plaque :  $\mathbf{N} = N_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$  un tenseur des efforts membranaires et  $\mathbf{M} = M_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$  un tenseur des moments fléchissants, les déformations généralisées :  $\mathbf{D} = D_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$  un tenseur taux de déformation membranaire et  $\boldsymbol{\chi} = \chi_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$  un tenseur taux de courbure et  $\mathbf{V} = V_i(x_1, x_2)$  une vitesse virtuelle de la plaque ; avec les indices grecs  $\alpha, \beta = 1, 2$  et les indices latins  $i, j = 1, 2, 3$ .  $\mathbf{D}$  et  $\boldsymbol{\chi}$  sont reliés à  $\mathbf{V}$  par les relations suivantes :

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(V_{\alpha,\beta} + V_{\beta,\alpha}), \quad D_{i3} = 0, \quad \chi_{\alpha\beta} = -V_{3,\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \chi_{i3} = 0 \quad (2.32)$$

Le convexe macroscopique de la plaque homogène équivalente,  $G_p^{hom}$ , peut être déterminé par la résolution du problème auxiliaire d'analyse limite sur la cellule de base  $Y$  décrit dans le paragraphe suivant.

### 2.3.1 Détermination du domaine de résistance homogénéisé

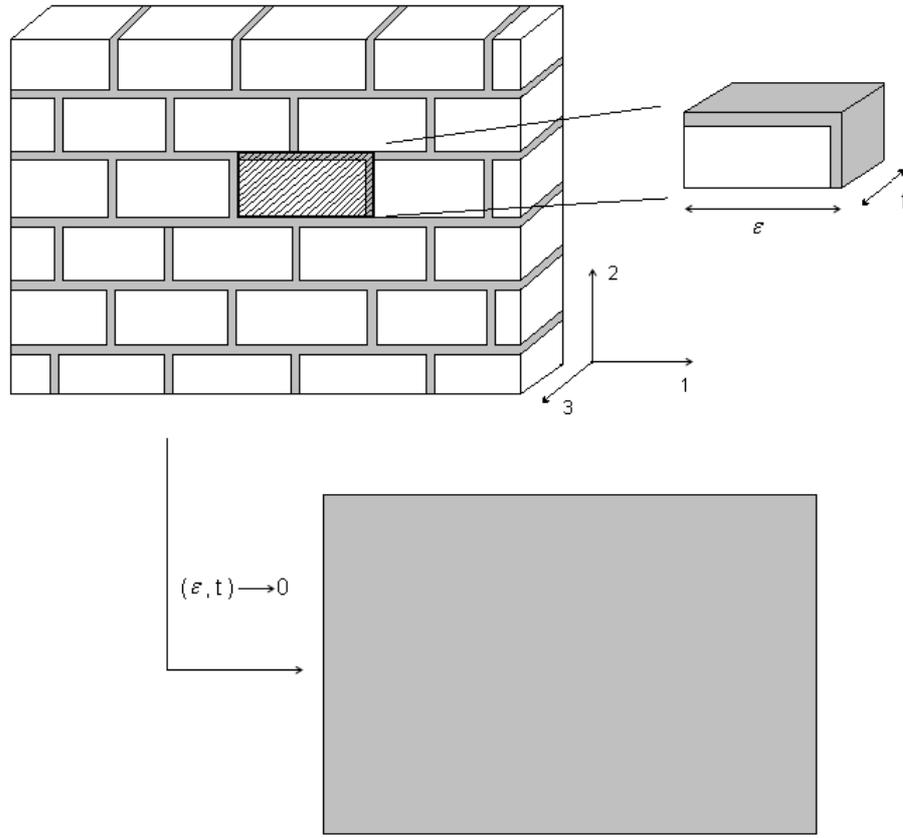
$$G_p^{hom}$$

Comme expliqué plus haut, nous allons décrire un problème auxiliaire à résoudre pour la détermination du domaine de plasticité de la plaque homogénéisée. Pour déterminer  $G_p^{hom}$ , on procède de la manière suivante :

Pour chaque contrainte généralisée  $(\mathbf{N}, \mathbf{M})$ , on définit l'ensemble des champs de contraintes 3D statiquement admissibles  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$  sur la cellule de base  $Y$  par :

$$SA(\mathbf{N}, \mathbf{M}) = \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} | N_{\alpha\beta} = t \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle, \quad M_{\alpha\beta} = t \langle y_3 \sigma_{\alpha\beta} \rangle, \\ \text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{sur } Y, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique sur } \partial Y_l; \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \text{ sur } \partial Y_3^\pm \end{array} \right\} \quad (2.33)$$

où  $\langle \cdot \rangle$  est l'opérateur de la moyenne volumique sur  $Y$ . Selon (Bourgeois,



**Figure 2.4** — Structure 3D hétérogène, cellule de base et plaque homogène équivalente.

1997) et (Sab, 2003),  $G_p^{hom}$  est l'ensemble des efforts généralisés  $(\mathbf{N}, \mathbf{M})$  (efforts de membrane et moments fléchissants) tels qu'il existe un champ  $\boldsymbol{\sigma}$  dans  $SA(\mathbf{N}, \mathbf{M})$  qui vérifie le critère de plasticité  $\boldsymbol{\sigma}(y) \in G(y)$  en chaque point  $y$  de la cellule de base  $Y$  :

$$G_p^{hom} = \{(\mathbf{N}, \mathbf{M}) \mid \exists \boldsymbol{\sigma} \in SA(\mathbf{N}, \mathbf{M}), \boldsymbol{\sigma}(y) \in G(y), \forall y \in Y\}. \quad (2.34)$$

Cette définition est appelée la définition statique du domaine de résistance de la plaque homogène équivalente.

La définition cinématique de  $G_p^{hom}$  est obtenue de la manière suivante :

Pour chaque  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi})$ , on définit l'ensemble des champs de vitesses 3D  $\mathbf{v} = (v_i)$  cinématiquement admissibles par :

$$CA(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}) = \left\{ \mathbf{v} \mid \nabla \otimes^s \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{D}} + y_3 \tilde{\boldsymbol{\chi}} + \nabla \otimes^s \mathbf{u}^{per}, \mathbf{u}^{per} \text{ } A\text{-périodique} \right\} \quad (2.35)$$

$\nabla \otimes^s \mathbf{v}$  est la partie symétrique de l'opérateur gradient et en utilisant les notations suivantes :

$$\tilde{D}_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta}, \quad \tilde{D}_{i3} = 0, \quad \tilde{\chi}_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha\beta}, \quad \tilde{\chi}_{i3} = 0. \quad (2.36)$$

Ces deux espaces, respectivement de champ de contraintes statiquement admissibles  $SA(\mathbf{N}, \mathbf{M})$  et de champs de vitesses cinématiquement admissibles  $CA(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi})$ , sont en dualité au sens du principe des puissances virtuelles, c'est-à-dire :

$$\forall \sigma \in SA(\mathbf{N}, \mathbf{M}), \forall \mathbf{v} \in CA(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}), \quad \mathbf{N} : \mathbf{D} + \mathbf{M} : \boldsymbol{\chi} = t \langle \sigma : (\nabla \otimes^s \mathbf{v}) \rangle. \quad (2.37)$$

En exploitant la propriété (2.37), on peut donner la définition cinématique suivante de  $G_p^{hom}$ , c'est à dire ,donner sa fonction d'appui  $\pi_p^{hom}$  (cf (Suquet, 1983), (Salençon, 1983), (Bourgeois, 1997) et (Sab, 2003)), par exemple) :

$$\pi_p^{hom}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}) = \inf_{\mathbf{v} \in CA(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi})} t \langle \pi(\nabla \otimes^s \mathbf{v}) \rangle. \quad (2.38)$$

### 2.3.2 Plaques périodiques symétriques

Suivant Dallot et Sab (2008), on dit qu'une plaque périodique est *symétrique* si on peut extraire de la celle de base un centre de symétrie ( $\mathbf{y} \in Y \Leftrightarrow -\mathbf{y} \in Y$ ) tel que

$$G(\mathbf{y}) = G(-\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in Y \quad (2.39)$$

Les plaques périodiques symétriques ont des propriétés intéressantes que l'on va détailler dans la suite.

On introduit d'abord les notations suivantes :

$$G^N = \{ \mathbf{N} \mid \exists \mathbf{M}, (\mathbf{N}, \mathbf{M}) \in G_p^{hom} \}$$

est la projection sur le sous-espace  $(\mathbf{N}, \mathbf{M} = 0)$  dont la fonction d'appui associée est :

$$\pi^N(\mathbf{D}) = \pi_p^{\text{hom}}(\mathbf{D}, 0).$$

De manière similaire, on définit :

$$G^M = \{\mathbf{M} \mid \exists \mathbf{N}, (\mathbf{N}, \mathbf{M}) \in G_p^{\text{hom}}\}$$

la projection sur le sous-espace  $(\mathbf{N} = 0, \mathbf{M})$  dont la fonction d'appui associée est :

$$\pi^M(\boldsymbol{\chi}) = \pi_p^{\text{hom}}(\boldsymbol{\chi}, 0).$$

L'intersection de  $G_p^{\text{hom}}$  avec le sous-espace  $(\mathbf{N}, \mathbf{M} = 0)$  est notée :

$$G^{(N,0)} = \{\mathbf{N} \mid (\mathbf{N}, 0) \in G_p^{\text{hom}}\}$$

La fonction support correspondante est :

$$\pi^{(N,0)}(\mathbf{D}) = \inf_{\boldsymbol{\chi}} \pi_p^{\text{hom}}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}).$$

Et enfin,

$$G^{(0,M)} = \{\mathbf{M} \mid (\mathbf{M}, 0) \in G_p^{\text{hom}}\}$$

l'intersection de  $G_p^{\text{hom}}$  avec le sous-espace  $(\mathbf{N} = 0, \mathbf{M})$  et la fonction support associée :

$$\pi^{(0,M)}(\boldsymbol{\chi}) = \inf_{\mathbf{D}} \pi_p^{\text{hom}}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}).$$

Pour les plaques périodiques symétriques, nous avons la propriété suivante

$$G^N = G^{(N,0)} \quad \text{et} \quad G^M = G^{(0,M)}.$$

Pour montrer cela, rappelons tout d'abord que deux convexes fermés sont confondus si et seulement si leurs fonctions d'appui est égales. On voit que  $\mathbf{v}$  est  $CA(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi})$  si et seulement si son image de symétrie  $\mathbf{v}^*$  est  $CA(\mathbf{D}, -\boldsymbol{\chi})$  ou  $\mathbf{v}^*$  est donné par :

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{y}) = -\mathbf{v}(-\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in Y.$$

En plus, due de la condition de symétrie (2.39), nous avons  $\pi(\mathbf{y}, \nabla \otimes^s \mathbf{v}) = \pi(-\mathbf{y}, \nabla \otimes^s \mathbf{v}^*)$ . En utilisant la définition cinématique (2.38) et le fait que  $\pi(\mathbf{y}, \cdot)$  est positivement homogène de degré 1, on établit facilement que les fonctions convexes  $\boldsymbol{\chi} \mapsto \pi_p^{\text{hom}}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi})$  et  $\mathbf{D} \mapsto \pi_p^{\text{hom}}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi})$  le sont également. Elles atteignent donc leur

minimum en 0. Ce qui signifie que l'on a :

$$\begin{aligned}\pi^{(N,0)}(\mathbf{D}) &= \inf_{\boldsymbol{\chi}} \pi_p^{\text{hom}}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}) = \pi_p^{\text{hom}}(\mathbf{D}, 0) = \pi^N(\mathbf{D}), \\ \pi^{(0,M)}(\boldsymbol{\chi}) &= \inf_{\mathbf{D}} \pi_p^{\text{hom}}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}) = \pi_p^{\text{hom}}(0, \boldsymbol{\chi}) = \pi^M(\boldsymbol{\chi}).\end{aligned}$$

### 2.3.3 Convexe de résistance dans le plan

Pour les plaques périodiques symétriques, le domaine de résistance dans le plan est l'ensemble  $G^\Sigma$  des tenseurs de contrainte dans le plan  $\Sigma = (\Sigma_{\alpha\beta})$  défini par :

$$\Sigma \in G^\Sigma \Leftrightarrow t\Sigma \in G^N.$$

Par conséquent, en se basant sur la définition statique de  $G^\Sigma$ ,  $\Sigma \in G^\Sigma$  s'il existe un champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$  de la cellule de base 3D,  $Y$ , qui vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) \in G(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{y} \in Y \\ \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle = \Sigma_{\alpha\beta}, \\ \text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{dans } Y, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique sur } \partial Y; \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \quad \text{sur } \partial Y_3^\pm \end{array} \right. \quad (2.40)$$

à ce stade, en utilisant l'équation d'équilibre et les conditions aux limites, on peut démontrer facilement que les composantes hors plan du champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  qui vérifient (2.40) sont nulles en moyenne :  $\langle \sigma_{i3} \rangle = 0$ . Parce que  $G^N = G^{(N,0)}$ , la fonction support de  $G^\Sigma$ ,  $\pi^\Sigma$  est donnée par :

$$\pi^\Sigma(\mathbf{D}) = \inf_{\mathbf{v} \in CA(\mathbf{D}, 0)} \langle \pi(\nabla \otimes^s \mathbf{v}) \rangle \quad (2.41)$$

### 2.3.4 Cas des plaques invariantes dans le sens 3 : $G(\mathbf{y}) = G(y_1, y_2)$

Soit  $G(\mathbf{y})$  le domaine de  $\mathbb{R}^6$  qui définit les capacités de résistance des palques invariantes dans le sens 3 au point  $\mathbf{y}$ . L'état de contrainte d'un point  $\mathbf{y}$  de la cellule de base 3D qui vérifie (2.40) n'est généralement ni en état de contrainte plane ni en état de déformation plane. On est en contrainte plane si le tenseur de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y})$  y satisfait les conditions  $(\sigma_{i3} = 0, i=1,2,3)$  pour tout  $\mathbf{y}$  et  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\sigma}(y_1, y_2)$ . Partant de (2.40), on définit le convexe de résistance  $G^{CP}$  en contrainte plane comme l'ensemble des  $\Sigma$  tel qu'il existe un  $\boldsymbol{\sigma}$  qui vérifie les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) \in G(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{y} \in Y, \\ \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle = \Sigma_{\alpha\beta}, \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0 \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0 \end{array} \right. \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\sigma}(y_1, y_2) \quad \text{et} \quad \sigma_{i3} = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad \text{anti - périodique sur } \partial Y; \end{array} \right.$$

Donc  $G^{CP}$  représente une approche par l'intérieur du convexe  $G^\Sigma$ , c'est-à-dire :

$$G^{CP} \subset G^\Sigma$$

Le cas de déformation plane consiste à se restreindre aux champs de vitesses cinématiquement admissibles de (2.35) à  $\boldsymbol{\chi} = 0$ ,  $\mathbf{u}^{per}(\mathbf{y}) = \mathbf{u}^{per}(y_1, y_2)$  et  $\mathbf{u}_3^{per} = 0$ . Dans ce cas,  $G^{DP}$  (le convexe de résistance en déformation plane), représente une borne supérieure du convexe  $G^\Sigma$ , c'est-à-dire :

$$G^\Sigma \subset G^{DP}$$

## 2.4 Cas des blocs séparés par des interfaces

On considère ici une maçonnerie constituée par un ensemble de blocs identiques, séparés par des joints infiniment minces, et assemblés périodiquement en quinconce.

Le processus d'homogénéisation nous permet ainsi de passer de l'échelle microscopique qui tient compte des blocs et des joints à l'échelle macroscopique avec une vision homogène de la structure.

La maçonnerie est constituée de briques de hauteur  $a$ , de largeur  $b$  et d'épaisseur  $t$  et de joints secs.

On définit ensuite la cellule de base de la maçonnerie comme le plus petit élément permettant de reconstituer la géométrie de la structure entière. Dans notre cas, on conserve la même cellule de base que celle de (De Buhan et de Felice 1997) et (Sab 2003) : un volume  $Y$  ayant pour sommet dans le plan les centres des blocs voisins (figure 2.5) ; on s'assure que l'on peut reconstituer l'ensemble de la maçonnerie par translation de ce bloc. La cellule de base ainsi constituée se compose de quatre morceaux de blocs séparés par trois surfaces de joints que l'on notera  $\omega^J$ .

Soit,  $G_{Int}^\Sigma$ , le convexe de résistance macroscopique dans le plan. La fonction support

du convexe,  $\pi_{Int}^\Sigma$ , s'écrit sous la forme suivante :

$$\pi_{Int}^\Sigma(\mathbf{D}) = \inf_{\mathbf{v} \in CA(\mathbf{D}, \mathbf{0})} \langle \pi^b(\nabla \otimes^s \mathbf{v}) \rangle_Y + \frac{1}{|Y|} \int_{\omega^J} \pi^J(\mathbf{n} \otimes^s [\mathbf{v}]) d\omega^J \quad (2.42)$$

avec  $[\mathbf{v}]$  est le vecteur saut de vitesse au niveau de l'interface et  $\pi^b$  et  $\pi^J$  sont les fonctions supports des deux convexes de briques et d'interfaces successivement.

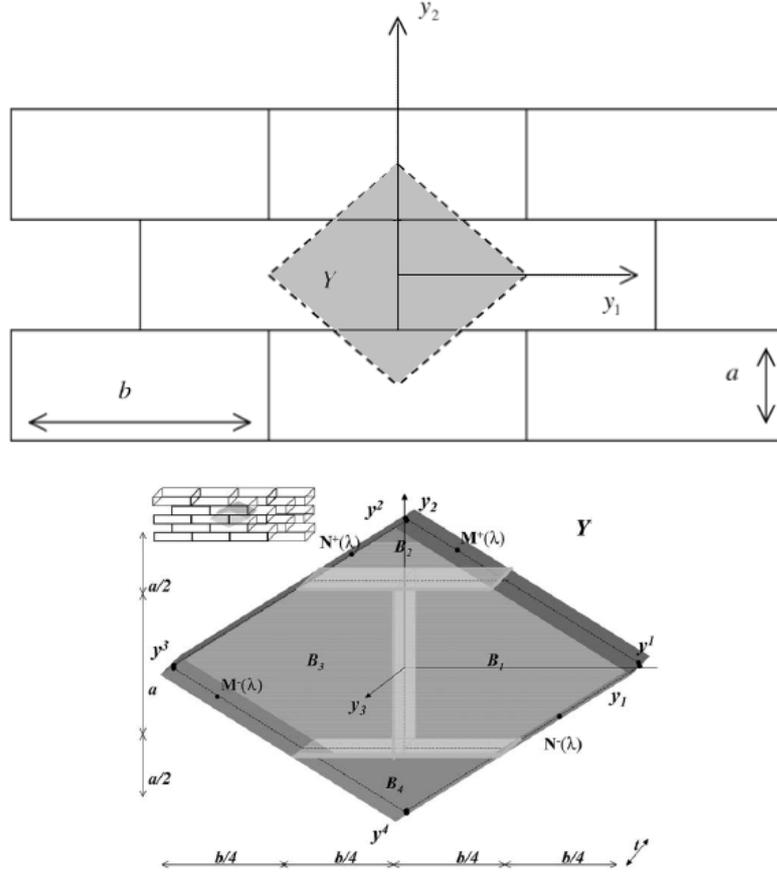


Figure 2.5 — Cellule de base

Dans le cas des briques infiniment résistantes, on peut restreindre l'analyse au mouvement de corps rigide dans la définition cinématique de  $G_{Int}^\Sigma$  dans la relation (2.42) : on doit avoir  $\nabla \otimes^s \mathbf{v} = 0$  dans les briques. Cela signifie que l'analyse se limite aux champs de vitesse cinématiquement admissibles qui sont rigides par morceaux sur chaque bloc avec un saut possible au niveau des interfaces. Le mouvement du  $(i)^{eme}$  bloc est :

$$\mathbf{v}^i(\mathbf{y}) = \mathbf{v}_t^i + \boldsymbol{\Omega}^i \wedge (\mathbf{y} - \mathbf{y}^i)$$

$\mathbf{y}^i$  est le centre du bloc (i),  $\mathbf{v}_t^i$  est le vecteur translation du bloc (i),  $\boldsymbol{\Omega}^i$  est le vecteur rotation du bloc (i).

Il a été montré dans Cecchi et Sab (2002b) que  $\mathbf{v}^i$  et  $\Omega^i$  s'expriment en fonction des composantes du tenseur taux de déformation  $\mathbf{D}$  et les trois composantes du mouvement du corps rigide (2 translation dans le plan et une rotation autour l'axe 3). Ainsi, la discontinuité de vitesse à l'interface dépend seulement de  $\mathbf{D}$  et la rotation  $\Omega$ .

D'après Cecchi et Sab (2002b) et la correction dans Cecchi et Sab (2006), la discontinuité de vitesse à l'interface horizontale entre le bloc  $B_2 - B_1$  est :

$$[\mathbf{v}]_{2,1} = \left( -\frac{b}{2}D_{11} + a(D_{12} + \Omega) \right) \mathbf{e}_1 + \left( aD_{22} - \frac{b}{2}(D_{12} - \Omega) \right) \mathbf{e}_2$$

pour  $\mathbf{y} \in \{0 < y_1 < \frac{b}{2}; y_2 = \frac{a}{2}; \frac{t}{2} < y_3 < \frac{t}{2}\}$ , et entre les blocs  $B_2 - B_3$  est :

$$[\mathbf{v}]_{2,3} = \left( \frac{b}{2}D_{11} + a(D_{12} + \Omega) \right) \mathbf{e}_1 + \left( aD_{22} + \frac{b}{2}(D_{12} - \Omega) \right) \mathbf{e}_2$$

pour  $\mathbf{y} \in \{-\frac{b}{2} < y_1 < 0; y_2 = \frac{a}{2}; \frac{t}{2} < y_3 < \frac{t}{2}\}$ , et entre les blocs  $B_1 - B_3$  est :

$$[\mathbf{v}]_{1,3} = bD_{11}\mathbf{e}_1 + b(D_{12} - \Omega)\mathbf{e}_2$$

pour  $\mathbf{y}$  sur le joint vertical (voir figure 4.14). En utilisant cette cinématique de corps rigide avec la possibilité de discontinuité à l'interface dans (2.42), on obtient :

$$\pi^\infty(\mathbf{D}) = \inf_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_{\omega^J} \pi^J(\mathbf{n} \otimes^s [\mathbf{v}]) d\omega^J.$$

qui correspond au convexe de résistance  $G^\infty$ .

### 2.4.1 Interface de Mohr-Coulomb

On considère en première approximation les blocs comme infiniment résistants. On applique aux joints une loi de frottement de Mohr-Coulomb qui s'exprime en fonction des contraintes normale  $\sigma$  et tangentielle  $\tau$  à l'interface comme :

$$\tau + \sigma \tan \varphi \leq c \quad (2.43)$$

Où  $\sigma$  est la composante normale de  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ ,  $\sigma = \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})$  et  $\tau$  est la composante de cisaillement  $|\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \sigma \mathbf{n}|$

La fonction d'appui  $\pi$  s'écrit :

$$\pi^J(\mathbf{n} \otimes^s [\mathbf{v}]) = \begin{cases} (c/\tan \varphi) [\mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} & \text{si } [\mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} \geqslant |[\mathbf{v}]| \cdot \sin \varphi \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.44)$$

Où  $[\mathbf{v}]$  est la discontinuité de vitesse en dépassant le joint d'interface  $\omega^J$ .

Le domaine de résistance macroscopique,  $G^\infty$ , est l'ensemble des  $\Sigma$  qui vérifie

$$\Sigma : \mathbf{D} \leqslant \frac{1}{|Y|} \int_{\omega^J} \pi^J(\mathbf{n} \otimes^s [\mathbf{v}]) d\omega^J, \quad \forall \mathbf{v} \in CA(\mathbf{D}) \text{ et } [\mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} \geqslant |[\mathbf{v}]| \cdot \sin \varphi \quad (2.45)$$

l'expression analytique de  $G^\infty$ , pour le cas des briques infiniment résistantes séparées par des interfaces de Mohr-Coulomb, est donnée dans le cas  $\varphi \leqslant \pi/4$ , par [Sab (2003)] :

$$\Sigma \in G^\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \Sigma_{\alpha\beta}^* = \Sigma_{\alpha\beta} - \frac{c}{\tan \varphi} \delta_{\alpha\beta} \\ |\Sigma_{12}^*| \leqslant -\tan \varphi \Sigma_{22}^* \\ (1 + m \tan \varphi) |\Sigma_{12}^*| \leqslant -m \Sigma_{11}^* - \tan \varphi \Sigma_{22}^* \\ (m + \tan \varphi) |\Sigma_{12}^*| \leqslant -m \tan \varphi \Sigma_{11}^* - \Sigma_{22}^* \text{ pour } m \tan \varphi > 1 \end{cases} \quad (2.46)$$

où  $m = 2a/b$

Dans le cas des briques infiniment rigides, l'approche 2D issue de la théorie classique de l'homogénéisation (de Buhan et de Felice) coïncide avec celle 3D issue de l'homogénéisation des plaques.

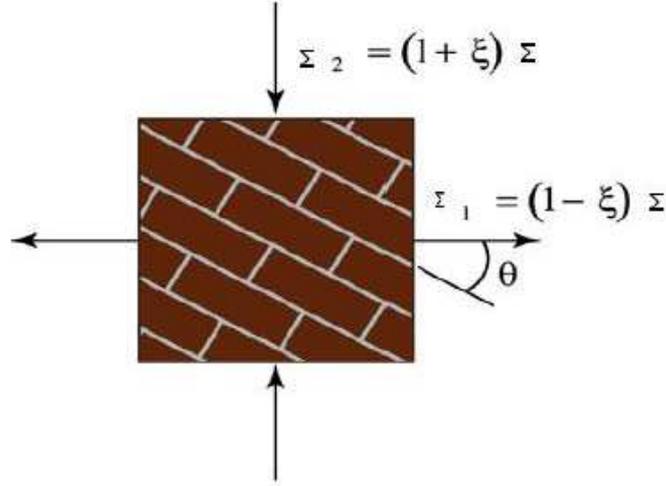
Soit un mur en maçonnerie sollicité dans son plan (voir figure 2.6), les blocs sont infiniment rigides et les joints obéissent au critère de Mohr-Coulomb. Nous traiterons différents cas de chargement en variant les paramètres  $\xi$  et  $\theta$  :  $\xi$  est un réel appartient à l'intervalle  $[-1,1]$  et  $\theta$  l'angle qui fait le joint horizontal avec les directions de chargement.

La contrainte macroscopique appliquée au mur s'écrit comme suit ( $\Sigma > 0$ ) :

$$\Sigma = \Sigma \begin{pmatrix} (\cos 2\theta - \xi) & -\sin 2\theta & 0 \\ -\sin 2\theta & -(\cos 2\theta + \xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dans le repère lié aux directions des joints.

Le théorème cinématique de l'analyse limite nous indique que, pour qu'un char-



**Figure 2.6** — Mode de chargement [50]

gement soit considéré comme potentiellement supportable par la structure, il doit nécessairement vérifier que la puissance des efforts extérieurs reste inférieure à la puissance résistante maximale, donc on a :

$$\Sigma : \mathbf{D} \leq \frac{1}{|Y|} \int_{\omega^J} \pi^J (\mathbf{n} \otimes^s [\mathbf{v}]) d\omega^J, \quad \forall \mathbf{v} \in CA(\mathbf{D}) \text{ et } [\mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} \geq |[\mathbf{v}]| \cdot \sin \varphi$$

En injectant l'expression de  $\Sigma$ , on trouve

$$[(\cos 2\theta - \xi) D_{11} + 2 \sin 2\theta D_{12} + (\cos 2\theta + \xi) D_{22}] \Sigma \leq \frac{1}{|Y|} \int_{\omega^J} \pi^J (\mathbf{n} \otimes^s [\mathbf{v}]) d\omega^J,$$

$$\forall \mathbf{v} \in CA(\mathbf{D}) \text{ et } [\mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} \geq |[\mathbf{v}]| \cdot \sin \varphi$$

soit  $\Gamma$  la fonction de  $\xi$  et  $\theta$  suivante :

$$\Gamma(\xi, \theta) = (\cos 2\theta - \xi) D_{11} + 2 \sin 2\theta D_{12} + (\cos 2\theta + \xi) D_{22}$$

La valeur de  $\Sigma > 0$  à la rupture est la solution du problème de minimisation sous contrainte suivante :

$$\Sigma \leq \inf_{\mathbf{v} \in CA(\mathbf{D}), [\mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} \geq |[\mathbf{v}]| \cdot \sin \varphi \text{ et } \Gamma(\xi, \theta) = 1} \frac{1}{|Y|} \int_{\omega^J} \pi^J (\mathbf{n} \otimes^s [\mathbf{v}]) d\omega^J \quad (2.47)$$

Le problème (2.47) est résolu par Matlab. Le tableau suivant contient les valeurs utilisées pour ce calcul :

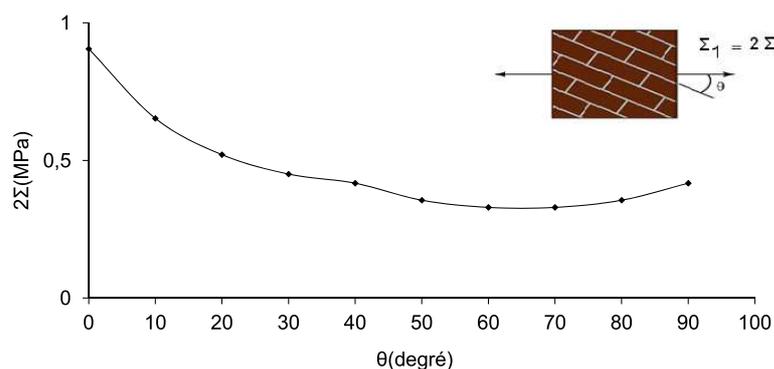
La cohésion $c^J$ (Mpa)	0.35
Angle de frottement $\varphi$	40°
Longueur de brique $b$ (mm)	115
Largeur de brique $a$ (mm)	38
Epaisseur de brique $t$ (mm)	54

**Tableau 2.1** — Paramètres de calcul

La comparaison entre les résultats des deux approches, statique et cinématique, montre une coïncidence parfaite au niveau des contraintes de rupture ainsi que le mode de ruine. Nous montrerons, par la suite, la valeur de  $\Sigma > 0$  à la rupture pour chaque cas de chargement.

Traction uniaxiale :  $\xi = -1$  et  $\theta \in [0, \pi/2]$  :

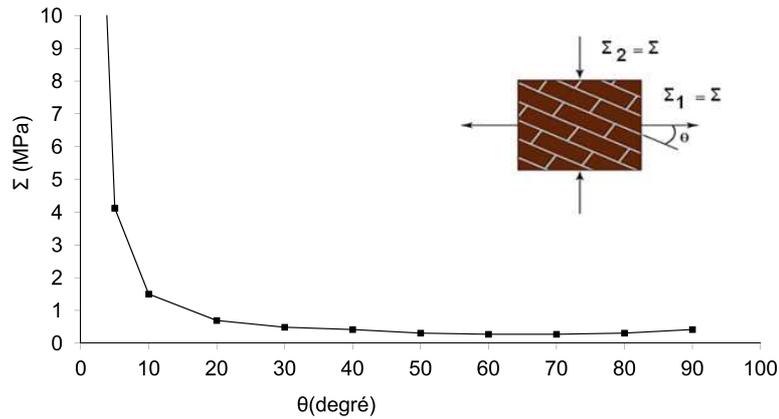
Dans ce cas de chargement, la rupture du panneau en maçonnerie a lieu au niveau des joints d'interfaces. La figure 2.7 présente la valeur de  $\Sigma$  à la rupture pour différentes orientations des joints horizontaux par rapport à l'axe de chargement.



**Figure 2.7** — Approche cinématique de la contrainte de rupture  $\Sigma$

Traction-compression biaxiale :  $\xi = 0$  et  $\theta \in [0, \pi/2]$  :

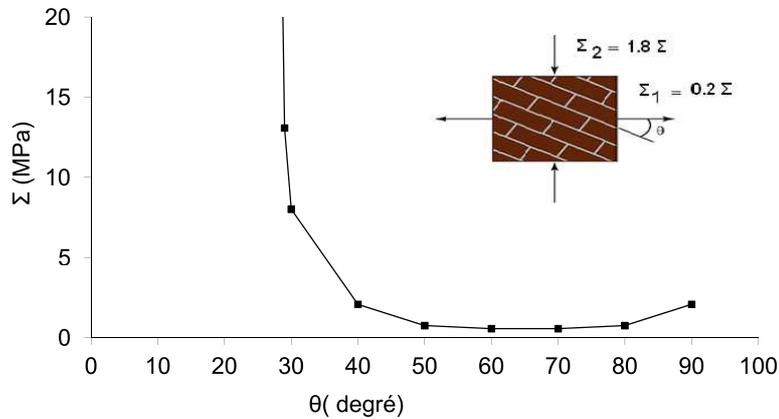
Dans ce cas de chargement et pour les  $\theta$  voisinage de zéro, la rupture n'a pas eu lieu (voir figure 2.8) : quand  $\theta = 0$ , la valeur de  $\Sigma$  tend vers l'infini parce que, par hypothèse, nous avons pris des briques infiniment résistantes par rapport aux propriétés des interfaces.



**Figure 2.8** — Approche cinématique de la contrainte de rupture  $\Sigma$

Traction-compression biaxiale :  $\xi = 0.8$  et  $\theta \in [0, \pi/2]$  :

Lorsque le rapport des contraintes,  $\left| \frac{\Sigma_{22}}{\Sigma_{11}} \right|$ , est égale à neuf ( $\left| \frac{\Sigma_{22}}{\Sigma_{11}} \right| = 9$ ), pour les  $\theta < 45^\circ$ , la rupture n'a pas eu lieu. En revanche, pour les  $\theta > 45^\circ$ , la rupture a lieu dans les joints d'interface (voir figure 2.9).



**Figure 2.9** — Approche cinématique de la contrainte de rupture  $\Sigma$

Dans la littérature, de nombreux auteurs considèrent les joints d'interface comme des matériaux de Mohr-Coulomb tronqué par le critère de Rankine en traction parce que les joints présentent une faiblesse en traction n'est pas décrite par le critère de Mohr-Coulomb [50]. Dans la partie suivante nous considérons que les interfaces sont des matériaux de Mohr-Coulomb tronqués par le critère de Rankine et nous mettons en oeuvre l'approche cinématique qui vient d'être validée pour déterminer le convexe de résistance macroscopique dans le plan.

### 2.4.2 Interface de Mohr-Coulomb tronqué par le critère de Rankine en traction

Dans cette section, les interfaces sont considérées comme des interfaces de Mohr-Coulomb tronquées par le critère de Rankine en traction : le convexe de résistance est défini comme l'intersection du critère de Mohr-Coulomb et du critère de Rankine (contrainte normale inférieure à la limite en traction  $T$ ), la fonction de charge,  $f$ , est définie par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \in G &\Leftrightarrow f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \\ \text{avec} & \\ f(\boldsymbol{\sigma}) &= \sup_{i,j=1,2,3} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_i (1 + \sin \varphi) - \sigma_j (1 - \sin \varphi) - 2c \cos \varphi \\ \sigma_i - T \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (2.48)$$

avec  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$  sont les contraintes principales,  $T$  est la limite en traction,  $c > 0$  et  $\phi$  sont successivement la cohésion et l'angle de frottement.

La fonction support d'une interface de Mohr-Coulomb tronquée par Rankine,  $\pi^J$ , est :

$$\pi^J(\mathbf{n} \otimes^s [\mathbf{v}]) = \begin{cases} c (||[\mathbf{v}]|| - [\mathbf{v}] \cdot \mathbf{n}) \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{T}{1 - \sin \varphi} (||[\mathbf{v}]|| \sin \varphi - [\mathbf{v}] \cdot \mathbf{n}) & \text{si } [\mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} \geq ||[\mathbf{v}]|| \sin \varphi \\ +\infty & \\ \text{sinon} & \end{cases}$$

$[\mathbf{v}]$  est le saut de vitesse à l'interface.

En utilisant la démarche cinématique développée dans la partie précédente, nous déterminons le domaine de résistance dans le plan. La limite en traction des joints d'interface,  $T$ , est prise égale à 0.24 MPa (d'après Page 1983).

Les figures 2.10 - 2.12 présentent une comparaison entre les deux interfaces étudiées : Mohr-Coulomb (MC) et Mohr-Coulomb tronqué par Rankine en traction (MCT).

Dans le cas de traction uniaxiale ( $\xi = -1$ ), la rupture d'interface se fait par traction ce qui explique la différence entre les deux domaines de résistance. Il est évident que le domaine de résistance du matériau de MCT est inclus ou égal au domaine de résistance du matériau MC

$$G_{Int}^{\Sigma}(\text{MCT}) \subseteq G_{Int}^{\Sigma}(\text{MC})$$

Pour les tests de traction-compression, les interfaces se rompent par traction pour

$\theta = 90^\circ$  et par cisaillement quand  $\theta$  s'approche de zéro.

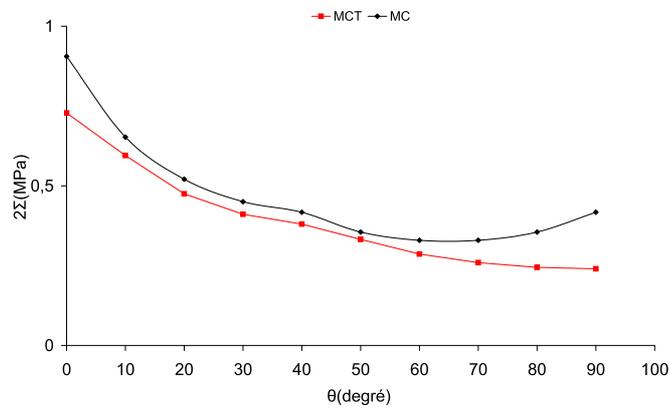


Figure 2.10 — Approche cinématique de la contrainte de rupture  $\Sigma$  :  $\xi = -1$

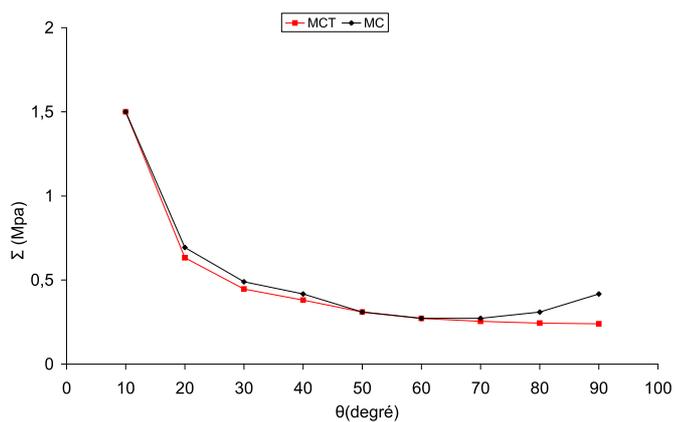


Figure 2.11 — Approche cinématique de la contrainte de rupture  $\Sigma$  :  $\xi = 0$

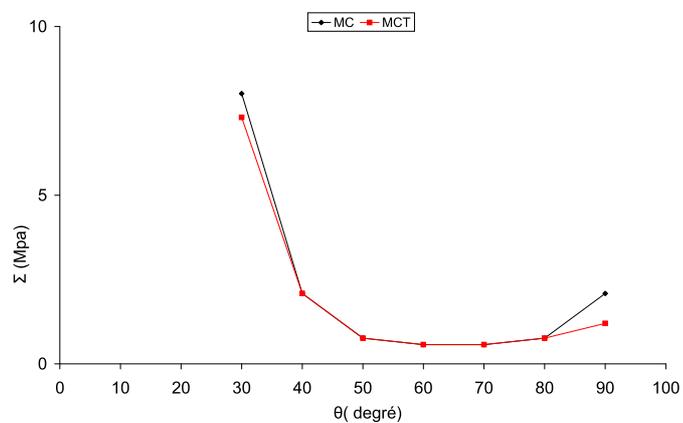


Figure 2.12 — Approche cinématique de la contrainte de rupture  $\Sigma$  :  $\xi = 0.8$

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé la méthode d'homogénéisation des plaques périodiques en analyse limite et nous avons traité le cas des murs en maçonnerie constitués par des briques infiniment résistantes reliées entre elles par des interfaces de Mohr-Coulomb ou de Mohr-Coulomb tronquées par le critère de Rankine en traction. En revanche, nous n'avons pas pris en compte la rupture des briques.

Dans le chapitre suivant, nous traiterons, par la méthode des éléments finis, le cas d'un panneau en maçonnerie sollicité dans le plan dans le cas où les blocs ont une résistance finie et les joints de mortier ont une épaisseur finie.

# CHAPITRE 3

---

## Homogénéisation numérique des structures maçonnées

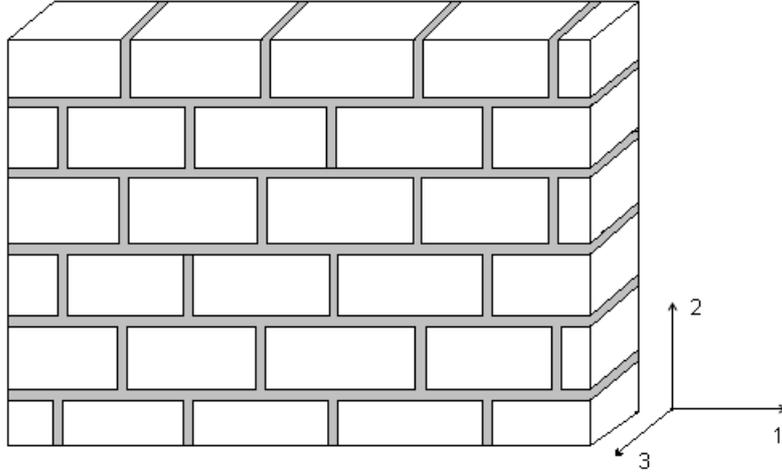
On considère dans ce chapitre le cas d'une maçonnerie constituée de blocs ayant une résistance finie séparés par des joints d'épaisseur finie. L'idée centrale est de mener une homogénéisation numérique en résolvant le problème auxiliaire d'analyse limite sur la cellule de base. Les résultats numériques obtenus nous conduiront à proposer un critère analytique simple qui tienne compte de la rupture des blocs. Ce critère est comparé à des résultats expérimentaux. Mais dans un premier temps, on montrera que l'utilisation d'un modèle d'interface 2D pour les joints conduit à une surestimation des capacités portantes de la maçonnerie.

### 3.1 Modèle des joints : passage du 3D au 2D

On considère un mur en maçonnerie d'épaisseur  $t$  qui occupe le volume  $\Omega = \omega \times ]-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}[$  de  $\mathbb{R}^3$ . La structure maçonnée est composée des blocs régulièrement rangés occupant un domaine  $\Omega^b$  et reliés en eux par des joints occupant un domaine  $\Omega^J$ . Soit  $G^b$  et  $G^J$  les domaines de résistance des blocs et des joints successivement.  $G^b$  et  $G^J$  sont deux convexes de dimension six dans l'espace des contraintes. On note par  $\pi^b$  et  $\pi^J$  les fonctions supports des deux convexes et  $\mathbf{d} = (d_{ij})$  avec  $i, j = 1, 2, 3$  le taux de déformation.

$$\pi^\alpha(\mathbf{d}) = \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in G^\alpha} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}, \quad \boldsymbol{\sigma} \in G^\alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \leq \pi^\alpha(\mathbf{d}) \quad \forall \mathbf{d} \quad (3.1)$$

pour  $\alpha = J$  ou  $b$ . Le chargement de la structure est décrit en fournissant le champs de vitesse  $\mathbf{v} = (v_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  cinématique admissible, CA, avec les conditions de périodicité et le fonctionnel linéaire  $L(\mathbf{v})$  qui représente le travail des forces extérieures.



*Figure 3.1 — Mur en maçonnerie 3D*

D'après l'approche par l'extérieur de l'analyse limite, la structure maçonnée ne peut pas supporter la charge s'il existe un champ de vitesse CA tel que :

$$\int_{\Omega^J} \pi^J (\nabla \otimes^s \mathbf{v}) d\Omega^J + \int_{\Omega^b} \pi^b (\nabla \otimes^s \mathbf{v}) d\Omega^b < L(\mathbf{v}) \quad (3.2)$$

où  $(\nabla \otimes^s \mathbf{v})$  est la partie symétrique du gradient de vitesse.

Pour simplifier le problème, seul le cas des joints à épaisseur constante a été traité (figure 3.2).  $\mathbf{n}$  est la normale à la surface médiane  $\omega^J$  du joint,  $(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n})$  est une base locale,  $e$  est l'épaisseur du joint et  $\mathbf{v}^+$  et  $\mathbf{v}^-$  sont les valeurs de  $\mathbf{v}$  sur les bords du joint. On suppose que la vitesse est linéaire dans l'épaisseur du joint, tel que :

$$\mathbf{v}(x_l, x_m, x_n) = \frac{\mathbf{v}^+(x_l, x_m) + \mathbf{v}^-(x_l, x_m)}{2} + \frac{\mathbf{v}^+(x_l, x_m) - \mathbf{v}^-(x_l, x_m)}{e} x_n \quad (3.3)$$

$\pi^J$  est une fonction homogène positive, donc on peut monter dans certaines conditions de régularité sur  $\mathbf{v}^+$ ,  $\mathbf{v}^-$  et  $\pi^J$  que, pour  $\omega^J$ ,  $\mathbf{v}^+$  et  $\mathbf{v}^-$  fixés, la puissance résistante maximale du modèle 3D des joints tend vers le modèle 2D quand  $e$  tend vers 0 :

$$\lim_{e \rightarrow 0^+} \int_{\Omega^J} \pi^J (\nabla \otimes^s \mathbf{v}) d\Omega^J = \int_{\omega^J} \pi^J (\mathbf{n} \otimes^s [\mathbf{v}]) d\omega^J \quad (3.4)$$

avec  $[\mathbf{v}] = \mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-$  est la discontinuité de vitesse. En utilisant la technique de dualité, le domaine de résistance d'interface  $g^J$  est un convexe dans l'espace de dimension trois des vecteurs contraintes  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  qui est défini par :

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \in g^J \Leftrightarrow \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} \leq \pi^J(\mathbf{n} \otimes^s \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \quad (3.5)$$

Si la contribution du champ de vitesse présenté dans (3.3) est nulle dans  $L(\mathbf{v})$  quand l'épaisseur du joint tend vers zéro, alors l'analyse cinématique du modèle 3D des joints tend asymptotiquement vers le modèle d'interface 2D qui représente une borne supérieure de la résistance de la structure. En utilisant la même technique d'interpolation de champ de vitesse dans les joints, ce résultat reste valable pour les joints courbes et dans les zones d'intersection.

Ce résultat pourrait être facilement obtenu par l'approche statique sous l'hypothèse supplémentaire que les briques sont plus résistantes que les joints :  $G^J \subset G^b$ . En effet, dans ce cas, la condition  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \in G^J$  pour  $\mathbf{x} \in \Omega^J$  peut être remplacée par  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \in G^b$  pour  $\mathbf{x} \in \Omega^J \setminus \omega^J$  et  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \in g^J$  pour  $\mathbf{x} \in \omega^J$ . En d'autres termes, dans le cas  $G^J \subset G^b$ , une approche par l'intérieur de la capacité portante de la structure maçonnée est obtenue pour une épaisseur arbitraire des joints par le remplacement des propriétés des joints par celle des briques dans  $\Omega^J$  excepté de ses surfaces médianes,  $\omega^J$ , où la condition  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \in G^J$  est imposée.

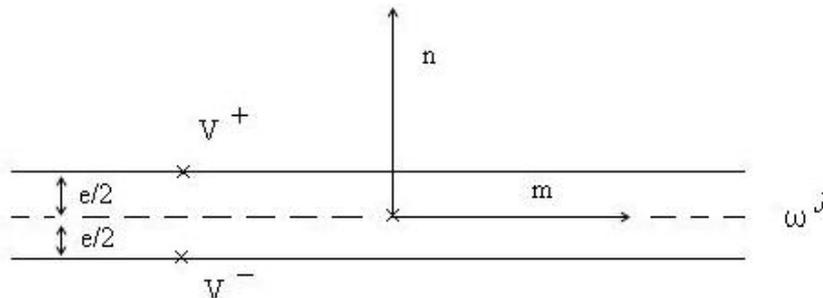


Figure 3.2 — Joint de mortier 3D

## 3.2 Résistance à la compression verticale d'un panneau en maçonnerie

Considérant un mur en maçonnerie constitué des briques parallélépipèdes identiques (de longueur  $b$  dans la direction horizontale 1, de hauteur  $a$  dans la direction 2 et d'épaisseur  $t$  dans la direction 3) séparées par des joints horizontaux continus et des joints verticaux alternés (voir figure 3.3).  $e_h$  et  $e_v$  sont les épaisseurs successives des joints horizontaux et verticaux. Les briques et les joints sont considérés comme des matériaux de Drucker-Prager. La fonction de charge de Drucker-Prager est donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma} \in G \Leftrightarrow f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \quad \text{avec} \quad f(\boldsymbol{\sigma}) = q + p \tan \beta - c \quad (3.6)$$

Avec :

$p = \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}$  est la pression hydrostatique,  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{I}$  est la partie déviatorique de  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $q = \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr } \mathbf{s}^2}$ ,  $c > 0$  la cohésion et  $\varphi$  est l'angle de frottement du matériau de Drucker-Prager avec  $(c, \beta) = (c^J, \beta^J)$  dans les joints et  $(c, \beta) = (c^b, \beta^b)$  dans les briques. D'après [Salençon 1983], le convexe de résistance d'interface de Drucker-Prager donné par la relation (3.8) coïncide avec celui de Mohr-coulomb définie par la relation suivante :

$$\tau + \sigma \tan \varphi - c' \leq 0 \quad (3.7)$$

où  $\sigma$  est la composante normale de  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ ,  $\sigma = \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})$  et  $\tau$  est la composante de cisaillement  $|\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \sigma \mathbf{n}|$ ,  $\varphi$  est l'angle de frottement de Mohr-coulomb si  $\frac{3 \sin \varphi}{\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}} = \tan \beta$  et  $c' = c \frac{\tan \varphi}{\tan \beta}$  est la cohésion de Mohr-coulomb.

La fonction  $\pi$  s'écrit :

$$\pi(\mathbf{n} \otimes^s [\mathbf{v}]) = \begin{cases} (c' / \tan \varphi) [\mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} & \text{si } [\mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} \geq |[\mathbf{v}]| \cdot \sin \varphi \\ + \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.8)$$

Où  $[\mathbf{v}]$  est la discontinuité de vitesse en dépassant le joint d'interface  $\omega^J$ .

En utilisant la méthode d'homogénéisation en analyse limite présentée dans le chapitre précédent et en tenant compte de la symétrie du problème, montré dans [80] et [25], l'approche statique de  $\Sigma_c$ , la résistance en compression verticale du panneau en maçonnerie, consiste à déterminer la contrainte macroscopique maximale  $\Sigma$  tel qu'il existe un champ de contrainte  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$  dans la cellule de base qui vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) \in G(\mathbf{y}), \forall \mathbf{y} \in Y \\ \langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{12} \rangle = 0, \langle \sigma_{22} \rangle = -\Sigma, \\ \text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{dans } Y, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad \text{anti-périodique sur } \partial Y_i; \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \quad \text{sur } \partial Y_3^\pm \end{array} \right. \quad (3.9)$$

$\langle . \rangle$  est la moyenne volumique dans  $Y$ .

L'approche cinématique de  $\Sigma_c$  est déterminée en considérant l'ensemble des champs de vitesse CA dans la cellule de base,  $\mathbf{v} = (v_i)$  définie par :

$$CA(\mathbf{D}) = \{ \mathbf{v} \mid \nabla \otimes^s \mathbf{v} = \mathbf{D} + \nabla \otimes^s \mathbf{u}^{per}, \mathbf{u}^{per} \text{ A - périodique} \}$$

Où  $\mathbf{D} = (D_{ij})$ ,  $D_{i3} = 0$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  est le tenseur de second ordre de déformation

macroscopique dans le plan. La contrainte macroscopique  $\Sigma_c$  est définie par :

$$\Sigma_c = \inf_{\mathbf{v} \in CA(\mathbf{D}), D_{22} = -1} \langle \pi (\nabla \otimes^s \mathbf{v}) \rangle. \quad (3.10)$$

Si on remplace le modèle 3D des joints d'interface par le modèle 2D dans le problème d'analyse limite présenté ci-dessus, le problème (3.9) devient :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) \in G^b, & \forall \mathbf{y} \in Y^* \\ \mathbf{t}(\mathbf{y}) \in g^J, & \forall \mathbf{y} \in \omega^J \\ \langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{12} \rangle = 0, \langle \sigma_{22} \rangle = -\Sigma, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0, & \forall \mathbf{y} \in Y^* \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique sur } \partial Y_i; \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \text{ sur } \partial Y_3^\pm \end{cases}$$

$Y^*$  est la cellule de base déduite de  $Y$  quand  $e_h = e_v = 0$ .  $G^b$ , le convexe de résistance des blocs, est déterminé par (3.6) avec  $(c, \varphi) = (c^b, \varphi^b)$ .  $g^J$ , le convexe de résistance d'interface, est déterminé par (3.7) avec  $(c, \varphi) = (c^J, \varphi^J)$ . La valeur maximale de  $\Sigma$  est notée  $\Sigma_c^*$ .  $\Sigma_c^*$  peut être déterminée par l'approche cinématique, avec :

$$\langle \pi (\nabla \otimes^s \mathbf{v}) \rangle = \langle \pi^b (\nabla \otimes^s \mathbf{v}) \rangle + \frac{1}{|Y^*|} \int_{\omega^J} \pi^J (\mathbf{n} \otimes^s [\mathbf{v}]) d\omega^J$$

Dans le cas des blocs infiniment résistants avec une cinématique de corps rigides, le problème avec une cellule de base 3D et une interface 2D coïncide avec l'approche proposé par De Buhan et De Felice 1997 [76].

Si on considère le modèle 2D d'interface présenté ci-dessus, on peut montrer que la résistance en compression du mur en maçonnerie est égale à celle du bloc,  $\Sigma_c^b$ , c'est à dire  $\Sigma_c^* = \Sigma_c^b$ . En effet, si on considère un champ de contrainte uniforme dans  $Y^*$  :  $\sigma_{22} = -\Sigma$  et  $\sigma_{ij} = 0$  pour  $(i, j) \neq (2, 2)$ , dans l'approche statique. Il est clair que l'équation d'équilibre, les conditions aux limites et les conditions d'interfaces sont vérifiées pour tout  $\Sigma > 0$ . Par conséquent,  $\Sigma_c^b$  est la valeur maximale de  $\Sigma$ , SA, et on a la relation suivante  $\Sigma_c^b \leq \Sigma_c^*$ . Par ailleurs, si on considère le champ de vitesse continu suivant :

$$D_{12} = 0, u_1^{per}(\mathbf{y}) = u_2^{per}(\mathbf{y}) = 0, u_2^{per}(\mathbf{y}) = D_{11}y_3$$

dans l'approche cinématique, nous avons

$$\mathbf{d} = \nabla \otimes^s \mathbf{v} = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & D_{11} \end{pmatrix}$$

et en optimisant par rapport à  $D_{11}$ , on trouve la relation suivante  $\Sigma_c^* \leq \Sigma_c^b$ .

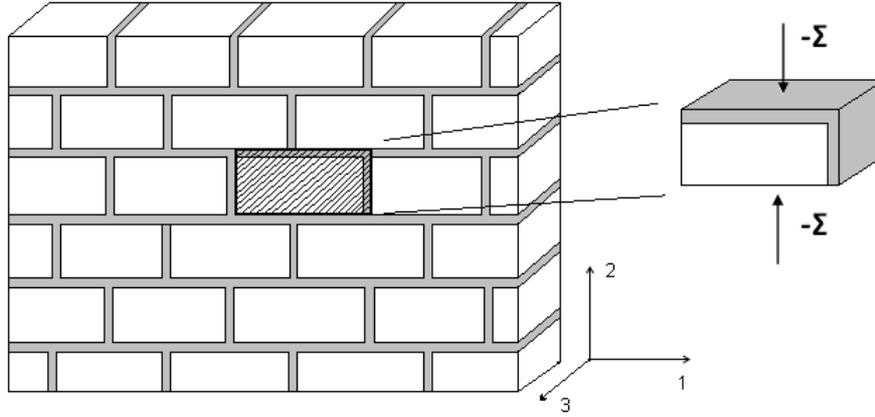


Figure 3.3 — Mur en maçonnerie et cellule de base

### 3.3 Calcul numérique périodique en 3D

Dans cette section, nous évaluons numériquement la résistance en compression verticale du mur en maçonnerie. Le problème d'analyse limite de la cellule de base avec le modèle 3D des joints d'interface est résolu par la méthode des éléments finis en élasto-plasticité parfaite. La cellule de base utilisée est présentée dans la figure 3.3. Le calcul par éléments finis est effectué à l'aide du logiciel Abaqus standard. Dans ce calcul, les blocs et les joints sont considérés comme des matériaux homogènes qui obéissent au critère hyperbolique de Drucker-Prager défini par (3.6). En fait, le logiciel ABAQUS peut présenter certains problèmes de convergence en raison de la non différentiabilité de la fonction support du critère de Drucker-Prager à  $p = 0$ . Par conséquent, une version régularisée du critère de Drucker-prager a été utilisée (hyperbolique) où  $q$  dans (3.6) est remplacé par  $\sqrt{l_0^2 + q^2}$ .  $l_0$  est équivalent à une cohésion.

Le critère hyperbolique de Drucker-Prager utilisé dans Abaqus/strandard s'écrit dans le plan des contraintes  $(p,q)$  comme la combinaison continue du critère linéaire de Drucker-Prager et le critère de Rankine. Soit  $p_t$  la limite en traction du matériau.

La fonction seuil du critère hyperbolique de Drucker-Prager est donnée par la relation suivante :

$$f = \sqrt{l_0^2 + q^2} + p \tan \beta - c \quad (3.11)$$

Avec :

$p = \frac{1}{3}tr \boldsymbol{\sigma}$  est la pression hydrostatique,  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{I}$  est la partie déviatorique de  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $q = \sqrt{\frac{3}{2}tr \mathbf{s}^2}$ ,  $c > 0$  la cohésion et  $\beta$  est l'angle de frottement du matériau.

Les paramètres de calcul sont dans le tableau suivant :

Constituent	propriété	Valeur
Bloc	Angle de frottement, $\beta^b$	30°
	Cohésion, $c^b$ (MPa)	4.328
	Traction, $p_t^b$ (MPa)	6.78
	Constante, $l_0$ (MPa)	0.022
	Module d'Young, $E_b$ (MPa)	6740
	Coefficient de poisson, $\nu$	0.167
Mortier	Angle de frottement, $\beta^J$	40°
	Cohésion, $c^J$ (MPa)	0.348
	Traction, $p_t^J$ (MPa)	0.375
	Constante, $l_0$ (MPa)	0.002
	Module d'Young, $E_J$ (MPa)	1700
	Coefficient de poisson, $\nu$	0.06

**Tableau 3.1** — Paramètres de calcul

Le tableau ci-dessous contient les dimensions géométriques de la cellule de base 3D utilisée :

Longueur de brique $b$ (mm)	115
Largeur de brique $a$ (mm)	38
Épaisseur de brique $t$ (mm)	10
Épaisseur du joint vertical $e_v$ (mm)	5
Épaisseur du joint horizontal $e_h$ (mm)	5

**Tableau 3.2** — Paramètres de calcul

La cellule de base est maillée par des éléments de type *C3D8*, elle est constituée de 4276 noeuds et 1944 éléments (8-noeuds par élément). Les conditions de périodicité sont imposées sur tout le contour du volume élémentaire, ces dernières sont introduites manuellement par l'option "Equation" du module "Interaction" d'Abaqus.

Dans ce travail, un seul type de maillage a été utilisé vue la la difficulté de la mise en place des conditions de périodicité sur tout le contour du volume élémentaire. Pour avoir un maillage suffisamment raffiné, nous avons pris trois éléments par épaisseur du joint. La détermination de la charge de ruine est obtenue en traçant la courbe contrainte macroscopique/déformation macroscopique.

### 3.3.1 Conditions de périodicité

Nous avons choisi une cellule de base constituée d'une brique entourée par le joint horizontal haut et le joint vertical droit (voir figure 3.4), Le bord extérieur de la cellule de base est divisé en six sections planes reliées entre elles par des conditions de périodicité. Voir la figure 3.4.

Les conditions de périodicité, sur le contour de la cellule de base, ont été imposées de la manière suivante :

$$\mathbf{v}(y_E) - \mathbf{v}(y_B) = \mathbf{D} \cdot \begin{pmatrix} y_E - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{b+e_v}{2}\right) D_{11} + (a + e_h) D_{12} \\ \left(\frac{b+e_v}{2}\right) D_{12} + (a + e_h) D_{22} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc on a :

$$\mathbf{v}^{(5)} - \mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}^{(4)} - \mathbf{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{b+e_v}{2}\right) D_{11} + (a + e_h) D_{12} \\ \left(\frac{b+e_v}{2}\right) D_{12} + (a + e_h) D_{22} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Cette condition relie les deux faces B et E.

$$\mathbf{v}(y_D) - \mathbf{v}(y_A) = \mathbf{D} \cdot \begin{pmatrix} y_D - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b + e_v) D_{11} \\ (b + e_v) D_{12} \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où la relation suivante :

$$\mathbf{v}^{(3)} - \mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}^{(4)} - \mathbf{v}^{(6)} = \begin{pmatrix} (b + e_v) D_{11} \\ (b + e_v) D_{12} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Cette condition relie les deux faces A et D.

$$\mathbf{v}(y_F) - \mathbf{v}(y_C) = \mathbf{D} \cdot \begin{pmatrix} y_F - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{b+e_v}{2}\right) D_{11} + (a + e_h) D_{12} \\ -\left(\frac{b+e_v}{2}\right) D_{12} + (a + e_h) D_{22} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et :

$$\mathbf{v}^{(5)} - \mathbf{v}^{(3)} = \mathbf{v}^{(6)} - \mathbf{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{b+e_v}{2}\right) D_{11} + (a + e_h) D_{12} \\ -\left(\frac{b+e_v}{2}\right) D_{12} + (a + e_h) D_{22} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Cette condition relie les deux faces C et F.

où A, B, C, D, E, F sont les six faces de la frontière latérale montrée dans la figure 3.4 où la face dans le plan (1,2) de la cellule de base est représentée.  $e_h$  et  $e_v$  sont les épaisseurs horizontale et verticale du joint de mortier et  $a$  et  $b$  sont les dimensions du bloc. Les six noeuds (k) avec  $k = 1, 2, \dots, 6$ , correspondent à ce qui suit : (4) et (6) et (2), (5) avec (1) et (3). En utilisant les équations ci-dessus, il est possible d'exprimer les composantes  $\mathbf{D}$  en termes de degrés de liberté,  $\mathbf{v}^{(k)}$ ; de ces noeuds. Pour  $\mathbf{v}^{(1)} = 0$ , nous trouvons :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{11} = \frac{v_1^{(3)}}{b + e_v} = \frac{v_1^{(3)}}{b'} \\ D_{12} = \frac{v_2^{(3)}}{b + e_v} = \frac{v_2^{(3)}}{b'} \\ D_{22} = \frac{v_2^{(5)}}{a + e_h} - \frac{v_2^{(3)}}{2(a + e_h)} = \frac{v_2^{(5)}}{a'} - \frac{v_2^{(3)}}{2a'} \end{array} \right. \quad \text{avec } b' = b + e_v \text{ et } a' = a + e_h \quad (3.15)$$

$v_i^{(j)}$  est le déplacement dans la direction  $i$  du  $j$ ème noeud.

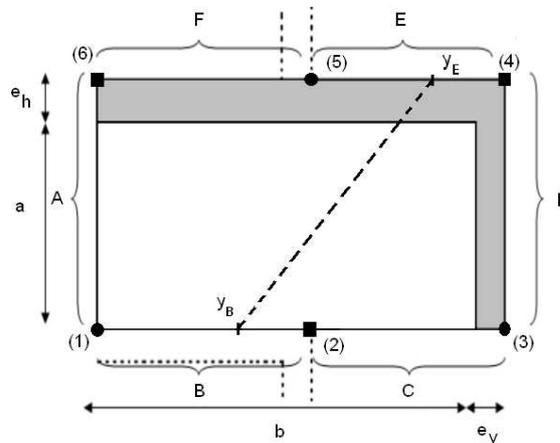


Figure 3.4 — Partition de la cellule de base

### 3.3.2 Mode de chargement

Dans la partie simulation nous avons essayé de reprendre les essais faits par Page (1981-1983). Les tests traités sont des tests traditionnellement pratiqués pour mesurer les résistances ultimes des maçonneries. Le chargement est paramétré par deux réels  $\xi \in [-1, 1]$  et  $\theta \in [0, \pi/2]$  (voir figure 3.5).

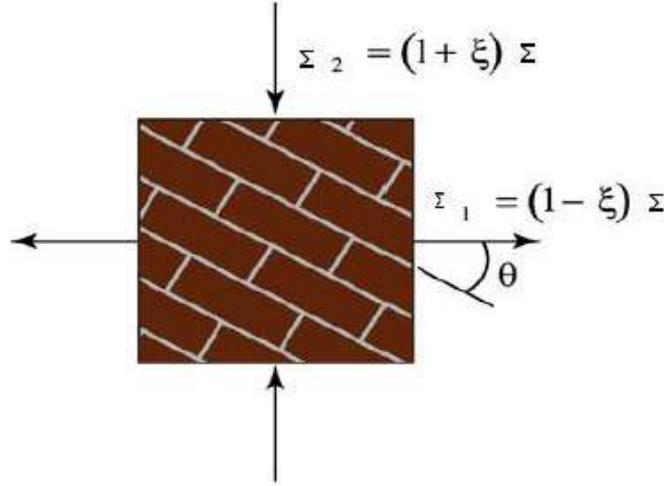


Figure 3.5 — Mode de chargement

L'équilibre global dans la cellule de base doit être vérifié à chaque incrément de chargement, à savoir pour un pas de chargement  $\varepsilon$ , nous avons :

$$|Y| \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} = |Y| \Sigma \varepsilon$$

où  $\boldsymbol{\Sigma}$  est le tenseur des contraintes macroscopiques décrit par :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \Sigma \begin{pmatrix} (\cos 2\theta - \xi) & -\sin 2\theta & 0 \\ -\sin 2\theta & -(\cos 2\theta + \xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

$\mathbf{D}$  est le tenseur des déformations macroscopiques et  $|Y|$  est le volume de la cellule de base.

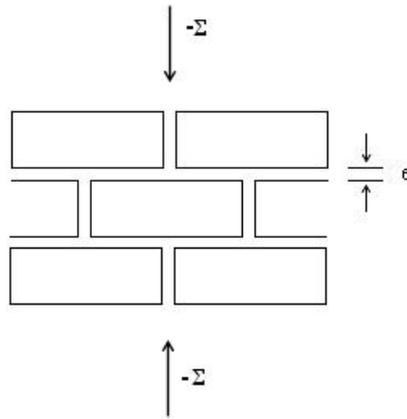
Par identification, nous avons trouvé que la variable de chargement  $\varepsilon$  est liée au déplacement aux noeuds 1, 2 et 5 par la relation suivante :

$$\varepsilon = \left( \frac{\cos 2\theta - \xi}{b'} \right) u_1^3 + \left( \frac{\cos 2\theta + \xi}{2a'} - 2 \frac{\sin 2\theta}{b'} \right) u_2^3 - \left( \frac{\cos 2\theta + \xi}{a'} \right) u_2^5 \quad (3.17)$$

### 3.3.2.1 Compression uni-axiale dans le plan ( $\theta = 0$ et $\xi = 1$ )

La résistance à la compression des maçonneries dans la direction normale aux joints horizontaux est généralement considérée comme le seul critère qui permette de définir la résistance globale de la structure qui est un matériau composite.

Dans cette partie, nous traiterons le cas d'un mur en maçonnerie comprimé dans la direction normale aux joints horizontaux (figure 3.6).



*Figure 3.6* — Mode de chargement du mur

Pour ce cas de chargement, le tenseur des contraintes macroscopiques a la forme suivante :

$$\Sigma = \Sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant la relation 3.17, on trouve que la variable de chargement  $\varepsilon$  est liée au déplacement aux noeuds (3) et (5) par la relation suivante :

$$\varepsilon = \frac{v_2^{(5)}}{a'} - \frac{v_2^{(3)}}{2a'} = -D_{22}$$

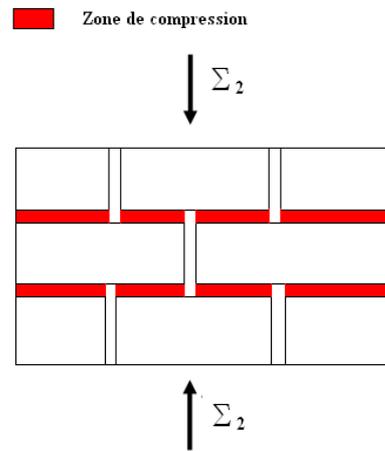
$-D_{22}$  est incrémenté de zéro jusqu'à la rupture de la structure.

L'analyse des résultats de simulations numériques montre que la rupture du mur s'est produite par écrasement des blocs. La plastification dans la cellule de base commence au niveau du joint horizontal puis elle se propage dans le bloc. La figure 3.7 montre les distributions de la charge dans un essai de compression verticale dans le plan d'un panneau en maçonnerie. La contrainte macroscopique de compression

$\Sigma = - \langle \sigma_{22} \rangle$  est calculée par l'interpolation des valeurs de contraintes aux points de Gauss.

$$\Sigma_{ij} = \frac{\sum_i s_i \sigma_{ij}}{\sum_i s_i} \quad (3.18)$$

$s_i$  est la surface de l'élément de maillage.



**Figure 3.7** — Distribution de la charge dans un panneau en maçonnerie en compression

La figure 3.8 montre la courbe contrainte/déformation où la contrainte macroscopique de rupture,  $\Sigma_c$ , est la valeur asymptotique de  $\Sigma$ . On trouve  $\Sigma_c \approx 0.87\Sigma_c^b$  ( $\Sigma_c^b$  est la contrainte de rupture par compression du bloc). La figure montre les détails du maillage de la cellule de base dans le plan (1,2). L'épaisseur de la cellule de base dans la troisième direction est de 10mm. La déformation dans le bloc n'est pas uniforme : la déformation est maximale aux extrémités du bloc et quasi-nulle au centre. (voir figure 3.9). La figure 3.9b montre la distribution de la contrainte  $\sigma_{33}$  dans la cellule. Sa valeur est proche de  $-2Mpa$  dans le joint horizontal et très faible dans le bloc. Par conséquent,  $\sigma$  n'est pas un champ de contrainte plane. En outre, la déformation dans la cellule de base n'est pas plane.

D'après cette étude, nous constatons que la rupture de la structure maçonnée, dans le cas d'une compression uniaxiale uniforme dans le plan, est liée à la résistance du bloc pour ce type de chargement. Le paragraphe suivant contient l'étude expérimentale qui a été faite pour comprendre le comportement réel des maçonneries soumises à une

compression verticale.

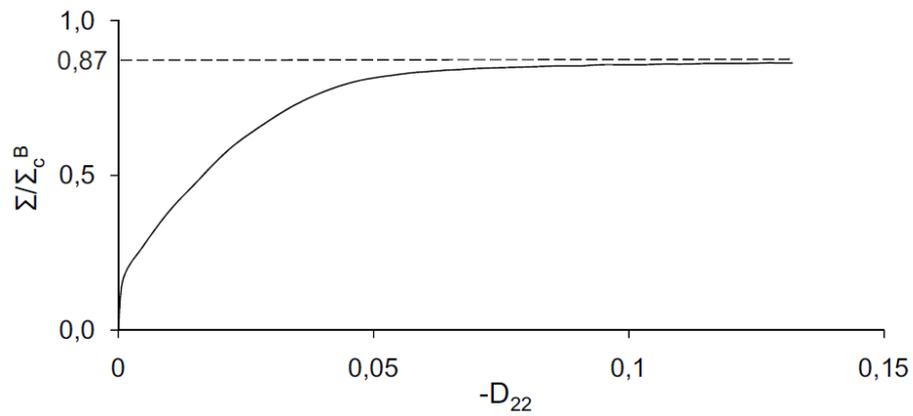


Figure 3.8 — Courbe contrainte-déformation

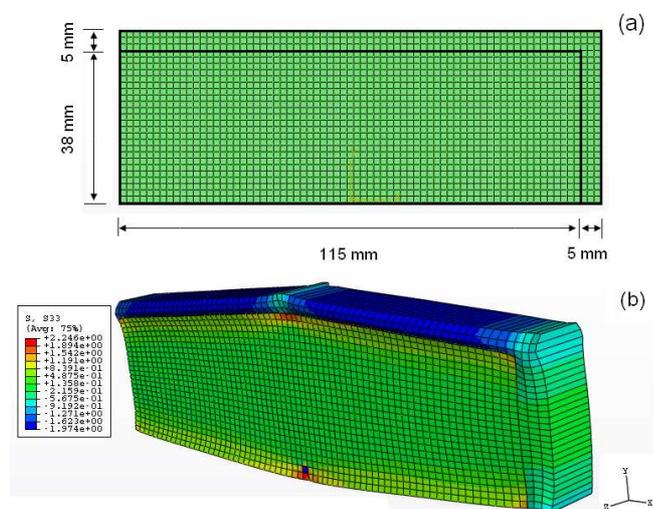
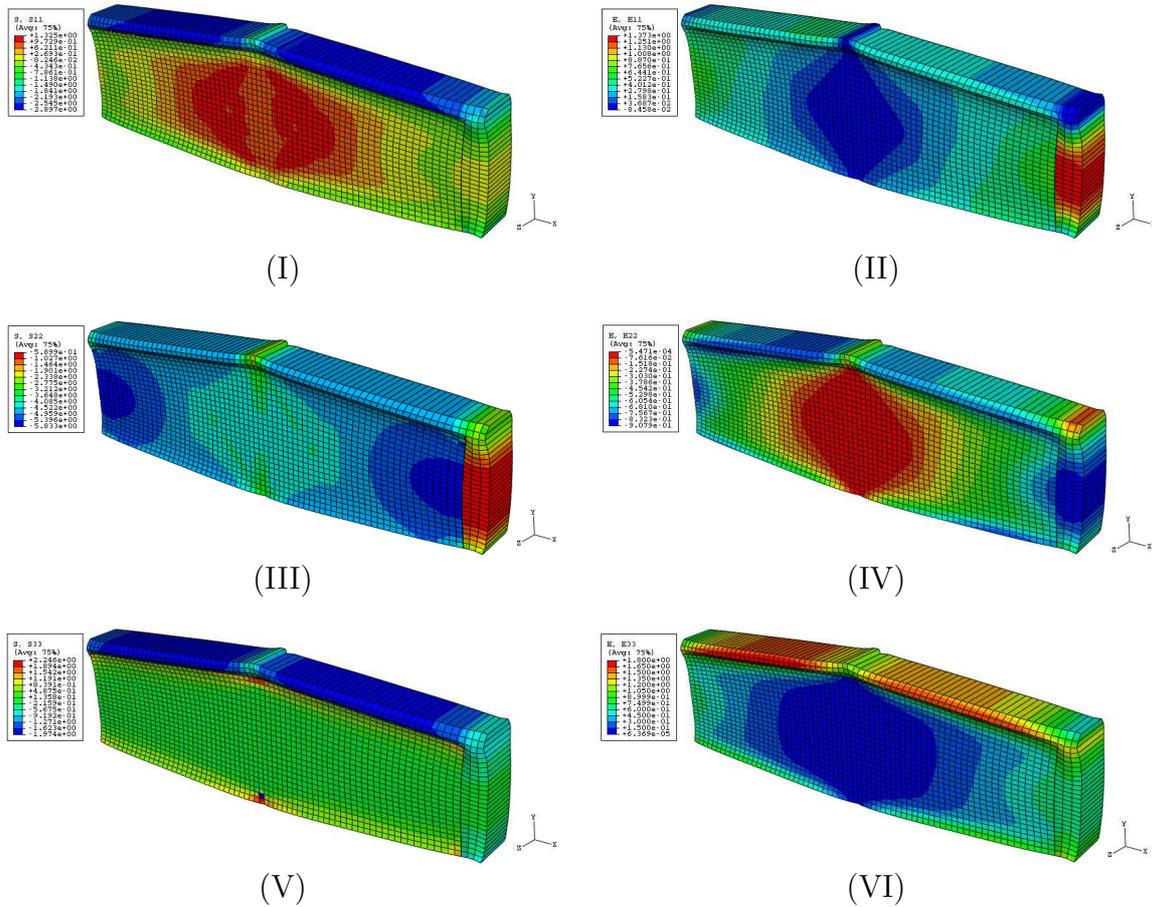


Figure 3.9 — (a) : maillage de la cellule de base; (b) : La distribution de la contrainte  $\sigma_{33}$



**Figure 3.10** — (I) , (III) et (V) : les distributions de contraintes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{33}$  respectivement; (II), (IV) et (VI) : les distributions de déformations totales  $d_{11}$ ,  $d_{22}$  et  $d_{33}$  respectivement

### 3.3.2.2 Etudes expérimentales : résistance en compression des éléments de maçonnerie (CSTB)

Dans cette campagne expérimentale, nous avons fait des essais de compression sur des briques en terre cuite. Trois configurations de compression ont été testées :

- (i)- Échantillons type  $A$  : essais de compression uniforme sur les deux faces supérieure et inférieure de la brique,
- (ii)- Échantillons type  $B_1$  : essais de compression partielle sur les deux faces de la brique exceptée de la partie centrale équivalent à la position des joints verticaux (figure 3.11(a)),
- (iii)- Échantillons type  $B_2$  : essais de compression sur un élément de maçonnerie de trois rangs (figure 3.11(c)).

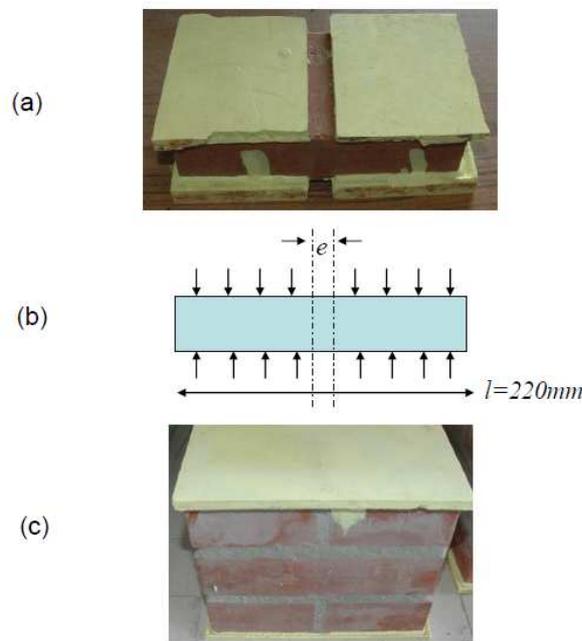
Les dimensions des briques utilisées sont  $220\text{mm} \times 105\text{mm} \times 50\text{mm}$ . Deux épaisseurs des joints ont été considérées dans les configurations (ii) et (iii) :  $e = 5\text{mm}$  et  $e = 20\text{mm}$ .

Pour chaque configuration et chaque épaisseurs  $e$ , trois échantillons ont été testés.

L'éprouvette placée sous la presse est chargée progressivement jusqu'à la rupture par compression, les essais sont pilotés en déplacement. On note la contrainte appliquée à la rupture par  $\Sigma_c$  :

$$\Sigma_c = \frac{F_c}{A} \quad (3.19)$$

$F_c$  est la force donnée par la machine à la rupture et  $A = 23100\text{mm}^2$  est la surface chargée.



**Figure 3.11** — *Essais de compression. (a) : échantillon  $B_1$  ; (b) : charge de compression partielle ; (c) : échantillon  $B_2$*

Les résultats d'essais sont mis dans le Tableau 3.3. La résistance en compression uniforme des briques en terre cuite dans la configuration (i),  $\Sigma_c$ , est comprise entre  $72\text{MPa}$  et  $101\text{MPa}$  et la moyenne est de  $86\text{MPa}$ . On est conscient que le nombre d'échantillons testés (3) ne permet pas d'avoir une estimation quantitative précise de la résistance en compression moyenne. Par conséquent, les résultats suivants doivent être considérés comme qualitatifs. Dans cette campagne d'essais, il a été constaté que l'épaisseur n'a pas d'effet significatif sur la résistance en compression mesurée dans les configurations (ii) et (iii). Les contraintes de rupture en compression dans la configuration (ii) sont compris entre  $53\text{MPa}$  et  $66\text{MPa}$  et avec une moyenne de  $61\text{MPa}$  (71%

de  $\Sigma_c^b$ ), et entre  $38\text{MPa}$  et  $49\text{MPa}$  et une moyenne de  $44\text{MPa}$  (51% de  $\Sigma_c^b$ ) dans la configuration (iii). Le dernier résultat est compatible avec les résultats trouvés par Page 1983 sur les essais de compression uniaxiale des murs en maçonnerie où la résistance en compression du mur représente 58% de la résistance en compression de la brique.

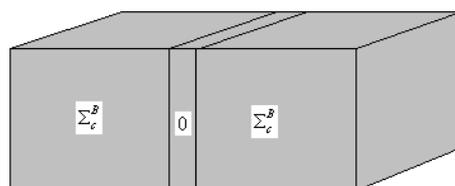
Échantillon	$e(\text{mm})$	$F_c(\text{KN})$	Contrainte de rupture (MPa)
A	---	2334.2	86.12
		1962.2	
		1672.5	
$B_1$	5	1430.34	61
		1491.45	
		1509.28	
$B_1$	20	1234.94	61
		1533.9	
		1282.19	
$B_2$	5	1033.03	44
		868.14	
		992.42	
$B_2$	20	1013.84	44
		1041.33	
		1122.58	

**Tableau 3.3** — Résultats d'essais de compression



**Figure 3.12** — Mode de rupture de l'échantillon  $B_2$

Maintenant, si on considère le champ de contrainte uniforme par morceaux dans la brique suivant : contrainte nulle au centre et égale à  $\Sigma_c^b$  ailleurs (voir figure 3.13). Ce champ de contrainte est statiquement et plastiquement admissible avec les conditions d'équilibre du problème. En utilisant l'approche statique d'analyse limite, la contrainte de rupture de la brique partiellement comprimée doit être supérieure ou égale à  $(1 - e/l)\Sigma_c^b$  ( $\geq 0.91\Sigma_c^b$ ). Par contre, la contrainte de rupture trouvée par les essais de la configuration (ii) est égale à 0.71% de  $\Sigma_c^b$ , ce test montre un écart entre le comportement réel des briques et celui capté par l'analyse limite.



**Figure 3.13** — *Distribution des contraintes dans le cas de compression partielle des briques*

En conclusion, nous avons montré que l'utilisation du modèle d'interface 2D pour les joints lors de l'analyse limite d'une structure maçonnée faite de briques assemblées par des joints adhésifs minces conduit à une estimation par excès des capacités portantes, quand l'épaisseur tend vers zéro. Cette limite supérieure coïncide avec la résistance à la compression des briques  $\Sigma_c$  si on considère un mur comprimé dans son plan dans la direction verticale au joints horizontaux. Pour une faible épaisseur des joints par rapport aux dimensions des briques ( $e/l=0.04$ ), on constate que la résistance en compression trouvée par le modèle 3D des éléments finis est de  $0.87\Sigma_c$ . Par contre, les essais montrent que la résistance en compression du panneau est de  $0.51\Sigma_c$ , et la résistance en compression partielle de la brique est égale à  $0.71\Sigma_c$ . Par conséquent, il y a deux effets pour expliquer la différence entre la résistance à la compression verticale réelle de la maçonnerie et la résistance à la compression de la brique : l'effet 3D des joints et le comportement endommageable de la brique

### 3.3.2.3 Traction-compression bi-axiale dans le plan

Les charges bi-axiales prises en compte dans cette étude consistent à imposer une traction uniforme dans la direction parallèle aux joints horizontaux,  $\Sigma_1$ , et une compression perpendiculaire à ces derniers,  $\Sigma_2$ . Différents rapports de contraintes de traction-compression ont été testés :  $\left| \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} \right| = \{1, 3, 6, 9\}$ .

Les simulations numériques prouvent que pour un chargement bi-axial où le rapport des contraintes principales est supérieur ou égale à trois ( $\left| \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} \right| \geq 3$ ), la plastification de la cellule de base aura lieu dans la brique et le mode de rupture est similaire à celui identifié dans le cas de chargement de compression uni-axiale dans le plan. D'autre part, nous constatons que la valeur de contrainte,  $\Sigma_1 - \Sigma_2$ , est quasi-constante pour ces chargements. Le tableau ci-dessous contient les valeurs de  $\Sigma_1 - \Sigma_2$  à la rupture pour les différents rapports.

Posons  $\Sigma_0 = \Sigma_1 - \Sigma_2$  où  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont les contraintes principales à la rupture ( $\Sigma_1 > 0$  et  $\Sigma_2 < 0$ ).

---

Rapport de contrainte $\left(\left \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1}\right \right)$	3	6	9	$\infty$
$\Sigma_1 - \Sigma_2$ (MPa)	4.3	4.6	4.6	4.6

---

Pour un chargement bi-axial de traction-compression avec une charge de compression trois fois plus importante que celle de la traction ( $\left|\frac{\Sigma_2}{\Sigma_1}\right| \geq 3$ ), nous avons la relation suivante :

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 \leq \Sigma_0 \quad \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (3.20)$$

Les contraintes principales,  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , s'écrivent en fonction des contraintes  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{12}, \Sigma_{22})$  comme suit :

$$\Sigma_1 = \frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22} + \sqrt{(\Sigma_{11} - \Sigma_{22})^2 + (2\Sigma_{12})^2}}{2}$$

$$\Sigma_2 = \frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22} - \sqrt{(\Sigma_{11} - \Sigma_{22})^2 + (2\Sigma_{12})^2}}{2}$$

Donc la relation (3.20) devient

$$\sqrt{(\Sigma_{11} - \Sigma_{22})^2 + (2\Sigma_{12})^2} \leq \Sigma_0$$

Dans le cas où  $\Sigma_1 > 0$  et  $\Sigma_2 < 0$ , on peut écrire

$$0 \leq \Sigma_{11} - \Sigma_{22} \leq \sqrt{\Sigma_0^2 - (2\Sigma_{12})^2}$$

Soit  $G^s$  le convexe de résistance qui est défini par

$$\Sigma \in G^s \iff \max\{0, \Sigma_{11} - \Sigma_{22}\} \leq \sqrt{\Sigma_0^2 - (2\Sigma_{12})^2} \quad (3.21)$$

Pour un rapport de contrainte,  $\left|\frac{\Sigma_2}{\Sigma_1}\right| = 1$ , la plastification dans la cellule de base, a lieu dans la brique par traction. Il est évident que la résistance de la brique en traction est beaucoup plus faible que sa résistance en compression. Par conséquent,

pour un chargement bi-axial avec un rapport égal entre la traction et la compression, le panneau en maçonnerie va se rompre dans les briques par traction (voir figure 3.14). La contrainte de rupture trouvée par l'homogénéisation numérique 3D est plus faible que la résistance en traction de la brique. Ce qui prouve que les briques ne sont pas sollicitées en traction directe dans ce cas de chargement. Donc, la sollicitation in-situ des briques est la cause de ce mode de rupture. Pour bien comprendre ce phénomène, nous avons fait des simulations numériques sur la brique toute seule. Dans cette étude, deux types de chargement ont été modélisés : un test de traction avec cisaillement et un test de traction directe sur une brique (voir figure 3.17).

Pour ces deux types de tests numériques, nous avons gardé les mêmes propriétés du matériau, les mêmes dimensions ainsi le même type des éléments de maillage utilisés dans l'approche d'homogénéisation numérique 3D.

Le premier test de traction consiste à imposer un déplacement uniforme sur les faces transversales de la brique (figure 3.17(a)) par contre le deuxième est un test de traction avec cisaillement qui consiste à appliquer un déplacement uniforme sur les faces longitudinales tout en laissant libre de chargement la surface de contact avec les joints verticaux (voir figure 3.17(b)).

En comparant les résultats des deux tests, nous avons constaté une différence au niveau du mode de ruine ainsi que la valeur de la contrainte macroscopique de rupture. Pour le cas de traction directe, le comportement dans le bloc est homogène et la contrainte macroscopique de rupture en traction est équivalente à celle du critère de Drucker-Prager. En revanche, pour l'autre cas de chargement, la distribution des contraintes dans le bloc n'est pas homogène, nous remarquons une concentration de contrainte au milieu du bloc qui apparaît de part et d'autre au niveau des surfaces non chargées. Cette concentration de contrainte est la source de la rupture rapide du bloc.

Les résultats numériques de l'essai de traction par cisaillement de la brique toute seule sont similaires à ceux trouvés par homogénéisation numérique 3D dans le cas de chargement biaxial de traction-compression avec  $\left| \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} \right| = 1$ . Par conséquent, dans un chargement bi-axial de traction-compression avec un rapport de contrainte égale à un, les briques sont sollicitées en traction-cisaillement.

Notant,  $T$ , la contrainte à la rupture pour l'essai de traction-cisaillement de la brique.  $T$  vérifie la relation suivante :

$$\Sigma_1 \leq T$$

et par conséquent

$$\Sigma_{11} + \Sigma_{22} + \sqrt{(\Sigma_{11} - \Sigma_{22})^2 + (2\Sigma_{12})^2} \leq 2T$$

Soit  $G^T$  le convexe de résistance défini par :

$$\Sigma \in G^T \iff \Sigma_{11} + \Sigma_{22} + \sqrt{(\Sigma_{11} - \Sigma_{22})^2 + (2\Sigma_{12})^2} \leq 2T \quad (3.22)$$

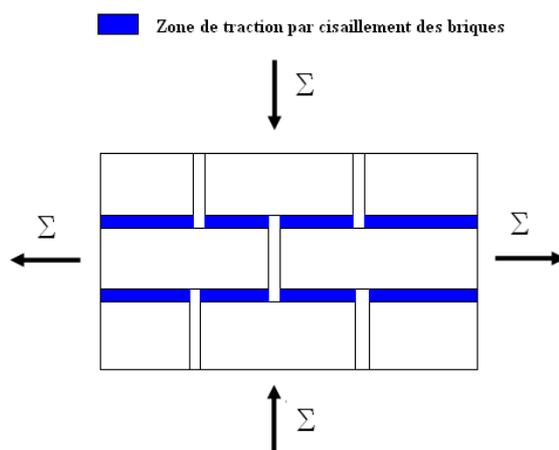


Figure 3.14 — Distribution de la charge dans un panneau en maçonnerie

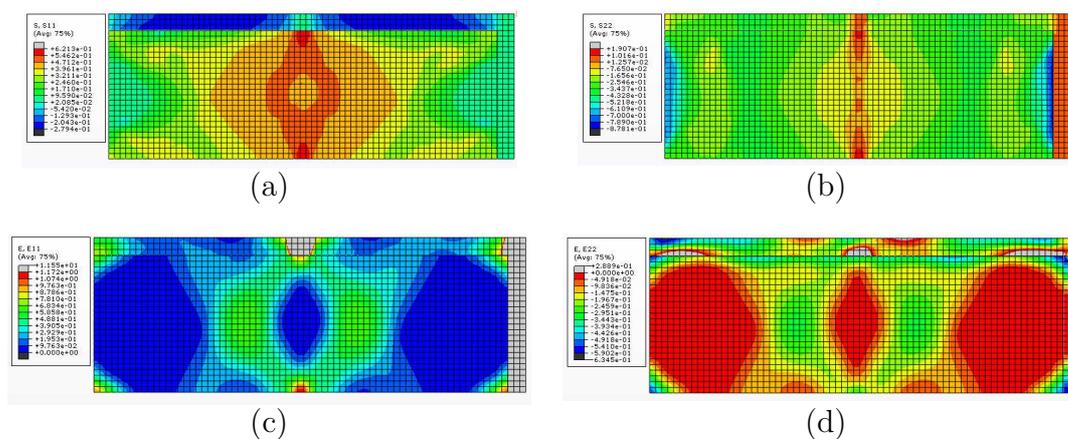


Figure 3.15 — (a) et (b) : les distributions de contraintes  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  respectivement ;  
(c) et (d) : les distributions de déformations totales  $d_{11}$  et  $d_{22}$  respectivement

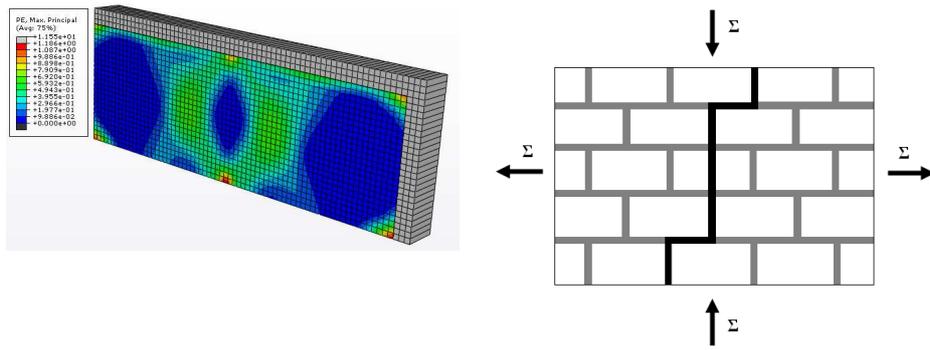


Figure 3.16 — Mode de rupture dans la cellule de base et son équivalent sur le vrai mur : essai de traction-compression

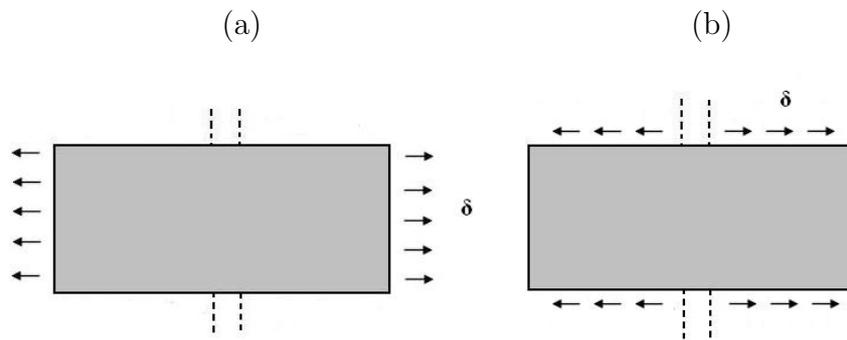


Figure 3.17 — (a) : Essai de traction directe sur une seule brique; (b) : Essai de traction-cisaillement sur une seule brique

### 3.3.2.4 Charge uni-axiale de traction dans le plan ( $\xi = -1$ )

Dans ce paragraphe, nous traiterons le cas d'une structure en maçonnerie soumise à une charge de traction uni-axiale parallèle aux joints horizontaux. Les simulations numériques 3D montrent que la plastification est localisée dans les joints d'interface avec une plastification par cisaillement aux joints horizontaux et par traction aux joints verticaux.

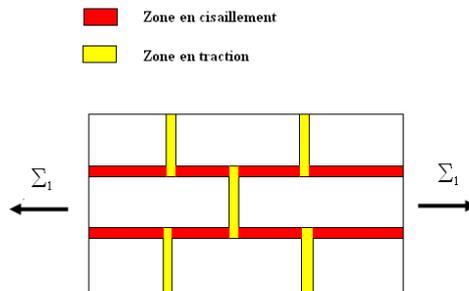
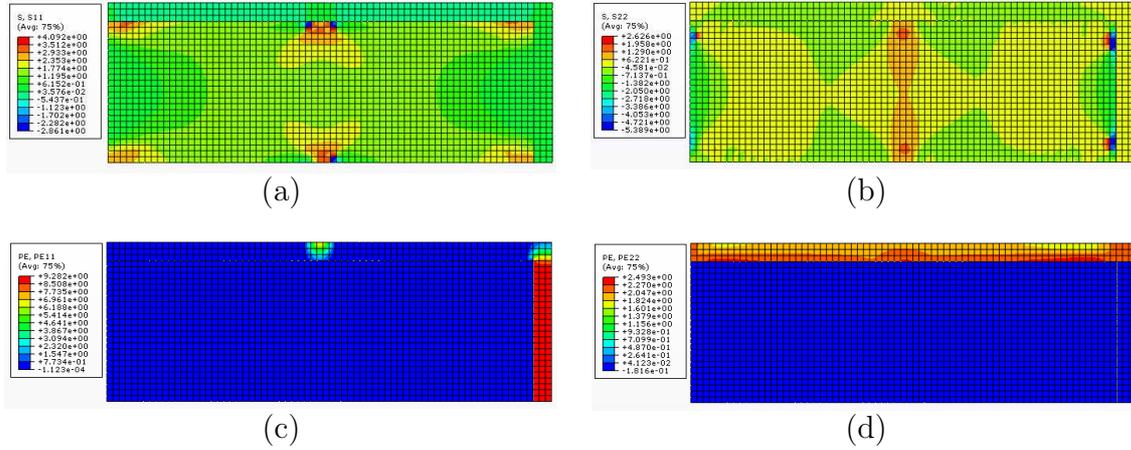
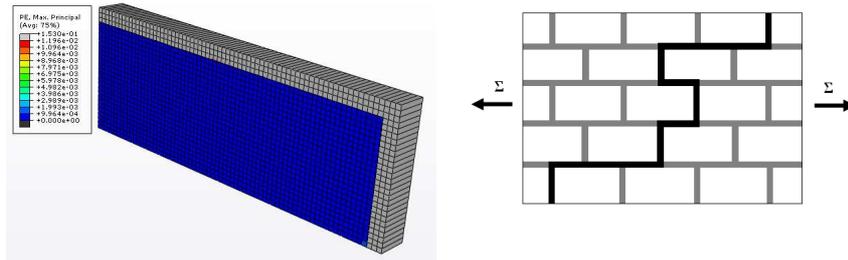


Figure 3.18 — Distribution de la charge dans un panneau en maçonnerie



**Figure 3.19** — (a) et (b) : les distributions de contraintes  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  successivement ;  
(c) et (d) : les distributions de déformations totales  $d_{11}$  et  $d_{22}$  successivement



**Figure 3.20** — Mode de rupture dans la cellule de base et son équivalent sur le vrai mur : essai de traction

### 3.3.3 Confrontation entre les résultats numériques et analytiques

Dans cette partie, nous étudions la capacité portante d'un panneau en maçonnerie sollicité dans le plan pour différentes orientations des joints horizontaux.

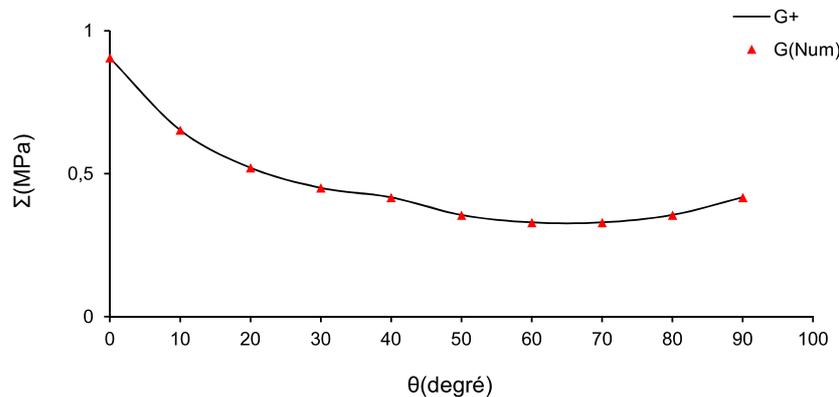
#### 3.3.3.1 Traction uni-axiale dans le plan ( $\xi = -1$ )

On note  $G^{Num}$  le convexe de résistance macroscopique trouvé par l'approche d'homogénéisation numérique 3D et  $G^+$  le convexe de résistance macroscopique déterminé par l'approche analytique expliqué dans le chapitre précédent.

La figure 3.21 représente la variation de la contrainte macroscopique de rupture en fonction de l'orientation des joints horizontaux par rapport à l'axe de chargement. Nous constatons une bonne coïncidence entre les résultats de l'approche analytique et de l'approche numérique.

Pour les tests de traction, la rupture se produit toujours au niveau des joints pour toutes les valeurs de  $\theta$ . Pour  $\theta = 0$ , la rupture des joints horizontaux se fait par cisaillement par contre les joints verticaux ont rompu par traction directe. Pour le chargement à  $\theta = 45^\circ$ , la rupture des joints a lieu par cisaillement pur dans les deux joints. Pour  $\theta = 90^\circ$ , nous avons la rupture des joints horizontaux par traction directe.

Les mécanismes de rupture trouvés par l'approche numérique sont bien capturés par l'approche analytique parce que dans cette dernière nous considérons une cinématique de rupture qui tient compte de la rupture au niveau des joints d'interface.



**Figure 3.21** — La variation de la contrainte,  $\Sigma$ , à la rupture en fonction de l'orientation des joints horizontaux

### 3.3.3.2 Charge bi-axiale de traction-compression

Cette partie reprend les charges bi-axiales présentées précédemment en ajoutant l'effet de l'orientation des joints horizontaux par rapport à l'axe de chargement sur le mode de ruine. Nous présentons par la suite les mécanismes de ruine trouvés par les simulations numériques ainsi que la comparaison entre les résultats numériques et analytiques.

La figure 3.22 montre la variation de la contrainte macroscopique de rupture en fonction de l'orientation des joints horizontaux pour le cas du chargement biaxial avec  $\xi = 0$ , c'est à dire une charge biaxiale de traction-compression uniforme avec un rapport  $\left| \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} \right| = 1$ . Pour les  $\theta$  voisinage de zéro, dans la cellule de base, la plastification a lieu au niveau du bloc. Nous constatons une concentration de contrainte qui apparaît au

niveau des joints verticaux puis elle se propageait de plus en plus dans le bloc.

L'approche analytique est une approche par l'extérieur du convexe de résistance macroscopique du mur en maçonnerie. Par conséquent, les contraintes macroscopiques trouvées par l'approche analytique forme une borne supérieur du convexe de résistance macroscopique du mur en maçonnerie.

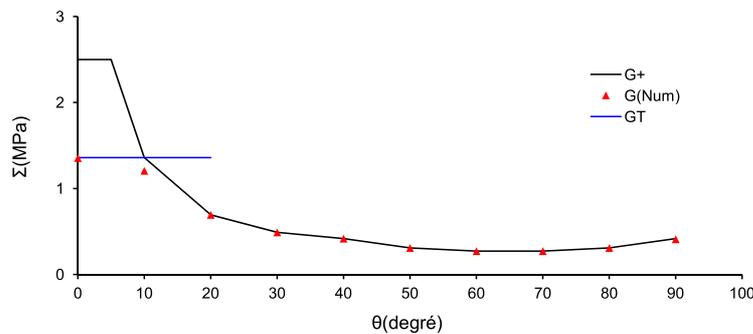
Nous avons montré précédemment que, dans ce cas de chargement, les blocs de maçonnerie ne sont pas sollicités d'une façon homogène, ce qui explique l'écart entre les deux approches pour les  $\theta$  au voisinage de zéro. Pour les  $\theta \geq 20^\circ$  la rupture est dans les joints de mortiers et nous trouvons une bonne coïncidence entre les deux approches.

La confrontation des résultats numériques et analytiques nous permet de constater que  $G^+ \cap G^T$  présente une bonne approche du convexe de résistance  $G^{Num}$  (voir figure 3.22).

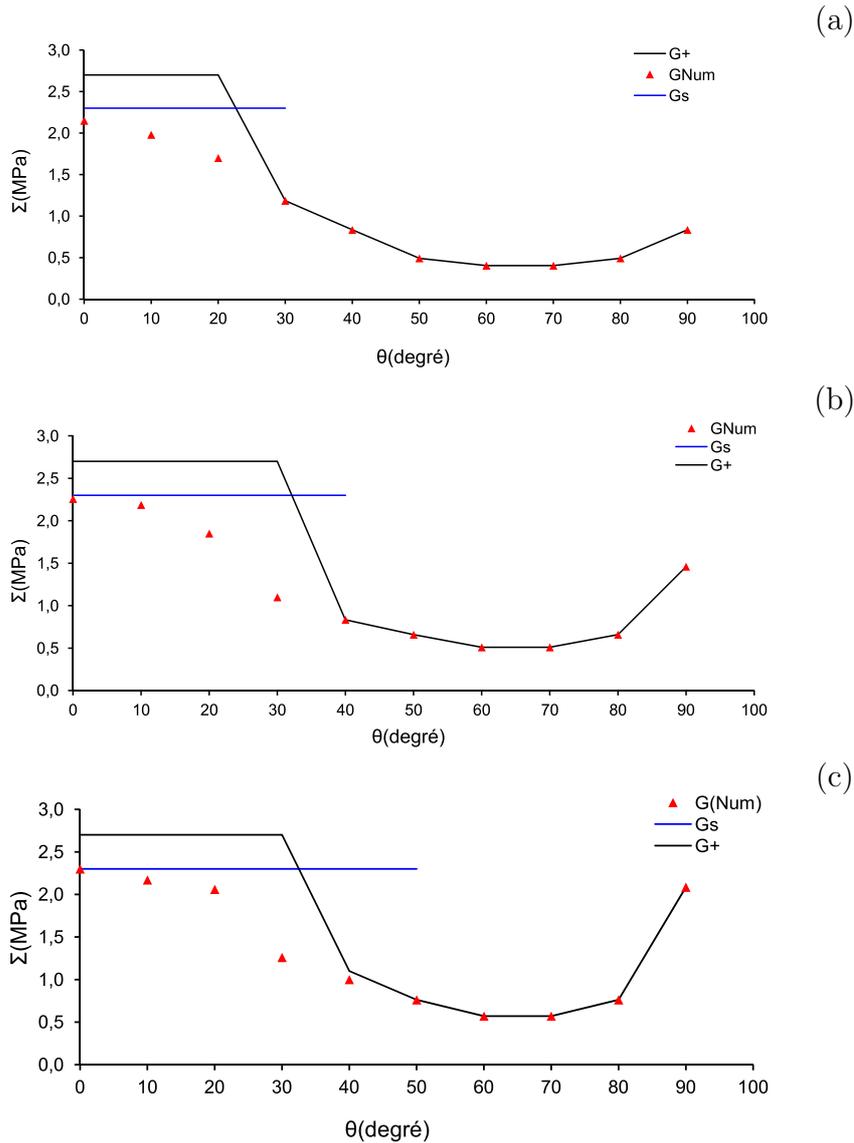
La figure 3.23 présente la variations de la capacité portante d'un panneau en maçonnerie en fonction de l'orientation des joints horizontaux par rapport aux axes de chargements pour les cas  $\xi = 0.5$ ,  $\xi = 0.714$  et  $\xi = 0.8$ .

L'analyse des résultats numériques et analytiques prouve que  $G^+ \cap G^s$  présente une bonne approche du convexe de résistance  $G^{Num}$ .

Conformément aux résultats expérimentaux l'orientation des contraintes principales par rapport aux axes du matériau et les valeurs des contraintes principales ont une influence sur le mode de rupture et les valeurs de résistance du mur testé.



**Figure 3.22** — La variation de la contrainte,  $\Sigma$ , à la rupture en fonction de l'orientation des joints horizontaux :  $\xi = 0$



**Figure 3.23** — (a), (b) et (c) sont les variations de la contrainte,  $\Sigma$ , à la rupture en fonction de l'orientation des joints horizontaux pour les cas de chargement  $\xi = 0.5$ ,  $\xi = 0.714$  et  $\xi = 0.8$  respectivement

### 3.4 Proposition d'un critère de rupture pour les murs en maçonnerie

D'après les simulations numériques, la rupture d'un panneau en maçonnerie sollicité dans son plan se produit suivant l'un des cas suivants : la rupture des joints de liaison pour les chargements qui favorisent le cisaillement où la rupture des blocs par traction ou par compression. Le critère macroscopique proposé dans cette étude tient compte du comportement d'interface ainsi que du comportement intrinsèque des blocs. Le convexe de résistance macroscopique des maçonneries est l'intersection de deux convexes de résistance :  $G^+$  et  $G^B$ .

$$G^\Sigma = G^+ \cap G^B \quad (3.23)$$

avec  $G^+ = G^\infty \cap G^b$

et

$$\Sigma \in G^\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \Sigma_{\alpha\beta}^* = \Sigma_{\alpha\beta} - \frac{c}{\tan \varphi} \delta_{\alpha\beta} \\ |\Sigma_{12}^*| \leq -\tan \varphi \Sigma_{22}^* \\ (1 + m \tan \varphi) |\Sigma_{12}^*| \leq -m \Sigma_{11}^* - \tan \varphi \Sigma_{22}^* \\ (m + \tan \varphi) |\Sigma_{12}^*| \leq -m \tan \varphi \Sigma_{11}^* - \Sigma_{22}^* \text{ pour } m \tan \varphi > 1 \end{cases}$$

$$\Sigma \in G^B \Leftrightarrow \begin{cases} \max \{0, \Sigma_{11} - \Sigma_{22}\} \leq \sqrt{\Sigma_0^2 - (2\Sigma_{12})^2} \\ \Sigma_{11} + \Sigma_{22} + \sqrt{(\Sigma_{11} - \Sigma_{22})^2 + (2\Sigma_{12})^2} \leq 2T \end{cases}$$

- ◇  $G^\infty$  est le convexe de résistance avec une résistance infinie des blocs et des joints modélisés par des interfaces,
- ◇  $G^b$  est le convexe de résistance des briques,
- ◇  $G^B$  est le convexe de résistance des briques "in-situ".

Des projections du convexe de résistance dans le plan des contraintes  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{12})$  sont présentées sur les figures ci-dessous

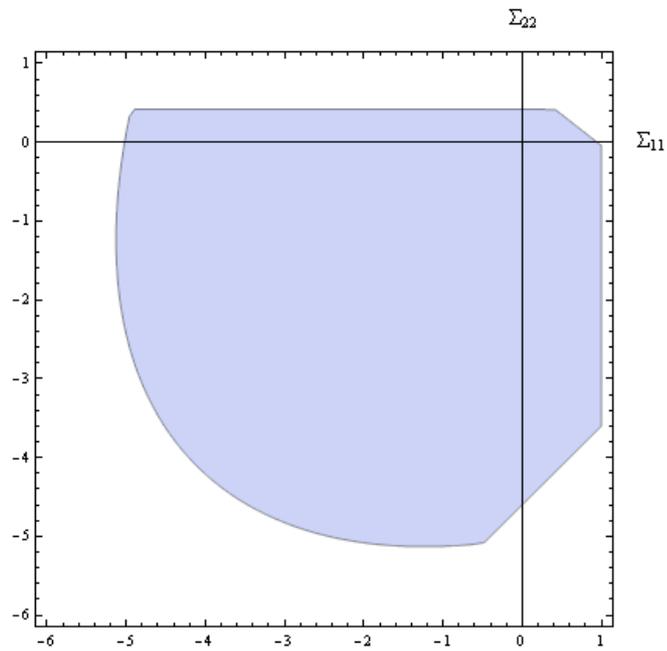


Figure 3.24 — Convexe de résistance  $G^\Sigma$  dans le plan  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$

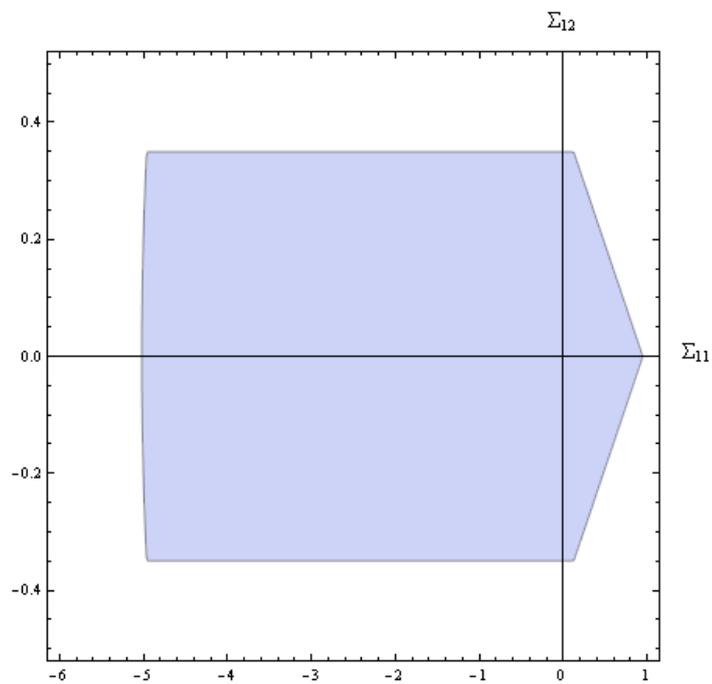
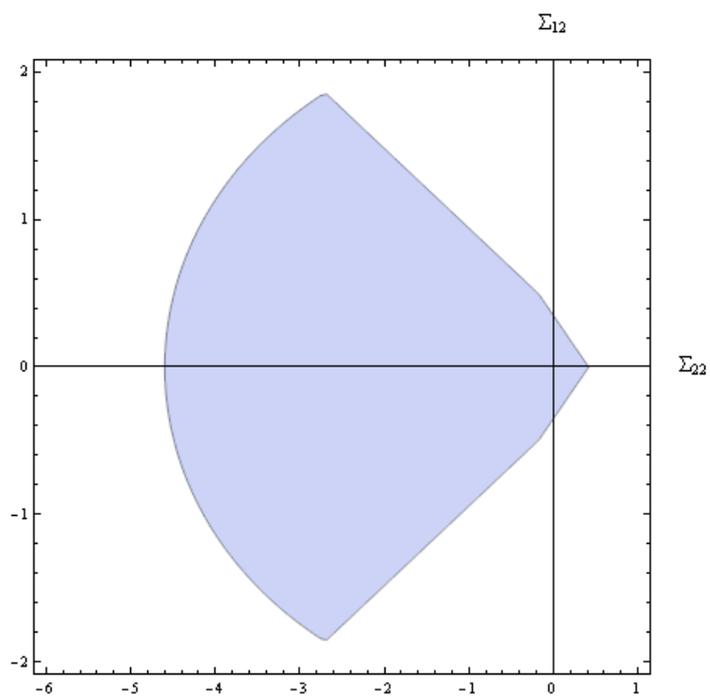
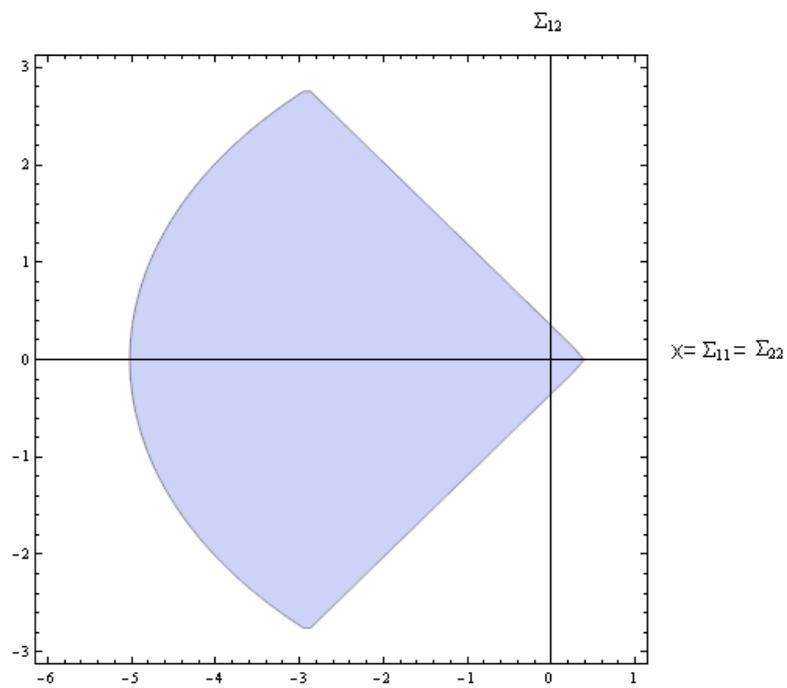


Figure 3.25 — Convexe de résistance  $G^\Sigma$  dans le plan  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{12})$



**Figure 3.26** — Convexe de résistance  $G^\Sigma$  dans le plan  $(\Sigma_{22}, \Sigma_{12})$



**Figure 3.27** — Convexe de résistance  $G^\Sigma$  dans le plan  $(X = \Sigma_{11} = \Sigma_{22}, \Sigma_{12})$

### 3.5 Validation expérimentale du critère de rupture

Pour valider le critère de rupture des murs en maçonnerie proposé ci-dessus, nous avons utilisé les résultats expérimentaux de Page (1981-1983) [71]. Notre modèle est analytique, il tient compte du comportement des joints d'interface et des caractéristiques "in-situ" des briques.

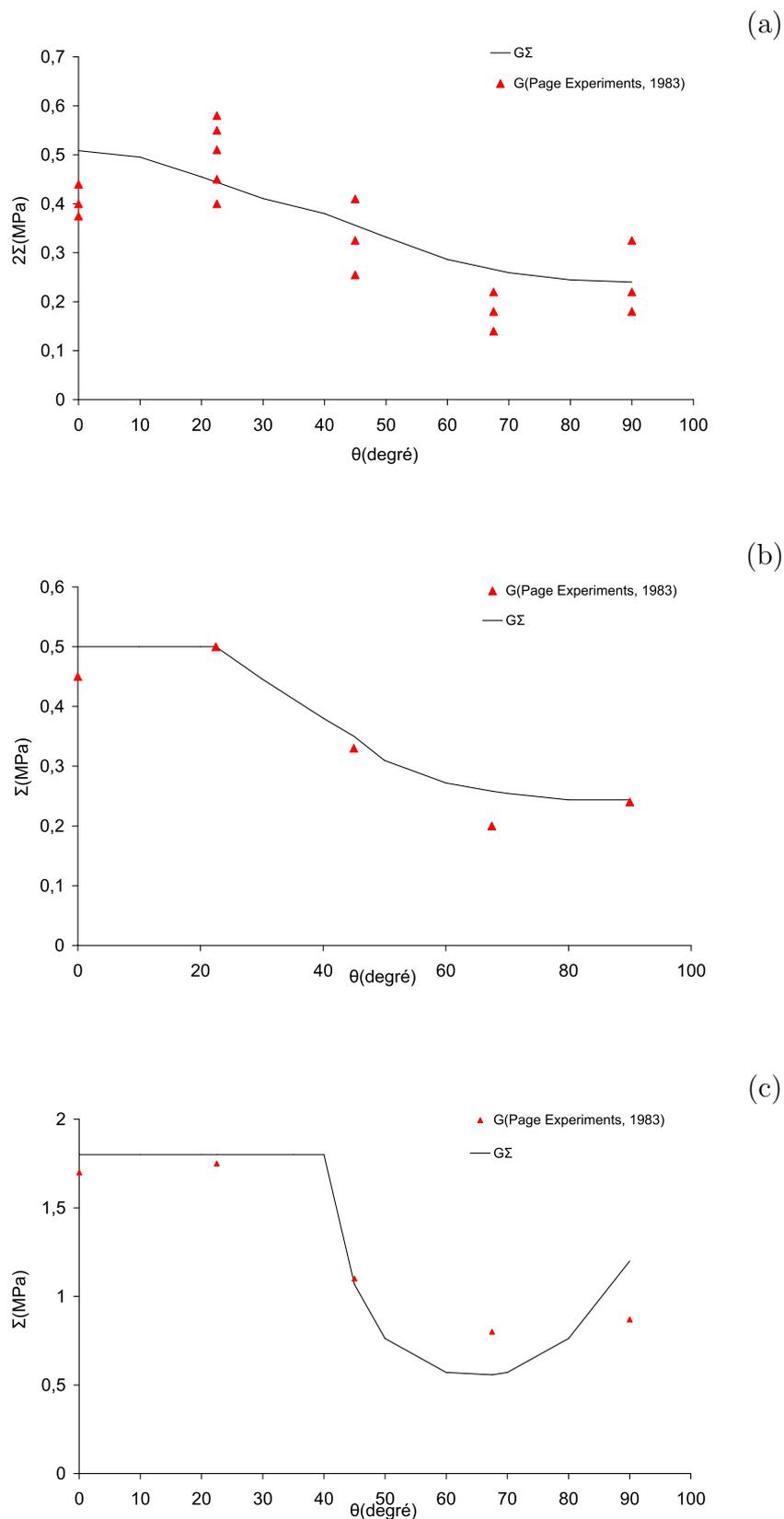
Nous avons choisi trois types de chargement qui nous permettent de détecter les différents modes de rupture rencontrés expérimentalement : un chargement de traction suivant la direction 1, un chargement de traction-compression avec un rapport de un et un chargement de traction-compression avec un rapport de neuf et tout ça pour différentes orientations des joints horizontaux. Pour mieux représenter les contraintes de rupture, nous avons utilisé les notations de [50], c'est à dire en prenant  $\Sigma_1 = \langle \sigma_1 \rangle = (1 - \xi) \Sigma$  et  $\Sigma_2 = \langle \sigma_2 \rangle = (1 + \xi) \Sigma$  avec  $\xi \in \{-1, 0, 0.8\}$ . La limite en traction "in-situ" des briques,  $T$ , est calée en se basant sur les simulations numériques faites sur Abaqus. Par contre, la limite de compression "in-situ" des briques,  $\Sigma_0$ , est calée par rapport aux résultats expérimentaux de PAGE (1983) et du CSTB.

L'identification des paramètres utilisés par le modèle est faite en se basant sur les essais de caractérisation de Page (1981-1983). Voir le tableau ci-dessous :

La cohésion $c$ (Mpa)	0.35
Angle de frottement $\varphi$	40°
Traction "in-situ" des briques $T$ (Mpa)	0.5
Compression "in-situ" des briques $\Sigma_0$ (Mpa)	3.6

**Tableau 3.4** — Paramètres de calcul

Les diagrammes suivants montrent la confrontation des résultats expérimentaux de PAGE (1983) avec le critère.



**Figure 3.28** — (a), (b) et (c) sont les variations de la capacité portante du panneau en maçonnerie en fonction de l'orientation des joints horizontaux pour les cas de chargement  $\xi = -1$ ,  $\xi = 0$  et  $\xi = 0.8$  successivement

## 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a utilisé la méthode d'homogénéisation numérique en 3D pour déterminer le critère local macroscopique des panneaux en maçonnerie sollicité dans le plan. Dans cette étude, les briques et les joints d'interface sont considérés comme des matériaux de Drucker-Prager hyperbolique. Trois modes de ruine sont constatés : la rupture dans les joints d'interface pour les sollicitations qui favorisent le cisaillement, la rupture dans les blocs par traction pour le cas de chargement bi-axial de traction-compression avec un rapport de contrainte voisinage de un et la rupture des blocs par compression pour les chargements qui favorisent la compression. Comme fruit de cette dernière étude, on a proposé un critère de rupture pour structures maçonnées qui tient compte de ces différents modes ruines rencontrés. Le modèle proposé est expérimentalement validé (Page 1981-1983). Dans le chapitre suivant, nous implémentons notre critère de rupture dans le code des éléments finis Abaqus® par l'intermédiaire d'une subroutine UMAT.



---

# Implantation du critère dans un code élément finis

Ce chapitre est consacré à l'intégration dans le code ABAQUS d'une loi élasto-plastique pour la maçonnerie issue du critère proposée dans le précédent chapitre. On adopte ainsi le cadre d'hypothèses suivant :

- Hypothèse des petites perturbations (HPP) ;
- Évolutions quasi-statiques (chargements lentement variables dans le temps permettant de négliger les effets d'inertie) ;

La première partie présente un rappel succinct des notions essentielles concernant le comportement élastoplastique dans ce cadre. Puis, on présentera l'algorithme de prédiction élastique / correction pour la résolution des problèmes d'élasto-plasticité, algorithme qu'on adaptera au critère proposé. A la fin de ce chapitre, nous validerons l'implémentation du critère sur des structures en maçonnerie.

## 4.1 Rappel sur le comportement élastoplastique

### 4.1.1 Décomposition additive des déformations

Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations (HPP), le tenseur de déformation totale,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , s'écrit sous la forme d'une partie élastique,  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ , et une plastique,  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ , comme suit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (4.1)$$

Les tenseurs  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  sont connus, respectivement, par le *tenseur de déformation élastique* et le *tenseur de déformation plastique*. Le taux de déformation équivalent

est :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (4.2)$$

avec la condition initiale à  $t = t_0$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t_0) = \boldsymbol{\varepsilon}^e(t_0) + \boldsymbol{\varepsilon}^p(t_0) \quad (4.3)$$

### 4.1.2 Potentiel "énergie libre spécifique" et la loi de comportement élastique

L'état thermodynamique du matériaux est représenté localement par un potentiel dépendant de ces variables d'état. Nous choisissons ici naturellement le potentiel "énergie libre spécifique"  $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \alpha)$  qui est fonction de la déformation totale, la déformation plastique (considérée comme variable interne) et  $\alpha$  variable interne associée au phénomène d'écrouissage. Le potentiel "énergie libre spécifique" peut s'écrire comme la somme de deux composantes : une partie due à l'évolution élastique et une autre à l'évolution plastique.

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \alpha) = \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \psi^p(\alpha) = \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + \psi^p(\alpha) \quad (4.4)$$

L'inégalité de Clausius-Duhem devient alors, en utilisant la partition en taux de déformations.

$$\left( \boldsymbol{\sigma} - \bar{\rho} \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) : \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^p - A \cdot \dot{\alpha} \geq 0 \quad (4.5)$$

avec  $\mathbf{A} \equiv \bar{\rho} \frac{\partial \psi^p}{\partial \alpha}$  est la force thermodynamique d'écrouissage et  $-\boldsymbol{\sigma}$  est la force thermodynamique associée à la déformation plastique. Pour une transformation élastique réversible isotherme, sans modification des variables interne, on aboutit à l'égalité suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (4.6)$$

Compte-tenu des relations précédentes, inégalité de Clausius-Duhem s'écrit sous la forme de dissipation  $\Upsilon^p$  positif ou nul :

$$\Upsilon^p(\boldsymbol{\sigma}, A; \boldsymbol{\varepsilon}^p, \dot{\alpha}) \equiv \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \mathbf{A} \cdot \dot{\alpha} \quad (4.7)$$

Ce chapitre traite le cas d'un matériaux de comportement élastique linéaire et

isotrope. Dans ce cas, la contribution élastique de l'énergie libre est :

$$\bar{\rho}\psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e = G\boldsymbol{\varepsilon}_d^e : \boldsymbol{\varepsilon}_d^e + \frac{1}{2}K(\boldsymbol{\varepsilon}_v^e)^2 \quad (4.8)$$

avec  $\mathbf{C}^e$  est un tenseur d'ordre quatre appelé tenseur des rigidités ou tenseur d'élasticité et  $G$  et  $K$  sont respectivement le module de cisaillement et le module d'élasticité à la compression isostatique. Le tenseur  $\boldsymbol{\varepsilon}_d^e$  est la partie déviatorique du tenseur de déformation élastique et  $\boldsymbol{\varepsilon}_v^e \equiv tr[\boldsymbol{\varepsilon}^e]$  est la partie sphérique du tenseur de déformation élastique. La loi de comportement élastique est donnée par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e = 2G\boldsymbol{\varepsilon}_d^e + K\boldsymbol{\varepsilon}_v^e I \quad (4.9)$$

### 4.1.3 Fonction de charge et critère de plasticité

#### 4.1.3.1 Fonction de charge dans l'état initial

Il est d'usage, pour définir mathématiquement le domaine d'élasticité initial  $C$ , d'introduire une fonction scalaire  $f$  de  $\boldsymbol{\sigma}$ , telle que, dans l'espace  $\mathbb{R}^6$  des contraintes :

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{\sigma}) < 0 & \text{corresponde à l'intérieur du domaine,} \\ f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 & \text{à sa frontière,} \\ f(\boldsymbol{\sigma}) > 0 & \text{à l'extérieur,} \end{cases} \quad (4.10)$$

La fonction  $f$  est appelée *fonction de charge* du matériau dans l'état initial. On désigne aussi couramment par le critère de limite d'élasticité, ou *critère de plasticité* la condition  $f=0$ .

Toutefois, dans la pratique, la fonction  $f$  elle-même est souvent appelée " critère de plasticité " sans risque de confusion.

#### 4.1.3.2 Fonction de charge et écrouissage

Pour le matériau écrouissable, le domaine d'élasticité actuel dépend de l'état d'écrouissage de l'élément de matière, qui sera désormais représenté symboliquement par  $\mathbf{A}$ .

En toute généralité l'état d'écrouissage  $\mathbf{A}$  est déterminé par l'histoire de charge du matériau. En l'absence d'effets de viscosité et de vieillissement, le trajet de charge suffit à cette détermination, indépendamment de l'histoire de parcours. De plus, la définition d'un matériau écrouissable montre que seule la *séquence des arcs de trajet de charge*

*croissants* est à retenir. C'est ainsi que  $\mathbf{A}$  représente d'une manière générale la séquence des arcs de trajet de charge croissants (figure 4.1).

Pour définir le domaine d'élasticité actuel noté  $C(\mathbf{A})$  on introduit une fonction scalaire  $f$  de  $\boldsymbol{\sigma}$  et de  $\mathbf{A}$ , *fonction de charge dans l'état actuel*, telle que dans l'espace  $\mathbb{R}^6$  des contraintes :

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) < 0 & \text{correspondre à l'intérieur de } C(\mathbf{A}), \\ f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0 & \text{à la frontière de } C(\mathbf{A}), \\ f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) > 0 & \text{à l'extérieur de } C(\mathbf{A}), \end{cases} \quad (4.11)$$

Lorsque le point de charge  $\boldsymbol{\sigma}$  décrit un arc de trajet de charge croissant, comme expliqué au [84](Salençon 2002), il entraîne avec lui le domaine  $C(\mathbf{A})$  en même temps que celui-ci se déforme (figure ). Dans le même temps il y a évolution de la déformation plastique.

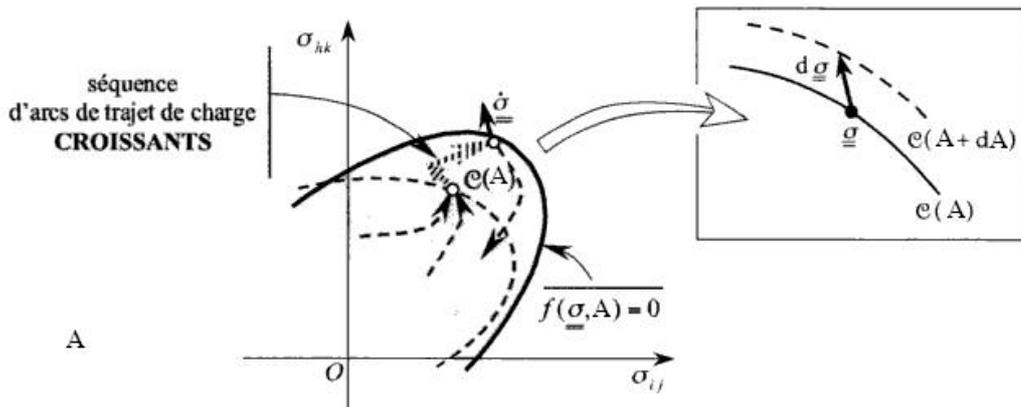


Figure 4.1 — *Écrouissage : entraîne de  $C(\mathbf{A})$  par  $\boldsymbol{\sigma}$  dans  $\mathbb{R}^6$*

La description de l'évolution de l'état d'écrouissage  $\mathbf{A}$  en suivant le point de charge  $\boldsymbol{\sigma}$  sur les arcs de trajet de charge croissants est l'objet de la *règle d'écrouissage*. Celle-ci s'exprime sous la forme d'une relation entre  $\dot{\mathbf{A}}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  lorsque  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  est dirigé vers l'extérieur de  $C(\mathbf{A})$  au point  $\boldsymbol{\sigma}$ , c'est à dire lorsque :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0 \quad (4.12)$$

et

$$\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}) = \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} > 0 \quad (4.13)$$

L'expression de la fonction de charge (4.11) et celle de la règle d'écrouissage sous (4.12) et (4.13) doivent être mathématiquement compatibles : sur l'arc de trajet de

charge croissant, le point de charge  $\boldsymbol{\sigma}$  demeure, à chaque instant, à la frontière du domaine d'élasticité actuel (figure 4.1). En posant

$$d\boldsymbol{\sigma} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} dt, \quad d\mathbf{A} = \dot{\mathbf{A}} dt, \quad dt > 0, \quad (4.14)$$

$\boldsymbol{\sigma}$  est sur la frontière de  $C(\mathbf{A})$  et  $\boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}$  est sur la frontière de  $C(\mathbf{A} + d\mathbf{A})$ . On a ainsi à la fois :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0 \quad (4.15)$$

$$\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}) = \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} = 0 \quad (4.16)$$

avec

$$\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}) > 0 \quad (4.17)$$

#### 4.1.4 Lois d'écoulement généralisées

La caractérisation complète du modèle général de plasticité exige la définition des lois d'évolution pour les variables internes, c'est à dire les variables liées aux phénomènes dissipatifs. Dans ce cas, les variables internes sont le tenseur de déformation plastique et la variable d'érouissage  $\alpha$ . Les lois d'écoulement généralisées sont définies par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p &= \dot{\gamma} N(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \\ \dot{\alpha} &= \dot{\gamma} H(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

avec

$$\begin{aligned} N(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) &\equiv \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ H(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) &\equiv -\frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} \end{aligned} \quad (4.19)$$

et

$$f \leq 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad f \dot{\gamma} = 0, \quad (4.20)$$

#### 4.1.5 Résumé : modèle élastoplasique généralisé

1. Décomposition additive des déformations

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

or

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$$

et

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t_0) = \boldsymbol{\varepsilon}^e(t_0) + \boldsymbol{\varepsilon}^p(t_0)$$

2. Energie libre

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \alpha) = \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \psi^p(\alpha) = \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + \psi^p(\alpha)$$

avec  $\alpha$  est la variable d'écouissage,

3. Définition de la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  et des variables d'écouissage  $\mathbf{A}$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}$$

$$\mathbf{A} \equiv \bar{\rho} \frac{\partial \psi^p}{\partial \alpha}$$

4. Fonction de charge :

$$f = f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$$

5. Lois d'écoulement généralisées :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} N(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$$

$$\dot{\alpha} = \dot{\gamma} H(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$$

6. Critère de charge/décharge :

$$f \leq 0, \dot{\gamma} \geq 0, f \dot{\gamma} = 0,$$

### 4.1.6 Opérateur élastoplastique tangent

Si l'évolution est purement élastique, la matrice tangente est égale à la matrice de rigidité élastique  $\mathbf{C}^e$ .

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.21)$$

Dans le domaine d'évolution élastoplastique, la matrice tangente est décrite par l'égalité suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.22)$$

avec

$$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C}^e - \frac{(\mathbf{C}^e : \mathbf{N}) \otimes (\mathbf{C}^e : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}})}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^e : \mathbf{N} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}} \cdot \bar{\rho} \frac{\partial^2 \psi^p}{\partial \alpha^2} \cdot \mathbf{H}} \quad (4.23)$$

## 4.2 Algorithme d'intégration numérique

### 4.2.1 La problématique

On considère un point  $P$  d'un milieu continu occupant un domaine  $\Omega$  de comportement élastoplastique local. Supposant que à  $t = t_0$  la déformation élastique,  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ , la déformation plastique,  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ , et les variables d'écrouissages  $\alpha$  sont connues au point  $P$ . Le comportement du domaine  $\Omega$  est connu dans l'intervalle du temps  $[t_0, T]$  en connaissant l'*histoire* du tenseur de déformation totale  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  entre  $t_0$  et  $T$ .

Le problème à résoudre est, en connaissant les valeurs à  $t = t_0$  de la déformation élastique, les variables d'écrouissages et le multiplicateur de plasticité,  $\dot{\gamma}$ , et l'histoire de la déformation totale dans l'intervalle du temps  $[t_0, T]$ , de déterminer les fonctions  $\boldsymbol{\varepsilon}^e(t)$ ,  $\alpha(t)$  et  $\dot{\gamma}(t)$  qui vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e(t) &= \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) - \dot{\gamma}(t) \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{A}(t)) \\ \dot{\alpha}(t) &= \dot{\gamma}(t) \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{A}(t)) \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\dot{\gamma}(t) \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{A}(t)) \leq 0, \quad \dot{\gamma}(t) f(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{A}(t)) = 0 \quad (4.25)$$

pour  $t \in [t_0, T]$ , et

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \Big|_t, \quad \mathbf{A}(t) = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \Big|_t. \quad (4.26)$$

### 4.2.2 Problème incrémental

Nous utilisons le schéma implicite d'Euler pour discrétiser les relations (4.24) et (4.25). Pour un intervalle du temps générique  $[t_n, t_{n+1}]$ , les valeurs de la déformation élastique,  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^e$  et les variables internes d'écrouissage  $\alpha_n$  à l'instant  $t_n$  sont connues ainsi que l'incrément de la déformation totale  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ . Le problème incrémental est de résoudre les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \gamma \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n + \Delta \gamma \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) \end{aligned} \quad (4.27)$$

avec  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$ ,  $\alpha_{n+1}$  et  $\Delta\gamma$  sont inconnues et vérifient les contraintes suivantes :

$$\Delta\gamma \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) \leq 0, \quad \Delta\gamma f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) = 0 \quad (4.28)$$

avec

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \Big|_{n+1}, \quad \mathbf{A}_{n+1} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \Big|_{n+1}. \quad (4.29)$$

Dans les relations précédentes nous adaptons la notation  $\Delta(\cdot) = (\cdot)_{n+1} - (\cdot)_n$  où  $(\cdot)_n$  et  $(\cdot)_{n+1}$  représentent les valeurs de  $(\cdot)$  à  $t_n$  et  $t_{n+1}$  respectivement. L'incrément  $\Delta\gamma$  est *l'incrément du multiplicateur plastique*. Une fois  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$  solution est déterminé, la contrainte plastique à  $t_{n+1}$  est calculée par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (4.30)$$

à ce stade toute les variables sont connues dans l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$ .

l'algorithme de la résolution du problème incrémental contient les deux étapes suivantes :

1. Incrément du multiplicateur plastique nul,

$$\Delta\gamma = 0 \quad (4.31)$$

dans ce cas, on n'a pas d'écoulement plastique, le comportement est purement élastique dans l'intervalle du temps  $[t_n, t_{n+1}]$ . La condition (4.28)<sub>3</sub> est vérifiée automatiquement et  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$  et  $\alpha_{n+1}$  sont déterminées par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n \end{aligned} \quad (4.32)$$

et, en ajoutent, la condition suivante :

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) \leq 0 \quad (4.33)$$

$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  et  $\mathbf{A}_{n+1}$  sont fonctions de  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$  et  $\mathbf{A}_{n+1}$  et sont définies dans la relation (4.29).

2. Incrément du multiplicateur plastique strictement positif,

$$\Delta\gamma > 0 \quad (4.34)$$

Dans ce cas,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$ ,  $\alpha_{n+1}$  et  $\Delta\gamma$  satisfaisants

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\gamma\mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n + \Delta\gamma\mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1})\end{aligned}\quad (4.35)$$

et la combinaison des deux relations (4.28)<sub>2</sub> et (4.28)<sub>3</sub> se résultent par la condition suivante

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) = 0 \quad (4.36)$$

### 4.2.3 Algorithme de prédiction élastique/correction plastique

La nature du problème ci-dessus motive la mise en place d'un algorithme qui contient deux étapes dans lequel les deux ensembles d'équations possibles sont employés de manière séquentielle et la solution finale est unique. La démarche suivie est la suivante :

#### 1. Prédiction élastique

Premièrement, supposant que la première des deux situations ci-dessus ( $\Delta\gamma = 0$ ) se produite ; c'est-à-dire, nous supposons que l'étape  $[t_n, t_{n+1}]$  est élastique. La solution donnée par (4.32), qui n'est pas nécessairement la solution réelle du problème, s'appellera la solution élastique test, et sera notée comme suit

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ \alpha_{n+1}^{trial} &= \alpha_n\end{aligned}\quad (4.37)$$

La contrainte et la force d'écroissance liées à ces déformations sont appelées respectivement, la contrainte élastique test et la force d'écroissance élastique test, et sont données par :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \bar{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^e} \Big|_{n+1}^{trial}, \quad \mathbf{A}_{n+1}^{trial} = \bar{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} \Big|_{n+1}^{trial} \quad (4.38)$$

Les variables ci-dessus s'appellent ensemble *l'état élastique test*. Notez maintenant que, pour être la solution réelle, l'état élastique test doit satisfaire (4.33). Nous procédons alors comme suit. Si

$$f^{trial} \equiv f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}, \mathbf{A}_{n+1}^{trial}) \leq 0, \quad (4.39)$$

c'est-à-dire, si l'état élastique test se trouve dans le domaine élastique ou sur la surface de charge, on l'accepte comme solution du problème. Dans ce cas, nous

mettons à jour la contrainte à  $t_{n+1}$

$$(\cdot)_{n+1} := (\cdot)_{n+1}^{trial} \quad (4.40)$$

et l'algorithme est terminé. Sinon, l'état élastique test n'est pas palstiquement admissible et la solution du problème nécessite une correction plastique.

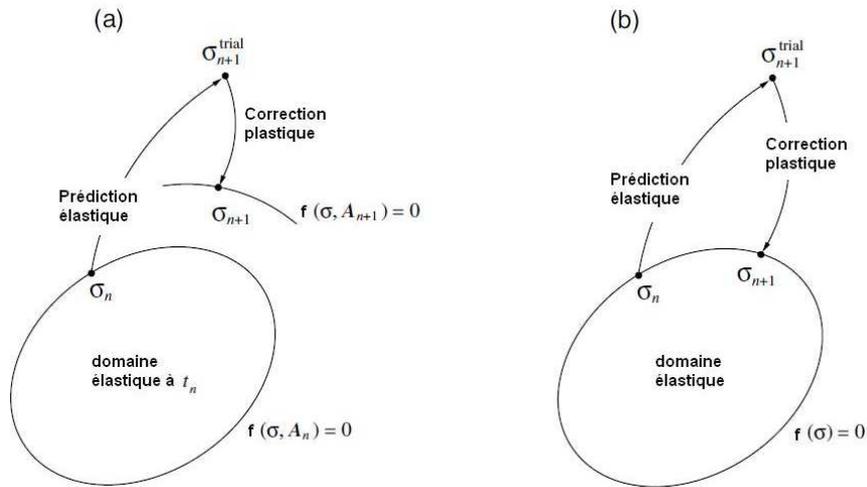
## 2. Correction plastique : algorithme de retour radial

La correction plastique consiste à déterminer  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$ ,  $\alpha_{n+1}$  et  $\Delta\gamma$  solution du système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etrial} - \Delta\gamma \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_{n+1}^{trial} + \Delta\gamma \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) \\ f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) &= 0, \end{aligned} \quad (4.41)$$

en respectant la contrainte suivante :

$$\Delta\gamma > 0. \quad (4.42)$$



**Figure 4.2** — Interprétation géométrique du schéma général de retour radial : (a) écouvissage ; et (b) élastoplastique parfait [30].

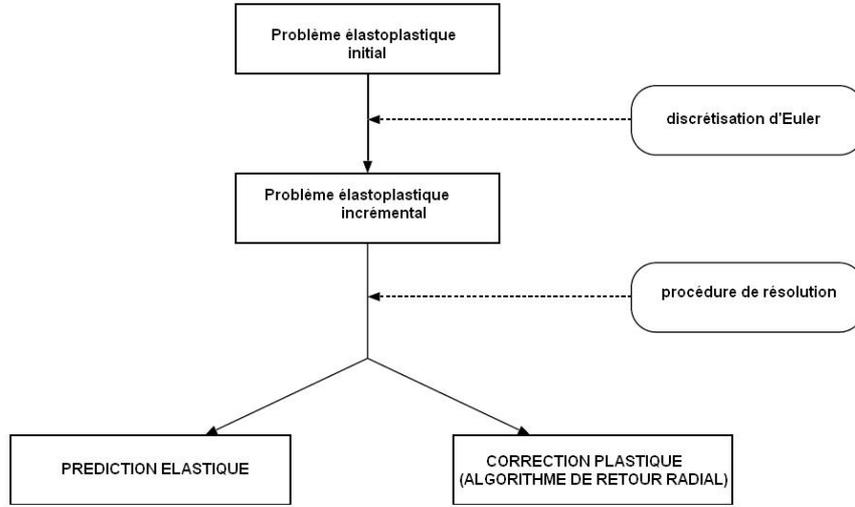


Figure 4.3 — Diagramme de résolution d'un problème élastoplastique

#### 4.2.4 Algorithme de retour radial

- (i) Prédiction élastique.  $\Delta\epsilon$  est donnée ainsi que les variables d'état à  $t_n$ , évaluation de l'état élastique test.

$$\begin{aligned}\epsilon_{n+1}^{trial} &= \epsilon_n^e + \Delta\epsilon \\ \alpha_{n+1}^{trial} &= \alpha_n \\ \sigma_{n+1}^{trial} &= \bar{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\epsilon^e} \Big|_{n+1}^{trial}, \quad \mathbf{A}_{n+1}^{trial} = \bar{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} \Big|_{n+1}^{trial}\end{aligned}$$

- (ii) Vérifier l'admissibilité plastique

SI

$$f(\sigma_{n+1}^{trial}, \mathbf{A}_{n+1}^{trial}) \leq 0,$$

ALORS fait

$$(\cdot)_{n+1} := (\cdot)_{n+1}^{trial}$$

et SORTIR

- (iii) Retour radial. résolution du système

$$\begin{cases} \epsilon_{n+1}^e - \epsilon_{n+1}^{trial} + \Delta\gamma \mathbf{N}(\sigma_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) \\ \alpha_{n+1} - \alpha_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma \mathbf{H}(\sigma_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) \\ f(\sigma_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

Pour  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$ ,  $\alpha_{n+1}$  et  $\Delta\gamma$ , avec

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \Big|_{n+1}, \quad \mathbf{A}_{n+1} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \Big|_{n+1}.$$

(iv) SORTIR

## 4.3 Implantation du modèle dans ABAQUS

La plupart des codes éléments finis tel que ABAQUS disposent d'une famille de lois de comportement standards. Elles couvrent un large spectre de comportement avec des mécanismes physiques tel que l'élasticité, la viscoélasticité, la plasticité, la viscoplasticité, l'endommagement, etc. Par contre cette famille n'est pas exhaustive et elle ne présente pas par exemple de lois représentatives du comportement des structures complexes comme les murs en maçonnerie. Afin de compléter les lois existantes la plupart des codes proposent une routine utilisateur par le biais de laquelle il est possible d'introduire une loi de comportement spécifique. Dans le cas d'ABAQUS, il s'agit de la routine UMAT. Pour toute la suite nous considérons le cas d'un comportement élastoplastique parfait.

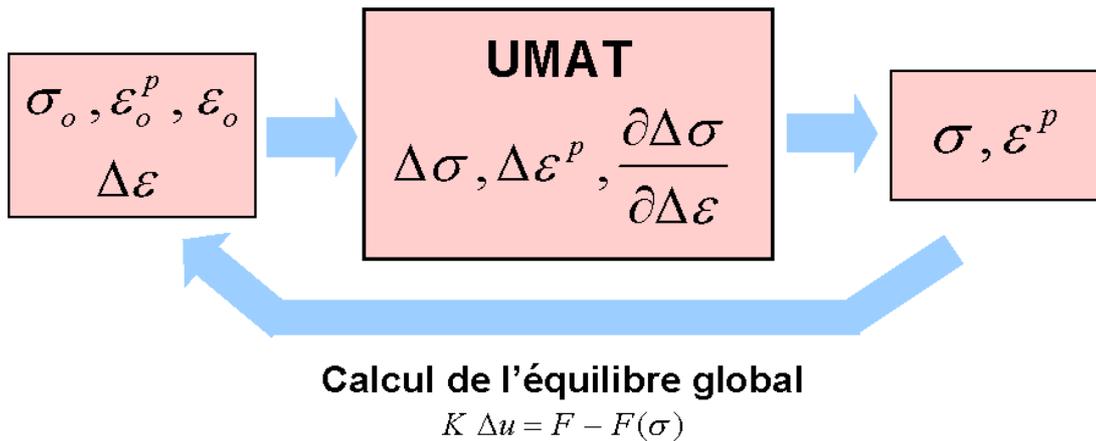
### 4.3.1 Routine UMAT

La routine UMAT permet de programmer la loi de comportement mécanique du matériau étudié, c'est-à-dire de donner les expressions du tenseur de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  (STRESS), de diverses variables internes (SDV) (par exemple le tenseur des déformations plastiques, le tenseur des déformations visqueuses ou encore une variable d'endommagement, etc.) et la matrice jacobienne cohérente (appelée aussi matrice tangente)  $\frac{\partial \Delta \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$  (DDSDDE). Abaqus se charge de calculer l'équilibre global et fournit, en entrée de la UMAT, les déformations totales et les contraintes en début d'incrément  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  (STRAN),  $\boldsymbol{\sigma}_0$  (STRESS) et l'incrément de déformations  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  (DSTRAN).

Dans le cas de l'utilisation d'une UMAT lors d'un calcul implicite, toutes les valeurs des contraintes et des variables internes au pas  $n+1$  sont évaluées à partir de leur valeur au pas précédent  $n$  en chaque point d'intégration de chaque élément. Les tableaux et les paramètres importants lors de la création d'une UMAT sont présentés succinctement :

Tableaux en entrée, mis à jour au cours du calcul et fournis en sortie :

- « Stress » : ce tableau contient les valeurs des contraintes au pas précédent. Ce tableau doit être mis à jour à la fin du pas courant. Si des conditions initiales en terme de contraintes sont introduites, elles sont stockées dans ce tableau. Les



*Figure 4.4* — Entrées et sorties de la UMAT

valeurs entrées sont les contraintes vraies et la taille du tableau dépend de la valeur de « Ntens ». Stress (j) est la jième composante.

- « Statev » : ce tableau regroupe les variables d'état utiles à l'obtention de la solution. Elles sont données au début de l'incrément et peuvent être mises à jour à l'aide de la subroutine pour être de nouveau stockées dans le tableau. Les composantes des déformations plastiques  $\epsilon^p$  sont stockées dans ce tableau.

Variables fournies en entrée et ne pouvant être changées :

- « Ntens » : cette variable définit la taille des tableaux contenant les contraintes et les déformations. Elle peut être assimilée à la somme des composantes directes « Ndir » et indirectes « Nshr » d'un tenseur symétrique. Dans le cas 3D, « Ntens » = 6. C'est la valeur de ce paramètre qui détermine si un calcul est réalisé en 3D ou en 2D contraintes planes ou déformations planes. L'UMAT développée peut s'appliquer dans ces trois cas.
- « Nstatev » : cette variable définit la taille du tableau contenant les variables internes et tous les paramètres utiles à l'écriture des lois de comportement.
- « Stran » : ce tableau contient les valeurs des déformations au pas précédent. Il est très important de préciser que ce tableau ne doit pas être mis à jour. C'est une donnée en entrée seulement.
- « Dstran » : ce tableau regroupe les incréments de déformation. La taille du tableau dépend de la valeur de « Ntens ».

- « Nprops » : ce paramètre correspond à la taille du tableau contenant les propriétés mécaniques du matériau.
- « Props » : les propriétés mécaniques du matériau sont définies dans ce tableau.

### 4.3.2 Etat de contrainte et matrice tangente

Les états de déformation et de contrainte gérés par le logiciel ABAQUS sont stockés sous forme vectorielle. Dans le cas des contraintes planes (les éléments S3 et S4R sont formulés en contraintes planes), les composantes de ceux-ci sont données comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma} \mapsto \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon} \mapsto \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.43)$$

Consécutivement, dans toute la théorie relative à l'implémentation, le formalisme vectoriel sera utilisé et l'ordre des composantes sera respecté.

Le critère macroscopique des murs maçonnés en contraintes planes s'écrit :

$$\begin{cases} f^{(1)} = \sigma_{12} + \tan \varphi^J \sigma_{22} - c^J \\ f^{(2)} = -\sigma_{12} + \tan \varphi^J \sigma_{22} - c^J \\ f^{(3)} = (1 + m \tan \varphi^J) \sigma_{12} + m\sigma_{11} + \tan \varphi^J \sigma_{22} - c^J(m/\tan \varphi^J + 1) \\ f^{(4)} = -(1 + m \tan \varphi^J) \sigma_{12} + m\sigma_{11} + \tan \varphi^J \sigma_{22} - c^J(m/\tan \varphi^J + 1) \\ f^{(5)} = \text{MAX}(0, \sigma_{11} - \sigma_{22}) - \sqrt{(\Sigma_0)^2 - (2\sigma_{12})^2} \\ f^{(6)} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (2\sigma_{12})^2} - 2T \end{cases} \quad (4.44)$$

La loi de normalité permet d'exprimer l'incrément de déformation plastique en fonction du multiplicateur plastique  $\lambda$  :

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^P = \sum_{i=1}^6 \dot{\gamma} \frac{\partial f_i(\Delta \boldsymbol{\sigma})}{\Delta \boldsymbol{\sigma}} \quad (4.45)$$

La règle de normalité ou les conditions supplémentaires de Kuhn-Tucker.

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad f_i(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0, \quad \dot{\gamma} f_i(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (4.46)$$

La vitesse de déformation plastique est nulle lorsque les contraintes sont dans le domaine d'élasticité ( $f_i(\boldsymbol{\sigma}) < 0$ ). Lorsqu'elles sont sur le seuil de plasticité ( $f_i(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ ), la vitesse de déformation plastique est normale extérieure au domaine de plasticité. Le *multiplieur plastique*  $\gamma$  est un scalaire *a priori* indéterminé, il constitue donc une des inconnues introduites par le modèle de comportement. La condition de complémentarité  $f_i(\boldsymbol{\sigma}) = 0$  sert à exprimer le fait que la déformation plastique n'est susceptible d'évoluer qu'à partir d'une situation telle que l'état de contraintes est sur le seuil de plasticité.

L'incrément de déformation  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  se décompose en une partie élastique  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e$  et une partie plastique  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$  telle que :

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (4.47)$$

### 4.3.3 Algorithme de la UMAT

Pour chaque incrément d'équilibre  $t_n$  de la procédure de calcul d'ABAQUS et pour chaque point d'intégration de Gauss du maillage, ABAQUS fournit, par l'intermédiaire de l'UMAT, le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}(t_n)$ , le tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}(t_n)$  et une estimation de l'incrément de déformation  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(t_n)$ . Dans la routine toutes ces quatre valeurs vont être utilisées pour déterminer le tenseur des contraintes de cauchy  $\boldsymbol{\sigma}(t_{n+1})$  à  $(t + \Delta t)$  et la matrice tangente  $\frac{\partial\Delta\boldsymbol{\sigma}(t_{n+1})}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}(t_{n+1})}$

#### Step 1 : le prédicteur élastique

En entrée, nous avons  $\boldsymbol{\sigma}(t_n)$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}(t_n)$  et l'incrément de déformation totale  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(t_n)$ . l'incrément est supposé élastique, impliquant que toutes les variables internes à l'instant (n+1) sont égales à celles à l'instant (n) tel que :

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n &= \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^p \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n \end{aligned} \quad (4.48)$$

et on a :

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (4.49)$$

Les maçonneries sont des matériaux orthotropes, donc, la matrice de rigidité dans le repère d'orthotropie aura la forme suivante :

$$C^e = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}$$

Les coefficients de la matrice de rigidité dépendent des propriétés élastiques des blocs ( $\lambda'_b, \mu_b$ ) et des joints d'interface ( $k_n, k_t$ ) ainsi que les dimensions des blocs ( $a, b$ ) [18] et [19].

avec

$$C_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_1}{1 - \frac{E_2}{E_1}\nu_{12}^2}$$

$$C_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_2}{1 - \frac{E_2}{E_1}\nu_{12}^2}$$

$$C_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \nu_{12}C_{22}$$

$$C_{66} = G$$

et

$$\frac{1}{E_1} = \frac{4a}{4abk_n + b^2k_t} + \frac{1}{4\mu_b} + \frac{1}{4(\lambda'_b + \mu_b)}$$

$$\frac{1}{E_2} = \frac{1}{ak_n} + \frac{1}{4\mu_b} + \frac{1}{4(\lambda'_b + \mu_b)}$$

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{ak_t} + \frac{4a}{b^2k_n + 4abk_t} + \frac{1}{\mu_b}$$

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\lambda'_b}{4\mu_b(\lambda'_b + \mu_b)}$$

on a considéré ici que  $\lambda'_b = \frac{2\lambda_b\mu_b}{\lambda_b + 2\mu_b}$

A partir de ces valeurs,  $\sigma_{n+1}^{trial}$  est évaluée à l'aide de (4.49) :

$$\sigma_{n+1}^{trial} = \sigma_n + C^e \Delta \varepsilon_n \quad (4.50)$$

Puisque  $\boldsymbol{\sigma}$  est connu à l'incrément  $(n+1)$ , les fonctions seuils de notre critère de rupture  $f_{n+1}^{i-trial}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial})$  peuvent être calculées. Dans la UMAT, nous avons normalisé le critère par rapport à la cohésion des blocs de maçonnerie,  $c^b$ . La fonction seuil du critère de compression des blocs,  $f_{n+1}^5$ , est prise symétrique par rapport aux contraintes  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{n+1}^{(1)-trial} = \frac{1}{c^b} \left( \sigma_{12}^{(n+1)} + \tan \varphi^J \sigma_{22}^{(n+1)} - c^J \right) \\ f_{n+1}^{(2)-trial} = \frac{1}{c^b} \left( -\sigma_{12}^{(n+1)} + \tan \varphi^J \sigma_{22}^{(n+1)} - c^J \right) \\ f_{n+1}^{(3)-trial} = \frac{1}{c^b} \left( (1 + m \tan \varphi^J) \sigma_{12}^{(n+1)} + m \sigma_{11}^{(n+1)} + \tan \varphi^J \sigma_{22}^{(n+1)} - c^J (m / \tan \varphi^J + 1) \right) \\ f_{n+1}^{(4)-trial} = \frac{1}{c^b} \left( -(1 + m \tan \varphi^J) \sigma_{12}^{(n+1)} + m \sigma_{11}^{(n+1)} + \tan \varphi^J \sigma_{22}^{(n+1)} - c^J (m / \tan \varphi^J + 1) \right) \\ f_{n+1}^{(5)-trial} = \frac{1}{c^b} \left( \sqrt{\left( \sigma_{11}^{(n+1)} - \sigma_{22}^{(n+1)} \right)^2 + \left( 2\sigma_{12}^{(n+1)} \right)^2} - \Sigma_0 \right) \\ f_{n+1}^{(6)-trial} = \frac{1}{c^b} \left( \sigma_{11}^{(n+1)} + \sigma_{22}^{(n+1)} + \sqrt{\left( \sigma_{11}^{(n+1)} - \sigma_{22}^{(n+1)} \right)^2 + \left( 2\sigma_{12}^{(n+1)} \right)^2} - 2T \right) \end{array} \right. \quad (4.51)$$

Si toutes les fonctions seuils  $f_{n+1}^{i-trial} \leq 0$ , l'hypothèse d'incrément élastique est validée, ainsi que la valeur de  $\boldsymbol{\sigma}^{(n+1)} := \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$ . Le calcul passe à l'incrément suivant  $(n+2)$ .

S'il existe au moins une fonction seuil violée,  $f_{n+1}^{i-trial} > 0$ , l'hypothèse d'incrément élastique n'est pas vérifiée. la valeur de  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$  doit être corrigées à travers la deuxième étape de résolution.

### Step 2 : le correcteur plastique

La contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^{trial}$  évaluée précédemment est fournie en entrée.  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  est la solution du système d'équation suivant.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.52)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C}^e : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \quad (4.53)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \sum_i^6 \Delta \gamma_{n+1}^i \frac{\partial f^i(\boldsymbol{\sigma}_{n+1})}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \quad (4.54)$$

$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  vérifie les conditions discrétisées de Kuhn-Tucker :

$$\Delta \gamma_{n+1}^i \geq 0, \quad f^i(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \leq 0, \quad \Delta \gamma_{n+1}^i f^i(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) = 0, \quad \text{pour } i = [1, \dots, 6] \quad (4.55)$$

D'après Haar-Karman, la solution du système d'équation (4.60) - (4.55) coïncide avec l'argument du problème de minimisation sous contraintes suivant (De Felice & all [29]) :

$$\text{Min } \Pi_{HK} [\Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}] = \frac{1}{2} (\Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : (\mathbf{C}^e)^{-1} : \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \quad (4.56)$$

sous les contraintes suivantes :

$$f^i(\Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \leq 0, \quad \text{pour } i = [1, \dots, 6] \quad (4.57)$$

$(\mathbf{C}^e)^{-1}$  est la matrice de souplesse,  $S^e$ , elle a la même tête que la matrice de rigidité. Donc

$$S^e = (\mathbf{C}^e)^{-1} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix}$$

Notre problème de minimisation est équivalent au problème de minimisation avec pénalisation suivant :

$$\min_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \alpha_i} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}) : (\mathbf{C}^e)^{-1} : (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}) + R \sum_{i=1}^6 (f_i(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) + \alpha_i^2)^2 \quad (4.58)$$

Le premier terme de la fonction cible à minimiser est normalisé par rapport à la composante  $S_{11}$  de la matrice de souplesse. le problème de minimisation devient alors

$$\min_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \alpha_i} \frac{1}{2S_{11}} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}) : (\mathbf{C}^e)^{-1} : (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}) + R \sum_{i=1}^6 (f_i(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) + \alpha_i^2)^2 \quad (4.59)$$

Où  $\alpha_i > 0$  et R est un coefficient de pénalisation. La valeur de R utilisée dans notre

calcul est égale à 500. La bonne convergence du sous programme de minimisation est vérifiée sur un problème dont on connaît la solution exacte.  $\sigma_{n+1}$  est la valeur de contrainte solution de notre problème de minimisation.

Notre problème de minimisation est résolu à l'aide du sous programme "DFPMIN" du NUMERICAL RECIPIES. DFPMIN est un sous programme qui minimise des fonctions non linéaire de plusieurs variables indépendantes (voir subroutine UMAT).

### Step 3 : Détermination de l'incrément de déformation plastique

$$\Delta\varepsilon^p = (\mathbf{C}^e)^{-1} (\sigma_{n+1}^{trial} - \sigma_{n+1}) \quad (4.60)$$

### Step 4 : Détermination de la matrice tangente

Si l'évolution est purement élastique, la matrice tangente est égale à la matrice de rigidité élastique  $\mathbf{C}^e$ .

Dans le domaine d'évolution élastoplastique, la matrice tangente est décrite par l'égalité suivante (détaille Annexe A)

$$\mathbf{C}^{ep} = \frac{\partial \Delta\sigma}{\partial \Delta\varepsilon} = \mathbf{C}^e - \frac{\mathbf{C}^e \Delta\varepsilon^p \otimes \mathbf{C}^e \Delta\varepsilon^p}{\Delta\varepsilon^p : \mathbf{C}^e \Delta\varepsilon^p} \quad (4.61)$$

### Step 5 : Actualisation des variables

La déformation palstique cumulée est :

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\varepsilon^p \quad (4.62)$$

## 4.4 Validation de l'implémentation de la loi de comportement

Une fois la loi programmée telle que indiquée dans le paragraphe précédent, il a fallu valider son implémentation dans le code de calcul par éléments finis ABAQUS®. En effet, le type d'élément, la finesse du maillage et la précision du calcul ne doivent pas modifier la réponse d'une structure se déformant de manière homogène.

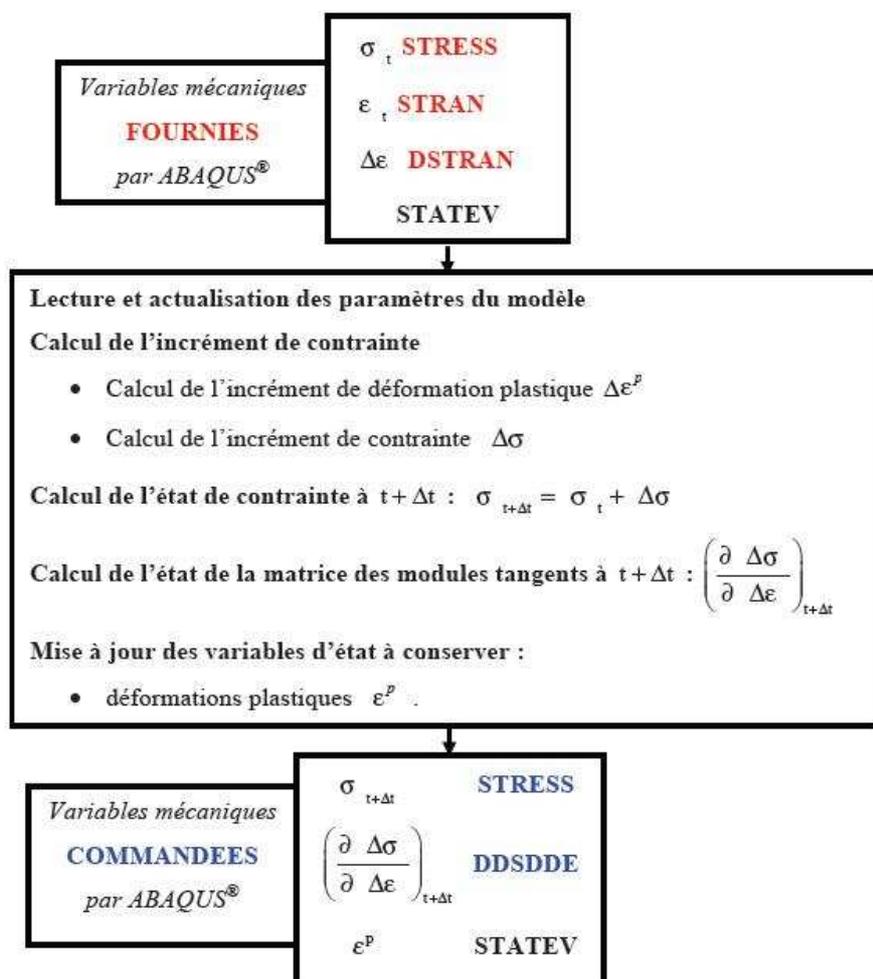


Figure 4.5 — Schématisation de la loi de comportement codée sous ABAQUS®.

Pour vérifier cela, nous avons choisi de comparer les résultats de l'homogénéisation numérique 3D (chapitre 3) et ceux de l'UMAT. Des tests uniaxiaux et biaxiaux sont traités. La structure de maçonnerie est modélisée, dans un premier temps, par une plaque plane formée d'un seul élément de maillage.

La figure 4.18 présente la comparaison entre les résultats de l'homogénéisation numérique 3D et de l'UMAT. Nous constatons une bonne coïncidence entre les résultats des deux simulations. Ces résultats confirment la bonne implémentation de la loi de comportement des maçonneries dans le code aux éléments finis ABAQUS®.

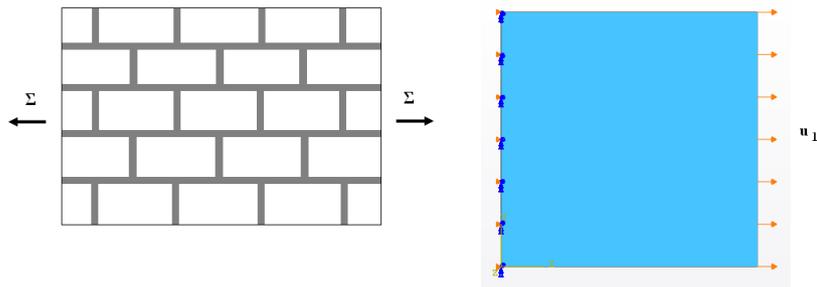


Figure 4.6 — Traction parallèle aux joints horizontaux

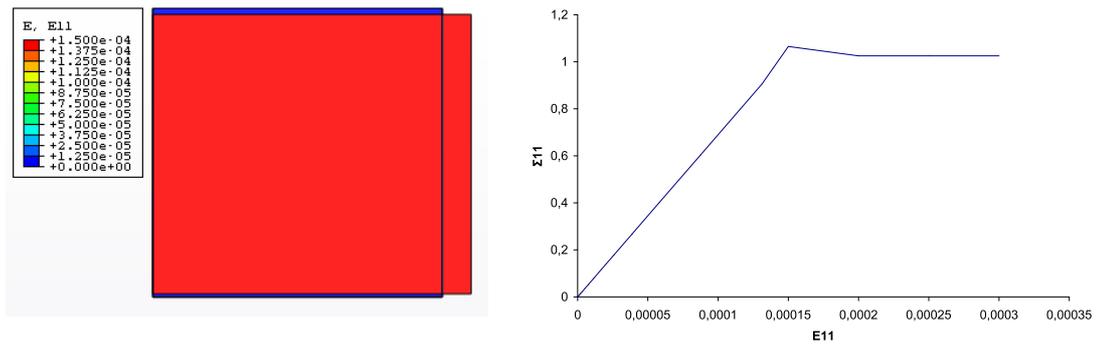


Figure 4.7 — Courbe contrainte/déformation : traction parallèle aux joints horizontaux

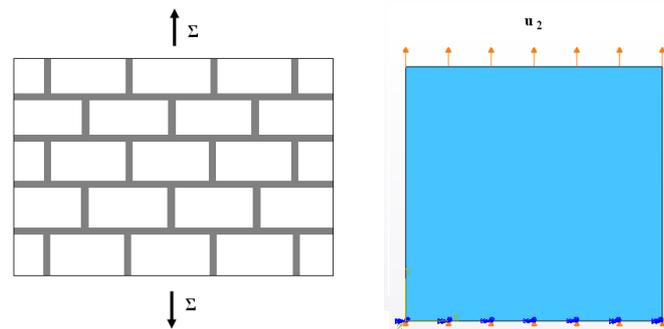


Figure 4.8 — Traction perpendiculaire aux joints horizontaux

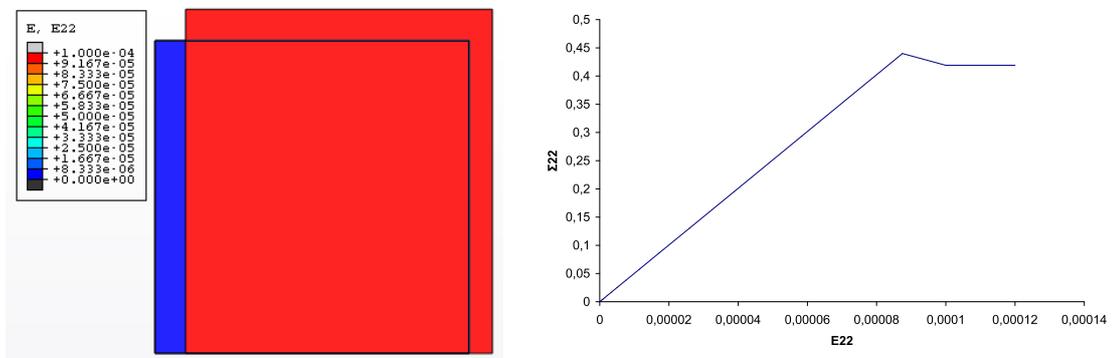


Figure 4.9 — Courbe contrainte/déformation : Traction perpendiculaire aux joints horizontaux

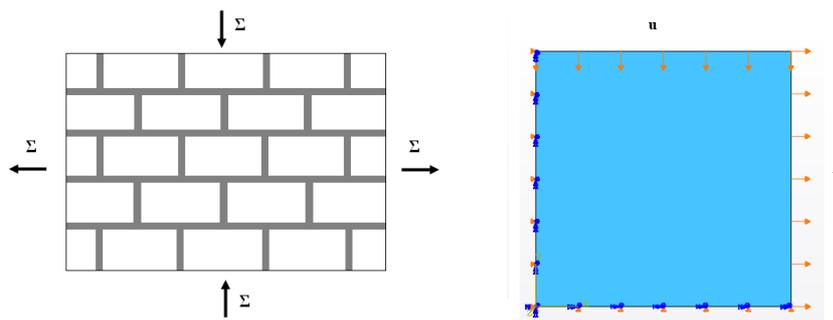


Figure 4.10 — Traction-compression dans le plan

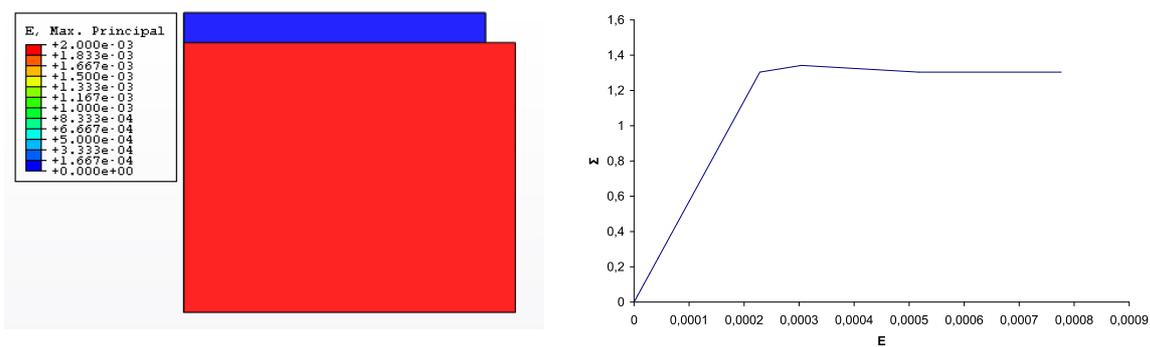


Figure 4.11 — Courbe contrainte/déformation : Traction-compression dans le plan

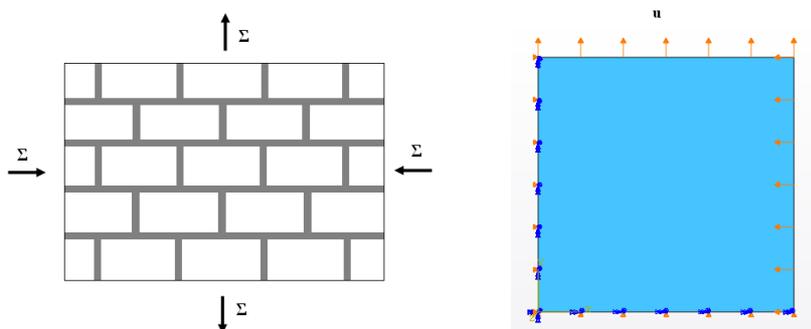


Figure 4.12 — Traction-compression dans le plan

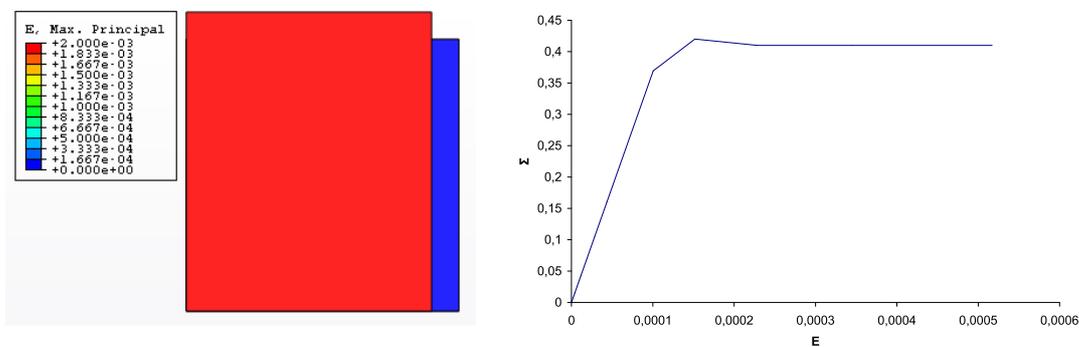


Figure 4.13 — Courbe contrainte/déformation : Traction-compression dans le plan

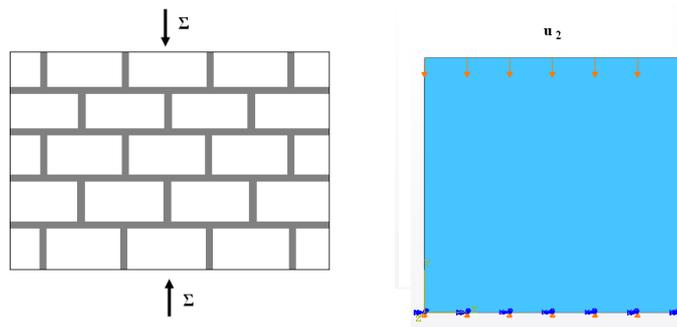


Figure 4.14 — Compression dans le plan

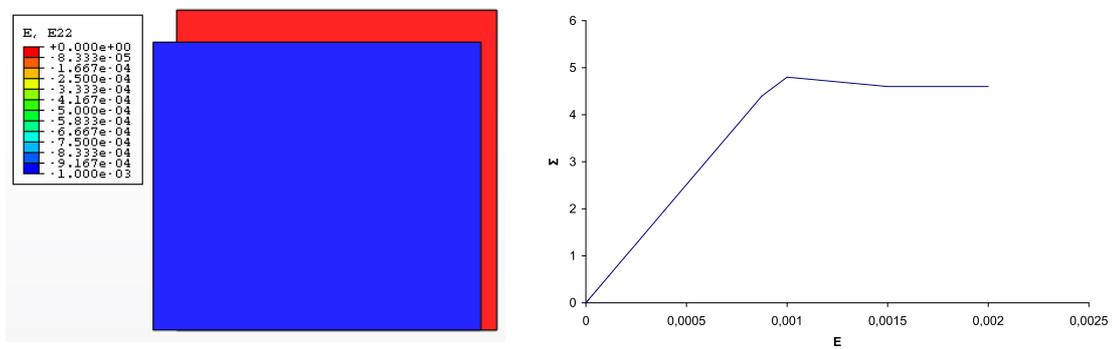


Figure 4.15 — Courbe contrainte/déformation : Compression dans le plan

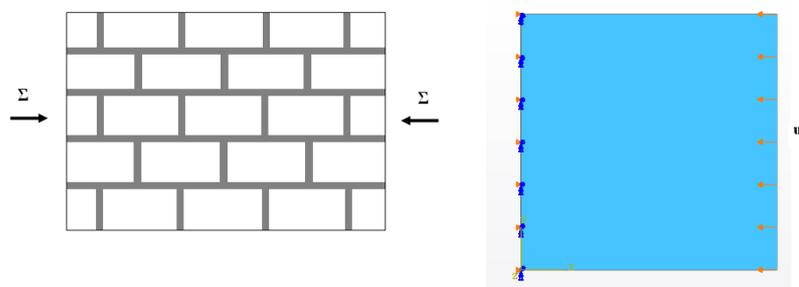


Figure 4.16 — Compression dans le plan

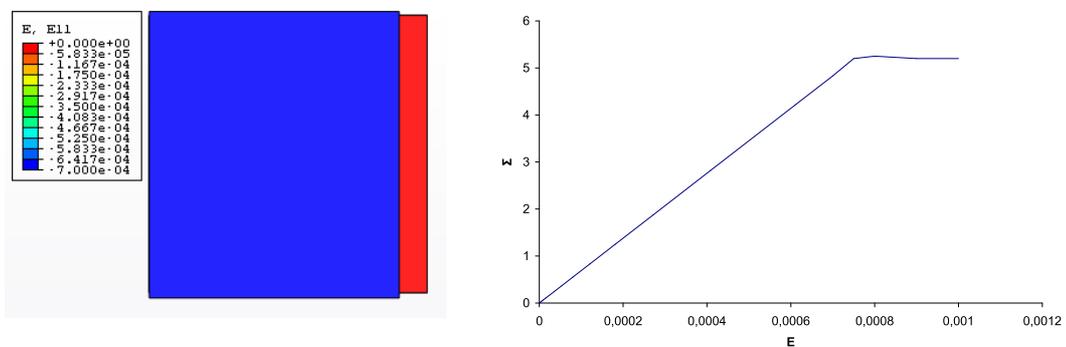


Figure 4.17 — Courbe contrainte/déformation : Compression dans le plan

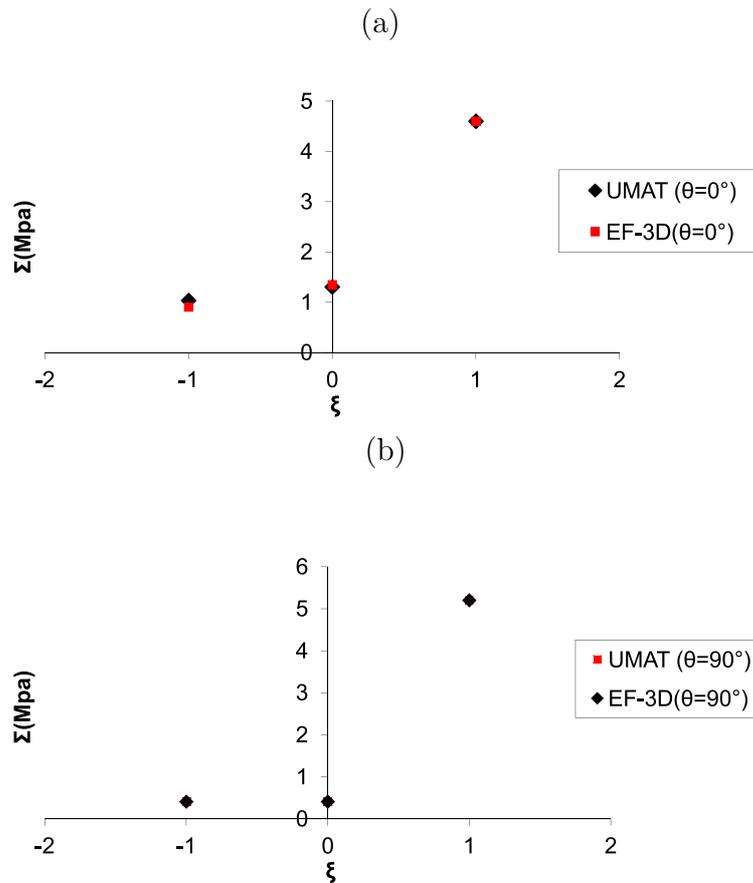


Figure 4.18 — Confrontation entre les résultats UMAT et EF-3D

Après avoir validé l'implémentation du critère de rupture dans le code aux éléments finis Abaqus®, nous procédons maintenant à l'étude de trois géométries de structures maçonnées : un trumeau, un panneau simple et un panneau avec une réservation au milieu. Les dimensions géométriques des structures maçonnées sont représentées sur les figures 4.19, 4.23 et 4.27. Les blocs utilisés ont les dimensions suivantes : longueur  $\times$  largeur  $\times$  hauteur égale à  $115 \times 40 \times 55 \text{mm}^3$ . Le tableau 4.1 contient les paramètres caractéristiques du bloc et du joint de mortier.

Cohésion des joints $c^J$ (MPa)	0.35
Angle de frottement $\varphi^J$	$40^\circ$
Cohésion des blocs $c^b$ (MPa)	4.35
Angle de frottement $\varphi^b$	$30^\circ$
Traction "in-situ" des briques $T$ (MPa)	1.35
Compression "in-situ" des briques $\Sigma_0$ (MPa)	4.6

Tableau 4.1 — Paramètres de calcul

Nous analysons dans les parties suivantes les modes de rupture obtenus pour des simulations numériques sur les trois structures maçonnées. On applique dans les calculs deux actions simultanées sur la partie supérieure du mur. On applique une charge verticale constante sous la forme d'une pression  $P = 0,1$  MPa. On impose également un déplacement horizontal croissant, uniforme sur toute la partie supérieure du mur.

#### 4.4.1 Flexion - cisaillement d'un trumeau

L'exemple traité dans cette partie est un test standard de flexion - cisaillement d'un trumeau de maçonnerie. Les valeurs caractéristiques de la géométrie et du chargement sont mises sur la figure 4.19.

Les figures ci-dessous (figure 4.20-4.21) présentent les distributions de contraintes et de déformations dans la structure maçonnée pendant le chargement. Les iso-valeurs de contrainte verticale ( $\sigma_{22}$ ) sont en toute logique, très proches de ce qu'elles seraient dans une console fléchie. L'analyse des résultats numériques montre que la rupture du trumeau, pour ce type de chargement, a lieu au niveau des joints d'interface, au pied et à gauche du trumeau. La figure 4.22 montre la courbe des forces de réaction horizontales sur le trumeau en fonction du déplacement imposé. Nous constatons une première phase linéaire qui illustre le comportement élastique de la structure poursuivi par un palier indiquant la phase plastique. La rupture du trumeau s'est produite pour une force de réaction horizontale égale à 2,66 kN (valeur à comparer à la charge verticale appliquée de 2,47 kN).

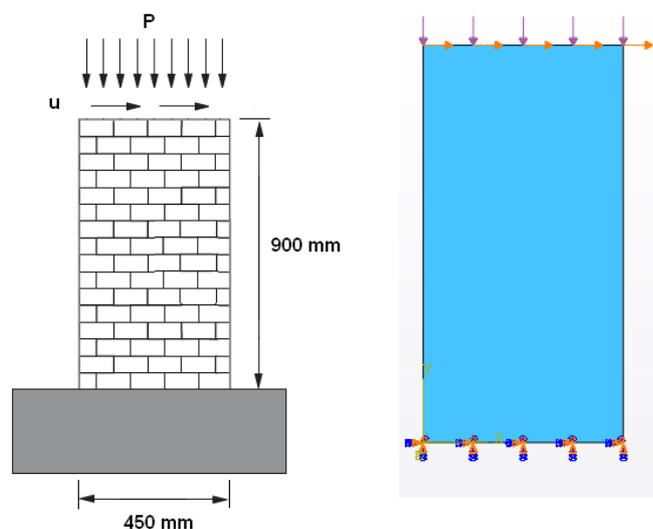


Figure 4.19 — Mode chargement de la structure maçonnée

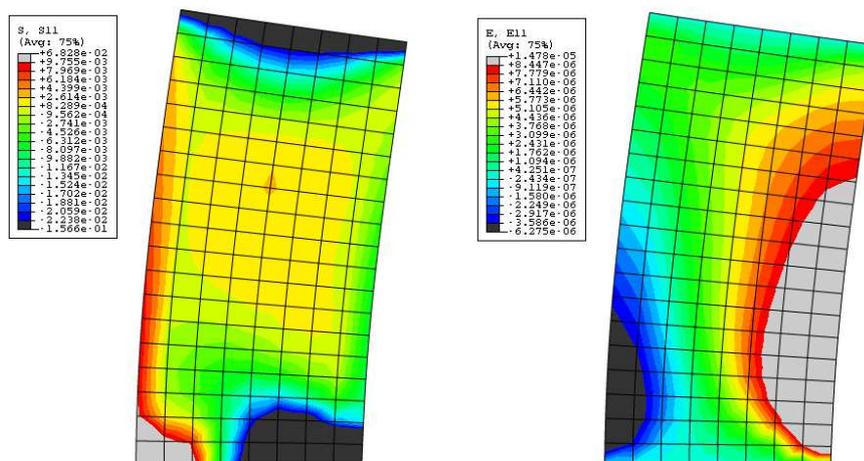


Figure 4.20 — Distribution de contrainte  $\sigma_{11}$  et de déformation  $\varepsilon_{11}$  dans la structure maçonnée

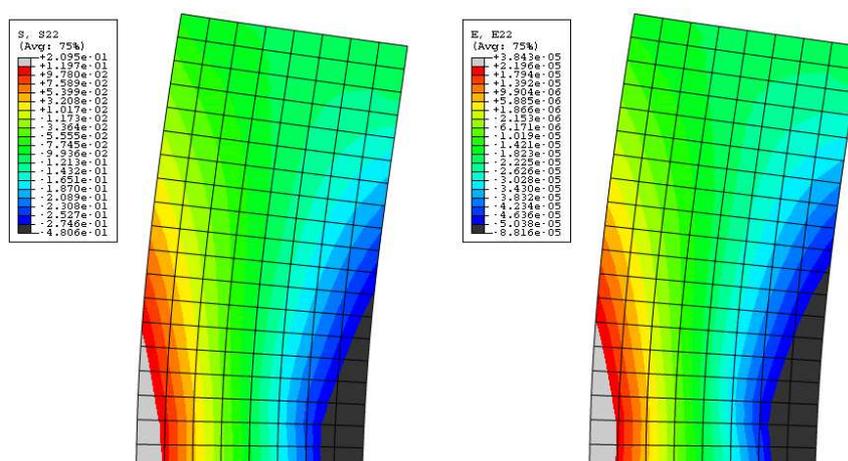


Figure 4.21 — Distribution de contrainte  $\sigma_{22}$  et de déformation  $\varepsilon_{22}$  dans la structure maçonnée

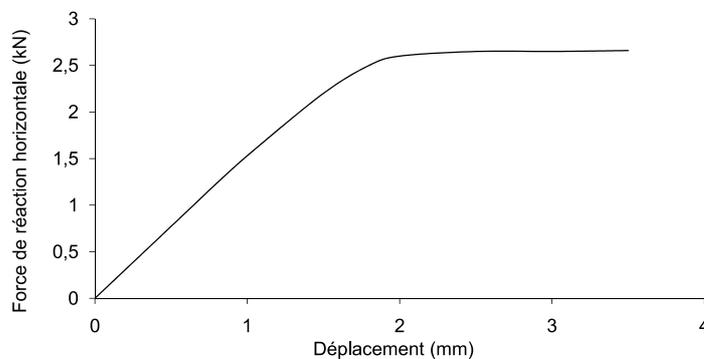


Figure 4.22 — Courbe des forces de réaction horizontales du trumeau en fonction du déplacement imposé

### 4.4.2 Cisaillement d'un mur en maçonnerie

Les figures ci-dessous des distributions de contraintes et de déformations nous montrent que dans le cas présent la rupture du mur apparaît selon une bielle allant globalement du coin supérieur gauche au coin inférieur droite du panneau. Ici encore, la rupture a lieu au niveau des joints d'interface. Il s'agit donc d'une rupture en "escalier" comme typiquement observé dans les essais sur cette géométrie de panneau. La ruine totale du mur s'est produite pour une force de réaction horizontale dans le mur égale à 7,2 kN (valeur à comparer à la charge verticale appliquée de 7,92 kN).

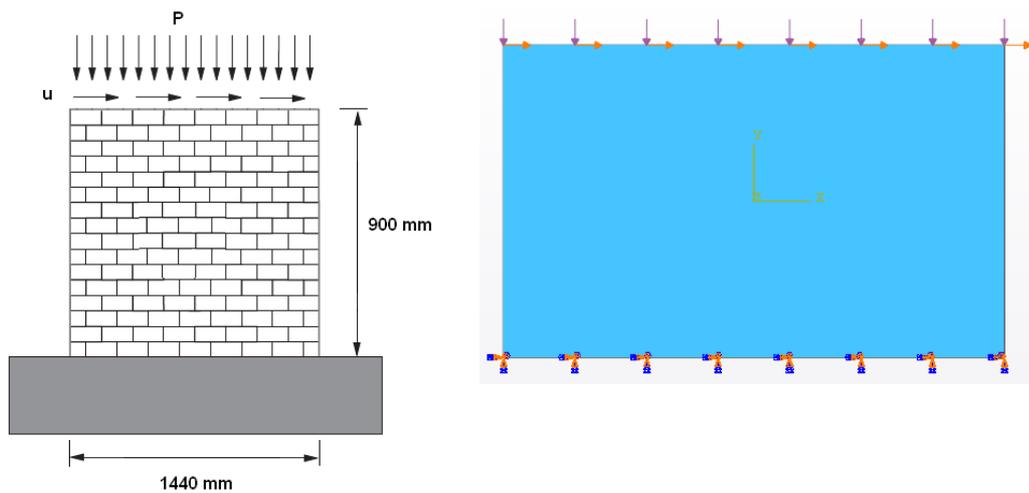


Figure 4.23 — Mode chargement de la structure maçonnée

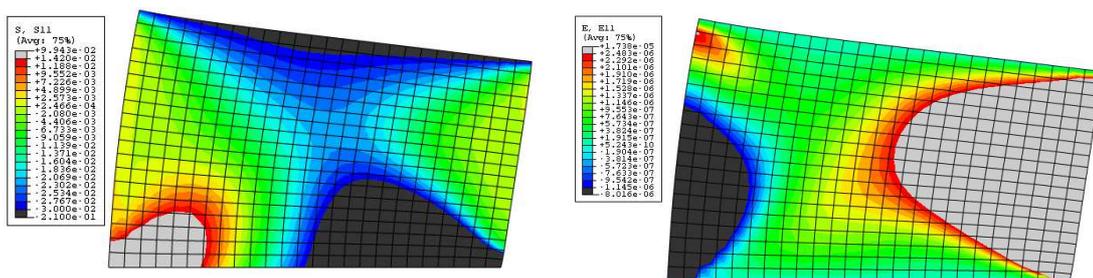


Figure 4.24 — Distribution de contrainte  $\sigma_{11}$  et de déformation  $\varepsilon_{11}$  dans la structure maçonnée

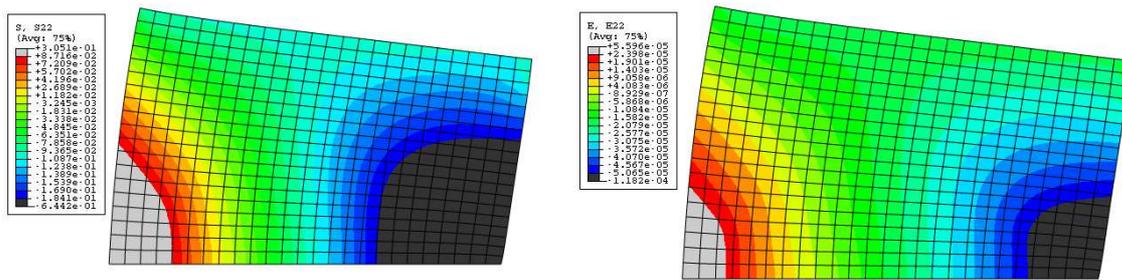


Figure 4.25 — Distribution de contrainte  $\sigma_{22}$  et de déformation  $\varepsilon_{22}$  dans la structure maçonnée

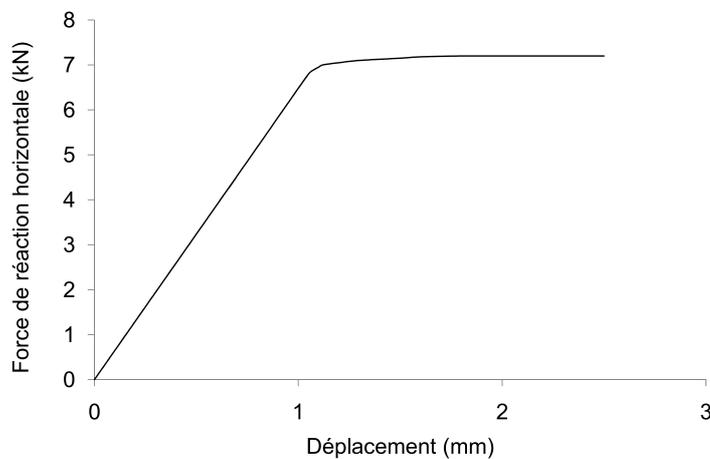


Figure 4.26 — Courbe des forces de réaction horizontales du mur en fonction du déplacement imposé

#### 4.4.3 Cisaillement d'un mur en maçonnerie avec baie

Le panneau de maçonnerie étudié est percé par une baie au milieu. Notre modèle est dans ce cas sévère par rapport à la réalité car il ne prend pas en compte l'existence d'un linteau qui sera systématiquement présent au dessus de l'ouverture. Au cours du chargement, la réservation est naturellement le lieu de concentrations de contraintes qui favorisent la rupture du mur en maçonnerie par la diagonale. Ici encore, la rupture de la structure maçonnée s'est produite dans les joints d'interface. La force de réaction horizontale dans le panneau à la rupture est égale à 5,79 kN (valeur à comparer à la charge verticale appliquée de 7,92 kN). Il est remarquable de constater que la baisse de résistance vis-à-vis du panneau plein n'est que 20%

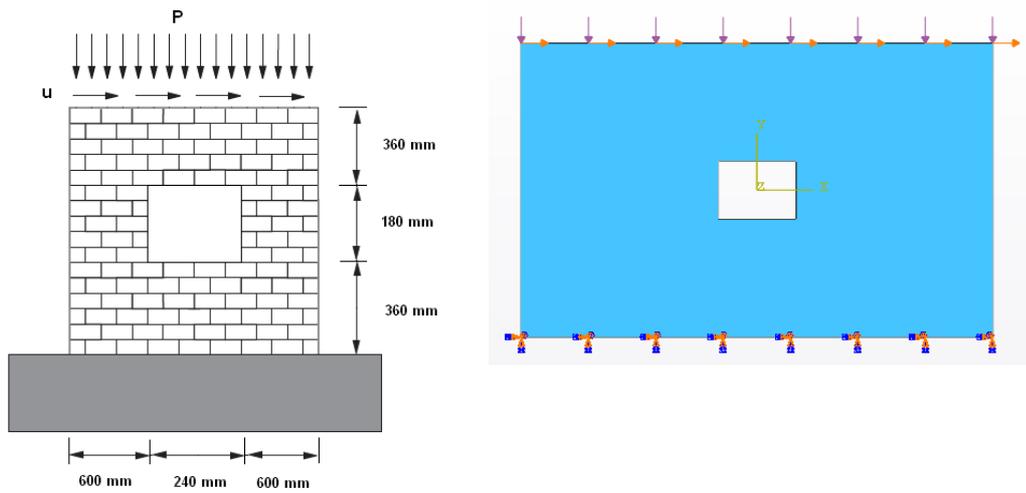


Figure 4.27 — Mode chargement de la structure maçonnée

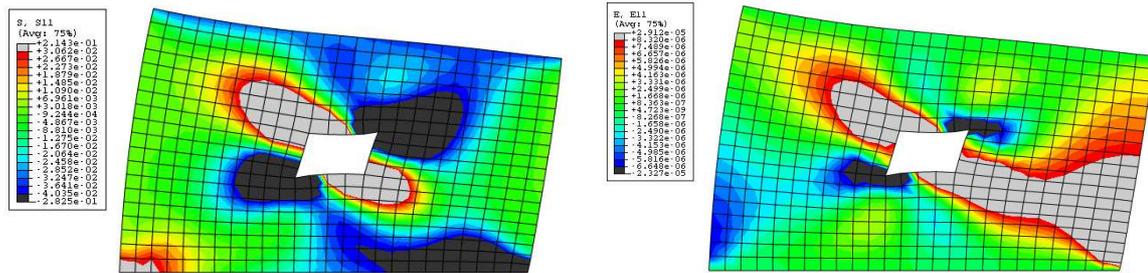


Figure 4.28 — Distribution de contrainte  $\sigma_{11}$  et de déformation  $\epsilon_{11}$  dans la structure maçonnée

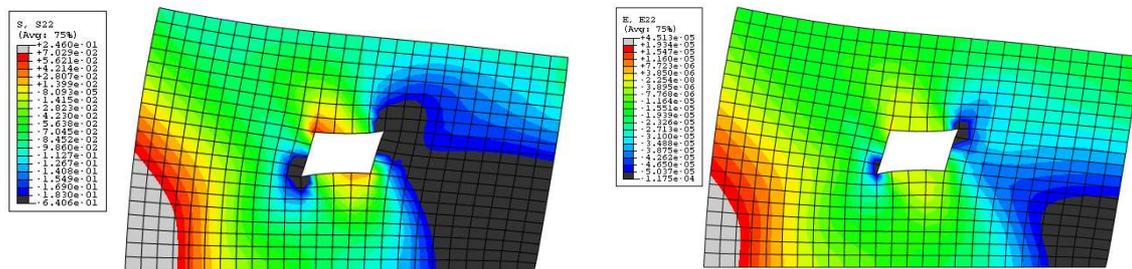
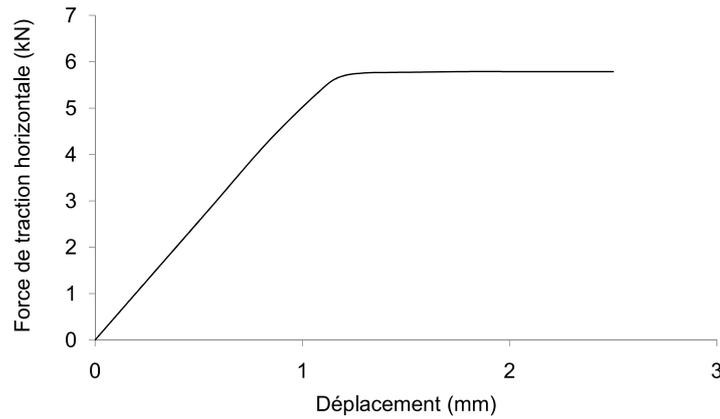


Figure 4.29 — Distribution de contrainte  $\sigma_{22}$  et de déformation  $\epsilon_{22}$  dans la structure maçonnée



*Figure 4.30* — Courbe des forces de réaction horizontales du mur en fonction du déplacement imposé

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit dans un premier temps la démarche suivie pour implémenter notre critère de rupture des structures maçonnées dans le code aux éléments finis Abaqus®. La validation de cette étape est faite par des calculs réalisés sur un seul élément de maillage soumis à des chargements homogène variés. Puis après avoir vérifié la bonne concordance entre les résultats numériques et les résultats analytiques, nous avons calculé différentes géométries de panneaux en maçonnerie : un trumeau, un panneau large et un panneau avec une réservation au milieu. Dans ces calculs, la structure maçonnée est encadrée en pied. Elle est soumise à un chargement vertical constant et uniforme et à un chargement horizontal croissant en tête, uniforme le long de l'arase supérieure du panneau. Les résultats obtenus coïncident qualitativement avec le comportement observé lors d'essais en vraie grandeur sur des murs analogues. Une confrontation quantitative est prévue dans les suites immédiates de la thèse.

---

## Longueur d’ancrage d’un TFC : Support en béton creux

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au renforcement des éléments de maçonnerie (blocs de béton creux) par des bandes de tissus de fibres de carbone (TFC). Le renfort est collé et imprégné grâce une résine époxy.

La présente étude porte sur la caractérisation du comportement de l’interface entre le renfort et l’élément de maçonnerie pour définir la longueur d’ancrage, longueur de transfert nécessaire pour pouvoir solliciter le renfort au maximum de sa capacité.

Nous présentons dans un premier temps le type d’essai qui a été réalisé pour étudier le comportement d’interface d’adhésion lorsqu’elle est soumise à un cisaillement, puis nous décrivons les trois types d’échantillon testés : un échantillon à ancrage simple et deux échantillons dont l’ancrage est renforcé par la présence d’une mèche. Nous appellerons dans la suite ces deux derniers échantillons : ” échantillon à ancrage mèche standard ” et ” échantillon à ancrage mèche à chas ”. Ces deux types de mèches correspondent à des situations différentes d’ancrage : dans un chaînage pour le premier et dans une semelle de fondation pour le second. Le dispositif d’essai est ensuite plus amplement détaillé : la préparation des corps d’épreuve, l’instrumentation, puis les conditions de chargement. Dans la partie résultats et analyse, nous verrons l’efficacité du renfort sur la maçonnerie, puis nous rentrerons dans les détails des modes de défaillance de ces renforts en faisant une étude de chacune de ces conditions de défaillances. Pour finir nous utiliserons des modèles de comportement des composites pour déterminer la longueur d’ancrage.

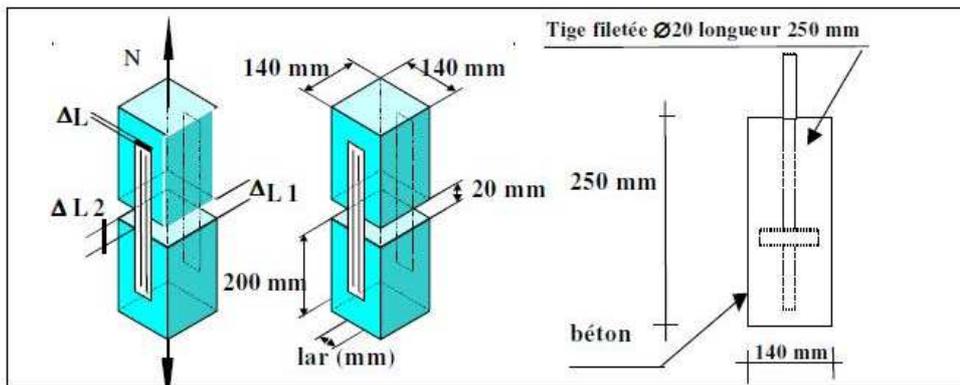
L’un des modes de rupture les plus courants pour ce type de renforcement est le délaminage, c’est-à-dire l’arrachement d’une fine couche du support en béton par cisaillement-traction. Ce phénomène est initié à l’extrémité du collage du renfort sur la maçonnerie puis il se propage ensuite le long de l’interface renfort / maçonnerie.

## 5.1 Programme expérimental

Vingt-sept corps d'épreuve ont été fabriqués, soit neuf pour chaque type d'ancrage.

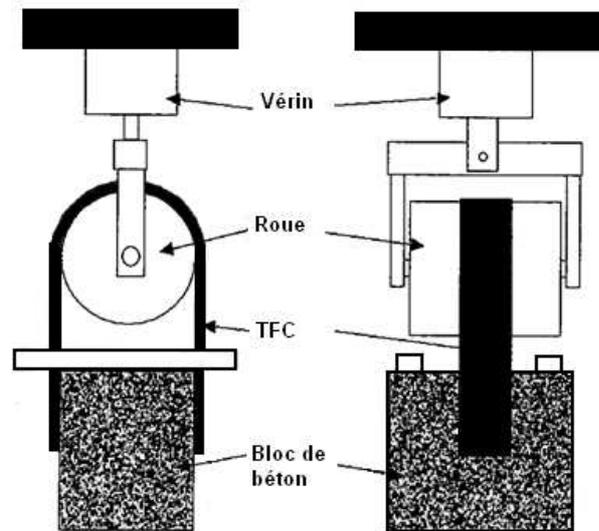
Les essais consistent à reproduire sur un corps d'épreuve les conditions de chargement de l'interface renfort/béton en extrémité de renfort. Nous utilisons comme blocs supports des blocs de béton creux. L'essai choisi est à double recouvrement. Il s'inspire de l'essai préconisé par l'Association Française de Génie Civil (AFGC) [référence], les modifications vis-à-vis de celui-ci étant liées à la taille de notre bâti d'essai, trop petite pour accepter l'encombrement du corps d'épreuve de l'AFGC.

Deux blocs de béton parallèles sont assemblés à l'aide de deux bandes composite collées sur deux faces symétriques (Figure 5.1). Un effort de traction est appliqué sur les deux blocs. Le chargement est appliqué par l'intermédiaire de rotules qui permettent d'éliminer les éventuels désalignements qui provoqueraient le décollement prématuré des bandes de renfort.

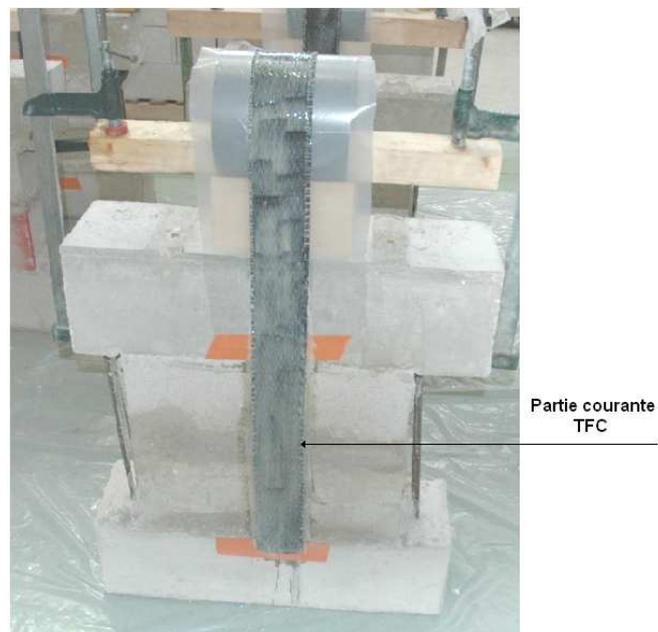


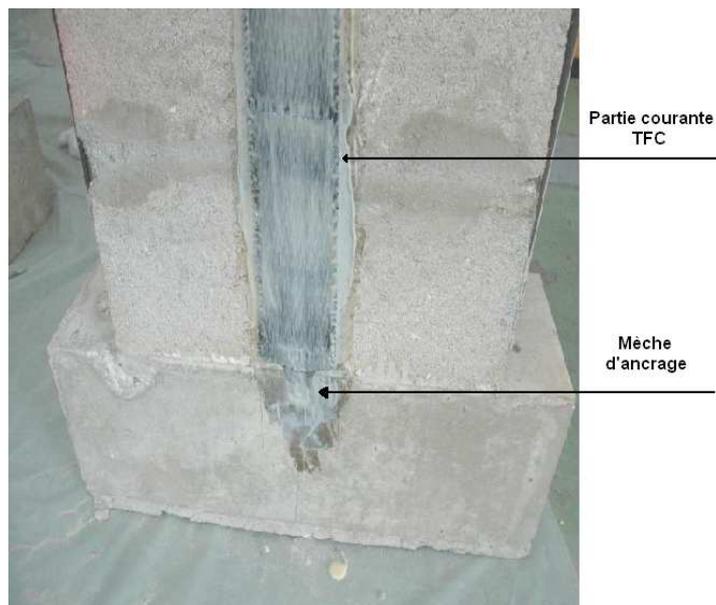
*Figure 5.1* — Essai de caractérisation du comportement de l'interface d'adhésion développé par l'AFGC [3]

Nous collons le TFC sur le bloc support de manière à former une anse à l'intérieur de laquelle une roue reliée à un vérin est disposée. Ce dispositif permet d'appliquer un chargement identique aux deux joints collés.

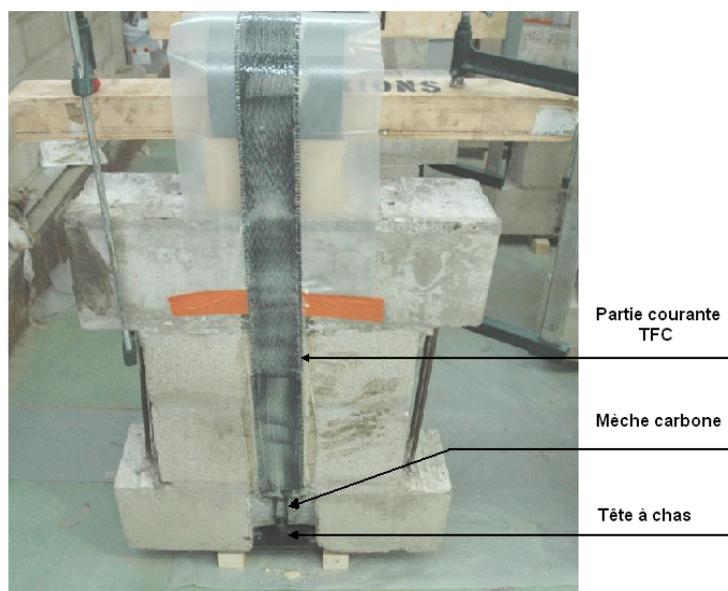


Trois types d'échantillons sont testés : un échantillon à ancrage simple, un échantillon à ancrage mèche standard, et un échantillon à ancrage mèche à chas.





*Figure 5.4* — Echantillon à ancrage mèche standard



*Figure 5.5* — Echantillon à ancrage mèche à chas

Le tableau suivant contient le programme d'essais pour les trois types d'échantillons (sans ancrage, ancrage mèche standard et ancrage mèche à chas).

Chargement	Nombre d'essai	Commentaires	Objectifs
Monotone croissant	5	Chargement à déplacement imposé	Caractérisation de la loi de comportement
Cyclique répété croissant	3	Chargement constitué de trains de cycles d'amplitude croissante, chacun de ces trains comportant 30 cycles d'amplitude constante.	Observation d'une perte éventuelle de capacité au séisme
Cyclique répété constant	1	Chargement cyclique d'amplitude constante, chargement à force imposée égale à 90% de la force de ruine atteinte au cours l'essai cyclique répété croissant : 200 cycles sont visés si la ruine n'est pas atteinte avant	Détermination de la marge de sécurité offerte par l'ancrage vis-à-vis du nombre de cycles standard d'excitation sismique

*Tableau 5.1* — Programme d'essais

## 5.2 Composition des corps d'épreuves

### 5.2.1 Blocs de béton et mortier

Chaque échantillon se compose de deux blocs de béton creux complétés de béton coffré servant d'une part à assurer une manipulation sûre des corps d'épreuve et représentant d'autre part un chaînage horizontal nécessaire pour les ancrages à mèche. Les blocs utilisés sont de type B40, de dimensions nominales 500mm × 200mm × 200mm.

Les blocs sont liés par un mortier de classe de résistance M5 (résistance à la compression égale au minimum à 5 Mpa) et d'épaisseur 15mm.



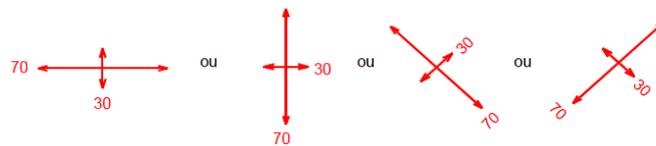
*Figure 5.6* — Élément de maçonnerie

### 5.2.2 Renfort : TFC

Le tissu du composite TFC (Tissu en Fibre de Carbone) est constitué de fibres de carbone dans la chaîne et la trame de manière à obtenir une armure souple et déformable pouvant épouser les formes du support. Le type de tissage est un satin n°4, conforme à la norme ISO 7211.

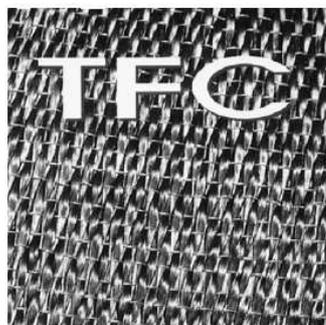
Le tissu est un tissu bidirectionnel à sens de résistance privilégié dans la chaîne, constitué de 70% de fibres dans le sens de la chaîne et de 30% de fibres dans le sens de la trame. Le repérage du sens privilégié est simple dans la mesure ou le TFC est livré en largeurs standards et que le sens de meilleure résistance est le sens longitudinal du coupon.

De ce fait il est important d'indiquer sur les plans d'implantation des renforcements l'orientation de pose du tissu. Ce repérage se fait simplement en indiquant par un symbole à deux flèches le sens de pose du tissu.



Les largeurs nominales de tissu TFC sont : 300mm, 200mm, 150mm, 75mm et 40mm.

La largeur nominale désigne une dimension nominale qui correspond à un nombre de mèches de carbone garanti par largeur (5 mèches par cm) soit, par exemple, pour une largeur nominale de 150 mm, un nombre de 75 mèches. La largeur nominale indique la section résistante du renfort.



*Figure 5.7 — Bande de TFC*

### 5.2.3 Résine

La colle retenue pour les essais est la résine Epx TFC, produit bi-composant constitué d'une partie résine et d'une partie durcisseur. La consommation moyenne de colle obtenue, par exemple pour ce tissu de grammage  $500 \text{ g/m}^2$ , est de 1,2 à 1,5  $\text{kg/m}^2$  par couche de tissu. Elle varie suivant la nature et l'état de surface du support à renforcer.

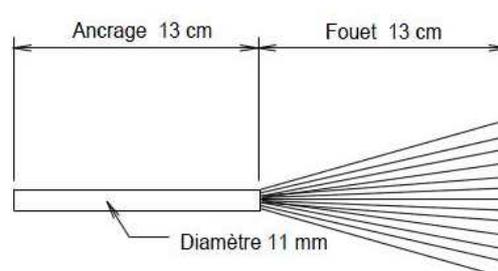
La durée pratique d'utilisation des mélanges dépend de la quantité mise en oeuvre (effet de masse) et de la température ambiante (exotherme). La vitesse de durcissement après application, liée à la température ambiante conditionne le délai avant mise en service.

### 5.2.4 Mèche d'ancrage standard

La mèche de carbone TFC sert à fixer ou ancrer le composite de renforcement structural TFC quand celui-ci nécessite un ancrage plus important que la simple adhérence de sa surface collée au support. Elle permet également de reprendre des efforts déviés. Une mèche d'ancrage est constituée d'un assemblage de fibres de carbone, composé de deux parties :

- L'ancrage : une partie destinée à être enfilée et scellée dans un forage dans le béton, à l'aide d'une tige de scellement,
- Le fouet : une partie fibreuse destinée à être stratifiée avec le composite TFC.

Une mèche d'ancrage est constituée de 36 fils de carbone minimum, comprenant chacune 12000 fibres. La capacité d'ancrage garantie est de 30kN à l'ELU.



*Figure 5.8* — Description d'une mèche standard

### 5.2.5 Mèche d'ancrage à chas

La mèche à chas est un nouveau type d'ancrage inventé par Freyssinet qui sert à ancrer le renfort. Une extrémité est matricée par stratif avec le composite TFC. L'autre extrémité est composée d'une barre HA (ou tige filetée) scellée profondément dans le béton.

Remarque : Pour l'essai, pas de scellement. La tige bloquée par écrou sur une plaque d'appui en acier.(figure 5.9).



*Figure 5.9 — Tête à chas liée à une tige filetée  $\phi 16$*

## 5.3 Fabrication des corps d'épreuve

Le renforcement des blocs a été réalisé sur les deux faces externes de l'échantillon à l'aide du procédé TFC (Tissu en Fibre de Carbone). Ce procédé utilise des bandes de tissu de carbone de 75 mm de large, imprégnée de résine.

Les bandes et la résine ont été fournies et appliquées par l'entreprise Freyssinet.

La résine époxyde est livrée en kits pré-dosés qui doivent être mélangés dans leur intégralité.

On applique une première couche de résine époxyde, dite couche de collage avec des moyens permettant de faire pénétrer la résine au mieux dans les anfractuosités du support, et ainsi assurer une bonne imprégnation de la surface.

La couche de collage est appliquée à raison de 700gr/m<sup>2</sup> au moyen d'un rouleau à poils ras.

Les rouleaux de fibres de carbone tissées de 75 mm de large sont préalablement découpés en lés aux dimensions de l'échantillon à renforcer. Après la pose du tissu sur la couche de collage encore humide, le lé de carbone doit être fermement plaqué sur le support par un marouflage permettant l'imprégnation de la colle dans la fibre et l'élimination de bulles d'air éventuelles.

La deuxième couche de résine, dite couche de fermeture est destinée à donner l'apport de matière époxydique permettant d'achever l'imprégnation du tissu. Cette couche doit impérativement être appliquée avant la polymérisation de la première couche.

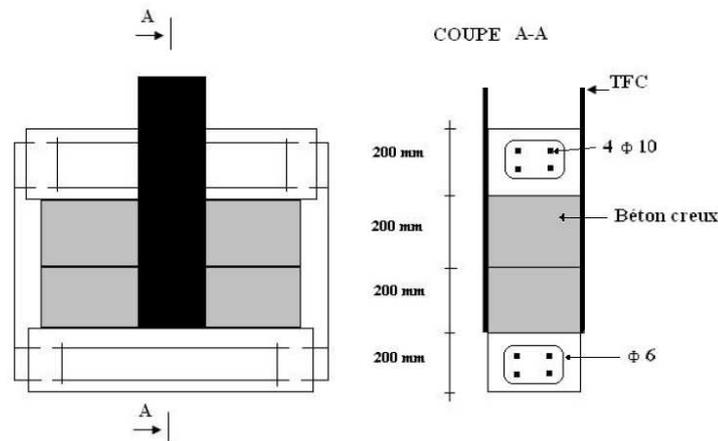


Figure 5.10 — Schéma du corps d'épreuve à ancrage simple

### Procédure de mise en oeuvre des mèches d'ancrage standard

Nous commençons par préparer les surfaces du support par un ponçage léger pour recevoir la pose du TFC. Cette procédure est conforme à la réalité du chantier.

#### 1. Perçage des ancrages

Le perçage est réalisé au moyen d'un perforateur manuel à roto-percussion. Le diamètre de forêt doit être de 16 mm.

La profondeur de perçage est de 15 cm. On s'assure de la bonne profondeur par l'utilisation d'une butée de profondeur installée sur le pistolet perforateur.

#### 2. Mise en recette des trous d'ancrage

Les trous d'ancrage doivent être soigneusement soufflés au moyen d'air comprimé pour être débarrassés des poussières de forage. Le soufflage est effectué en utilisant un tube plongeur d'un diamètre et d'une longueur permettant le soufflage jusqu'au fond du trou.

#### 3. Pose de la première couche de TFC

La pose du TFC, pour la couche d'imprégnation de résine et la pose du tissu se fait sans tenir compte des trous réalisés. La stratification du TFC doit être complète.

#### 4. Scellement de la mèche dans le béton

La mèche est scellée au béton au moyen d'une résine époxyde à deux composants EPONAL 380.

La résine en cartouche est extrudée dans le trou de scellement au moyen d'une pompe et d'une buse à fractionnement statique placée en extrémité de cartouche. Le trou est rempli légèrement au dessus de la moitié de sa profondeur.

L'ancrage de la mèche est introduit dans le trou à l'aide de la tige de scellement. L'extrémité de la tige de scellement doit être enfoncée à environ 0,5 cm sous la surface finie.

Un léger excédant de colle EPONAL 380 doit apparaître en surface.

Cet excédant sera écrasé à la spatule avant la stratification du fouet.

#### 5. Stratification du fouet de la mèche

Le fouet est écarté en corolle pour être incorporé dans le matriçage de la couche de TFC en place.

Le matriçage est réalisé avec l'adhésif du TFC, et se fait sur le composite avant que la résine ne soit durcie. On le réalise avec une spatule à enduire de 30 à 50 mm de largeur, en pressant fortement les fibres dans le sens du fil.

#### 6. Application de la deuxième couche de TFC

Si le projet prévoit une deuxième couche de TFC, celle-ci est appliquée immédiatement après la stratification du fouet de la mèche selon la procédure habituelle.

Dans le cas où le projet prévoit une seule couche de TFC, la surface occupée par la mèche doit être recouverte d'un carré ou d'un rectangle de TFC découpé à la bonne dimension.



Figure 5.11 — Perçage des trous d'ancrage



Figure 5.12 — Mise en place du TFC



*Figure 5.13* — Injection de colle dans les trous



*Figure 5.14* — Préparation de la mèche



*Figure 5.15* — Scellement d'une mèche



*Figure 5.16* — Incorporation et fermeture

Les figures ci-dessous montrent les différentes étapes de la mise en place d'une bande de TFC renforcée par une mèche à chas. Les différentes étapes sont quasiment identiques à celles présentées précédemment.



*Figure 5.17* — Mèche à chas liée à une tige filetée



*Figure 5.18* — Fixation de ma mèche



*Figure 5.19* — Mise en place du TFC



*Figure 5.20* — Imprégnation des fibres de carbone



*Figure 5.21* — Passage de la mèche dans la tête à *Figure 5.22* — Incorporation et fermeture

## 5.4 Dispositif d'essais

### 5.4.1 Bâti d'essai

Afin d'imposer l'effort de traction sur le renfort, l'essai est réalisé sur un bâti équipé d'un vérin hydraulique. Un axe constitué de plusieurs rotules est fixé en dessous du vérin. Ces rotules permettent de rattraper, lors de la traction, les éventuels désalignements qui pourraient provoquer le décollement prématuré du composite dû à des efforts normaux au plan de collage.

L'axe de traction est muni à son extrémité d'une roue qui vient se placer dans l'anse du TFC. Cette roue permet d'imposer une traction symétrique des deux côtés du renfort. Ainsi le déplacement de la roue est entraîné par le déplacement du vérin de la presse, déplacement qui est contrôlé par un ordinateur.

Après installation, l'élément de maçonnerie reste suspendu sous son poids par l'intermédiaire du TFC. Au moment de l'essai l'échantillon vient en butée sur deux brides en acier de la machine d'essai (Figure 5.23). Ces deux appuis ont pour rôle d'équilibrer la force de traction appliquée par le vérin.

La Figure 5.24 présente l'essai qui a été réalisé lors de notre étude. En présente par la suite le dispositif mécanique mis en place pour réaliser cet essai ainsi que l'instru-



Figure 5.23 — Fixation de l'échantillon dans le bâti d'essai

mentation utilisée pour obtenir les informations nécessaires à l'étude du comportement.

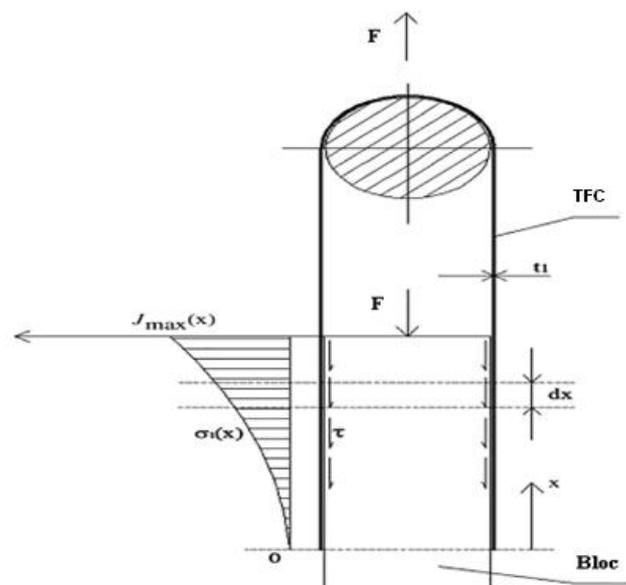


Figure 5.24 — Essai de traction

## 5.4.2 Instrumentation

Les informations recherchées dans cette campagne d'essai sont :

- La charge et le mode de rupture pour chaque type d'essai,
- La longueur d'ancrage d'un TFC sur support en béton,

Les mesures qui doivent être réalisées au cours de l'essai sont :

- La variation de l'écartement entre la roue et le support,
- l'allongement de l'élément de renfort en zone libre,
- Le déplacement relatif entre le support et le composite en zone collé,
- l'effort de traction imposé au renfort,
- Les déformations du composite dans la zone collée (mesurées par jauges de déformation),

#### Ecartement entre la roue et le bloc de béton

Le déplacement global de la roue par rapport au bloc est enregistré de façon continue par un capteur de déplacement de type LVDT L10 de course  $\pm 5\text{mm}$ .

#### Allongement de l'élément de renfort en zone libre

La déformation est supposée homogène dans la partie de composite non collée. Elle est alors estimée à partir de la mesure du déplacement relatif de deux points par un capteur LVDT L10. La Figure 5.25 ci-dessous montre le capteur utilisé lors de nos essais.



*Figure 5.25 — Installation du capteur de déplacement sur le TFC*

#### Déplacement relatif entre bloc et composite

Le déplacement relatif entre le bloc et le TFC est mesuré, à l'arase supérieure du bloc, par un capteur de déplacement de type LVDT L10.

### Effort de traction

L'effort de traction est mesuré au cours de l'essai par un capteur de force, intégré à la travée de la presse.

### Déformation du composite dans la zone collée

Le profil de cisaillement dans la zone d'ancrage est obtenu après mesures des déformations longitudinales du renfort. Ces déformations sont mesurées à l'aide de jauges, réparties de façon à obtenir un maximum de valeurs près de la zone libre où le gradient des déformations est important. La Figure 5.26 montre les positions des jauges.



*Figure 5.26 — Jauges de déformation*

## 5.5 Résultats et analyses

### 5.5.1 Comportement sous charge monotone croissante des ancrages simples

#### 5.5.1.1 Comportement expérimental de l'ancrage simple

Les cinq premiers échantillons à ancrage simple ont été sollicités de manière monotone croissante jusqu'à la rupture. L'essai est piloté en déplacement pour décrire une éventuelle phase adoucissante.

Au cours de cette série d'essais, différents aspects caractérisant le comportement du joint béton/TFC ont été observés. Ce comportement est caractérisé par les phases suivantes :

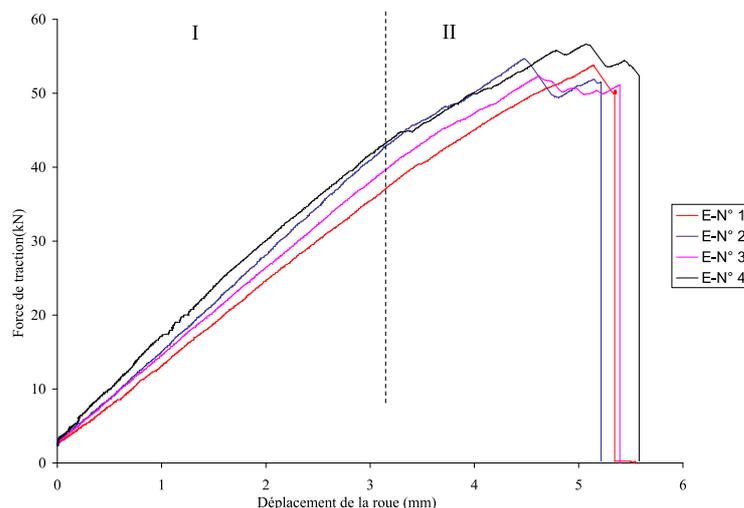
◇ *Phase élastique linéaire (I)*

Dans cette phase de chargement, l'ensemble bloc/TFC se comporte pratiquement comme un matériau élastique linéaire.

◇ *Phase d'endommagement-rupture (II)*

Le délaminage apparaît dans les zones tendues en commençant par les zones les plus sollicitées (à l'arase supérieure du premier bloc). La première chute de force, sur la courbe force/déplacement, correspond au passage de la zone d'ancrage effective à l'aplomb du joint entre bloc. On remarque au passage que les joints constituent une zone de faiblesse pour l'adhérence. Le transfert de l'ancrage au deuxième bloc permet un petit regain de charge poursuivi par le délaminage total du joint. La rupture de l'interface bloc/TFC se fait d'une manière fragile.

Cinq essais ont été réalisés, mais seuls quatre sont présentés car un problème de capteur a rendu un essai inexploitable. Ce défaut n'a heureusement aucune conséquence car on observe une excellente répétabilité des essais.



**Figure 5.27** — *Courbes force/déplacement : ancrage simple*

*Remarque : la force de traction est ici celle mesurée sur le vérin, soit le double de celle agissant sur le renfort et chaque zone d'ancrage.*

L'observation du cisaillement dans l'adhésif ne peut se faire directement et passe donc par la mesure des déformations du composite à l'aide des jauges de déformation



**Figure 5.28** — Délaminage observé lors des essais sans ancrage

collées sur la surface. L'observation de ces mesures nous donne une première information sur le comportement de l'interface dans son domaine élastique.

L'évolution linéaire des courbes de déformation s'achève sur les jauges les plus proches du bord du composite collé avant de se propager sur celles plus éloignées (Figure 5.30). La charge limite du comportement élastique marque la fin de l'évolution linéaire de la déformation mesurée par la jauge la plus proche du bord du composite collé. Le tableau 5.2 présente la position des jauges sur les deux faces de l'échantillon à ancrage simple (figure 5.29).

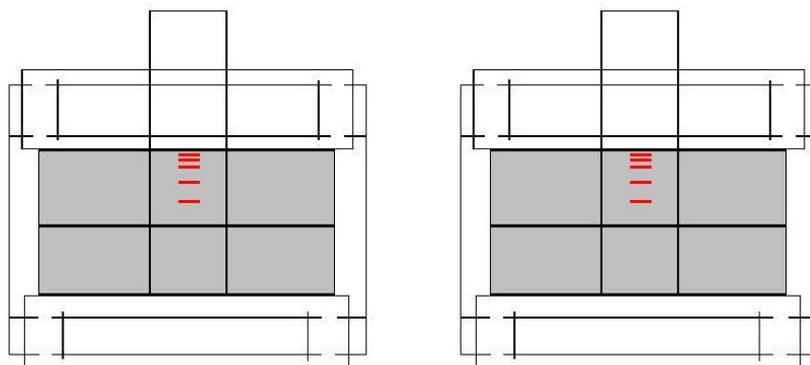
Face	Face 1					Face 2				
Jauge	J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7	J8	J9	J10
Position (cm)	1	3	5	10	15	1	3	5	10	15

**Tableau 5.2** — Position des jauges de déformation à partir du bord haut

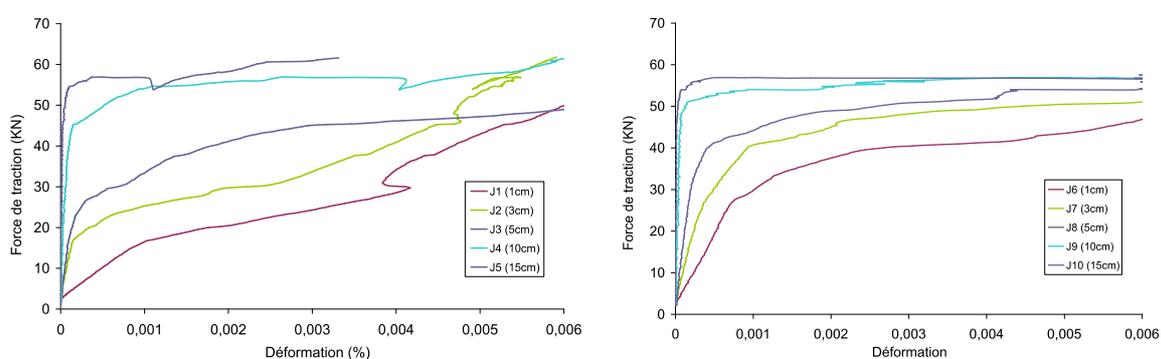
Nous présentons ci-dessous la courbe reliant la force de traction sur le vérin à la déformation du TFC dans la zone libre (mesurée par capteur LVDT).

Reportant à présent la pente associée à la raideur du TFC en zone libre sur les courbes de déformation des zones d'ancrage, nous pouvons observer l'évolution du comportement du joint entre sa phase élastique et le moment où l'adhérence a totalement disparu.

On constate à ce stade une incohérence. En effet, l'évolution régulière des courbes  $J_1$  à  $J_3$  et  $J_6$  à  $J_8$  entre la phase d'adhérence parfaite et la phase où l'adhérence a totalement disparu sur les figures précédentes montre que l'interface collée présente une phase de comportement adoucissant à la sortie du domaine élastique. Ce point est confirmé également par l'évolution des déformations d'une jauge à l'autre. On devrait donc en principe observer une phase adoucissante à l'échelle globale du joint sur la figure 5.27 puisque l'essai est piloté en déplacement.

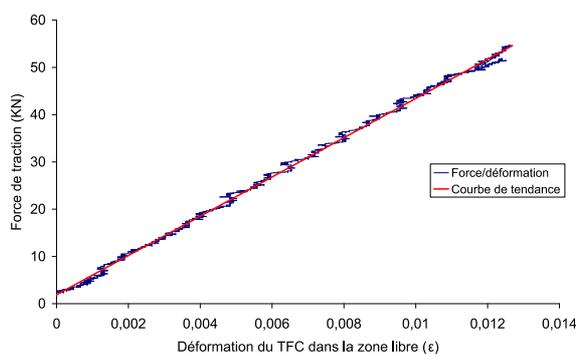


**Figure 5.29** — Positions des jauges de déformation : face 1 et face 2



**Figure 5.30** — Courbe force/déformation de l'échantillon à ancrage simple

Remarque : la force de traction est ici celle mesurée sur le vérin, soit le double de celle agissant sur le renfort et chaque zone d'ancrage.

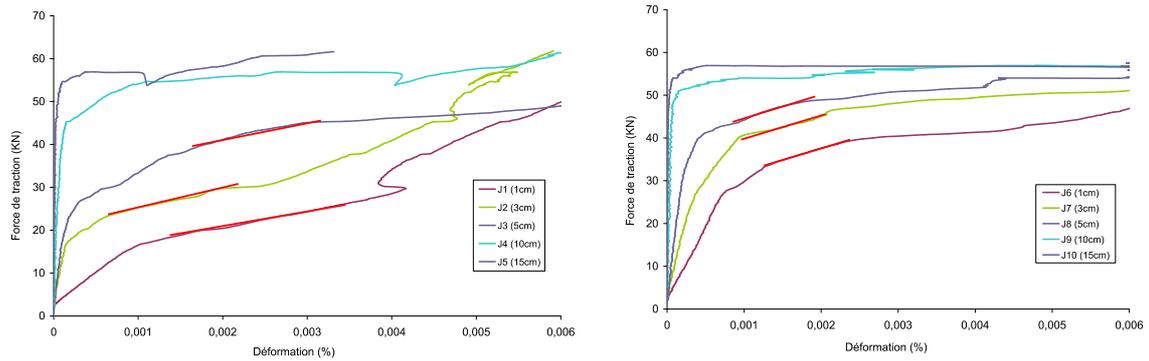


**Figure 5.31** — Courbe force /déformation sur la zone libre du TFC

Remarque : la force de traction est ici celle mesurée sur le vérin, soit le double de celle agissant sur le renfort et chaque zone d'ancrage.

La rupture brutale obtenue nous invite à analyser l'essai selon le modèle de comportement simplifié suivant.

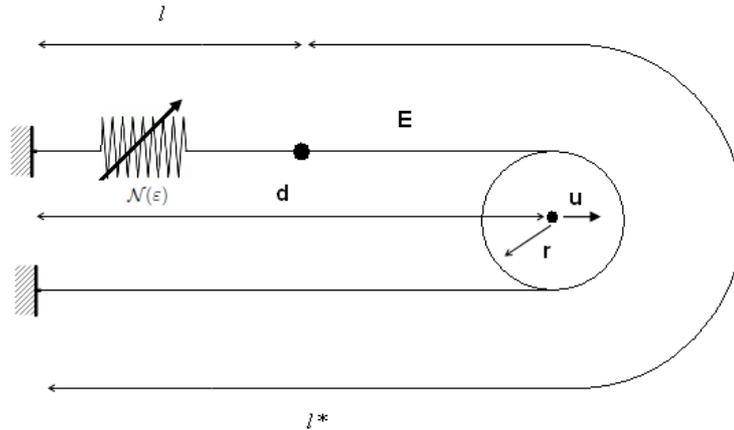
La rupture intervenant en toute logique dans un joint sur les deux présents sur le corps d'épreuve, nous distinguons deux zones : une zone pour le joint arrivant à



**Figure 5.32** — Courbe force/déformation de l'échantillon à ancrage simple

Remarque : la force de traction est ici celle mesurée sur le vérin, soit le double de celle agissant sur le renfort et chaque zone d'ancrage.

rupture et une zone pour le reste, c'est-à-dire la zone libre du renfort et le joint restant adhérent.



**Figure 5.33** — Modèle de comportement simplifié de l'essai

On considère que la zone de joint arrivant à rupture est décrite par un ressort non linéaire comportant une phase de comportement adoucissant après une phase élastique. On note la loi correspondante  $\sigma = \mathcal{N}(\varepsilon)$ .

On considère que l'autre zone est décrite par un ressort élastique linéaire de module apparent  $E$ .

Notons :

$l$  : longueur de la zone de joint arrivant à rupture.

$l^*$  : longueur de la zone de renfort libre + zone de joint restant adhérente.

En indiquant à 0 les longueurs des zones à l'origine, soit avant la mise en tension,

nous obtenons les équations suivantes du problème statique :

$$\begin{cases} (l + l^*) - (l_0 + l_0^*) = \pi r + 2(d + u) - (\pi r + 2d) = 2u & (1) \\ \varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} \quad ; \quad \varepsilon^* = \frac{l^* - l_0^*}{l_0^*} & (2) \\ \sigma = \mathcal{N}(\varepsilon) = E\varepsilon^* & (3) \end{cases}$$

Voyons quelle petite variation de contrainte  $d\sigma$  engendre une petite variation du déplacement de la roue  $du$  (déplacement imposé dans l'essai).

Les équations (2) et (3) entraînent :

$$\frac{d\sigma}{du} = \left( \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right) \cdot \frac{d\varepsilon}{du} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^*} \cdot \frac{d\varepsilon^*}{du} \quad \left( \text{avec } \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \mathcal{N}'(\varepsilon) \right)$$

Soit

$$\frac{d\sigma}{du} = \left( \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right) \cdot \frac{1}{l_0} \frac{dl}{du} = E \frac{1}{l_0^*} \cdot \frac{dl^*}{du}$$

Or l'équation (1) implique :

$$\frac{dl}{du} + \frac{dl^*}{du} = 2$$

Soit

$$l_0 \cdot \frac{d\sigma}{du} \cdot \frac{1}{\left( \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right)} + l_0^* \cdot \frac{d\sigma}{du} \cdot \frac{1}{E} = 2$$

Ou finalement :

$$\frac{d\sigma}{du} = \frac{2}{\frac{l_0}{\left( \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right)} + \frac{l_0^*}{E}}$$

On constate que l'expression au dénominateur peut rester positive alors même que  $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$  devient négatif (phase adoucissante du joint). Un accroissement du déplacement de la roue s'accompagne alors d'un accroissement de contrainte que le joint n'est pas à même de supporter après le pic. On obtient dans ce cas la rupture fragile observée lors des essais.

La longueur d'ancrage définit en principe la longueur à partir de laquelle la rupture apparaît par traction excessive dans l'élément ancré avant que l'ancrage ne cède. Cette définition repose bien évidemment sur un comportement suffisamment ductile de l'ancrage pour qu'une augmentation de sa longueur s'accompagne d'une augmentation

proportionnelle de sa résistance.

Le comportement adoucissant observé ici ne permet pas de dimensionner l'ancrage à volonté en jouant sur sa longueur car il existe une longueur au delà de laquelle plus aucun gain de résistance ne peut être espéré. Cette longueur définira justement la longueur d'ancrage pour les ancrage simples étudiés ici. Précisément, comme couramment vu dans la littérature, on définira la longueur d'ancrage comme la distance à partir de laquelle le cisaillement de l'interface adhérente entre le renfort et le support ne vaut plus que 3% du cisaillement maximal (ce point sera développé plus loin).

### 5.5.1.2 Modèle de comportement pour ancrage simple

Afin de comprendre le fonctionnement du joint, nous partons des modèles présentés dans la littérature de O. Volkersen (1938) et Björn Täljsten pour les joints dont tous les constituants ont même largeur, en y apportant les modifications nécessaires pour définir le profil de contrainte de cisaillement le long du plan de collage lorsque support et renfort ont des largeurs différentes. Le modèle est assorti des conditions aux limites de l'essai de référence de l'AFGC et de l'essai du CSTB qui en est proche afin de comparer les comportements des joints en phase élastique.

On adopte pour simplifier un modèle de joint à simple recouvrement. l'extension au cas d'un joint à double recouvrement est immédiate et conduit aux mêmes conclusions.

Hypothèses :

- ◇ les matériaux sont homogènes, isotropes linéaires et élastiques
- ◇ la couche d'adhésif n'est soumise qu'à des efforts de cisaillement
- ◇ les épaisseurs des différents composants ainsi que la largeur de la bande de renfort, sont constantes le long de la ligne de joint
- ◇ les contraintes sont constantes dans l'épaisseur

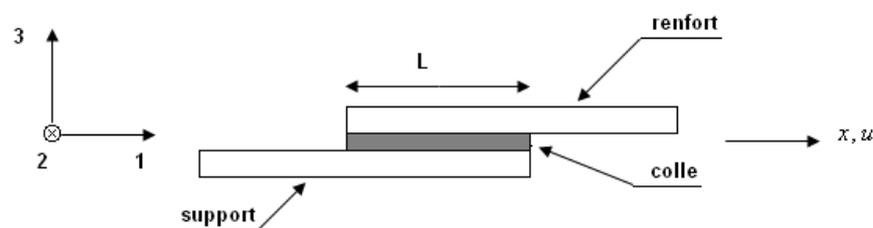


Figure 5.34 — Schéma du joint collé étudié

Ainsi les seules contraintes en jeu sont :

$$\sigma = \sigma_{11} ;$$

$$\tau = \tau_{13};$$

$E_1, e_1, b_1$  sont respectivement le module d'Young, l'épaisseur et la largeur du renfort ;  
 $E_2, e_2, b_2$  sont respectivement le module d'Young, l'épaisseur et la largeur du support ;  
 $G, e, b$  sont respectivement le module de cisaillement, l'épaisseur et la largeur du joint de colle ;

Pour le cas  $b \leq b_1$  et  $b \leq b_2$ , le problème statique est comme suit :

Equilibre statique :

$$\begin{cases} b\tau(x) = e_1 b_1 \sigma_1'(x) \\ b\tau(x) = e_2 b_2 \sigma_2'(x) \end{cases}$$

avec  $\sigma'(x) = \frac{d\sigma(x)}{dx}$ .

Compatibilité cinématique :

$$\gamma(x) = \frac{u_1(x) - u_2(x)}{e}$$

$\gamma(x)$  est la distorsion.

Lois de comportement :

$$\tau(x) = G\gamma(x); \quad \sigma_i(x) = E_i \varepsilon_i(x) \quad , \quad i = 1, 2$$

On obtient

$$\tau'(x) = \frac{G}{e} \left( \frac{\sigma_1(x)}{E_1} - \frac{\sigma_2(x)}{E_2} \right)$$

Soit

$$\tau''(x) = \frac{Gb}{e} \left( \frac{1}{E_1 e_1 b_1} + \frac{1}{E_2 e_2 b_2} \right) \tau(x)$$

On pose

$$w^2 = \frac{Gb}{e} \left( \frac{1}{E_1 e_1 b_1} + \frac{1}{E_2 e_2 b_2} \right)$$

Soit à résoudre

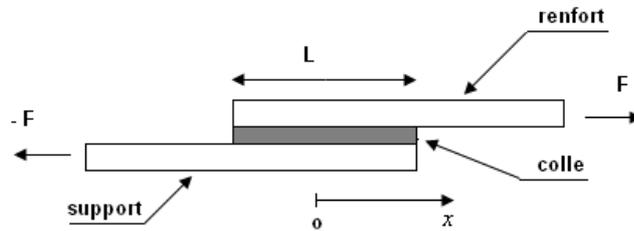
$$\tau''(x) - w^2 \tau(x) = 0$$

équation différentielle linéaire homogène du second ordre de solution générale :

$$\tau(x) = \alpha \cosh(wx) + \beta \sinh(wx)$$

Nous définissons à présent  $\alpha$  et  $\beta$  correspondant à l'essai AFGC d'abord et à l'essai CSTB ensuite pour les comparer.

a) **Conditions aux limites AFGC :**



*Figure 5.35 — Schéma du joint collé avec les conditions aux limites AFGC*

En centrant le repère au milieu du joint, nous avons

$$\tau' \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{G}{e} \cdot \frac{F}{b_1 e_1 E_1} \quad \text{et} \quad \tau' \left( -\frac{L}{2} \right) = \frac{G}{e} \cdot \frac{-F}{b_2 e_2 E_2}$$

Soit finalement

$$\tau(x) = \frac{\omega F}{2b} \left( \frac{\cosh(\omega x)}{\sinh(\omega \frac{L}{2})} + \frac{\sinh(\omega x)}{\cosh(\omega \frac{L}{2})} \cdot \frac{b_2 e_2 E_2 - b_1 e_1 E_1}{b_2 e_2 E_2 + b_1 e_1 E_1} \right) \quad (5.1)$$

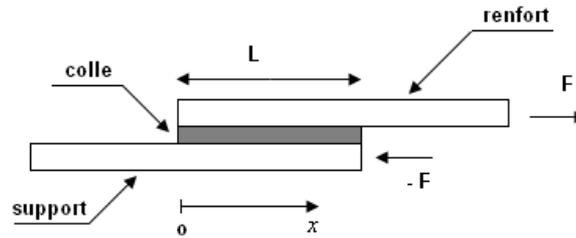
Si  $b_1 e_1 E_1 = b_2 e_2 E_2$  alors  $\tau$  est symétrique par rapport au milieu du joint. Cette condition connue sous le vocable "condition d'équilibrage" du joint permet de choisir le renfort qui assurera le meilleur fonctionnement du joint pour un support donné.

Le tableau ci-dessous contient les valeurs caractéristiques du corps d'épreuve.

Module de cisaillement du joint de colle : $G$ (MPa)	770
Module d'Young du renfort : $E_1$ (MPa)	105000
Module apparent du support : $E_2$ (MPa)	2600
Épaisseur du joint de colle : $e$ (mm)	0.3
Épaisseur du renfort : $e_1$ (mm)	0.48
(Demi)-épaisseur du support : $e_2$ (mm)	100
Largeur du joint de colle : $b$ (mm)	75
Largeur du renfort : $b_1$ (mm)	75
Largeur du support : $b_2$ (mm)	500
Longueur de bande collée : $L$ (mm)	400

**Tableau 5.3** — Valeurs utilisées pour la détermination du profil de cisaillement (ces valeurs correspondent à l'essai CSTB)

b) **Conditions aux limites CSTB :**



**Figure 5.36** — Schéma du joint collé avec les conditions aux limites CSTB

En centrant le repère sur le bord gauche du joint, nous avons maintenant

$$\tau'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \tau'(L) = \frac{G}{e} \cdot \left( \frac{F}{b_1 e_1 E_1} - \frac{-F}{b_2 e_2 E_2} \right) = \frac{\omega^2}{b} \cdot F$$

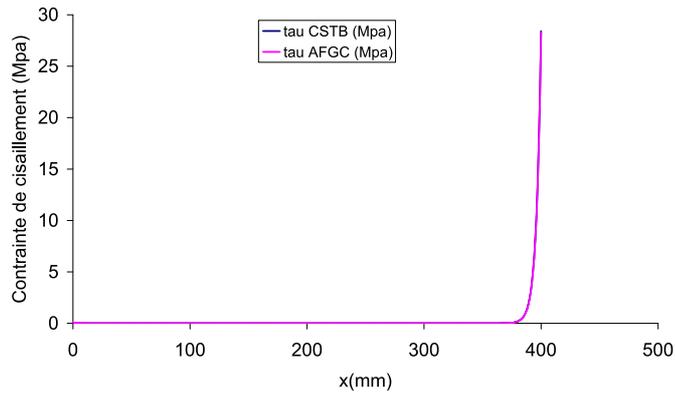
Soit finalement

$$\tau(x) = \frac{\omega F}{b} \cdot \frac{\cosh(\omega x)}{\sinh(\omega L)} \quad (5.2)$$

D'après la figure 5.30, la force de traction imposée par le vérin qui correspond à la limite du comportement élastique du joint de colle,  $N_{max}$ , est de 17 kN. Donc, la force de traction limite,  $F_{max}$ , appliquée à l'extrémité de chaque coté est égale à 8,5 kN. La formule (5.2) nous permet de calculer le cisaillement maximal dans le joint :

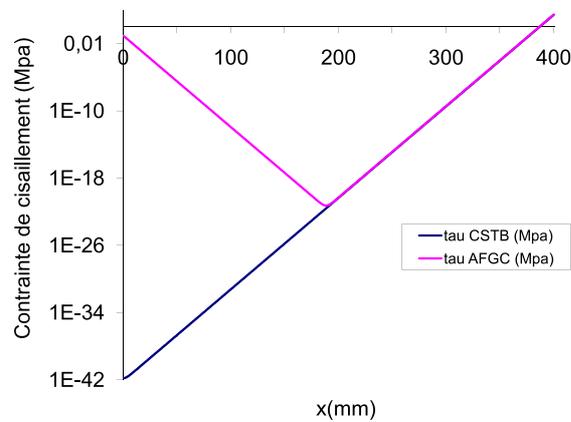
$$\tau_{max}(L) = \frac{\omega F_{max}}{b \tanh(\omega L)} = 28,7 \text{ MPa}$$

Nous présentons sur la figure suivante le profil de cisaillement que l'on obtient avec les valeurs du tableau 5.3 pour les deux types de conditions aux limites AFGC et CSTB.



**Figure 5.37** — Profil de cisaillement le long du joint collé

La parfaite superposition des deux courbes de la figure 5.37 est un cas très particulier. En effet, l'essai CSTB engendre toujours une contrainte nulle au bord libre du renfort. En revanche, c'est parce que la condition d'équilibrage n'est pas du tout observée dans la configuration présente (renfort :  $E_1 e_1 b_1 = 3,1 \text{ MN}$ , support :  $E_2 e_2 b_2 = 130 \text{ MN}$ ) que les conditions aux limites de l'AFGC engendrent le même profil. La représentation des mêmes profils dans un repère semi-logarithmique montre clairement la différence (figure 5.38).



**Figure 5.38** — Profil de cisaillement le long du joint collé (repère semi-logarithmique)

La figure 5.38 illustre l'influence de la sollicitation dans le support sur le profil de cisaillement dans le joint. Bien que cette influence soit masquée dans la situation présente particulière d'un renfort TFC sur un support en maçonnerie de béton, elle a pour conséquence dans le cas général de rendre l'essai CSTB sensiblement différent de l'essai AFGC, contrairement à l'objectif visé à l'origine. En situation réelle de mobilisation de l'adhérence du joint, le support sera sollicité en traction ou en flexion (ce qui revient au même pour le problème de l'ancrage) dans la très grande majorité des cas. Il conviendra en conséquence à l'avenir de modifier les conditions aux limites de l'essai CSTB pour le rendre conforme à l'essai AFGC et obtenir ainsi une caractéristique du joint dans une configuration proche de ses conditions réelles de fonctionnement. En préambule de la présentation à suivre des ancrages renforcés par des mèches, on peut remarquer que le profil de cisaillement obtenu aura pour conséquence de faire travailler successivement, et non conjointement, le joint collé et la mèche située à l'extrémité gauche du renfort. La combinaison joint collé et mèche sous la forme standard adoptée n'est donc pas optimale.

### 5.5.1.3 Détermination de la longueur d'ancrage

La longueur d'ancrage est définie comme la distance, du bord où le cisaillement est maximal, à laquelle le cisaillement ne représente plus que 3% du cisaillement maximal.

#### Longueur d'ancrage théorique pour un comportement élastique fragile

On note  $l_s$  la longueur d'ancrage. Les expressions précédentes de  $\tau(x)$  et  $\tau_{max} (= \tau(L))$  conduisent à l'expression suivante de  $l_s$  :

$$l_s = L - \frac{1}{\omega} \operatorname{Arccosh}(0,03 \cosh(\omega L)) = 15mm$$

Cette valeur très faible de la longueur d'ancrage est à considérer avec précaution car elle suppose que les lois linéaires élastiques postulées sont idéalement vérifiées. Nous préférons donc déterminer la longueur d'ancrage par une autre voie, dite expérimentale, car reposant sur la mesure des jauges de déformation collées sur le renfort. Cette méthode présente l'avantage de reposer sur des hypothèses plus faibles que précédemment puisque suppose simplement la linéarité du comportement du renfort.

#### Longueur d'ancrage expérimentale

Afin de déterminer une longueur d'ancrage expérimentale, les courbes de cisaillement sont étudiées pour le chargement limite déterminé précédemment. Il s'agit de déterminer à partir du profil des courbes de cisaillement la distance au bord libre à

laquelle le cisaillement atteint 3% de la valeur maximum. Les mesures des différents essais sont combinées pour obtenir le plus d'information possible sur le profil des courbes, particulièrement dans la zone éloignée du bord libre où peu de mesures ont été faites.

La figure 5.39 présente les déformations mesurées lors de l'essai 5 réalisé sur un échantillon à ancrage simple. Les valeurs sont prises pour les chargements mesurés sur le vérin de 6 à 17 kN, c'est à dire inférieurs aux chargements limites élastiques mis en évidence. Les déformations expérimentales concordent très bien avec le profil de déformation théorique.

Il est possible de calculer le cisaillement dans le joint, à partir des déformations expérimentales mesurées et de l'équation d'équilibre entre le joint et le renfort, selon la relation suivante :

$$\tau(x) = E_1 \cdot e_1 \cdot \frac{\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n}{x_{n+1} - x_n} \quad (5.3)$$

avec  $x = \frac{x_{n+1} + x_n}{2}$  et  $x_n$  lieu de mesure de la déformation  $\varepsilon_n$ .

Le cisaillement obtenu est un cisaillement moyen sur la longueur  $x_{n+1} - x_n$ , mais la cohérence et la proximité des mesures des déformations permettent d'obtenir une information suffisamment détaillée du cisaillement.

La figure 5.40 présente la contrainte de cisaillement "expérimentale" dans le joint de colle lors de l'essai 5 face 1, pour les chargements compris entre 6kN et 17kN. Sur les deux figures suivantes, l'axe de X est mesuré par rapport à la définition qui en a été donnée plus haut. L'origine coïncide ici avec le bord où le cisaillement est maximum.

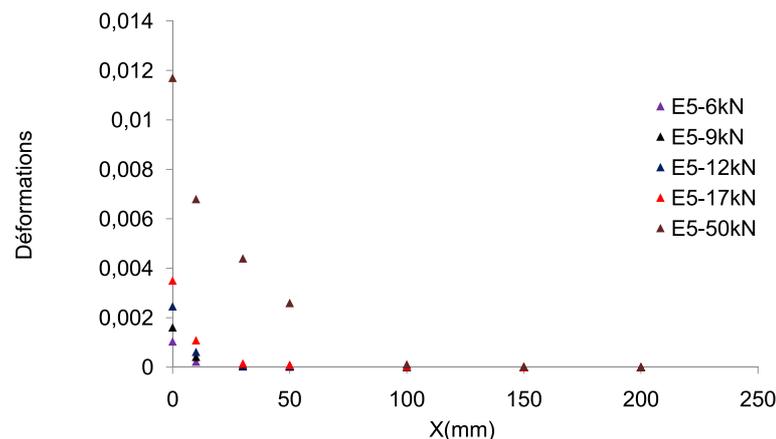
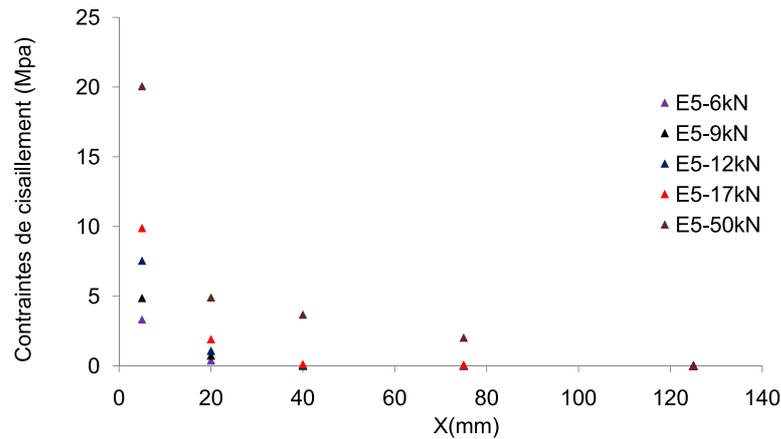


Figure 5.39 — Déformations du composite - E5 face 1

Le cisaillement maximal mesuré à 5 mm du bord libre est de  $10\text{Mpa}$ . La distance au bord libre à partir de laquelle la contrainte de cisaillement ne représente plus que 3% du cisaillement au bord libre est égale à 25 mm pour ce type d'échantillon.



**Figure 5.40** — Cisaillement de la colle - E5 face 1

L'écart entre la longueur d'ancrage trouvée par le modèle théorique et celle déterminée expérimentalement est probablement due au point de mesure du cisaillement maximal considéré dans chaque approche (au bord pour l'approche théorique et à 5mm du bord pour l'approche expérimentale). Cette explication de l'écart est justifiée par le fait que les contraintes décroissent très rapidement près du bord. La même mesure en prenant pour référence le point suivant (à 20mm du bord) conduirait à une longueur d'ancrage de 75mm. On observe donc une bonne cohérence entre le calcul et la mesure. A fin de tirer le meilleur parti de l'ancrage, on déterminera finalement la longueur d'ancrage pour la voie expérimentale en s'appuyant sur le profil de contrainte obtenu pour la force de traction maximale (à rupture), c'est-à-dire une force de traction de 25kN en moyenne. Le cisaillement maximal à 5mm du bord libre déterminé en se basant sur cette dernière est de 20Mpa et la longueur d'ancrage expérimentale associée est de 100mm.

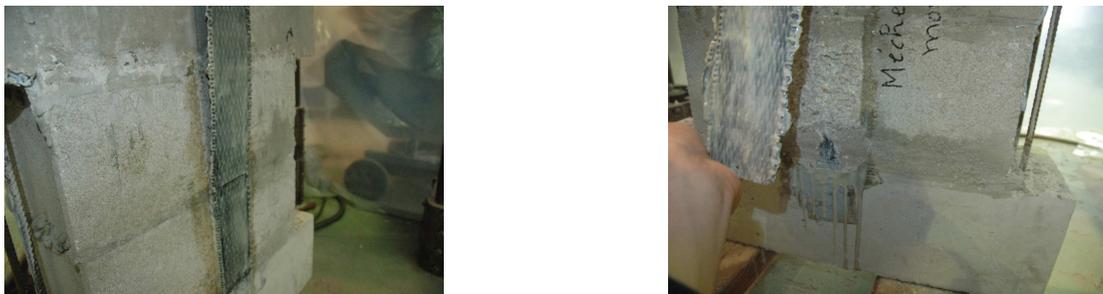
### 5.5.2 Comportement sous charge monotone croissante des ancrages avec mèche standard

Pour ce type de chargement, deux modes de rupture ont été observés. D'une part, la rupture du composite au niveau de la couche de recouvrement et, d'autre part, la rupture du composite au niveau de la mèche d'ancrage. Dans les deux cas, le délaminage démarre au niveau de l'arase supérieure du premier parpaing puis il se propage avec l'augmentation du chargement. Pour le premier mode de rupture, le délaminage s'arrête au niveau de la couche de recouvrement puis à partir de cette position c'est le TFC qui prend tout le chargement (module très fort) jusqu'à la rupture du composite au niveau de la couche de recouvrement (figure 5.41). Pour le deuxième mode de rupture, nous retrouvons les mêmes phases que pour le premier mode mais après la mise en tension

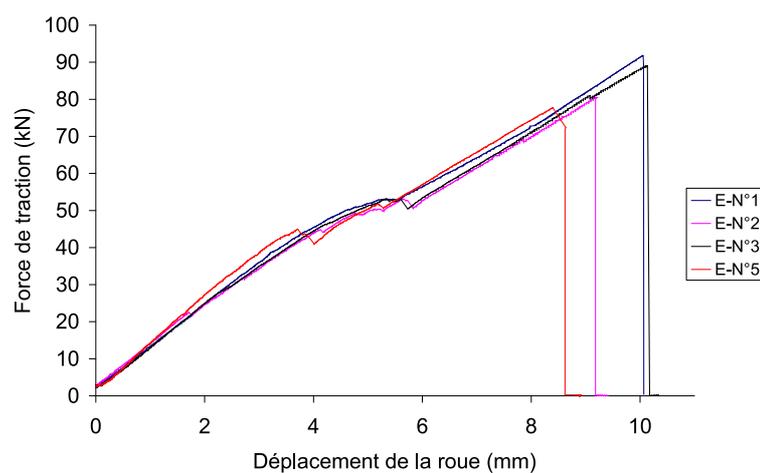
du TFC nous avons le délaminage brutal de la partie basse du composite et la rupture a lieu au niveau du composite à sa liaison avec la mèche d'ancrage.



*Figure 5.41* — Délaminage puis rupture du TFC au niveau de la couche de recouvrement



*Figure 5.42* — Délaminage puis rupture du TFC au niveau de la mèche d'ancrage



*Figure 5.43* — Courbes force/déplacement : ancrage avec mèche standard

Remarque : la force de traction est ici celle mesurée sur le vérin, soit le double de celle agissant sur le renfort et chaque zone d'ancrage.

On observe nettement ici, ce qui avait été annoncé plus haut, que le joint collé et la mèche d'ancrage travaillent successivement plutôt que conjointement. La première partie des courbes, jusqu'à 50kN environ sur le vérin, correspond à la seule mobilisation du joint collé. Cette partie est d'ailleurs quasiment superposable aux courbes de la figure 5.27 traitant de l'ancrage simple. Au delà, après délaminage complet, on retrouve un comportement élastique correspondant au comportement du renfort en zone libre jusqu'à la rupture de l'ancrage aux alentours de 80kN sur le vérin, valeur correspondant à la capacité d'ancrage garantie pour la mèche utilisée (40kN).

L'absence de ductilité observée ici encore aura pour conséquence une faible marge de manoeuvre pour le dimensionnement de l'ancrage.

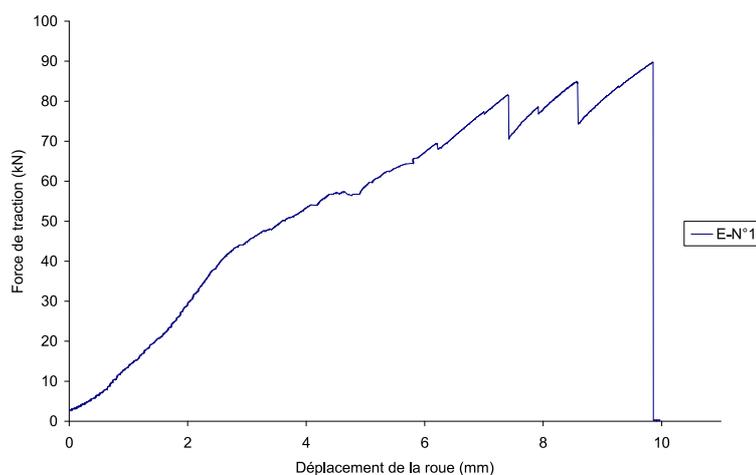
### 5.5.3 Comportement sous charge monotone croissante des ancrages avec mèche à chas

Dans cette série d'essais, un seul mode de ruine a été observé : après le délaminage total du composite sur toute la longueur collée des deux faces, c'est la mèche d'ancrage qui supporte la charge appliquée. La rupture finale a eu lieu au niveau des fibres de carbone enfilées dans la mèche d'une manière fragile. La charge à rupture observée dans les essais est comprise entre 42kN et 50kN.



*Figure 5.44* — Mode de rupture observé lors des essais avec ancrage de type mèche à chas

La forme de l'ancrage avec mèche à chas fait que le joint vient s'épauler sur le bloc dans la zone proche de la mèche. Cette particularité a pour conséquence qu'un frottement du renfort sur le support est mobilisable après délaminage. Les deux dents de scie avant la rupture sur la courbe témoignent du passage brutal du frottement au glissement dans la zone proche de la mèche sur une face puis sur l'autre du corps d'épreuve.



**Figure 5.45** — Courbes force/déplacement : ancrage avec mèche à chas

Remarque : la force de traction est ici celle mesurée sur le vérin, soit le double de celle agissant sur le renfort et chaque zone d'ancrage.

Les autres courbes ne sont pas montrées pour alléger la figure. On précise que la dispersion est faible sur les cinq essais.

Le bilan des essais sous charge monotone croissante est donné ci-dessous.

Mode de chargement	Type d'ancrage	Force de rupture (kN)	Description
Charge monotone croissante	ancrage simple	26.9	Rupture par délaminage, la rupture initiée sous la couche d'adhésif dans le béton se propage jusqu'à l'arrachement total du composite
		27.35	
		26.2	
		28.32	
	ancrage mèche standard	45.9	Deux cas de ruptures ont été observés (sans lien avec le niveau de résistance atteint), d'une part, au niveau du composite à l'extrémité de la partie qui recouvre la mèche et, d'autre part, au niveau de la fibre du carbone en liaison avec la mèche
		40.27	
		44.5	
		40.35	
		38.9	
ancrage mèche à chas	48.8	Rupture au niveau de la fibre du carbone en contact avec la mèche d'ancrage	
	45.05		
	42.3		
	44.86		
		46.5	

**Tableau 5.4** — Tableau récapitulatif du cas de chargement monotone croissant

### 5.5.4 Comportement sous charge cyclique répétée croissante

Cet essai est piloté en déplacement contrôlé, le chargement est constitué de trains de cycles d'amplitude croissante, chacun de ces trains comportant 30 cycles d'amplitude constante. Le saut de chargement entre deux trains successifs est de 5KN. Ce mode de chargement suit la méthode usuelle du CSTB pour l'analyse du comportement au séisme. 30 cycles par train sont choisis pour être proche de la trentaine de cycles forts observés en général en cas de séisme.

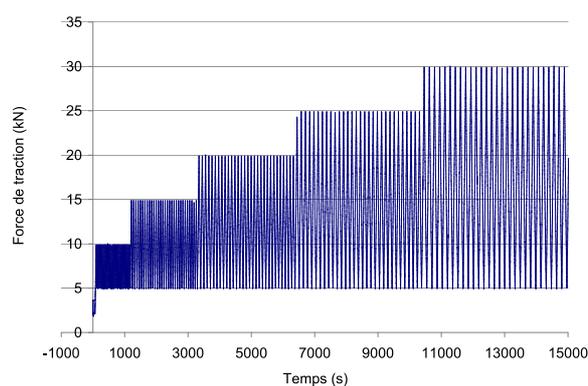


Figure 5.46 — Mode de chargement

#### 5.5.4.1 ancrage simple

Les courbes ci-dessous montrent l'évolution de l'effort appliqué à l'échantillon en fonction du déplacement de la roue.

Deux phases de comportement ont été observées :

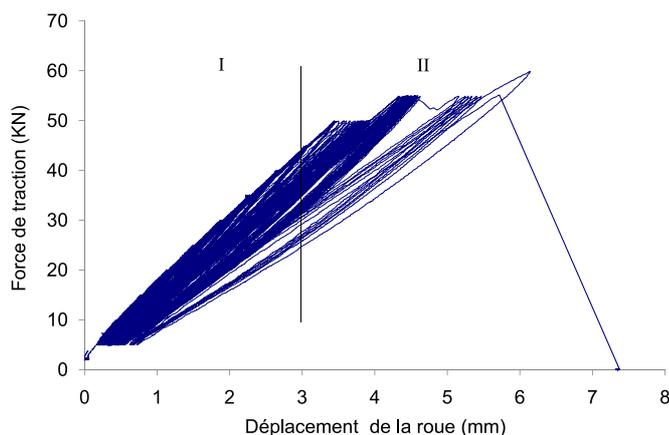
◇ *Phase élastique linéaire (I)*

Dans les premiers trains de cycles, nous avons constaté un comportement élastique linéaire de l'ensemble bloc/TFC.

◇ *Phase d'endommagement-rupture (II)*

Le délaminage du premier bloc de béton se produit pour une force de traction entre 25 KN et 28 KN (phase II). Le changement de pente sur la courbe force/déplacement (entre 4.5 et 5mm) marque le délaminage total du premier parpaing.

La propagation du délaminage suit l'augmentation de chargement jusqu'à la rupture totale de l'échantillon. Sur les trois essais réalisés, le même mode de rupture a été observé et les valeurs de rupture sont très serrées.



**Figure 5.47** — Courbe force/déplacement

*Remarque : la force de traction est ici celle mesurée sur le vérin, soit le double de celle agissant sur le renfort et chaque zone d'ancrage.*

On constate que la courbe enveloppe du comportement sous sollicitations cycliques est quasiment identique à la courbe obtenue sous charge monotone croissante (voir figure 5.27). Ce résultat indique que l'application préalable de cycles de chargements faibles ne fatigue pas la liaison renfort-support. Sur le plan du dimensionnement (vérification par calcul au séisme), cette observation a pour heureuse conséquence de rendre directement applicables les approches modales spectrales et les approches statiques équivalentes telles que l'analyse en poussée progressive (push over).

#### 5.5.4.2 ancrage mèche standard

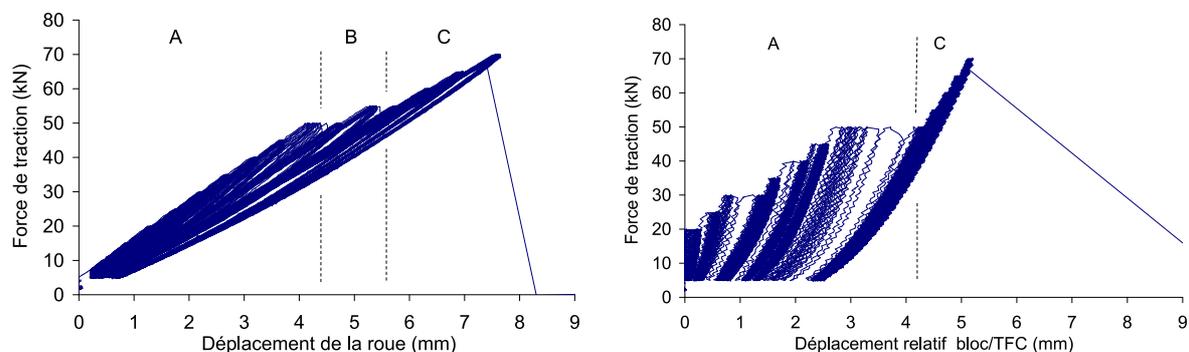
Nous avons pu à ce stade de la campagne d'essais bénéficier de voies de mesures supplémentaires. Nous avons alors ajouté un capteur de déplacement au niveau de l'arase supérieure du bloc supérieur. Ce capteur livre une information complémentaire de celui disposé sur la roue.

Nous observons différentes phases de comportement :

- ◇ *Zone A* : délaminage du premier bloc de la face 1,
- ◇ *Zone B* : délaminage du premier bloc de la face 2,
- ◇ *Zone C* : extension du TFC puis rupture brutale au niveau des fibres de carbone en contact avec la mèche d'ancrage,

La courbe de la force de traction en fonction du déplacement relatif entre le bloc et

le TFC montre l'avancement du délaminage avec les cycles de chargement.



**Figure 5.48** — Courbe force/déplacement : rupture au niveau de la fibre du carbone en liaison avec la mèche d'ancrage

Remarque : la force de traction est ici celle mesurée sur le vérin, soit le double de celle agissant sur le renfort et chaque zone d'ancrage.

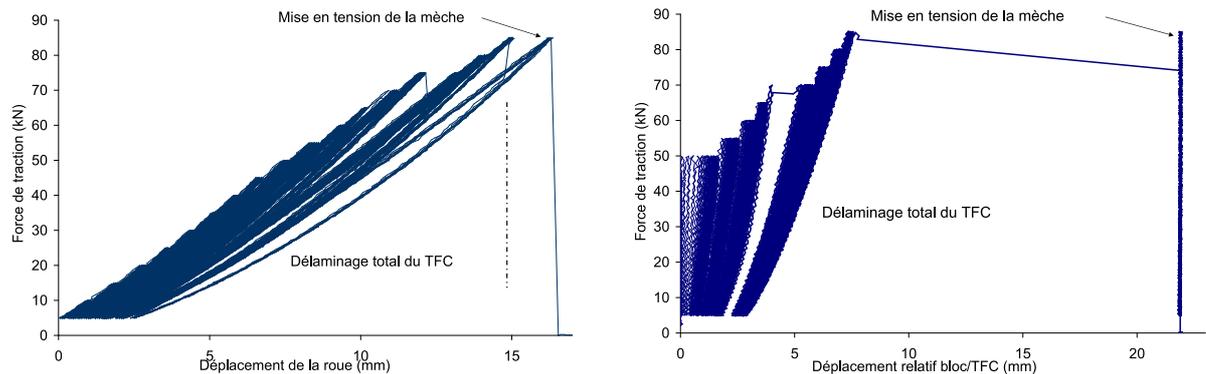
Sur les trois essais réalisés, le même mode de rupture a été observé et les valeurs de rupture sont très serrées.

On constate ici aussi que la courbe enveloppe du comportement sous sollicitations cycliques est quasiment identique à la courbe obtenue sous charge monotone croissante avec une légère baisse de la résistance finale de rupture (voir figure 5.43). Ce résultat indique que l'application préalable de cycles de chargements faibles ne fatigue pas la liaison renfort-support.

### 5.5.4.3 ancrage mèche à chas

Dans cette série d'essais, nous retrouvons le même mode de ruine que l'essai monotone croissant : le délaminage avance avec le chargement et la rupture finale a lieu dans les fibres de carbone en liaison avec la mèche d'ancrage.

Ici aussi, on constate que la courbe enveloppe du comportement sous sollicitations cycliques est quasiment identique à la courbe obtenue sous charge monotone croissante (voir figure 5.45).

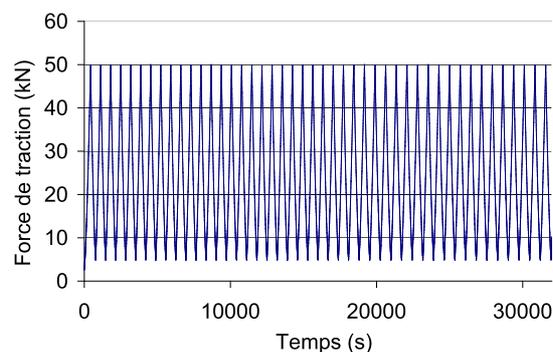


**Figure 5.49** — Courbe force/déplacement : rupture au niveau de la mèche d'ancrage

Remarque : la force de traction est ici celle mesurée sur le vérin, soit le double de celle agissant sur le renfort et chaque zone d'ancrage.

### 5.5.5 Comportement sous charge cyclique répétée constante

C'est un essai cyclique répété d'amplitude constante. Cet essai est piloté en déplacement avec une amplitude de chargement imposée à 90% de la force de ruine trouvée par l'essai cyclique répété croissant. Comme on l'a indiqué au début du chapitre, l'objectif de ce type d'essai est la détermination de la marge de sécurité offerte par l'ancrage vis-à-vis du nombre de cycles standard d'excitation sismique.



**Figure 5.50** — Mode de chargement

#### 5.5.5.1 ancrage simple

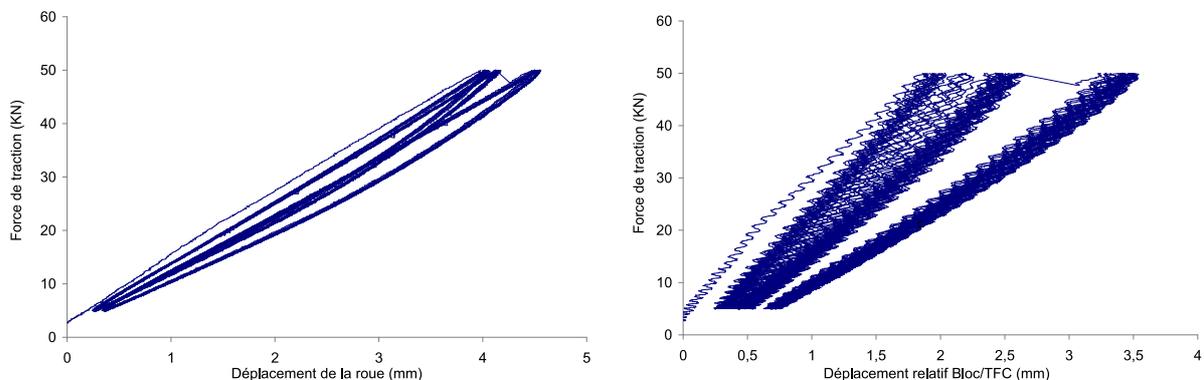
Nous avons pris pour cet essai un chargement de 50kN (figure5.50).

Dans cet essai, nous avons mesuré le déplacement relatif entre le bloc et le TFC collé à l'aide d'un capteur de déplacement LVDT L10 installé au niveau de l'arase supérieure

de l'élément de maçonnerie. Cette mesure nous a montré l'évolution du délaminage au cours des cycles de chargement (figure 5.51).

Le délaminage apparaît au niveau de l'arase supérieure de l'élément de maçonnerie dès le premier cycle de chargement. Le décollement du composite avance de plus en plus avec les cycles de chargement jusqu'à atteindre le joint de mortier qui sépare les deux bloc de béton creux (entre 2.5 et 3mm sur la courbe force de traction/déplacement relatif bloc-TFC).

Dans cet essai, nous avons fait plus que 200 cycles de chargement. La rupture totale de l'échantillon n'est pas atteinte.



**Figure 5.51** — Courbe force/déplacement : échantillon à ancrage simple

*Remarque : la force de traction est ici celle mesurée sur le vérin, soit le double de celle agissant sur le renfort et chaque zone d'ancrage.*

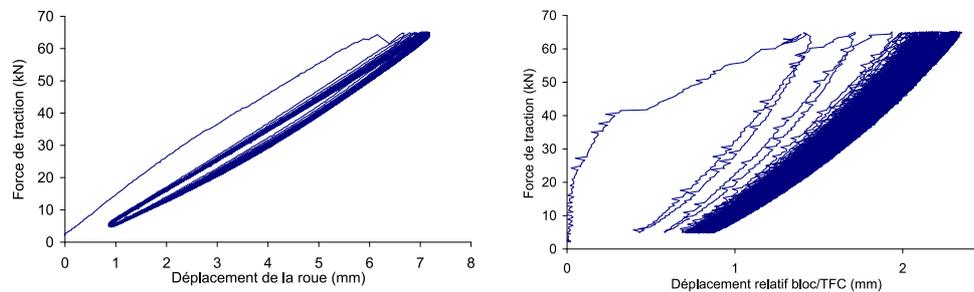
On constate que l'ancrage est capable de supporter 90% du chargement maximal sous un nombre de cycles supérieur à 200, donc grand vis-à-vis du nombre standard de cycles forts d'un séisme. On précise que la valeur du chargement est supérieure à la valeur caractéristique qui sera retenue pour la vérification au séisme du fait de la dispersion. En effet, bien que faible, la dispersion engendrera une valeur caractéristique inférieure de plus de 10% à la valeur moyenne de résistance obtenue par essai du fait du petit nombre d'essais (coefficient de fractile élevé). Le constat fait conclure à une marge de sécurité satisfaisante en cas de dépassement du nombre standard de cycles forts lors d'un séisme (30 cycles).

### 5.5.5.2 ancrage mèche standard

Pour cet essai, l'amplitude du chargement prise en compte est de  $65kN$ .

Au cours de cet essai, nous remarquons un délaminage important dès le 1<sup>er</sup> cycle puis l'accommodation se transformant rapidement en une adaptation. Le délaminage

du TFC a lieu sur les deux faces du bloc supérieur de l'élément de maçonnerie (Nous avons fait plus que 200 cycles de chargement sans atteindre la rupture).



**Figure 5.52** — Courbe force/déplacement : Échantillon avec ancrage mèche standard

*Remarque : la force de traction est ici celle mesurée sur le vérin, soit le double de celle agissant sur le renfort et chaque zone d'ancrage.*

Le constat fait conclure là encore à une marge de sécurité satisfaisante en cas de dépassement du nombre standard de cycles forts lors d'un séisme (30 cycles).

### 5.5.5.3 ancrage mèche à chas

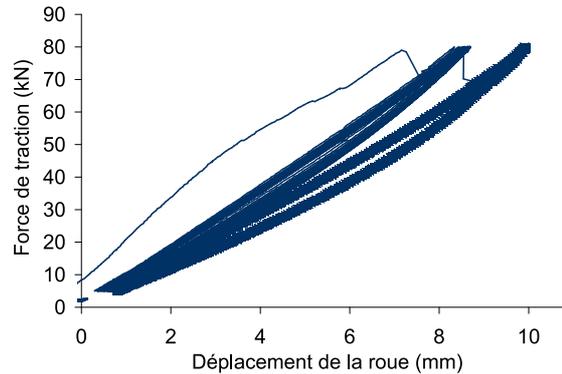
Pour cet essai, l'amplitude du chargement prise en compte est de 80kN.

Un délaminage important apparaît dès le 1<sup>er</sup> cycle de chargement : le délaminage total du TFC sur toute longueur collée de la face 1 et sur la longueur du premier bloc de la face 2. Après une trentaine de cycles, le délaminage total de la deuxième face a eu lieu. Après le délaminage total du TFC, c'est la mèche d'ancrage qui supporte tout le chargement.

Pour plus que 200 cycles de chargement, la rupture de l'échantillon n'est pas atteinte.

Cet essai a été réalisé avant que le capteur supplémentaire à l'arase supérieure de premier parpaing ne soit mis.

Ce type d'ancrage est aussi capable de supporter 90% du chargement maximal sous un nombre de cycles supérieur à 200. Donc la conclusion retirée de cet essai est la même que pour les deux autres types d'ancrages.



**Figure 5.53** — Courbe force/déplacement : Échantillon avec ancrage mèche à chas

Remarque : la force de traction est ici celle mesurée sur le vérin, soit le double de celle agissant sur le renfort et chaque zone d'ancrage.

## 5.6 conclusion

Ce chapitre a fait état de la campagne expérimentale importante réalisée sur le comportement de trois procédés d'ancrage de renforts en tissus de fibres de carbone sur un support en maçonnerie de blocs creux en béton. Les enseignements tirés de cette campagne sont nombreux. Ils concernent d'abord les procédés d'ancrage eux mêmes. Également, ils ont mis en évidence les défauts du protocole d'essai adopté.

Concernant les ancrages, la campagne expérimentale a révélé les points suivants :

- ◇ Le délaminage du composite apparaît dans les zones tendues en commençant par les zones les plus sollicitées (à l'arase supérieure du premier parpaing). La rupture de l'interface bloc/TFC, dans le cas d'un ancrage simple, s'est produite pour des forces de tractions comprises entre 25 et 30kN.
- ◇ Du fait de l'absence de ductilité de l'ancrage, la définition usuelle de la longueur d'ancrage (longueur à partir de laquelle l'élément ancré rompt par traction excessive avant que l'ancrage ne cède) est remplacée par la définition suivante. La longueur d'ancrage est ici définie comme la distance à laquelle le cisaillement ne représente plus que 3% du cisaillement maximal. Pour le chargement maximal atteint la longueur d'ancrage mesurée expérimentalement est environ 100mm.
- ◇ Pour les configurations d'ancrage testées, le joint collé et la mèche d'ancrage travaillent successivement plutôt que conjointement. Une première phase de comportement, jusqu'à 25kN, correspond à la seule mobilisation du joint collé. Cette partie est d'ailleurs quasiment superposable pour les trois types d'ancrage. Au delà, après délaminage complet, on retrouve un comportement élastique correspondant au comportement du renfort en zone libre jusqu'à la rupture des fibres

au niveau des mèches d'ancrage aux alentours de 40kN pour l'ancrage standard et 45kN pour les mèches à chas. Ces valeurs sont cohérentes avec la capacité d'ancrage garantie pour les deux mèches utilisées. On ajoute que des petites mèches réparties dans la zone d'ancrage conduiraient sans doute à de meilleurs résultats.

- ◇ Les courbes enveloppes du comportement sous sollicitations cycliques croissantes sont quasiment identiques aux courbes obtenues sous charges monotones croissantes. Ce résultat indique que l'application préalable des cycles de chargement faibles ne fatigue pas la liaison renfort-support. Sur le plan du dimensionnement (vérification par calcul au séisme), cette observation a pour conséquence de rendre directement applicables les approches modales spectrales et les approches statiques équivalentes telles que l'analyse en poussé progressive (push over). Par ailleurs, les essais de chargements cycliques constants montrent une marge de sécurité satisfaisante en cas de dépassement du nombre standard des cycles forts lors d'un séisme (30 cycles).

Concernant le protocole d'essai, on a noté deux points méritant que des modifications soient apportées :

- ◇ Le corps d'épreuve devra comporter une longueur libre de renfort très faible pour éviter que l'énergie de déformation accumulée dans cette zone n'empêche de suivre la phase adoucissante du comportement du joint .
- ◇ Les conditions aux limites adoptées dans l'essai CSTB mettent le support en compression plutôt qu'en traction comme c'est le cas dans l'essai AFGC. Sans conséquence sur les essais réalisés du fait de la très faible rigidité de membrane du renfort vis-à-vis de celle du support, cette distinction a pour défaut dans un cadre plus général d'empêcher de mettre en évidence l'intérêt de respecter la "condition d'équilibrage" du joint. Il conviendra en conséquence à l'avenir de modifier les conditions aux limites de l'essai CSTB pour le rendre conforme à l'essai AFGC et obtenir ainsi une caractéristique du joint dans une configuration proche de ses conditions réelles de fonctionnement.



---

# Conclusions et Perspectives

Dans ce travail, nous avons pour objectif l'étude du comportement d'une structure maçonnerie renforcée par des bandes collées en tissus de fibre de carbone (TFC). Notre contribution concerne les aspects théoriques, numériques et expérimentaux.

Du point de vue théorique, une première partie de la thèse a été consacrée à la détermination d'un modèle de rupture pour les murs en maçonnerie non renforcée sollicités dans leur plan. Nous avons d'abord construit un modèle analytique ne prenant en compte que les ruptures de joints. Ce modèle, considérant les blocs comme infiniment résistants, s'est avéré insuffisant pour reproduire l'ensemble des modes de ruine observés expérimentalement. Notre analyse du comportement d'une structure élémentaire maçonnerie sous chargements homogènes nous a conduit à proposer un modèle plus riche mis en oeuvre par la méthode d'homogénéisation numérique tridimensionnelle. Ce travail de simulation, fait sur le logiciel aux éléments finis Abaqus, nous a permis d'identifier deux modes de rupture caractérisant le comportement des blocs dans une structure maçonnerie sollicitée dans son plan : une rupture par traction-cisaillement du bloc et une autre par compression. A la fin de cette partie, nous avons proposé un critère permettant de reproduire l'ensemble des modes de ruptures observés sur les murs en maçonnerie chargés dans leur plan. Ce modèle tient compte, à la fois, des ruptures d'interfaces et des ruptures de blocs. La validation du modèle proposé est faite en se basant sur les résultats expérimentaux de Page (1981-1983).

Dans un second temps, notre contribution a consisté à mettre en oeuvre un outil de modélisation et de prédiction numérique du comportement des structures maçonneries soumises à des sollicitations quelconques dans leur plan. Notre choix s'est porté sur l'implémentation, dans des éléments bidimensionnels en contrainte plane, du modèle de rupture proposé dans le code aux éléments finis "Abaqus" par le biais d'une subroutine UMAT, routine permettant à un utilisateur d'introduire la loi de comportement de son choix. Un premier travail a consisté à valider l'implémentation du modèle par

confrontation avec des simulations numériques tridimensionnelles. Nous avons alors réalisé des simulations numériques de murs maçonnés soumis dans leur plan à des charges gravitaires et à des charges horizontales. Les résultats obtenus ont montré une bonne cohérence avec les configurations, rencontrées dans la littérature, de murs assurant le contreventement.

Nous avons également réalisé une importante campagne d'essais sur le comportement de trois procédés d'ancrage par adhérence de renforts en tissus de fibre de carbone sur un support en maçonnerie de blocs creux en béton : un échantillon à ancrage simple et deux échantillons dont l'ancrage est renforcé par la présence d'une mèche (ancrage mèche standard et ancrage mèche à chas). Ces deux types de mèches correspondent à des situations différentes d'ancrage : dans un chaînage pour le premier et dans une semelle de fondation pour le second. On rappelle ici les deux enseignements principaux parmi ceux, nombreux, tirés de cette campagne. La rupture de l'interface bloc/renfort a lieu par un délaminage qui apparaît dans les zones tendues en commençant par les zones les plus sollicitées. La longueur d'ancrage, définie comme la distance à laquelle le cisaillement ne représente plus que 3% du cisaillement maximal, mesurée expérimentalement est d'environ 100mm.

Les perspectives de ce travail sont nombreuses. Pour qui concerne les maçonneries non renforcées, il sera intéressant de :

- ◇ faire une étude paramétrique sur les résistances des matériaux constitutifs (joints et blocs) ;
- ◇ étudier l'influence de l'élancement des murs sur leur comportement ;
- ◇ étendre les possibilités du modèle au cas de joints horizontaux et verticaux différents. Il est courant que les joints verticaux ne soient pas remplis de mortier ;
- ◇ étendre les possibilités du modèle à la prise en compte du comportement hors plan des structures maçonnées.

Pour les maçonneries renforcées, les tâches complémentaires suivantes sont prévues :

- ◇ l'intégration du comportement des éléments de renfort dans les simulations numériques sur le code aux éléments finis "Abaqus" en s'appuyant sur la campagne expérimentale réalisée ;
- ◇ la confrontation des résultats de modélisations de murs maçonnés renforcés par tissus collés avec ceux de la campagne expérimentale en vraie grandeur réalisée au CSTB sur murs en maçonnerie renforcée et non renforcée ;
- ◇ une étude paramétrique sur les configurations de renfort pour comprendre leur apport et optimiser celui-ci.

# Annexes



# A

---

## Calcul à la rupture

### A.1 Principe du calcul à la rupture

Le calcul à la rupture constitue le cadre mécanique à la fois rigoureux et cohérent dans lequel nous étudions la stabilité des ouvrages en maçonnerie.

Le calcul à la rupture s'appuie sur la connaissance de la géométrie du système considéré, du mode de chargement qui lui est appliqué et des capacités de résistance des matériaux constitutifs. Ceci constitue le règlement du calcul à la rupture. Une condition nécessaire pour que la stabilité de l'ouvrage soit assurée est la compatibilité entre les équations exprimant l'équilibre quasi-statique du système et les conditions imposées par les capacités de résistance des matériaux :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Stabilité potentielle} \\ \text{de l'ouvrage} \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{compatibilité} \left\{ \begin{array}{l} \text{équation du système} \\ \text{capacités de résistance des matériaux} \end{array} \right.$$

Le terme "potentielle" exprime le fait que la compatibilité entre l'équilibre du système et les capacités de résistance des matériaux constitutifs ne constitue qu'une condition nécessaire de stabilité (leur incompatibilité assure donc une instabilité certaine). Nous renvoyons à Salençon (1983) pour un exposé plus détaillé sur le lien de stabilité potentielle et stabilité effective. Retenons toutefois, que la pertinence de la démarche du calcul à la rupture, c'est à dire équivalence entre stabilité potentielle et stabilité effective, est assurée dès lors que le comportement des matériaux constituant le système présente une ductilité.

### A.1.1 Domaine des chargements potentiellement supportables

Considérons un système mécanique, occupant un volume  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ , soumis à un mode de chargement  $\mathbf{Q} = (Q_i)_{i=1,n}$  dépendant d'un nombre fini  $n$  de paramètre. On désigne par  $G(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^6$  le convexe de résistance du milieu constitutif au point  $\mathbf{x}$  de  $\Omega$ .

L'objet du calcul à la rupture est la détermination du domaine  $\mathbf{K}$  des chargements  $\mathbf{Q}$  potentiellement supportables par l'ouvrage, c'est à dire pour lesquels il est possible de mettre en évidence au moins un champ de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  statiquement admissible (SA) avec  $\mathbf{Q}$  et respectant en tout point du système les capacités de résistance du milieu constitutif :

$$\mathbf{K} = \{ \mathbf{Q} \mid \exists \boldsymbol{\sigma} \text{ S.A. avec } \mathbf{Q}, \forall \mathbf{x} \in \Omega, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \in G(\mathbf{x}) \} \quad (\text{A.1})$$

La géométrie étant fixée, la détermination du domaine  $\mathbf{K}$  ne nécessite que la connaissance des capacités de résistance du milieu constituant le système et non de sa loi de comportement complète.

Déoulant directement des propriétés de  $G(\mathbf{x})$ , le domaine  $\mathbf{K}$  possède les propriétés suivantes :

- Le chargement nul  $Q = 0$  appartient à  $\mathbf{K}$ , dès que  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \in G(\mathbf{x})$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ ,
- $\mathbf{K}$  est convexe.

Afin d'illustrer la démarche du calcul à la rupture et la construction de  $\mathbf{K}$ , nous allons examiner le cas d'un ouvrage particulier : il s'agit d'un mur en maçonnerie de hauteur  $H$  et de longueur  $L$ . le milieu constitutif est composé des bloc sains traversés par un réseau de deux familles de joints (supposés ici perpendiculaires). Les joints sont modélisés comme des interfaces et on désigne par  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  leurs vecteurs normaux.

Les capacités de résistance décrites par :

- Un domaine  $G^m$  des contraintes admissibles pour le bloc, supposé homogène.
- Un domaine  $G^i$  de  $\mathbb{R}^3$  pour chaque joint  $i$  de normale  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2$ , des vecteurs-contraintes  $\mathbf{T}$  admissibles pour le joint.

Le domaine de résistance local  $G(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^6$  peut être défini par :

$$\boldsymbol{\sigma} \in G(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_i \in G^i & \text{si } \mathbf{x} \in \text{joint } i, i = 1, 2 \\ \boldsymbol{\sigma} \in G^m & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

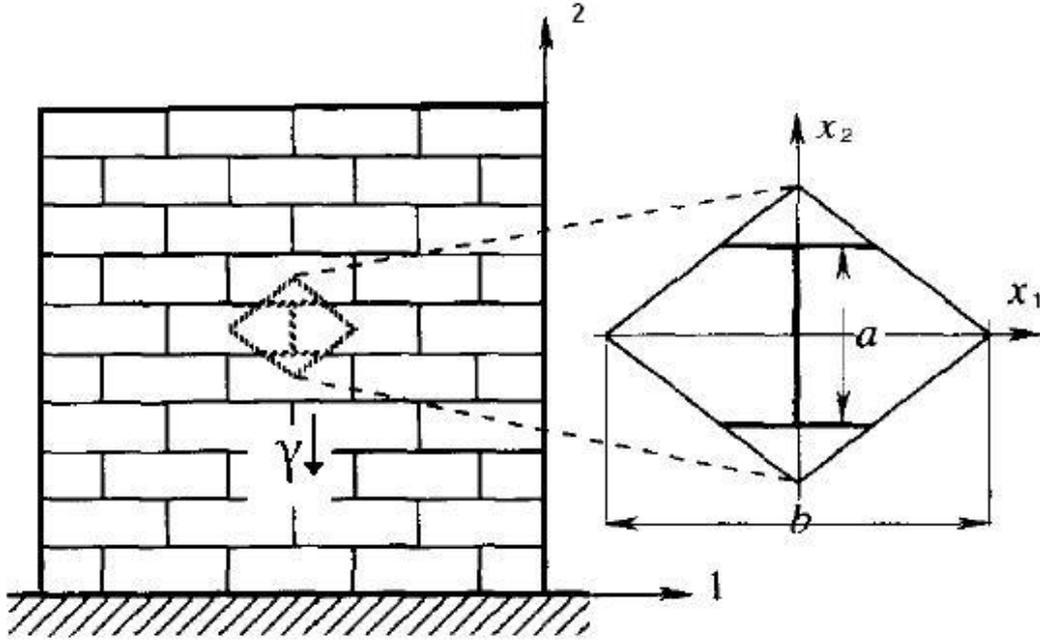


Figure A.1 — Etudes de stabilité d'un mur en maçonnerie

Concernant le chargement de l'ouvrage, le point volumique  $\gamma$  constitue l'unique paramètre de chargement. la définition (A.1) du domaine  $\mathbf{K}$  devient alors :

$$\gamma \in \mathbf{K} \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{\sigma} S A \text{ avec } \gamma | \boldsymbol{\sigma} \in G(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{A.3})$$

En désignant par  $\gamma^+$  la valeur de  $\gamma$ , il vient :

$$\mathbf{K} = [0, \gamma^+] \quad (\text{A.4})$$

Dans ce cas particulier, déterminer le domaine  $\mathbf{K}$  revient à déterminer  $\gamma^+$ . Nous disposons pour la construction du  $\mathbf{K}$  de deux approches : l'approche statique et l'approche cinématique.

### A.1.2 Approche statique par l'intérieur de $\mathbf{K}$

Cette approche consiste à mettre en oeuvre directement la définition (A.3) de  $\mathbf{K}$ . Elle est basée sur la construction de champs de contraintes statiquement admissibles

avec les données en efforts et qui sont compatibles avec les capacités de résistance du milieu constitutif. Soit  $\boldsymbol{\sigma}_0$  un tel champ. Il s'ensuit que la valeur  $\gamma_s$  du chargement  $\gamma$  équilibrée par  $\boldsymbol{\sigma}_0$  appartient au domaine  $\mathbf{K}$ .  $\gamma = 0$  appartient à  $\mathbf{K}$ , la capacité de convexité de ce domaine implique que le domaine  $K_s = [0, \gamma_s]$  est inclus dans  $\mathbf{K}$ . Il en constitue une estimation par l'intérieur (ou encore,  $\gamma_s$  est un minorant de  $\gamma^+$ ).

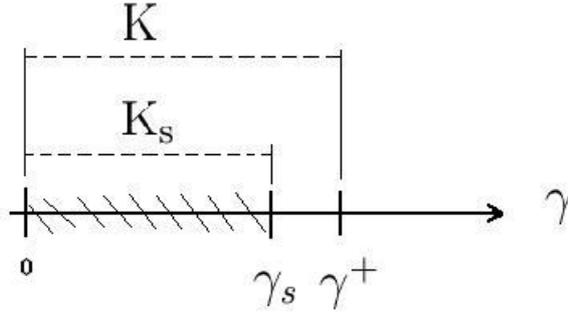


Figure A.2 — Approche par l'intérieur de  $K$

### A.1.3 Approche par l'extérieur de $\mathbf{K}$

L'approche par l'extérieur cinématique découle de la dualisation des équations d'équilibre sous la forme du principe des puissances virtuelles. Soit  $\mathbf{v}$  un champ de vitesse virtuel quelconque défini sur  $\Omega$  et cinématiquement admissible (CA) avec des données en vitesse du problème. Le théorème cinématique du calcul à la rupture s'énonce de la manière suivante :

$$Q(= \gamma) \in K \Rightarrow P_{\text{ext}}(\mathbf{v}) \leq P_{\text{rm}}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \text{ CA} \quad (\text{A.5})$$

Dans cette relation, le terme  $P_{\text{ext}}(\mathbf{v})$  désigne la puissance virtuelle des efforts extérieurs développée dans le champ  $\mathbf{v}$ . Elle se réduit pour l'exemple considéré à :

$$P_{\text{ext}}(\mathbf{v}) = Q \cdot \dot{q}(\mathbf{v}) = \gamma \int_{\Omega} v_y d\Omega \quad (\text{A.6})$$

la puissance résistance maximale  $P_{\text{rm}}(\mathbf{v})$  développée dans  $\mathbf{v}$  s'exprime par :

$$P_{\text{rm}}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \pi(\mathbf{d}(\mathbf{x})) d\Omega + \int_{\Sigma} \pi(\mathbf{n}(\mathbf{x}), [\mathbf{v}(\mathbf{x})]) dS \quad (\text{A.7})$$

$\mathbf{d}(\mathbf{x})$  désigne le tenseur taux de déformation associé à  $\mathbf{v}$  au point  $\mathbf{x}$  et

$$\pi(\mathbf{d}(\mathbf{x})) = \sup \{ \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}(\mathbf{x}) ; \boldsymbol{\sigma} \in G(\mathbf{x}) \} \quad (\text{A.8})$$

$\Sigma$  désigne l'ensemble des surfaces de discontinuités de la vitesse,  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  la normale au point  $\mathbf{x}$  de  $\Sigma$  et  $[\mathbf{v}(\mathbf{x})]$  la saut de la vitesse au même point. la fonction  $\pi(\mathbf{n}(\mathbf{x}), [\mathbf{v}(\mathbf{x})])$  est définie par :

$$\pi(\mathbf{n}(\mathbf{x}), [\mathbf{v}(\mathbf{x})]) = \sup \{ \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{x})] ; \boldsymbol{\sigma} \in G(\mathbf{x}) \} \quad (\text{A.9})$$

Les fonctions  $\pi$  sont les fonctions d'appui du convexe  $G(\mathbf{x})$ . Leur donnée est équivalente à la donnée de  $G(\mathbf{x})$ .

Le théorème cinématique du calcul à la rupture exprimé par la relation (A.5) fournit une approche par l'extérieur de  $\mathbf{K}$ . En effet :

$$\mathbf{K} \subset \bigcap_{\mathbf{v} \in \mathcal{CA}} \{ \mathbf{Q} ; P_{\text{ext}}(\mathbf{v}) \leq P_{\text{rm}}(\mathbf{v}) \} \quad (\text{A.10})$$

L'inclusion devient une égalité sous certaines conditions (voir l'exemple de Friaâ et Frémond, 1978), conditions qui sont généralement satisfaites pour les milieux qu'on considérera. Ceci assure l'équivalence entre les approches statique et cinématique du calcul à la rupture.

En pratique, l'ingénieur n'expliquera que quelques classes de champ de vitesse virtuels (mécanismes de rupture) bien choisis, lui permettant d'estimer  $\mathbf{K}$  par excès. Il se satisfera d'une bonne approche par l'extérieur, compromis entre les moyens mis en oeuvre et la qualité de l'approximation obtenue. A titre d'exemple, reprenons l'ouvrage de Figure A.2 et considérons la classe de mécanismes virtuels de rupture définie par :

- Le bloc OAB est en translation avec une vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}$  constante, dont la composante verticale est dirigée vers le bas :  $U_y = \mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_y < 0$  ou encore  $\psi \prec \alpha$ ,
- Le reste de l'ouvrage est immobile  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

Cette classe de mécanisme dépend de deux paramètres :  $\psi$  et  $\alpha$ . la puissance des efforts extérieurs développée dans un tel champ par unité de longueur transversale est :

$$P_{\text{ext}}(\mathbf{v}) = \gamma |U_y| S \quad (\text{A.11})$$

$S$  est la surface du bloc OAB.

Le champ des taux de déformation associé est identiquement nul ( $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ ). Par contre,  $\mathbf{v}$  est discontinu le long de AB et  $[\mathbf{v}] = \mathbf{U}$ . La puissance résistante maximale par unité de longueur transversale se réduit à :

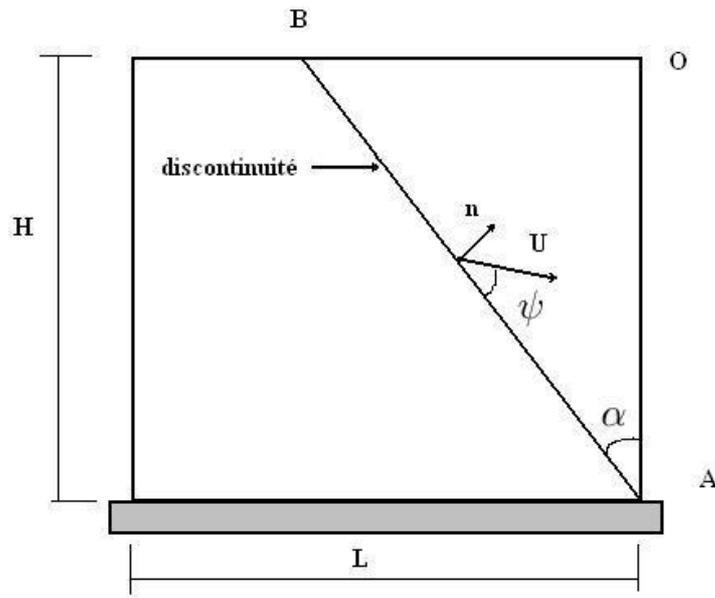


Figure A.3 — Exemple de mécanisme virtuel de rupture

$$P_{\text{rm}}(\mathbf{v}) = \int_{AB} \pi(\mathbf{n}, \mathbf{U}) dS \quad (\text{A.12})$$

L'application de la relation (A.5) s'écrit donc :

$$Q = \gamma \in \mathbf{K} \Leftrightarrow \gamma \leq \gamma^+ \Rightarrow \gamma \leq \gamma_C(\alpha, \psi) = \frac{P_{\text{rm}}(\mathbf{v})}{|\mathbf{U}_y|S} \quad \forall \alpha, \psi \text{ permis} \quad (\text{A.13})$$

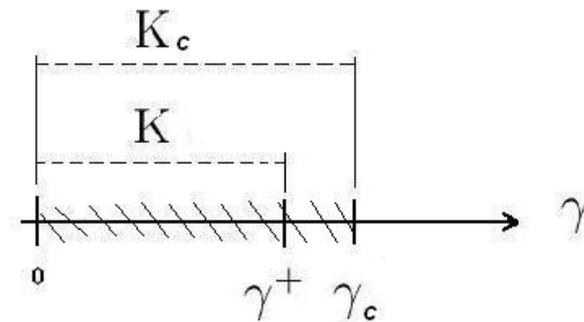
Il s'ensuit que :

$$\gamma^+ \leq \gamma_C = \min_{\alpha, \psi} \gamma_C(\alpha, \psi) \quad (\text{A.14})$$

$\gamma_C$  constitue un majorant de  $\gamma^+$  ou de manière équivalente le domaine  $\mathbf{K}$  est inclus dans le domaine  $\mathbf{K}_C$  borné par  $\gamma_C$  :

$$\mathbf{K} \subset \mathbf{K}_C = [0, \gamma_C] \quad (\text{A.15})$$

Le principe de calcul à la rupture et sa mise en oeuvre ont été illustrés directement sur l'exemple de la figure 2-1. Nous renvoyons à Salençon (1983,1990) pour un exposé détaillé lorsque la structure étudiée est soumise à un mode de chargement à  $n$  paramètres. L'application directe du calcul à la rupture pour l'analyse de stabilité



*Figure A.4* — Approche par l'extérieur de  $K$

des murs en maçonneries est rendue difficile par la forte hétérogénéité du matériau constitutif. Il est donc nécessaire de formuler une autre approche tout en restant dans le cadre de la théorie. Une approche alternative est la méthode d'homogénéisation en calcul à la rupture (de Buhan, 1986).



# Homogénéisation des milieux périodiques en calcul à la rupture

## B.1 Principe général de la méthode

Cette méthode repose sur deux hypothèses clés :

- (i) La périodicité des caractéristiques géométriques et mécaniques de la structure,
- (ii) La forte hétérogénéité de la structure.

La validité de ces deux hypothèses permet de substituer au milieu hétérogène (bloc et joint dans le cas des murs en maçonnerie) un milieu homogène équivalent dont les propriétés mécaniques soient autant que possible représentatives de celles du milieu hétérogène initial au niveau de la structure globale.

Il s'agit d'une démarche dans laquelle il y a distinction entre deux échelles caractéristiques du milieu : une échelle microscopique qui permet la direction des hétérogénéités (dans notre cas les joints), et une échelle macroscopique de l'ordre de grandeur de la structure.

Le processus d'homogénéisation se déroule en trois étapes :

1. Description de la microstructure. L'hypothèse de périodicité des hétérogénéités permet de décrire de manière "déterministe" la structure du milieu hétérogène initial.
2. Définition du volume élémentaire représentatif du milieu hétérogène et des grandeurs physiques globales en fonction de grandeurs locales,

### 3. Détermination des propriétés mécaniques globales de la structure.

#### ◇ Cellule de base

Considérons une structure maçonnée  $\Omega_\varepsilon$  périodique. Par périodicité, nous entendons même période spatiale pour les caractéristiques géométriques et de résistance. Il s'agit ici d'un milieu constitué des blocs homogènes traversés par des joints plans régulièrement répartis, les joints ayant les mêmes capacités de résistance. le réel  $\varepsilon$  (positif) désigné habituellement par facteur d'échelle, caractérise la taille du volume élémentaire  $A_\varepsilon$  par rapport à la taille de la structure  $L$ . La cellule de base  $A$  est le domaine de l'espace transformé de  $A_\varepsilon$  par homothétie de rapport  $\frac{1}{\varepsilon}$  centrée à l'origine, de sorte que  $|A| = 1$ .

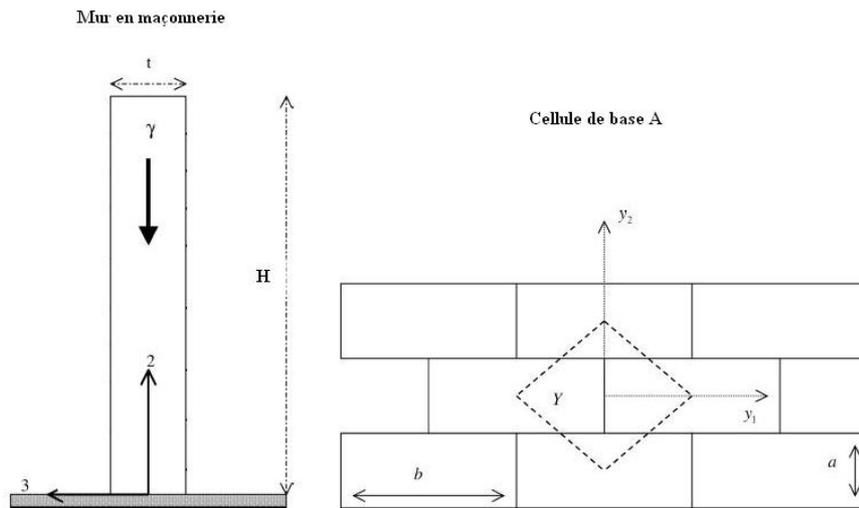


Figure B.1 — Mur en maçonnerie et cellule de base

#### ◇ Position du problème

On étudie la stabilité de  $\Omega_\varepsilon$  supposée fortement hétérogène ( $\varepsilon \ll 1$ ) soumise à un chargement  $\mathbf{Q}$  (qui se réduit dans l'exemple considéré à  $\gamma$ ). On désigne par  $G^\varepsilon(\mathbf{y})$  le convexe de résistance en un point  $\mathbf{y} \in \Omega_\varepsilon$ . Il est défini de manière analogue à celle donnée par (A.2).

Le domaine des chargements potentiellement supportables de la structure est défini par :

$$\mathbf{K}^\varepsilon = \{ \mathbf{Q} (= \gamma) \mid \exists \boldsymbol{\sigma} SA \text{ avec } \mathbf{Q}, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) \in G^\varepsilon(\mathbf{y}) \forall \mathbf{y} \in \Omega_\varepsilon \} \quad (\text{B.1})$$

Lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, c'est à dire lorsque les dimensions de la cellule de base sont petite devant celles de la structure, Suquet (1983) et de Buihan (1986) ont montré que  $\mathbf{K}^\varepsilon$  converge vers le domaine asymptotique  $\mathbf{K}^0$  :

$$\mathbf{K}^0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{K}^\varepsilon \quad (\text{B.2})$$

En raison de la forte hétérogénéité de la structure, il est difficile d'évaluer directement  $\mathbf{K}^0$  (ou  $\mathbf{K}^\varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$ ). Cette complexité justifie l'emploi d'une méthode d'homogénéisation qui, en substituant à  $\Omega_\varepsilon$  une structure homogène associée, permet de s'affranchir de cette difficulté. On dispose pour ce faire du cadre de l'homogénéisation des milieux périodiques en calcul à la rupture (Suquet, 1983 ; de Buihan, 1986).

#### ◇ Structure homogène associée

A partir de la structure périodique initiale  $\Omega_\varepsilon$  soumise au chargement  $\mathbf{Q}$ , la démarche consiste à définir une structure homogène associée  $\Omega$  :

- De même géométrie que la structure initiale,
- Soumise au même chargement  $\mathbf{Q}$  (ici  $\gamma$ ).
- Et constituée d'un milieu homogène de résistance "macroscopique"  $G^{hom}$ , identique en tout point  $\mathbf{y}$  de  $\Omega$ .

#### ◇ Problème homogène associé

L'homogénéisation consiste à remplacer le problème initial de détermination de  $\mathbf{K}^0$  (c'est à dire en pratique de  $\mathbf{K}^\varepsilon$  avec  $\varepsilon$  suffisamment petit) par un problème homogène associé relatif à la détermination du domaine  $\mathbf{K}^{hom}$  des chargements potentiellement supportables par la structure homogène  $\Omega$  précédente, défini par :

$$\mathbf{K}^{hom} = \{ \mathbf{Q} \mid \exists \sigma \text{ SA avec } \mathbf{Q}; \sigma(\mathbf{y}) \in G^{hom} \forall (\mathbf{y}) \in \Omega \} \quad (\text{B.3})$$

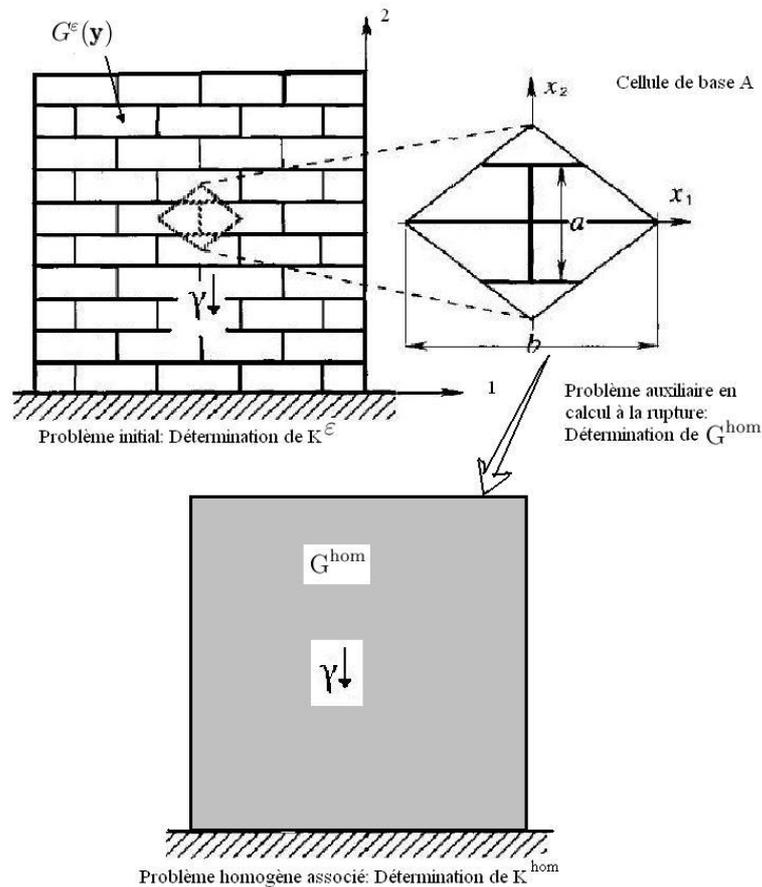
Il apparaît donc que la détermination de  $\mathbf{K}^{hom}$  nécessite la détermination préalable du domaine de résistance macroscopique  $G^{hom}$  qui caractérise les capacités de résistance du matériau homogène associé. Sa construction s'effectue au niveau de la cellule de base  $A$  en résolvant un problème auxiliaire de calcul à la rupture. Il dépendra a priori, des capacités de résistance des constituants (bloc et joint).

#### ◇ Validité de la démarche

La question reste celle du lien entre la solution  $\mathbf{K}^{hom}$  du problème de calcul à la rupture sur la structure homogène associée et celle de  $\mathbf{K}^\varepsilon$  du problème initial.

Un résultat établi par Suquet (1983), puis généralisé par de Buhan (1986), permet d'affirmer que les problèmes sont équivalents ( $\mathbf{K}^{\text{hom}} = \mathbf{K}^0$ ) aux effets de bord près.

La section suivante est consacrée aux définitions statique et cinématique de  $G^{\text{hom}}$ .



*Figure B.2* — Schéma résumant la méthode d'homogénéisation en calcul à la rupture

## B.2 Critère de résistance macroscopique

Le domaine de résistance macroscopique  $G^{\text{hom}}$  découle de la résolution d'un problème auxiliaire de calcul à la rupture posé sur la cellule de base  $A$ .

### B.2.1 Définition d'un mode chargement sur la cellule de base

On définit le mode de chargement de la cellule de base à partir de la donnée conjointe de l'espace  $S$  des champs de contraintes statiquement admissibles et de celui, noté  $C$ , des champs de vitesses cinématiquement admissibles.

(a) Espace S

Un champ de contrainte défini en tout point  $\mathbf{x}$  de la cellule de base appartient à S si seulement si  $\boldsymbol{\sigma}$  vérifie :

- $\text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in A$ ,
- $[\boldsymbol{\sigma}] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$  passage d'une surface de discontinuité de  $\boldsymbol{\sigma}$  de normale  $\mathbf{n}$ ,
- $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  antipériodique

Cette dernière condition exprime que les vecteurs-contraintes sont opposés en deux points quelconques situés sur deux faces opposées de  $A$  (figure 2-7)

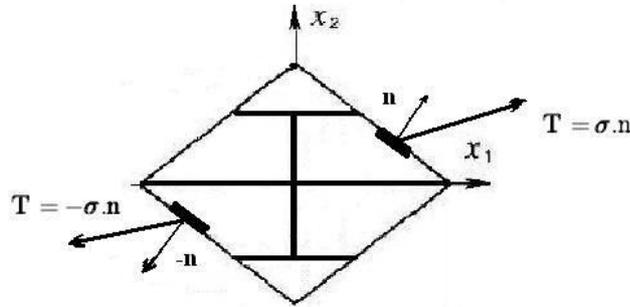


Figure B.3 — Antipériodicité du champ de contrainte

$\boldsymbol{\sigma}$  est dit SA avec  $\Sigma$  s'il appartient à S et  $\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \int_A \boldsymbol{\sigma} \, dA$ .

(b) Espace C

De même, un champ de vitesse  $\mathbf{v}$  appartient à C si et seulement si :

- $\mathbf{v}$  est continûment différentiable sur  $A$ ,
- le champ  $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}$  est périodique sur  $A$  ( $\mathbf{u}$  prend la même valeur en deux points quelconques situés sur deux faces opposées de  $A$ ),

$$\mathbf{F} = \langle \text{grad} \mathbf{v} \rangle = \int_{\partial A} \mathbf{v} \otimes \mathbf{n} \, dS = \int_A \text{grad} \mathbf{v} \, dA + \int_{\Sigma} [\mathbf{v}] \otimes \mathbf{n}_{\Sigma} \, d\Sigma \quad (\text{B.4})$$

Où  $\Sigma$  désigne la surface de discontinuité de normale  $\mathbf{n}_{\Sigma}$  du champ  $\mathbf{v}$ , et  $[\mathbf{v}]$  la valeur de cette discontinuité lorsqu'on franchit  $\Sigma$ .

$\mathbf{v}$  est dit CA avec  $\mathbf{D}$  s'il appartient à C et si  $\mathbf{D}$  est la partie symétrique de  $\mathbf{F}$  :

$$\mathbf{D} = \langle \mathbf{d} \rangle = \frac{1}{2} (\mathbf{F} + {}^t\mathbf{F}) = \int_{\partial A} \mathbf{v} \otimes^s \mathbf{n} \, dS \quad (\text{B.5})$$

Où  $\mathbf{d}$  est le taux de déformation associé à  $\mathbf{v}$ , et  $\mathbf{v} \overset{s}{\otimes} \mathbf{n} = \frac{1}{2} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{v})$ .

### (c) Mode de chargement

Suquet (1982) a établi que l'espace  $S$  et  $C$  définissent un mode de chargement de la cellule de base  $A$  qui dépend linéairement de six paramètres scalaires.

Plus précisément, les composantes dans un repère orthonormé  $(0, x_1, x_2, x_3)$  du tenseur de contraintes macroscopiques  $\Sigma = \langle \sigma \rangle$  (moyenne volumique sur  $A$  de tout élément  $\sigma$  de  $S$ ) jouent le rôle de paramètres de chargement. De même, les composantes du tenseur taux de déformation macroscopique  $\mathbf{D} = \langle \mathbf{d} \rangle$  représentent les paramètres cinématiques associés par dualité.

On dira alors que la cellule de base est soumise à un chargement macroscopique  $\Sigma$  ou qu'une vitesse de déformation macroscopique  $\mathbf{D}$  lui est imposée.

## B.2.2 Définition statique

Les conditions de chargement de la cellule de base étant précisées, le domaine de résistance est défini comme l'ensemble des chargements  $\Sigma$  tel qu'il soit possible d'associer un champ de contrainte  $\sigma$  appartenant à  $S$ , dont la moyenne volumique sur la cellule est égale à  $\Sigma$  et qui respecte la condition de résistance en tout point de la cellule. soit :

$$G^{\text{hom}} = \{ \Sigma \mid \exists \sigma \in S, \langle \sigma \rangle = \Sigma, \quad \sigma(\mathbf{x}) \in G(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A \} \quad (\text{B.6})$$

Notons que la convexité du domaine  $G(\mathbf{x})$  en tout point de la cellule, assure celle du domaine  $G^{\text{hom}}$ . dans la notre cas, la relation (B.6) s'écrit :

$$\Sigma \in G^{\text{hom}} \Leftrightarrow \exists \sigma \in S \begin{cases} \langle \sigma \rangle = \Sigma \\ \sigma(\mathbf{x}) \in G^{\text{m}} \quad \forall \mathbf{x} \in A \\ \mathbf{T} = \sigma \cdot \mathbf{e}_i \in G^{\text{i}} \quad \forall \mathbf{x} \in \text{Joint de normale } \mathbf{e}_i \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Où  $G^{\text{m}}$  et  $G^{\text{i}}$  désignent respectivement les domaines de résistance du bloc sain et du joint de mortier  $i$ .

## B.2.3 Définition cinématique (duale)

L'espace  $C$  étant précisé, en supposant l'équivalence statique et cinématique du domaine  $G^{\text{hom}}$ , on peut écrire :

$$G^{\text{hom}} = \bigcap_{\mathbf{D} \in \mathbb{R}^6} \{ \underline{\Sigma} \mid \underline{\Sigma} : \mathbf{D} \leq \pi^{\text{hom}}(\mathbf{D}) \} \quad (\text{B.8})$$

Où  $\pi^{\text{hom}}$  est la fonction d'appui du convexe  $G^{\text{hom}}$  :

$$\pi^{\text{hom}}(\mathbf{D}) = \sup \{ \underline{\Sigma} : \mathbf{D}; \underline{\Sigma} \in G^{\text{hom}} \} \quad (\text{B.9})$$

Qui peut s'écrire (de Buhan, 1986) :

$$\pi^{\text{hom}}(\mathbf{D}) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathbb{C}} \{ \langle \pi(\mathbf{d}) \rangle; \mathbf{D} = \langle \mathbf{d} \rangle \} \quad (\text{B.10})$$

Où  $\pi$  est la fonction d'appui du convexe  $G(\mathbf{x})$

$$\pi(\mathbf{d}(\mathbf{x})) = \sup \{ \underline{\sigma} : \mathbf{d}(\mathbf{x}); \underline{\sigma} \in G(\mathbf{x}) \} \quad (\text{B.11})$$

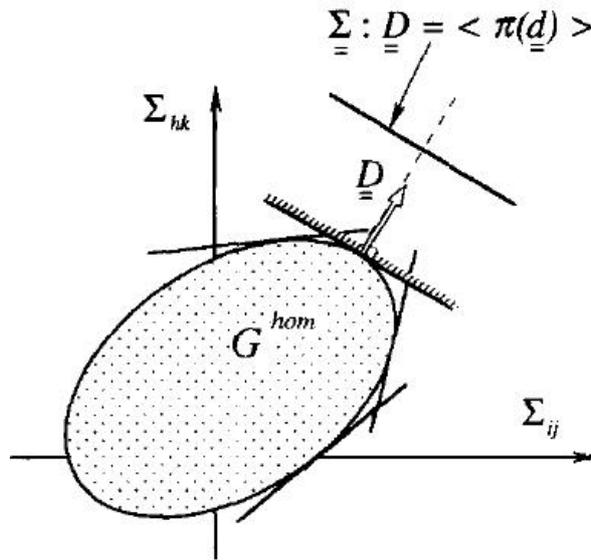


Figure B.4 — Approche cinématique du domaine de résistance macroscopique  $G^{\text{hom}}$





```

RETURN
END
C-----
C-----
C-----
SUBROUTINE masonry(sigma,deltadef,variab,xjacob)
C
C
C
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
CHARACTER*80 CMNAME
C
PARAMETER (ZERO=0.D0,ONE=1.D0,TWO=2.D0,THREE=3.D0,
*          FOUR=4.D0,SIX=6.D0, NINE=9.D0)
PARAMETER (T = 1.35,s0 = 4.6,c1 = 4.35,R = 500,d = 0.716,
*          phi=0.5233,c2=0.35)
C
C
DIMENSION SPLSSE(3,3),DDS(3,3),x(9),y(9),deltadef(3),xjacob(3,3),
*          sigma(3),STrial(3),DPSTRN(3),variab(6),f(6),str(3),y1(3)
C
C      double precision XA,XB,XC,XD
C      INTEGER iter,ndfunc,nfunc
C      INTEGER NDIM,j,IND,m
C      REAL GTOL
EXTERNAL func,dfunc
nfunc=0
ndfunc=0
C
C      COMMON /stats/ nfunc,ndfunc
C      COMMON /var/ c1,c2,phi,d,s0,T,R
C
C-----
C
C      SPECIFY MATERIAL PROPERTIES
C
C
C      T = 1.35
C      s0 = 4.6
C      c1 = 4.35
C      R = 500
C      d = 0.716
C      phi=0.5233
C      c2=0.35
C
C
C      Xkn = 342.8
C      Xkt = 160.4
C      XEb = 6740
C      Xnub = 0.167
C      a = 40.0
C      b = 115.0
C
C      Xlmdab= XEb/(ONE-TWO*Xnub)/(ONE+Xnub)
C      Xmub= XEb/TWO/(ONE+Xnub)
C

```



```

C
  m=0
C
C   YIELD CRITERIA OF MASONRY WALL
C
  f(1)=c1*(y(3)+tan(phi)*y(2))/c2-1
  f(2)=c1*(-y(3)+tan(phi)*y(2))/c2-1
  f(3)=( (1.+d*tan(phi))*y(3)+(d*y(1)+tan(phi)*y(2)))*c1
  *      /c2-(1.+d/tan(phi))
  f(4)=(- (1.+d*tan(phi))*y(3)+(d*y(1)+
  *      tan(phi)*y(2)))*c1/c2-(1.+d/tan(phi))
  f(5)=c1*sqrt((y(1)-y(2))**2+4.*y(3)**2)-1
  f(6)=c1*(y(1)+y(2)+sqrt((y(1)-y(2))**2+4.*y(3)**2))/2/T-1
C
C
C
C   DETERMINE IF THE YIELD CONDITION IS SATISFIED
C
C
C   DO i=1,6
      IF (f(i).LE.0.0d0)          THEN
        y(i+3)=sqrt(-f(i))
      ELSE
        y(i+3)=0.0d0
        m=1
      ENDIF
    ENDDO
C
C
C   IF (m.EQ.1) THEN
      DO k=1,10
C
C
C   CALL dfpmin(y,9,y1(1),y1(2),y1(3),gtol,iter,fret,func,dfunc)
C
  f(1)=c1*(y(3)+tan(phi)*y(2))/c2-1
  f(2)=c1*(-y(3)+tan(phi)*y(2))/c2-1
  f(3)=( (1.+d*tan(phi))*y(3)+(d*y(1)+tan(phi)*y(2)))*c1
  *      /c2-(1.+d/tan(phi))
  f(4)=(- (1.+d*tan(phi))*y(3)+(d*y(1)+
  *      tan(phi)*y(2)))*c1/c2-(1.+d/tan(phi))
  f(5)=c1*sqrt((y(1)-y(2))**2+4.*y(3)**2)-1
  f(6)=c1*(y(1)+y(2)+sqrt((y(1)-y(2))**2+4.*y(3)**2))/2/T-1
C
  DO i=1,6
      IF (f(i).LE.0.0d0)          THEN
        y(i+3)=sqrt(-f(i))
      ELSE
        y(i+3)=0.0d0
      ENDIF
    ENDDO
  ENDDO
  ENDDO
C
C   DETERMINE IF THE YIELD CONDITION IS SATISFIED
C
C
C

```

```

sigma(1)=y(1)
sigma(2)=y(2)
sigma(3)=y(3)
C
C
      XR=(sigma(1)-STrial(1))**2+(sigma(2)-STrial(2))**2+
*      (sigma(3)-STrial(3))**2
C
      IF (XR.NE.0.0d0)      THEN
C
C      DETERMINE THE STRESS
C
      DO I=1,3
      sigma(I)=sigma(I)*c1
      END DO
C
C      DETERMINE THE INCREMENTS IN PLASTIC STRAIN
C
      DPSTRN(1) = SPLSSE(1,1)*(sigma(1)-STrial(1))
*      +SPLSSE(1,2)*(sigma(2)-STrial(2))
*      +SPLSSE(1,3)*(sigma(3)-STrial(3))
      DPSTRN(2) = SPLSSE(2,1)*(sigma(1)-STrial(1))
*      +SPLSSE(2,2)*(sigma(2)-STrial(2))
*      +SPLSSE(2,3)*(sigma(3)-STrial(3))
      DPSTRN(3) = SPLSSE(3,1)*(sigma(1)-STrial(1))
*      +SPLSSE(3,2)*(sigma(2)-STrial(2))
*      +SPLSSE(3,3)*(sigma(3)-STrial(3))
C
C      DETERMINE JACOBIAN
C
      XA=xjacob(1,1)*DPSTRN(1)+xjacob(1,2)*DPSTRN(2)+
*      xjacob(1,3)*DPSTRN(3)
      XB=xjacob(1,2)*DPSTRN(1)+xjacob(2,2)*DPSTRN(2)+
*      xjacob(2,3)*DPSTRN(3)
      XC=xjacob(1,3)*DPSTRN(1)+xjacob(2,3)*DPSTRN(2)+
*      xjacob(3,3)*DPSTRN(3)
      XD=XA*DPSTRN(1)+XB*DPSTRN(2)+XC*DPSTRN(3)
C
      DDS(1,1)=XA*XA/XD
      DDS(1,2)=XA*XB/XD
      DDS(1,3)=XA*XC/XD
      DDS(2,1)=XA*XB/XD
      DDS(2,2)=XB*XB/XD
      DDS(2,3)=XB*XC/XD
      DDS(3,1)=XA*XC/XD
      DDS(3,2)=XB*XC/XD
      DDS(3,3)=XC*XC/XD
C
      xjacob(1,1)=xjacob(1,1)-DDS(1,1)
      xjacob(1,2)=xjacob(1,2)-DDS(1,2)
      xjacob(1,3)=xjacob(1,3)-DDS(1,3)
      xjacob(2,1)=xjacob(2,1)-DDS(2,1)
      xjacob(2,2)=xjacob(2,2)-DDS(2,2)
      xjacob(2,3)=xjacob(2,3)-DDS(2,3)
      xjacob(3,1)=xjacob(3,1)-DDS(3,1)
      xjacob(3,2)=xjacob(3,2)-DDS(3,2)
      xjacob(3,3)=xjacob(3,3)-DDS(3,3)
C

```

```

C
C      UPDATE THE PLASTIC STRAIN
C
      DO I=1,3
        variab(I)=variab(I)+DPSTRN(I)
      END DO
    ENDIF
  RETURN
END

*****
**                UTILITY      SUBROUTINES                **
*****
**                FUNCTION                **
*****
*USER FUNCTION
  function func(x)
C
  INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
  CHARACTER*80 CMNAME
C
  INTEGER ndfunc,nfunc
  PARAMETER (ZERO=0.D0,ONE=1.D0,TWO=2.D0,THREE=3.D0,
*           FOUR=4.D0,SIX=6.D0, NINE=9.D0)
  PARAMETER (T = 1.35,s0 = 4.6,c1 = 4.35,R = 500,d = 0.716,
*           phi=0.5233,c2=0.35)
  COMMON /stats/ nfunc,ndfunc,y1
C   COMMON /var/ c1,c2,phi,d,s0,T,R
  DIMENSION x(*),SPLSSE(3,3),DE(3,3),y1(3)
  nfunc=nfunc+1
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CCCC
  Xkn = 342.8
  Xkt = 160.4
  XEb = 6740
  Xnub = 0.167
  a = 40.0
  b = 115.0
  Xlmdab= XEb/(1.-2.*Xnub)/(1.+Xnub)
  Xmub= XEb/2./(1.+Xnub)
  Xlmdabp= 2.*Xlmdab*Xmub/(Xlmdab+2.*Xmub)
  XE1 = 1./(4.*a/(4.*a*b*Xkn+Xkt*b**2)+1./(4.*Xmub)+
*       1./(4.*(Xlmdabp+Xmub)))
  XE2 = 1./(1./(a*Xkn)+1./(4.*Xmub)+1./(4.*(Xlmdabp+Xmub)))
  XNUE12 = XE1*Xlmdabp/(4.*Xmub*(Xlmdabp+Xmub))
  XNUE21 = XE2*Xlmdabp/(4.*Xmub*(Xlmdabp+Xmub))
  XEG = 1./(1./(a*Xkt)+4.*a/(Xkn*b**2+4.*a*b*Xkt)+1./Xmub)
C
C
      DE(1,1) = XE1/(ONE-XNUE12*XNUE21)
      DE(1,2) = XNUE12*XE2/(ONE-XNUE12*XNUE21)
      DE(1,3) = ZERO
      DE(2,1) = XNUE12*XE2/(ONE-XNUE12*XNUE21)
      DE(2,2) = XE2/(ONE-XNUE12*XNUE21)
      DE(2,3) = ZERO
      DE(3,1) = ZERO

```

```

                DE(3,2) = ZERO
                DE(3,3) = FOUR*XEG
C
C      INVERSE MATRIX (SOUPLAISSE)
C
      call KINVER(DE,SPLSSE)
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CCCCCCCCCCCC
C
      func=((x(1)-y1(1))**2+
*        SPLSSE(2,2)*((x(2)-y1(2))**2)/SPLSSE(1,1)
*        +((x(3)-y1(3))**2)*SPLSSE(3,3)/SPLSSE(1,1)+2*SPLSSE(1,2)*
*        (x(1)-y1(1))*(x(2)-y1(2))/SPLSSE(1,1))/2.+R*(
*        (c1*(x(3)+tan(phi)*x(2))/c2-1+x(4)**2)**2
*        +(c1*(-x(3)+tan(phi)*x(2))/c2-1+x(5)**2)**2
*        +(x(3)*(1+d*tan(phi))*c1/c2+
*        (d*x(1)+tan(phi)*x(2))*c1/c2-(1+d/tan(phi))+x(6)**2)**2
*        +(-x(3)*(1.+d*tan(phi))*c1/c2+
*        (d*x(1)+tan(phi)*x(2))*c1/c2-(1+d/tan(phi))
*        +x(7)**2)**2+(c1*sqrt((x(1)-x(2))**2+4.*x(3)**2)/s0-1
*        +x(8)**2)**2+(c1*(x(1)+x(2)+sqrt((x(1)-x(2))**2
*        +4.*x(3)**2))/2/T-1+x(9)**2)**2)
C
C
      RETURN
      END
**
**
*****
**
**                                DFUNCTION                                *
*****
*USER SUBROUTINE
      SUBROUTINE dfunc(x,df)
C
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
      CHARACTER*80 CMNAME
C
      PARAMETER(c1=4.35,c2=.35,d=0.716,phi=.5233,s0=4.6,T=1.35,R=500)
      PARAMETER(ZERO=0.D0,ONE=1.D0,TWO=2.D0,THREE=3.D0,
*              FOUR=4.D0,SIX=6.D0,NINE=9.D0)
      PARAMETER(T = 1.35,s0 = 4.6,c1 = 4.35,R = 500,d = 0.716,
*              phi=0.5233,c2=0.35)
      PARAMETER(NMAX=50)
      COMMON /stats/ nfunc,ndfunc,y1
c      COMMON /var/ c1,c2,phi,d,s0,T,R
      dimension xg(1),DE(3,3),SPLSSE(3,3),y1(3),x(9),df(9)
      ndfunc=ndfunc+1

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CCCC
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CCCC
      Xkn = 342.8
      Xkt = 160.4
      XEb = 6740
      Xnub = 0.167
      a = 40.0

```

```

b = 115.0
Xlmdab= XEb/(1.-2.*Xnub)/(1.+Xnub)
Xmub= XEb/2./(1.+Xnub)
Xlmdabp= 2.*Xlmdab*Xmub/(Xlmdab+2.*Xmub)
XE1 = 1./(4.*a/(4.*a*b*Xkn+Xkt*b**2)+1./(4.*Xmub)+
*      1./(4.*(Xlmdabp+Xmub)))
XE2 = 1./(1./(a*Xkn)+1./(4.*Xmub)+1./(4.*(Xlmdabp+Xmub)))
XNUE12 = XE1*Xlmdabp/(4.*Xmub*(Xlmdabp+Xmub))
XNUE21 = XE2*Xlmdabp/(4.*Xmub*(Xlmdabp+Xmub))
XEG = 1./(1./(a*Xkt)+4.*a/(Xkn*b**2+4.*a*b*Xkt)+1./Xmub)
      DE(1,1) = XE1/(ONE-XNUE12*XNUE21)
      DE(1,2) = XNUE12*XE2/(ONE-XNUE12*XNUE21)
      DE(1,3) = ZERO
      DE(2,1) = XNUE12*XE2/(ONE-XNUE12*XNUE21)
DE(2,2) = XE2/(ONE-XNUE12*XNUE21)
DE(2,3) = ZERO
DE(3,1) = ZERO
DE(3,2) = ZERO
DE(3,3) = FOUR*XEG

C
C      INVERSE MATRIX (SOUPLAISSE)
C
      call KINVER(DE,SPLSSE)
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CCCCCC
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CCCCCC

      xg(1)=(x(1)-x(2))**2+4.*x(3)**2

C
      if (xg(1).GE.1.e-10) then
C
      df(1)=x(1)-y1(1)+SPLSSE(1,2)*(x(2)-y1(2))/SPLSSE(1,1)
*      +2.*R*(2.*d*c1*((d*x(1)+tan(phi)*x(2))*c1/c2
*      -(1.+d/tan(phi))+x(6)**2+x(7)**2)/2)
*      +c1*(x(1)-x(2))*(c1*sqrt((x(1)-x(2))**2+4.*x(3)**2)/s0
*      -1+x(8)**2)/sqrt((x(1)-x(2))**2+4.*x(3)**2)/s0+
*      (1.+(x(1)-x(2))/sqrt((x(1)-x(2))**2
*      +4.*x(3)**2))*((x(1)+x(2)+sqrt((x(1)-x(2))**2
*      +4.*x(3)**2)*c1/2/T-1+x(9)**2)*c1/2/T))

C
      df(2)=(x(2)-y1(2))*SPLSSE(2,2)/SPLSSE(1,1)+
*      SPLSSE(1,2)*(x(1)-y1(1))/SPLSSE(1,1)
*      +2.*R*((4.*c1*tan(phi)*x(2)/c2+2.*d*x(1)*c1/c2
*      -2.*(2.+d/tan(phi))+x(4)**2+x(5)**2+x(6)**2+
*      x(7)**2)*c1*tan(phi)/c2-c1*(x(1)-x(2))*(c1*sqrt((x(1)-
*      x(2))**2+4.*x(3)**2)/s0-1.+x(8)**2)/sqrt((x(1)-x(2))**2+
*      4.*x(3)**2)/s0+c1*(1.-(x(1)-x(2))/sqrt((x(1)-x(2))**2
*      +4.*x(3)**2)*(c1*(x(1)+x(2)+sqrt((x(1)-x(2))**2
*      +4.*x(3)**2))/2/T-1+x(9)**2))/2/T)

C
      df(3)=(x(3)-y1(3))*SPLSSE(3,3)/SPLSSE(1,1)
*      +2.*R*((2.*c1*x(3)/c2+x(4)**2-x(5)**2)*
*      c1/c2+(x(3)*(1.+d*tan(phi))*c1*2./c2+
*      x(6)**2-x(7)**2)*c1*(1.+d*tan(phi))/c2
*      +(c1*sqrt((x(1)-x(2))**2+4.*x(3)**2)/s0-1.+x(8)**2)*4.*c1*x(3)
*      /s0/sqrt((x(1)-x(2))**2+4.*x(3)**2)+(c1*(x(1)+x(2)+
*      sqrt((x(1)-x(2))**2+4.*x(3)**2))/2/T-1+x(9)**2)*c1*2.*x(3)/
*      sqrt((x(1)-x(2))**2+4.*x(3)**2)/T)

```

```

else
df(1)=x(1)-y1(1)+SPLSSE(1,2)*(x(2)-y1(2))/SPLSSE(1,1)+
* 2.*R*(2.*d*c1*((d*x(1)+tan(phi))*x(2))*c1/c2
* -(1.+d/tan(phi))+(x(6)**2+x(7)**2)/2)
C
df(2)=(x(2)-y1(2))*SPLSSE(2,2)/SPLSSE(1,1)+
* SPLSSE(1,2)*(x(1)-y1(1))/SPLSSE(1,1)+
* 2.*R*(4.*c1*tan(phi)*x(2)/c2+2.*d*x(1)*c1/c2
* -2.*(2.+d/tan(phi))+x(4)**2+x(5)**2+x(6)**2+
* x(7)**2)*c1*tan(phi)/c2)
C
df(3)=(x(3)-y1(3))*SPLSSE(3,3)/SPLSSE(1,1)+
* 2.*R*((2.*c1*x(3)/c2+x(4)**2-x(5)**2)*
* c1/c2+(2.*x(3)*(1.+d*tan(phi))*c1/c2+
* x(6)**2-x(7)**2)*c1*(1.+d*tan(phi))/c2)
endif
C
df(4)=4*R*x(4)*(c1*(x(3)+tan(phi)*x(2))/c2-1+x(4)**2)
C
df(5)=4*R*x(5)*(c1*(-x(3)+tan(phi)*x(2))/c2-1+x(5)**2)
C
df(6)=4*R*x(6)*(x(3)*(1.+d*tan(phi))*c1/c2+
* (d*x(1)+tan(phi)*x(2))*c1/c2-(1.+d/tan(phi))+x(6)**2)
C
df(7)=4*R*x(7)*(-x(3)*(1.+d*tan(phi))*c1/c2+
* (d*x(1)+tan(phi)*x(2))*c1/c2-(1.+d/tan(phi))+x(7)**2)
C
df(8)=4*R*x(8)*(c1*sqrt((x(1)-x(2))**2+4.*x(3)**2)/s0-1+x(8)**2)
C
df(9)=4*R*x(9)*(c1*(x(1)+x(2)+sqrt((x(1)-x(2))**2+4.*x(3)**2))/
* 2/T-1+x(9)**2)
return
END
**
**
*****
**          SUBROUTINE lnsrc             *
*****
*USER SUBROUTINE
SUBROUTINE lnsrc(n,xold,fold,g,p,x,f,stpmax,check,func)
C
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
CHARACTER*80 CMNAME
C
INTEGER n
LOGICAL check
COMMON /stats/ nfunc,ndfunc
c  COMMON /var/ c1,c2,phi,d,s0,T,R
DIMENSION g(n),p(n),x(n),xold(n)
PARAMETER (ALF=1.e-4,TOLX=1.e-7)
EXTERNAL func
CU  USES func
c  INTEGER i
c  REAL a,alam,alam2,alamin,b,disc,f2,rhs1,rhs2,slope,sum,temp,test,
c  *tmplam
check=.false.
sum=0.

```

```

do 11 i=1,n
  sum=sum+p(i)*p(i)
11  continue
  sum=sqrt(sum)
  if(sum.gt.stpmax) then
    do 12 i=1,n
      p(i)=p(i)*stpmax/sum
12  continue
  endif
  slope=0.
  do 13 i=1,n
    slope=slope+g(i)*p(i)
13  continue
c   if(slope.ge.0.) pause 'roundoff problem in lnsrch'
  test=0.
  do 14 i=1,n
    temp=abs(p(i))/max(abs(xold(i)),1.)
    if(temp.gt.test) test=temp
14  continue
  alamin=TOLX/test
  alam=1.
1   continue
  do 15 i=1,n
    x(i)=xold(i)+alam*p(i)
15  continue
  f=func(x,y1)
  if(alam.lt.alamin) then
    do 16 i=1,n
      x(i)=xold(i)
16  continue
    check=.true.
    return
  else if(f.le.fold+ALF*alam*slope) then
    return
  else
    if(alam.eq.1.) then
      tmplam=-slope/(2.*(f-fold-slope))
    else
      rhs1=f-fold-alam*slope
      rhs2=f2-fold-alam2*slope
      a=(rhs1/alam**2-rhs2/alam2**2)/(alam-alam2)
      b=(-alam2*rhs1/alam**2+alam*rhs2/alam2**2)/(alam-alam2)
      if(a.eq.0.) then
        tmplam=-slope/(2.*b)
      else
        disc=b*b-3.*a*slope
        if(disc.lt.0.) then
          tmplam=.5*alam
        else if(b.le.0.) then
          tmplam=(-b+sqrt(disc))/(3.*a)
        else
          tmplam=-slope/(b+sqrt(disc))
        endif
      endif
      if(tmplam.gt..5*alam) tmplam=.5*alam
    endif
  endif
  alam2=alam

```

```

        f2=f
        alam=max(tmplam,.1*alam)
        goto 1
        RETURN
        END

**
**
*****
**          SUBROUTINE dfpmin          *
*****
*USER SUBROUTINE
        SUBROUTINE dfpmin(p,n,x1,x2,x3,gtol,iter,fret,func,dfunc)
C
        INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
        CHARACTER*80 CMNAME
C
        COMMON /stats/ nfunc,ndfunc,y1
c        COMMON /var/ c1,c2,phi,d,s0,T,R
        PARAMETER (NMAX=50,ITMAX=500,STPMX=100.,EPS=3.e-8,TOLX=4.*EPS)
        DIMENSION dg(NMAX),p(n),y1(3),
*g(NMAX),hdg(NMAX),hessin(NMAX,NMAX),pnew(NMAX),xi(NMAX),ps(n)
        EXTERNAL dfunc,func
C
                y1(1)=x1
                y1(2)=x2
                y1(3)=x3
c        write(*, '(1x,a,2(e14.4,a))') 'dfpmin: (' ,y1(1),',',
c        *      ',y1(2),',',y1(3),')'
        fp=func(p,y1)
        call dfunc(p,g)
        sum=0.
        do 12 i=1,n
            do 11 j=1,n
                hessin(i,j)=0.
11            continue
                hessin(i,i)=1.
                xi(i)=-g(i)
                sum=sum+p(i)**2
12            continue
        stpmax=STPMX*max(sqrt(sum),float(n))
        do 27 its=1,ITMAX
            iter=its
            call lnsrch(9,p,fp,g,xi,pnew,fret,stpmax,check,func)
            fp=fret
            do 13 i=1,n
                xi(i)=pnew(i)-p(i)
                p(i)=pnew(i)
13            continue
            test=0.
            do 14 i=1,n
                temp=abs(xi(i))/max(abs(p(i)),1.)
                if(temp.gt.test)test=temp
14            continue
            if(test.lt.TOLX)return
            do 15 i=1,n
                dg(i)=g(i)
15            continue

```

```

    call dfunc(p,g)
    test=0.
    den=max(fret,1.)
    do 16 i=1,n
        temp=abs(g(i))*max(abs(p(i)),1.)/den
        if(temp.gt.test)test=temp
16    continue
    if(test.lt.gtol) return
    do 17 i=1,n
        dg(i)=g(i)-dg(i)
17    continue
    do 19 i=1,n
        hdg(i)=0.
        do 18 j=1,n
            hdg(i)=hdg(i)+hessin(i,j)*dg(j)
18    continue
19    continue
    fac=0.
    fae=0.
    sumdg=0.
    sumxi=0.
    do 21 i=1,n
        fac=fac+dg(i)*xi(i)
        fae=fae+dg(i)*hdg(i)
        sumdg=sumdg+dg(i)**2
        sumxi=sumxi+xi(i)**2
21    continue
    if(fac.gt.sqrt(EPS*sumdg*sumxi)) then
        fac=1./fac
        fad=1./fae
        do 22 i=1,n
            dg(i)=fac*xi(i)-fad*hdg(i)
22    continue
        do 24 i=1,n
            do 23 j=i,n
                hessin(i,j)=hessin(i,j)+fac*xi(i)*xi(j)-fad*hdg(i)*hdg(j)+
*fae*dg(i)*dg(j)
                hessin(j,i)=hessin(i,j)
23    continue
24    continue
    endif
    do 26 i=1,n
        xi(i)=0.
        do 25 j=1,n
            xi(i)=xi(i)-hessin(i,j)*g(j)
25    continue
26    continue
27    continue
c    pause 'too many iterations in dfpmin'
    return
END
*****
**                INVERSE MATRIX                *
*****
*USER SUBROUTINE
SUBROUTINE KINVER(DF,A)
C
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

```

```
C
      PARAMETER (M=3,N=3)
      DIMENSION DF (M,N) , A (M,N)
C
      DO 5 I=1,M
      DO 5 J=1,N
      A (I,J)=DF (I,J)
5     CONTINUE
      DO 10 K=1,M
      P=A (K,K)
      A (K,K)=1.
      DO 20 J=1,N
      A (K,J)=A (K,J) /P
20    CONTINUE
      DO 10 I=1,M
      IF (I .EQ. K) GO TO 10
      P=A (I,K)
      A (I,K)=0.
      DO 30 J=1,N
      A (I,J)=A (I,J) -A (K,J) *P
30    CONTINUE
10    CONTINUE
      RETURN
      END
**
**
```



---

# Bibliographie

- [1] ACARY, V. *Contribution à la modélisation mécanique et numérique des édifices maçonnés*. Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille II, 2001.
- [2] ACI 440, R.-. *Design and Construction of Externally Bonded FRP Systems for Strengthening Concrete Structures*. 2002.
- [3] AFGC, G. D. T. . *Réparation et renforcement des structures en béton au moyen de matériaux composites*. 2003.
- [4] ALPA, G., AND MONETTO, I. Microstructure model for dry block masonry walls with in-plane loading. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 47 (7) (1994), 1149–1175.
- [5] ANDREAUS, U. Failure criteria for masonry panels under in-plane loading. *J. Struct. Eng* 122 (1) (1966), 37–46.
- [6] ANTHOINE, A. Derivation of in-plane elastic characteristics of masonry through homogenization theory. *International Journal of Solids and Structures* 32 (2) (1995), 137–163.
- [7] ANTHOINE, A. Homogenisation of periodic masonry : plane stress, generalized plane strain or 3D modelling? *Commun. Numer. Meth. Eng* 13 (1997), 319–326.
- [8] ASSOCIATION FRANÇAISE DE GÉNIE CIVIL. *Réparation et renforcement des structures en béton au moyen des matériaux composites Recommandation provisoire*. 2003.
- [9] BINDA, L., FONTANA, A., AND FREIGERIO, G. Mechanical behaviour of brick masonries derived from unit and mortar characteristics. *Proc. 8th Int. Brick and Block Masonry Conf., eds. J.W. de Courcy, Elsevier Applied Science, London, UK* (1988), 205–216.
- [10] BOUCHITTÉ, G. Convergence et relaxation de fonctionnelles du calcul des variations à croissance linéaire. application à l’homogénéisation en plasticité. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* 8 (1986-1987), 7–36.

- 
- [11] BOURGEOIS, S. *Modélisation numérique des panneaux structuraux légers*. Thèse de Doctorat, University Aix-Marseille, 1997.
- [12] BOURGEOIS, S. Homogenization of periodic beams : limit of the expansions. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 10 (2000), 719–725.
- [13] BOURGEOIS, S., DÉBORDES, O., AND PATOU, P. Homogénéisation et plasticité des plaques minces. *Revue Européenne des Elements Finis* 7 (1998), 39–54.
- [14] BOURGET, M., DELMAS, Y., AND TOUTLEMONDE, F. Experimental study of the behaviour of reinforced high-strength concrete short corbels. *Materials and Structures* 34 (2001), 55–162.
- [15] CAILLERIE, D. Thin elastic and periodic plates. *Math. Meth. in Appl. Sci* 6 (1984), 159–191.
- [16] CECCHI, A., AND DI MARCO, R. Homogenization of masonry walls with a computational oriented procedure. rigid or elastic blocks? *Europ. J. Mech. A/Solids*. 19 (2000), 535–546.
- [17] CECCHI, A., AND DI MARCO, R. Homogenized strategy towards constitutive identification of masonry. *Journal of Engineering Mechanics* 128 (2) (2002), 688–697.
- [18] CECCHI, A., AND SAB, K. A comparison between a 3D discrete model and two homogenized plate models for periodic elastic brickwork. *International Journal of Solids and Structures* 41 (2004), 2259–2276.
- [19] CECCHI, A., AND SAB, K. Corrigendum to "A comparison between a 3D discrete model and two homogenized plate models for periodic elastic brickwork". *International Journal of Solids and Structures* 43 (2006), 390–292.
- [20] CECCHI, A., AND SAB, K. A homogenized reissner-mindlin model for orthotropic plates : Application to brickwork pannel. *International Journal of Solids and Structures* 44 (2007), 6055–6079.
- [21] CLÉMENT, J. Strengthening of rc elements using cfrp : The french studies and the main results. *Second international conference on FRP Composites in Civil Engineering - CICE 2004, Adelaide, Australia* (2004), 8–10.
- [22] COLAS, A. *Mécanique des murs de soutènement en pierre sèche : modélisation par le calcul à la rupture et expérimentation échelle 1*. Phd thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (ENPC), 2009.
- [23] CORRADI, L., AND VENA, P. Limit analysis of orthotropic plates. *International Journal of Plasticity* 19 (2003), 1543–1566.
- [24] DALLOT, J. *Modélisation des structures multicouches en analyse limite. Application au renforcement de matériau "quasi-fragile-acier"*. Phd thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (ENPC), 2007.

- [25] DALLOT, J., AND SAB, K. Limit analysis of multi-layered plates. Part I : the homogenized love-kirchhoff model. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* (2007), doi : 10.1016/J.JMPS2007.05.005.
- [26] DALLOT, J., SAB, K., AND GODET, O. Experimental validation of a homogenized plate model for the yield design of masonry walls. *C.R Mecanique 336* (2008), 487–492.
- [27] DE. BUHAN, P. *Approche fondamentale du calcul à la rupture des ouvrages en sols renforcés*. Thèse d'état, Université Pierre et Marie Curie, 1986.
- [28] DE. BUHAN, P., AND TALIERCIO, A. A homogenization approach to the yield strength of composite materials. *Europ. J. Mech. A/Solids. 10(2)* (1991), 129–154.
- [29] DE FELICE, G., AMOROSI, A., AND MALENA, M. Elasto-plastic analysis of block structures through a homogenization method. 221–247.
- [30] DE SOUZA NETO, E., OWEN, D., AND PERIC, D. *Computational methods for plasticity : theory and applications*. Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, 2008.
- [31] DELMOTTE, P., RIVILLON, P., WESIERSKI, V., AND HUREZ, M. *Etude des murs de contreventement en maçonnerie de blocs creux en béton, Cahier du CSTB 3491*. CSTB, 2003.
- [32] DELMOTTE, P., RIVILLON, P., WESIERSKI, V., AND HUREZ, M. *Etude des murs de contreventement en maçonnerie de blocs creux en béton cellulaire autoclavé, Cahier du CSTB 3492*. CSTB, 2003.
- [33] DER PLUIJM, R. Material properties of masonry and its components under tension and shear. *Proc. 6th Canadian Masonry Symposium, eds V. V Neis, Saskatoon, Saskatchewan, Canada* (1992), 675–686.
- [34] DHANASEKAR, M., PAGE, A., AND KLEEMAN, P. The failure of brick masonry under biaxial stresses. *Proc Inst Civ Engrs Part 2 79* (1985), 295–313.
- [35] DHANASERKAR, M., PAGE, A., AND KLEEMAN, P. The failure of brick masonry under biaxial stresses. *Proc. Inst. Civil Eng Part 2, 79* (1985), 295–313.
- [36] DUNNE, F., AND PETRINIC, N. *Introduction to Computinal Plasticity*. Oxford University press, New York, 2005.
- [37] DUVAUT, G. Comportement macroscopique d'une plaque perforée périodiquement . *Lecture Notes in Mathematics 597* (1977).
- [38] DUVAUT, G., AND METELLUS, A. Homogénéisation d'une plaque mince en flexion périodique et symétrique. *C.R. Acad.Sci.Paris A283* (1976), 947–950.
- [39] FERRIER, E., AND HAMELIN, P. Long time concrete composite interface characterization for reliability prediction of rc beam strengthened with frp. *Materials and Structures 35* (2002), 564–572.

- [40] FIB TG9.3, F. T. G. . *FRP (Fibre Reinforced Polymer), Reinforcement for Concrete Structures Design and use of externally bonded fibre reinforced polymer reinforcement (FRP EBR) for reinforced concrete structures*. 'EBR' working party of fFib TG 9.3, 2001.
- [41] FOUCHAL, F. *Contribution à la modélisation numérique des interfaces dans les structures maçonnées*. Thèse de doctorat, Université des Sciences et de Technologie USTHB d'Alger-ALGERIE, 2006.
- [42] HAMELIN, P. Renforcement des ouvrages d'art par matériaux composites. *Technique de l'Ingénieur papier n° : AM6* (US 1997).
- [43] HILSDORF, H. Investigation into the failure mechanism of brick masonry loaded in axial compression. *Designing, engineering and constructing with masonry products*, eds. F.H. Johnson, Gulf Publishing Company, Houston, Texas, USA (1969), 34–41.
- [44] HOFFMANN, G., AND SCHUBERT, P. Compressive strength of masonry parallel to the bed joints. *Proc. 10th. Brick and block Masonry Conf.*, eds. N.G. Shrive and A. Huizer, University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada (1994), 1453–1462.
- [45] H.P.BACKES. *On the behaviour of masonry under tension in the direction of the bed joints (in German)*. Phd thesis, Aachen University of technology, 1985.
- [46] HUNE-BUNE KO, AND SATO, Y. Analysis of FRP-Strengthened RC Members with Varied Sheet Bond Stress-Slip models. *Journal of Advance Concrete Technology 2* (2004), 317–236.
- [47] INFORMATION CSTB RECHERCHE. *Les maçonneries face aux séismes*. CSTB, 2003.
- [48] ISIS CANADA, M. N. . *Strengthening Reinforced Concrete Structures with Externally-Bonded Fibre Reinforced Polymers (FRPs)*. 2001.
- [49] JAPAN, J. *Seismic retrofit design and construction guidelines for existing building using continuouscontinuous fiber reinforced materials*. 1999.
- [50] KAWA, M., PIETRUSZCZAK, S., AND SHIEH-BEYGI, B. Limit states of brick masonry based on homogenization approach. *International Journal of Solids and Structures 45* (2008), 998–1016.
- [51] KOHN, R., AND VOGELIUS, M. A new model for thin plates with rapidly varying thickness. *International Journal of Solids and Structures 20* (1984), 333–350.
- [52] LEWINSKI, T., AND TELEGA, J. Laminates and shells. asymptotic analysis and homogenization. *World Scientific, Singapore* (1999).
- [53] LIMAM, O. *Dalles en béton armé renforcées à l'aide de matériaux composites*. Phd thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (ENPC), 2002.

- [54] LIMAM, O., FORET, G., AND EHRLACHER, A. Rc beams strengthened with composite material : a limit analysis approach and experimental study. *Comp. Struc.* 59 (Issue 4) (2003a), 467–472.
- [55] LIMAM, O., FORET, G., AND EHRLACHER, A. Rc two way slabs strengthened with cfrp strips : experimental and a limit analysis approach. *Comp. Struc.* 60 (Issue 4) (2003b), 467–471.
- [56] LIVESLY, R. Limit analysis of structures formed from rigid blocks. *Int. J. Numer. Methods. Eng* 12 (1979), 1871–1878.
- [57] LIVESLY, R. A computational model for the limit analysis of three-dimensional masonry structures. *Meccanica* 27 (1992), 161–172.
- [58] LOFTI, H., AND BENSON SHING, P. Interface model applied to fracture of masonry structure, ASCE. *J. Struct. Eng* 120 (1994), 63–80.
- [59] MANN, W., AND BETZLER, M. Investigation on the effect of different forms of test samples to test the compressive strength of masonry. *Proc. 10th. Brick and block Masonry Conf., eds. N.G. Shrive and A. Huizer, University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada* (1994), 1305–1313.
- [60] MARTIN, A. *Etude du renforcement des structures par collage de fibres (cas des maçonneries)*. CSTB, 2004.
- [61] MASSART, T. *Multi-scale modeling of damage in masonry structures*. Phd thesis, Université Libre de Bruxelles, 2003.
- [62] MASSART, T., PEERLINGS, R., GEERS, M., AND GOTTCHEINER, S. Mesoscopic modeling of failure in brick masonry accounting for three-dimensional effects. *Engineering Fracture Mechanics* 72 (2005), 1238–1253.
- [63] MEIER. Making better use of the strength of advanced materials in structural engineering. *Proceedings of the International Conference on Frp Composites in Civil Engineering* (US 2001), 12–15.
- [64] MOREIRA, L., AND FERRON, G. Finite element implementation of an orthotropic plasticity model for sheet metal forming simulations. *Latin American Journal of Solids and Structures* 4 (2007), 149–176.
- [65] MULTON, S., MERLIOT, E., JOLY, M., AND TOUTLEMONDE, F. Water distribution in beams damaged by alkali-silica reaction : global weighing and local gammadensitometry. *Materials and Structures* 37 n° 269 (2004), 282–288.
- [66] MULTON, S., SEIGNOL, J., AND TOUTLEMONDE, F. Structural behavior of concrete beams affected by alkali-silica reaction. *ACI Materials Journal* Vol. 2 (2005), 67–76.
- [67] MULTON, S., AND TOUTLEMONDE, F. Water distribution in concrete beams. *Materials and Structures* 37 n° 269 (2004), 378–386.

- [68] NEALE, K., AND LABOSSIÈRE, P. State-of-the-art report on retrofitting and strengthening by continuous fibre in Canada. 'Non-Metallic Reinforcement for Concrete Structures', (Japan Concrete Institute,) (US 1997), 25–39.
- [69] OIKONOMOPOULOU, A. *Approches numériques pour l'études du comportement des structures maçonnées anciennes*. Phd thesis, Ecole Nationale Supérieure d'Architecture de Paris la Villette, 2009.
- [70] OUYANG, F. *Abaqus implementation of creep failure in polymer matrix composites with transverse isotropy*. PHD Thesis, University of Akron, 2005.
- [71] PAGE, A. The biaxial compressive strength of brick masonry. *Proc. Inst. Civil Eng 71 (3)* (1981), 893–906.
- [72] PAGE, A. The strength of brick masonry under biaxial tension-compression. *Int. J. Masonry Constr 3 (1)* (1983), 26–31.
- [73] PANDE, G., LIANG, J., AND MIDDLETON, J. Equivalent elastic moduli for brick masonry. *Comput. Geotech 8* (1989), 243–265.
- [74] PAWTUCKET. *ABAQUS Theory Manual Version 6.6*. ABAQUS Inc., Rhode Island, USA, 2006.
- [75] P.B.LOURENÇO. *Computational Strategies for Masonry Structures*. Phd thesis, Technical University Delft, 1996.
- [76] P.DE BUHAN, AND G.DE FELICE. Homogenization approach to the ultimate strength of brick masonry. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids 45 (7)* (1997), 1085–1104.
- [77] PIETRUSZCZAK, S., AND MROZ, Z. On failure criteria for anisotropic cohesive-frictional materials. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech 25* (2001), 509–524.
- [78] PIETRUSZCZAK, S., AND NIU, X. A mathematical description of macroscopic behaviour of brick masonry. *International Journal of Solids and Structures 29 (5)* (1992), 531–546.
- [79] SAB, K. Homogenization of non-linear random media by a duality method. application to plasticity. *Asymptotic Analysis 9* (1994), 311–336.
- [80] SAB, K. Yield design of thin periodic plates by a homogenisation technique and an application to masonry wall. *C.R Mecanique 5* (2003), 641–646.
- [81] SAB, K., CECCHI, A., AND DALLOT, J. Determination of the overall yield strength domain of out-of-plane loaded brick masonry. *International Journal for Multiscale Computational Engineering 5 (2)* (2007), 155–164.
- [82] SALENÇON, J. *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'école nationale des ponts et chaussées, Paris, 1983.
- [83] SALENÇON, J. An introduction to the yield design theory and its application to soil mechanics. *Europ. J. Mech. Solids. 21* (1990), 715–746.

- [84] SALENÇON, J. *De l'élasto-plasticité au calcul à la rupture*. Editions de l'Ecole Polytechnique, 2002.
- [85] SANCHEZ, B. *Strengthening of arched masonry structures with composite materials*. Phd thesis, University of Minho, Departement of Civil Engineering, Azurém, 4800-058 Guimaraes Portugal, 2007.
- [86] SHIEH-BEYGI, B., AND PIETRUSZCZAK, S. Numerical analysis of structural masonry : mesoscale approach. *Comp. Struc.* doi :10.1016/j.compstruc.2008.05.007 (2008).
- [87] SIEGERT, D., MULTON, S., AND TOUTLEMONDE, F. Resonant frequencies monitoring of alkali aggregate reaction damaged concrete beams. *Experimental Techniques* (2005), 37–40.
- [88] SUQUET, P. Analyse limite et homogénéisation. *C.R. Acad.Sci.Paris série II 296* (1984), 1355–1358.
- [89] SUQUET, P. Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. homogenization techniques for composite media. *Lecture Notes in Physics 272*. Springer-Verlag, Berlin (1987).
- [90] TELEGA, J. Epi-limit on hb and homogenization of heterogeneous plastic plates. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Application 25 (5)* (1995), 499–529.
- [91] TÄLJSTEN, B. Defining anchor lengths of steel and CFRP plates bonded to concrete. *Int. J Adhesion and Adhesives 19* (1997), 319–327.
- [92] TOUTLEMONDE, F. From research to better practice. *Experimental Techniques Vol. 27 n° 8* (2005), 49–53.
- [93] TRIANTAFILLOU. Shear strengthening of reinforced concrete beams using epoxy-bonded frp composites. *ACI Structural Journal* (1998), 107–115.
- [94] USHAKSARAEI, R., AND PIETRUSZCZAK, S. Failure criterion for structural masonry based on critical plane approach. *Journal of Engineering Mechanics ASCE 128 (7)* (2002), 769–778.
- [95] WESCHE, K., AND ILANTZIS, A. General recommendations for methods of testing load bearing walls. *Materials and Structures RILEM, 13 (78)* (1980), 433–445.
- [96] YUAN, H., TENG, J., SERACINO, R., WU, Z., AND YAO, J. Full-range behavior of FRP-to-concrete bonded joints. *Engineering Structures 26* (2004), 553–565.
- [97] ZAKI, O. *Contribution à l'étude et à la modélisation de l'influence des phénomènes de transferts de masse sur le comportement mécanique de flacons en polypropylène*. Phd thesis, Université de Paris-Est, 2008.