

Numéro National de Thèse : 2019LYSEN036

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

opérée par

l'École Normale Supérieure de Lyon

École Doctorale N°52 Physique et Astrophysique de Lyon

Spécialité : Mécanique des fluides Discipline : Physique

Soutenue publiquement le 27/09/2019, par : Jason RENEUVE

Modélisation de la structure fine de la turbulence quantique et classique

Devant le jury composé de :

		ANDA (DNA) I	D
Mickael Bourgoin	Directeur de recherche	CNRS et ENS de Lyon	Examinateur
Marc-Étienne Brachet	Directeur de recherche émérite	CNRS et ENS	Rapporteur
Léonie Canet	Professeure	LPMMC	Rapporteure
Bernard Castaing	Professeur émérite	LEGI	Examinateur
Laurent Chevillard	Chargé de recherche	CNRS et ENS de Lyon	Directeur
Bérengère Dubrulle	Directrice de recherche	SPEC	Examinatrice
Julien Salort	Chargé de recherche	CNRS et ENS de Lyon	Co-encadrant
John Christos Vassilicos	Directeur de Recherche	LMFL	Examinateur

Remerciements

Ces pages de remerciements auront bien failli passer à la trappe, probablement plus par pure étourderie que par un acte manqué. De toute façon, il y a trop de personnes et de circonstances impliquées dans la réussite d'une thèse pour pouvoir les reconnaître et les remercier en temps fini. Je me limite donc ici à celles et ceux que la tradition exige, et pour tous-te-s les autres je vous le dit comme ça : merci. Allons-y.

Pour commencer, merci Laurent. Merci d'abord de m'avoir invité à faire cette thèse avec toi, un soir à Modane. Tu m'as dit : «ça va être super», et je pense que le contrat est plutôt bien rempli. Merci ensuite de m'avoir accompagné durant ces trois ans, en t'assurant que cette thèse soit avant tout une formation. Au-delà des calculs exacts sur les champs aléatoires, je retiendrai ton singulier rapport à la science, entre passion, critique et transparence, qui m'aura aidé à garder les pieds sur terre malgré mes études à l'ENS. Merci enfin, et surtout, pour la recette du houmous.

De manière indissociable, merci Julien. Même si nos interactions auront été plus intermittentes, ta présence durant ma thèse était essentielle et ton apport toujours précieux. Merci pour tous les tuyaux que je n'aurais sans doute eu nulle-part ailleurs que ce soit pour la physique, l'informatique ou l'administratif, et qui m'ont évité bien des déboires. De manière générale, merci d'avoir démystifié le métier de chercheur et de me l'avoir rendu plus accessible quand je me méprenais sur des non-dits.

Plus spécifiquement, merci à l'ensemble de mon jury de soutenance : Mickaël Bourgoin, Marc-Étienne Brachet, Léonie Canet, Bernard Castaing, Bérengère Dubrulle et John Christos Vassilicos, pour avoir accepté d'examiner cette thèse. Merci pour vos questions, curieuses et justes, qui auront permis une discussion enrichissante et qui m'auront propulsé dans le vif des perspectives de ce travail. Merci en particulier à Léonie et Marc pour votre lecture attentive de mon manuscrit et pour vos rapports, qui m'ont largement aidé à prendre un recul nécessaire pour ma soutenance.

Merci à l'ensemble du Laboratoire de Physique de L'ENS de Lyon pour m'avoir accueilli pendant ces trois ans et pour avoir constitué un cadre de travail formidable, malgré ma tendance à rester enfermé dans mon bureau... Merci à Antoine Naert et Stéphane Roux pour les discussions, parfois anodines parfois profondes, merci à Fatiha et Nadine pour votre compétence et votre patience face à mon incompréhension des tâches administratives les plus simples, et surtout merci à tous te s les doctorant e s et post-doctorant e s présent e s au labo durant ma thèse, de manière non-exhaustive : Jérémy, Lucas, Alex, Denis, Géraldine, Pauline et Laura, certain e s pour avoir partagé un bureau, d'autres pour avoir partagé des moments en conférence, en école ou (trop rarement) en salle café et à l'escalade.

Merci à tous te s mes ami e s de longue date d'avoir continué à être présent e s , que ce soit à l'ENS ou en dehors. Merci Antton de m'avoir aidé à moins culpabiliser quand je trouvais que je faisais trop de choses à côté de ma thèse. Merci Ronan pour les pauses café, le haggis et la deep-fried Mars bar. Merci Florian pour les cartes postales et les disques, ça groove nom d'un chien. Merci Julien pour ton énergie positive et infinie, et désolé pour les erreurs de mail avec Julien. Merci Vincent et Victor pour le trombone, la musique et la montagne. Merci et spéciale dédicace à Camille pour le manuscrit, sans toi ce qui suit ressemblerait à un rapport de stage de troisième, au mieux. Enfin merci Grimaud pour les pauses dans les endroits les plus incongrus, pour les jeux de la semaine ski et les mails de Chine.

Merci Maman, Papa et Lucas, et toute la famille. Ce mot est court mais je vous dois bien plus que ces trois dernières années.

Finalement merci Anne, de m'avoir montré que je pouvais le faire, et de m'avoir sorti la tête de l'eau plus que je ne l'aurais fait seul.

Table des matières

Remerciements

Introduction

i

1

Première partie

Structure, dynamique et reconnexion de vortex dans un modèle non-local de superfluide

\mathbf{Ch}	apitr	e 1 - Introduction	5
1.1	Supe	erfluidité de l'hélium 4	5
1.2	Le v	ortex quantique	5
1.3	Reco	onnexion des vortex quantiques	8
1.4	Turk	oulence superfluide	9
\mathbf{Ch}	apitr	e 2 - Équation de Gross-Pitaevskii	11
2.1	Fond	ction d'onde macroscopique	11
	2.1.1	Condensat de Bose dilué et approximation de Bogoliubov	11
	2.1.2	Description de l'hélium liquide	11
2.2	Équa	ations de la dynamique	12
	2.2.1	Formulation lagrangienne	12
	2.2.2	Relation de dispersion des excitations linéaires	14
	2.2.3	Forme adimensionnée et choix d'unités	15
2.3	Solu	tion vortex stationnaire	16
2.4	Équa	ation de Gross-Pitaevksii locale	17
\mathbf{Ch}	apitr	re 3 - Calibration d'un modèle non-local	21
3.1	Mod	lèle de potentiel d'interaction	21
	3.1.1	Choix du modèle	21
	3.1.2	Ajustement de la relation de dispersion	23
3.2	Tene	lance à la cristallisation	25
	3.2.1	Recherche d'une solution vortex stationnaire	25
	3.2.2	Cristallisation statique.	28

	3.2.3	Cristallisation dynamique	31
3.3	Anal	yse de la solution stationnaire	32
	3.3.1	Profil radial de densité	32
	3.3.2	Profils de vitesse, densité d'impulsion et pseudo-vorticité	33
\mathbf{Ch}	apitr	e 4 - Étude de la reconnexion de deux vortex	35
4.1	Simu	llation numérique directe et analyse statistique de la reconnexion	35
	4.1.1	Méthode numérique	35
	4.1.2	Cristallisation.	36
	4.1.3	Analyse statistique de quantités hydrodynamiques	37
4.2	Suiv	i des vortex	39
4.3	Anal	yse géométrique de la reconnexion	41
	4.3.1	Propriétés globales	41
	4.3.2	Propagation d'un paquet d'onde localisé	42
4.4	Anal	yse énergétique de la reconnexion	45
	4.4.1	Bilans d'énergie locaux et globaux	46
	4.4.2	Émission de son	48
4.5	Pers	pectives	48

Seconde partie

Modélisation aléatoire de la structure spatio-temporelle de la turbulence homogène et isotrope

\mathbf{Ch}	Chapitre 1 - Introduction	
\mathbf{Ch}	apitre 2 - Phénoménologie de la turbulence	54
2.1	Nécessité d'une approche phénoménologique	54
2.2	Description probabiliste des signaux de vitesse	54
	2.2.1 Acquisition expérimentale et hypothèse de Taylor	55
	2.2.2 Hypothèses et outils statistiques	56
2.3	Phénoménologie K41 de la turbulence homogène et isotrope	56
2.4	Intermittence	58
\mathbf{Ch}	apitre 3 - Analyse d'une DNS	60
3.1	Simulation Numérique Directe des équations de Navier-Stokes	60
	3.1.1 Motivation	60
	3.1.2 Simulation et données choisies	60

3.2	Stat	istiques spatio-temporelles de la DNS	61
	3.2.1	Méthodes	61
	3.2.2	Résultats	62
3.3	Mes	res complémentaires	68
	3.3.1	Statistiques du champ de vitesse transverse	68
	3.3.2	Étude du champ de vitesse lagrangien	69
\mathbf{Ch} ten	apitr 1por	re 4 - Modélisation aléatoire d'un champ de vitesse spatio- el	71
4.1	Choi	x d'un modèle aléatoire	71
	4.1.1	Motivation et cahier des charges	71
	4.1.2	Champs aléatoire	72
4.2	Le C	Champ Gaussien Fractionnaire	73
	4.2.1	À une dimension	73
	4.2.2	Généralisation à deux dimensions	78
4.3	Mod	élisation de la flatness : le Chaos Multiplicatif Gaussien	80
	4.3.1	Le CGF log-corrélé	81
	4.3.2	Construction d'un champ intermittent	82
	4.3.3	Généralisation à deux dimensions	84
4.4	Mod	élisation de la skewness	85
	4.4.1	Le Chaos Multiplicatif Corrélé	85
	4.4.2	Réalisation numérique	86
	4.4.3	Problèmes dans la limite de viscosité nulle	88
	4.4.4	Nouvelle proposition	89
4.5	Pers	pectives	91
	4.5.1	Anisotropie	92
	4.5.2	Causalité	93
Co	nclus	sion	95

Annexes

Annexe A - Forme du potentiel dans l'espace réel		99
Anr	nexe B - Densités de probabilités et profils radiaux	100
B.1	PDF de la vitesse	100
B.2	PDF de la pseudo-vorticité	100

Annexe C - Champ gausien fractionnaire	102
C.1 Convergence de la variance	102
C.2 Convergence de la variance des incréments : moment d'ordre 2	103
C.3 Moment d'ordre 3 et skewness	104
C.4 Moment d'ordre 4 et flatness	104
C.5 Généralisation à deux dimensions	105
C.5.1 Variance	105
C.5.2 Fonctions de structure	105
Annexe D - Champ intermittent : chaos multiplicatif indépenda	.nt 107
D.1 Champ gaussien fractionnaire log-corrélé	107
D.1.1 Variance	107
D.1.2 Corrélation	108
D.2 Construction d'un champ intermittent	109
D.2.1 Variance	110
D.2.2 Moment d'ordre 2	110
D.2.3 Moment d'ordre 3 et skewness	111
D.2.4 Moment d'ordre 4 et flatness	111
D.3 Généralisation à deux dimensions	114
Annexe E - Champ asymétrique : chaos multiplicatif corrélé	115
E.1 Le champ log-corrélé impair	116
E.1.1 Variance	116
E.1.2 Corrélation	116
E.2 Variance de la vitesse	118
E.3 Variance des incréments	119
E.4 Fonction de structure d'ordre 3	120
Bibliographie	123

Introduction

La turbulence désigne l'état des fluides fortement agités, au sein desquels les trajectoires des particules présentent un aspect imprévisible. L'étude de la turbulence est un problème physique captivant, de par le contraste entre son omniprésence dans notre vie et la complexité du phénomène. On observe en effet quotidiennement des écoulements turbulents, que ce soit en agitant un chocolat chaud avec une cuillère, en observant le passage d'une rivière sous un pont ou le déchirement des nuages les jours de grand vent. Malgré cette ubiquité, la description mathématique précise de la turbulence reste un problème ouvert depuis sa formalisation au début du XIX^{ème} siècle par Euler, Navier et Stokes. La difficulté du problème tient en partie dans la large gamme d'échelles impliquées. En effet dans l'image que l'on doit à Richardson, un fluide agité à une certaine échelle spatiale développe par un processus appelé cascade des structures tourbillonaires à toutes les échelles inférieures. Ce processus de cascade continue jusqu'à l'échelle de dissipation de l'énergie, imposée par la viscosité du fluide et pouvant atteindre plusieurs ordres de grandeur en dessous de l'échelle d'agitation. Bien que les équations développées par Navier et Stokes constituent encore à ce jour la description mathématique la plus précise de la dynamique des fluides, on ne sait toujours pas en extraire des propriétés générales de la turbulence dans le régime de la cascade décrite par Richardson. La description de la structure de la turbulence à ces échelles, que ce soit part les équations de Navier-Stokes ou par un autre modèle, revêt donc un grand enjeu pour la compréhension globale du phénomène.

Au début du XX^{ème} siècle, la découverte de la superfluidité de l'hélium 4 a ouvert l'étude de la turbulence dans les fluides quantiques – ou *turbulence quantique*, qui se démarque de l'étude des fluides *classiques* tels que l'eau ou l'air. En effet les superfluides présentent des propriétés singulières telles que l'absence totale de viscosité ou la quantification de l'intensité des tourbillons. Pour décrire ces propriétés exotiques, plusieurs modèles existent à des échelles très différentes. Malheureusement aucun d'eux ne donne encore une description satisfaisante de la réalité microscopique de l'hélium 4 superfluide, à la manière des équations de Navier-Stokes pour les fluides classiques. En effet les modèles existants se basent essentiellement sur deux approches complémentaires qui sont encore mal réconciliées. Les modèles issus de la mécanique quantique permettent de décrire naturellement des phénomènes aux échelles de l'ordre de l'Angström mais sont peu adaptés à la description des interactions au sein d'un liquide. D'autre part les approches par l'hydrodynamique sont plus fidèles à la réalité d'une phase condensée à des échelles plus grandes, mais omettent la description de phénomènes cruciaux tels que la reconnexion des tourbillons.

Ce manuscript de thèse est organisé en deux parties, qui bien qu'étant relativement indépendantes sont articulées autour d'une même idée : modéliser des phénomènes de petite échelle en turbulence. La première partie résume les deux premières années de mon travail de doctorat, et se place dans le cadre de la turbulence *quantique*. L'objectif de cette partie était d'étudier l'influence des rotons sur la dynamique d'un modèle de superfluide. Les rotons sont des excitations à l'échelle de l'Angstrom, typiques du spectre des excitations de l'hélium. Afin d'étudier ces structures de très petite échelle on utilise l'équation de Gross-Pitaevskii, dans laquelle on doit introduire un modèle *non-local* pour les interactions au sein de l'hélium. Cette approche bien que schématique permet de capturer des phénomènes essentiels à la turbulence quantique tels que l'existence de tourbillons quantifiés et leur reconnexion. Il s'agit de plus d'un cadre naturel pour l'introduction des rotons dans la dynamique et la comparaison au cas local sans rotons. On commence dans un premier chapitre par introduire le cadre historique de la turbulence quantique ainsi qu'un aperçu des différents modèles utlisés pour la décrire. Dans un deuxième chapitre, on se concentre sur l'équation de Gross-Pitaevskii qui sera le cadre formel de cette étude. On présente les caractéristiques générales de cette équation ainsi que les différences entre l'approximation locale de l'interaction et sa généralisation non-locale. Le troisième chapitre est consacré au choix d'un modèle non-local et à sa calibration. On se base dans un premier temps sur la relation de dispersion expérimentale de l'hélium 4, en la reproduisant à l'aide de la version linéarisée de l'équation de Gross-Pitaevskii non-locale. On ajuste ensuite cette calibration par l'observation numérique des instabilités induites par la non-linéarité du terme d'interaction. Enfin dans le quatrième et dernier chapitre de cette partie on étudie la reconnexion des tourbillons quantiques dans le modèle non-local que l'on a calibré, en réalisant des simulations numériques directes (DNS) de l'équation de Gross-Pitaevskii. Les résultats de ces DNS sont analysés par des méthodes géométriques et énergétiques, et sont systématiquement comparés aux résultats de simulation du modèle local, afin d'en déduire l'influence des rotons sur le phénomène de reconnexion. L'ensemble des résultats présentés dans cette partie ont fait l'objet d'une publication récente [1].

La seconde partie de ce manuscrit est dédiée au travail de la dernière année de mon doctorat, au cours de laquelle je me suis intéressé à la description de la turbulence homogène et isotrope par des modèles aléatoires. Le but de cette partie était de modéliser le champ de vitesse eulérienne par un champ aléatoire capable de reproduire les propriétés statistiques spatio-temporelles de la turbulence aux petites échelles. Un premier chapitre introductif présente un rapide historique de la turbulence, puis on introduit dans le deuxième chapitre les aspects de la phénoménologie de la turbulence homogène et isotrope qui nous serviront d'outil pour la suite de l'étude. Dans le troisième chapitre on analyse des données issues d'une DNS des équations de Navier-Stokes, mises à disposition de la communauté par l'Université Johns Hopkins. On évalue les corrélations ainsi que les fonctions de structures spatio-temporelles du champ de vitesse afin d'expliciter les propriétés statistiques à reproduire. Enfin dans un dernier chapitre on propose un champ aléatoire calibré sur les propriétés observées dans la DNS. On détaille chacun des éléments du modèle final, ainsi que leur rôle dans la reproduction de la structure spatio-temporelle de la turbulence. On commence par la structure des corrélations avec la bonne régularité Hölderienne, à l'aide d'une approximation gaussienne. On complète ensuite cette approximation afin de reproduire les aspects non-gaussiens typiques de l'intermittence, notamment le comportement des fonctions de structure d'ordre trois et quatre.

Première partie

Structure, dynamique et reconnexion de vortex dans un modèle non-local de superfluide

1 Introduction

1.1 Superfluidité de l'hélium 4

L'hélium 4 se liquéfie à la température $T_{\rm eb} = 4.2 \,\mathrm{K}$ à pression atmosphérique. Aux températures encore plus basses et à pression de vapeur saturante, l'hélium ne se solidifie pas mais subit à $T_{\lambda} = 2.17 \,\mathrm{K}$ une transition vers une seconde phase liquide appelée «hélium II», par opposition à l'hélium I qui désigne la phase liquide au-dessus de T_{λ} . L'hélium II possède des propriétés mécaniques et thermodynamiques remarquables; on s'intéresse en particulier ici à sa viscosité.

Les premières mesures de la viscosité de l'hélium II ont mené à des résultats radicalement différents selon la méthode utilisée. En effet en 1938 Keesom et Macwood proposent une mesure de la force de traînée exercée par l'hélium II sur des disques oscillants [2], et en déduisent une valeur pour la viscosité de l'ordre de $\nu \sim 10^{-8} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$. Cette valeur est alors proche de celle de la viscosité de l'hélium I près du point d'ébullition $T_{\rm eb}$. Dans un autre temps, Allen et Misner mesurent en 1939 la résistance de l'hélium II à s'écouler dans des capillaires [2]. Ils observent que pour des capillaires assez fins, l'hélium II n'oppose aucune résistance apparente à l'écoulement. Ce résultat suggère une viscosité nulle pour l'hélium II, ce qui est en contradiction apparente avec les mesures de Keesom et Macwood.

Afin de réconcilier ces résultats contradictoires, London et Tisza proposent un modèle pour décrire l'hélium II, appelé modèle à deux fluides et complété par la suite par Landau entre 1941 et 1947. Ce modèle représente l'hélium II comme la superposition de deux composantes fluides : la composante normale est un fluide visqueux décrit par les équations de Navier-Stokes. Elle est responsable de la force de traînée observée sur un objet dans un écoulement d'hélium II, comme pour les expériences de Keesom et Macwood. La composante superfluide est un fluide parfait décrit par les équations d'Euler. Dans l'expérience de Allen et Misner, pour des capillaires assez fins, seule la composante superfluide peut s'écouler à travers le capillaire, et n'oppose alors aucune résistance à l'écoulement. La proportion relative de ces deux composantes est déterminée par la température, comme représenté sur la figure 1.1 : la masse volumique totale de l'hélium II s'écrit comme la somme des masses volumiques des deux composantes $\rho = \rho_n(T) + \rho_s(T)$. La densité de la composante superfluide croît depuis $\rho_s(T_\lambda) = 0$ à la transition – l'hélium II est alors entièrement normal, à $\rho_s(T = 0) = \rho$ où l'hélium II est entièrement superfluide.

Le modèle à deux fluides est complété [4–6] par la description de l'interaction entre les deux composantes, appelée friction mutuelle. Cette interaction prend la forme d'un terme non-linéaire en la différence de vitesse entre les deux composantes $\vec{u}_n - \vec{u}_s$. La friction mutuelle peut donc être interprétée comme une force de frottement entre les deux composantes, qui leur permet d'échanger de l'énergie et a tendance à faire s'aligner les deux champs de vitesse. Cette phénoménologie, due à Hall & Vinen [5] puis Bekarevitch & Khalatnikov [6] est communément appelée modèle HVBK.

1.2 Le vortex quantique

Un objet fondamental de l'hydrodynamique des superfluides est le vortex quantique – ou vortex superfluide, prédit par Onsager [7] puis étudié par Feynman [8]. Il s'agit s'une version exotique des tourbillons rencontrés dans les fluides classiques. Les vortex quantiques dans l'hélium peuvent être imagés par différentes techniques [9, 10], dont deux exemples sont donnés sur la figure 1.2.



Fig. 1.1 Densités des composantes superfluide et normale dans le modèle à deux fluides, d'après [3].

Ces techniques d'imageries basées le plus souvent sur des traceurs permettent de visualiser au mieux la position des vortex dans l'espace, mais ne donnent pour l'instant aucune information sur la structure microscopique de ces vortex. De plus, même si les visualisations actuelles permettent d'observer des phénomènes caractéristiques de la phénoménologie des vortex quantiques [11], l'interaction entre traceurs et tourbillons n'a pour l'instant fait l'objet que de très peu d'études [12].



Fig. 1.2 Exemples de visualisation des vortex quantiques dans l'hélium. À gauche, une des premières images obtenue en piégeant des électrons le long de vortex parallèles dans un récipient en rotation [9]. Les électrons sont ensuite accélérés sur une plaque de phosphore pour obtenir une image dans le plan perpendiculaire aux tourbillons. À droite, une visualisation récente issue de [10] obtenue par piégeage de particules d'hydrogène solide le long des vortex. L'imagerie stéréographique permet de remonter à la position des filaments à trois dimensions.

Le vortex quantique est défini pour un écoulement tri-dimensionnel par une ligne, aussi appelée cœur (réduite à un point pour un écoulement bi-dimensionnel) autour de laquelle le fluide est en rotation. Contrairement à un tourbillon classique, le vortex quantique présente des propriétés très particulières : la densité du superfluide s'annule rigoureusement sur la ligne du coeur du vortex, et la circulation autour de celle-ci est constante et ne prend que des valeurs quantifiées par pas de $K = \frac{2\pi\hbar}{m}$ où m est la masse d'un atome d'hélium 4. On peut montrer de plus que les vortex avec plusieurs quanta de circulation sont généralement instables, et qu'il est plus favorable énergétiquement pour un superfluide de présenter n vortex à un quantum de circulation plutôt qu'un seul vortex à n quanta de circulation. La circulation sur un contour C entourant le cœur d'un vortex quantique est donc constante et égale à $\oint_C \vec{u}_s \cdot d\vec{\ell} = \frac{2\pi\hbar}{m} = K$. Pour un vortex rectiligne parallèle à l'axe Oz, on en déduit immédiatement que le champ de vitesse induit est $\vec{u}_s(\vec{r},t) = \frac{K}{2\pi r} \vec{e_{\theta}}$ où $\vec{e_{\theta}}$ est la direction azimuthale dans le plan Oxy perpendiculaire au coeur du vortex. On note que le champ de vitesse diverge sur le cœur du vortex ; cependant comme la densité du superfluide s'annule en ce point, il n'existe pas de particule de fluide se déplaçant à une vitesse infinie. On remarque de plus qu'un tel

champ de vitesse est irrotationnel en dehors de la position exacte du cœur du vortex : la vorticité de l'écoulement superfluide est donc distributionnelle $\omega_s(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \times \vec{u}_s(\vec{r},t) = K\delta(\vec{r}-z\vec{e_z})\vec{e_z}$. Le vortex quantique apparaît donc comme une singularité de l'écoulement, régularisée par l'annulation de la densité superfluide en son cœur.

Un vortex quantique rectiligne induit donc un écoulement stationnaire, invariant par translation et rotation le long de son axe. La stationnarité est une nouvelle différence avec un tourbillon classique, qui s'atténue nécessairement par viscosité en l'absence d'injection d'énergie. Pour un vortex quantique non-rectiligne, l'écoulement n'est cependant plus stationnaire. Ce résultat peut être intuité en considérant que chaque élément de longueur du cœur du vortex induit un écoulement non-nul en dehors de son axe. Pour un vortex non-rectiligne, les axes respectifs des éléments de longueur du cœur ne sont pas alignés et induisent donc entre eux un déplacement relatif. Par analogie avec l'électromagnétisme et une distribution uni-dimensionnelle de courant, la dynamique de la ligne de vortex est alors donnée par la loi de Biot-Savart :

$$\vec{u}_s(\vec{r},t) = -\frac{K}{2\pi} \int_{\Gamma(t)} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times \mathrm{d}\vec{r}', \qquad (1.1)$$

où
$$\Gamma(t): [0, \ell(t)] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

(s,t) $\mapsto \vec{r}'(s,t)$ (1.2)

est le paramétrage du vortex de longueur ℓ à l'instant t. Dans le cadre des simulations numériques, l'équation (1.1) permet de simuler la composante superfluide du modèle à deux fluides pour un faible coût numérique par rapport aux équations d'Euler. En effet il suffit de simuler la position des filaments de vortex au lieu de l'intégralité du champ de vitesse superfluide : on parle alors communément de vortex filament model (VFM) dans la littérature [13]. Les vortex quantiques interagissent alors avec la composante normale via la friction mutuelle. En effet dans la phénoménologie HVBK les vortex quantiques jouent le rôle de diffuseurs des excitations thermiques de la composante normale. Cette diffusion, moyennée sur des échelles grandes devant la distance moyenne inter-vortex, donne lieu à la friction mutuelle entre les deux composantes. Un exemple de simulation de VFM est donné sur la figure 1.3.



Fig. 1.3 Visualisation de la position des vortex au cours d'une simulation de VFM, issue de [14].

La dynamique des vortex dans l'équation (1.1) est fortement non-locale, puisque le mouvement du filament en un point est déterminé par l'induction de l'ensemble du vortex. Dans le cas où la courbure locale du filament est faible, une approximation locale de la vitesse du vortex est possible. Dans cette Approximation d'Induction Locale (LIA), la vitesse $\vec{v}(s,t)$ du filament en un point s est entièrement déterminée par sa courbure κ en ce point :

$$\vec{v}(s,t) = A\kappa(s,t)\vec{B}(s,t),\tag{1.3}$$

où A est une constante qui diverge logarithmiquement avec la taille du cœur du vortex et \vec{B} est le vecteur unitaire binormal au filament au point s, i.e. normal au plan osculateur du filament en ce point. La dynamique d'un filament unique dans cette approximation a été étudiée notamment par Hasimoto [15], et ses prédictions sont étudiées dans le chapitre 4.

1.3 Reconnexion des vortex quantiques

En pratique, les écoulements superfluides présentent un grand nombre de vortex quantiques, et d'autant plus que l'écoulement est tourbillonaire – et a fortiori turbulent. Dans de tels écoulements, les filaments interagissent fortement les uns avec les autres du fait de leur proximité. Lorsque deux filaments entrent en collision, ils peuvent échanger leurs extrémités respectives : on parle alors de *reconnexion* des vortex quantiques. La reconnexion, prédite par Feynman [8] puis développée théoriquement par Schwartz [16, 17] est un phénomène fondamental à la description des écoulements superfluide, et notamment des écoulements turbulents [18]. Ce phénomène n'est pas décrit par le *vortex filament model* régi par l'équation (1.1), et a fortiori par la LIA à l'équation (1.3) non plus.

La description fidèle du phénomène de reconnexion demande un modèle microscopique précis de l'écoulement superfluide, ce qui n'existe pas à notre connaissance à ce jour pour l'hélium II. Cependant pour des systèmes superfluides plus dilués comme les condensats de Bose-Einstein atomiques gazeux, il existe de tels modèles microscopiques capables de décrire le phénomène de reconnexion. Ces modèles décrivent la composante superfluide comme un condensat de Bose-Einstein et sont adaptés à la dynamique à température nulle, lorsque le gaz est entièrement superfluide. Une approche par seconde quantification [19] consiste à décrire le superfluide par une fonction d'onde macroscopique $\Psi(\vec{r}, t)$, dont la dynamique est régie par une équation de Schrödinger non-linéaire :

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi - \mu\Psi + \Psi \iiint_{\mathbb{R}^3} G(\vec{r} - \vec{r'}) \left|\Psi(\vec{r'}, t)\right|^2 \mathrm{d}^3 r', \tag{1.4}$$

où m est la masse d'un atome constituant le condensat, μ le potentiel chimique et G un pseudopotentiel décrivant l'interaction entre atomes dans le cadre d'un approximation de champ moyen. Le choix d'un modèle pour G sera donc dépendant du système modélisé par l'équation (1.4). Dans le cas d'un gaz dilué, une approximation commune consiste à choisir une interaction locale $G(\vec{r}) = g\delta(\vec{r})$ où g > 0 est l'intensité de l'interaction répulsive. Dans ce cas le terme d'interaction non-linéaire dans l'équation (1.4) est réduit à $g\Psi |\Psi|^2$ et on parle alors d'équation de Gross-Pitaevskii. Ce modèle décrit naturellement le phénomène de reconnexion des vortex, qui est observable numériquement à partir d'une condition initiale de deux vortex proches [20].

Une telle approximation, bien que séduisante ne décrit pas fidèlement la réalité physique de l'hélium II où les interactions sont plus fortes que dans un gaz dilué. On se propose dans cette thèse de choisir un modèle d'interaction pour l'hélium II qui soit relativement fidèle à la réalité expérimentale. En effet un aspect que l'approximation locale ne permet pas de décrire est l'existence d'un minimum bien défini de la relation de dispersion de l'hélium, appelé minimum des rotons. Ce minimum représenté sur la figure 1.4 est caractéristique de l'hélium liquide [21,22] et peut être décrit par un potentiel d'interaction non-local [23]. Le choix de ce potentiel est l'objet du chapitre 3.



Fig. 1.4 Relation de dispersion (ligne blanche) des excitations dans l'hélium II à T = 1.3 K à pression de vapeur saturante. En couleur, l'intensité mesurée par diffraction de neutrons et représentée ici sur une échelle logarithmique. Figure issue de [22] à partir des données de [21].

1.4 Turbulence superfluide

La turbulence dans l'hélium superfluide est caractérisée par une importante densité volumique de lignes de vortex. Cet enchevêtrement de filaments en auto-interaction est le siège d'événements de reconnexion extrêmement fréquents. Le champ de vitesse superfluide résultant est alors très chaotique, d'une façon similaire à la turbulence dans les fluides plus classiques. On désigne par *turbulence superfluide* ou *turbulence quantique* ce genre découlement turbulent.

Aux échelles macroscopiques, i.e. grandes devant l'échelle dissipative de la composante normale, la turbulence quantique est statistiquement similaire à la turbulence tri-dimensionnelle classique, au sens de la phénoménologie de Kolmogorov [24]. On retrouve en effet la structure aux petites échelles telle que le comportement en loi de puissance du spectre de l'énergie cinétique [25,26] ainsi que les propriétés d'intermittence [27–29], mais aussi le comportement aux grandes échelles [30]. Malgré des différences aux échelles de l'ordre de la séparation moyenne inter-vortex [31, 32], il est donc communément admis qu'aux températures finies $0 < T < T_{\lambda}$, les deux composantes de l'écoulement sont verrouillées entre elles. Cela implique en particulier que les vortex quantiques s'associent en des structures polarisées, i.e. dont la vorticité moyenne ressemble statistiquement à celle observée en turbulence classique [33].

Les échelles inférieures à la séparation inter-vortex moyenne sont plus difficilement accessible expérimentalement. Si elles ont récemment été étudiées dans les condensats d'atomes froids [34], les échelles impliquées dans l'hélium liquide rendent ce type d'étude expérimentale encore impossible dans l'hélium II. Les études numériques de ces petites échelles sont nombreuses, que ce soit par l'approche de Biot-Savart et de la LIA [35, 36], ou par l'équation de Gross-Pitaevskii [20, 37]. Cependant comme mentionné dans la partie 1.3, les modèles de filaments demandent d'implémenter le phénomène de reconnexion *ad hoc*. De plus l'utilisation de l'équation de Gross-Pitaevskii dans l'approximation d'une interaction locale est peu justifiée pour l'hélium II. Des généralisations de l'équation (1.4) à une interaction non-locale ont été proposées dans la littérature, d'abord de manière très schématique [23] puis avec un rafinement plus poussé dans la description de la réalité expérimentale [38, 39]. Malheureusement les modèles les plus fidèles à la physique de l'hélium II présentent des difficultés liées à des instabilités modulationnelles fortes [39].

On se propose dans cette thèse de choisir un modèle d'interaction non-locale pour l'hélium II, qui soit relativement fidèle à la réalité expérimentale toute en étant assez stable pour être simulé numériquement. On commence dans le chapitre 2 par une présentation de l'équation de Gross-Piatevskii non-locale et de ses propriétés globales. Dans le chapitre 3 on discute le choix du

pseudo-potentiel $G(\vec{r}, t)$ en se basant d'une part sur une reproduction de la relation de dispersion expérimentale des excitations linéaires dans l'hélium II, et sur la minimisation des instabilités apportées par la non-linéarité du problème d'autre part. Enfin on étudie dans le chapitre 4 le phénomène de reconnexion à l'échelle de deux vortex en interaction mutuelle, à l'aide d'une Simulation Numérique Directe (DNS) de l'équation de Gross-Pitaevskii non-locale munie du modèle proposé précédemment. Cette étude est basée sur une analyse géométrique de l'ensemble de deux vortex ainsi que sur des bilans énergétiques locaux et globaux. Les résultats sont systématiquement comparés à ceux du cas de l'équation de Gross-Pitaevskii locale, qu'ils soient issus de la littérature ou de nos propres DNS.

2 Équation de Gross-Pitaevskii

2.1 Fonction d'onde macroscopique

On décrit dans ce chapitre le formalisme utilisé pour décrire l'hélium II à température nulle, basé sur une approche par la seconde quantification des condensats de Bose dilués.

2.1.1 Condensat de Bose dilué et approximation de Bogoliubov

A très basse température, un gaz de bosons sans interaction subit une transition de phase quantique appelée *condensation de Bose-Einstein* [19], au cours de laquelle les particules constituant le gaz occupent macroscopiquement l'état fondamental. Cette transition est permise dans la limite des grands nombres de particules par la propriété fondamentale des bosons de pouvoir occuper un même état quantique en nombre arbitraire, contrairement aux fermions.

Dans le cas des gaz de bosons en interaction, la condensation reste possible à condition que l'interaction entre particules soit faible. On parle d'approximation diluée, ou approximation de Bogoliubov lorsque l'on a typiquement $n|a|^3 \ll 1$ où n est la densité numérique du gaz et a la longueur de diffusion des ondes s. La longueur a quantifie l'intensité des interactions aux faibles impulsions, qui sont les interactions prépondérantes dans un condensat de Bose-Einstein. Dans le cadre de cette approximation diluée, on peut alors décrire l'ensemble du condensat par une unique fonction d'onde scalaire $\Psi(\vec{r}, t)$, appelée fonction d'onde macroscopique. Intuitivement, on peut voir ce résultat comme la conséquence de l'étalement à basse température des fonctions d'onde individuelles de chaque boson, leur faisant perdre leur caractère individuel. Cette interprétation est à rapprocher de la description en termes de paramètre d'ordre dans la théorie de Landau des transitions de phases. Dans cette description la fonction d'onde macroscopique Ψ est un paramètre d'ordre de la condensation de Bose-Einstein, prenant des valeurs non-nulles en dessous de la température de transition. La fonction d'onde macroscopique Ψ traduit alors l'existence d'un ordre à longue portée dans la phase du condensat de Bose-Einstein.

Cette description des condensats de Bose-Einstein dilués permet de prédire leurs propriétés superfluide, notamment au sens de Landau [19].

2.1.2 Description de l'hélium liquide

Comme mentionné dans la partie précédente, la description en terme de fonction d'onde macroscopique scalaire résulte d'une approximation diluée, où l'échelle de l'interaction entre particules est supposée faible devant la distance moyenne entre deux particules dans la limite classique. Cette hypothèse est justifiée pour des gaz d'atomes froids, et le formalisme qui en découle permet une description fidèle à la réalité expérimentale de ces systèmes [34].

L'hélium liquide est au contraire une phase condensée, dans laquelle la portée des interactions est de l'ordre de la distance moyenne entre particules dans la limite classique. De ce fait, l'approximation de Bogoliubov n'est pas justifiée et la description en terme d'une fonction d'onde macroscopique est abusive. En effet, la fraction d'hélium superfluide dans l'état fondamental est de l'ordre de 10% même à très basse température [19]. Par conséquent, les effets des atomes d'hélium 4 dans les états excités restent importants et ne peuvent pas être décrits par la fonction d'onde de l'état fondamental seulement. La condensation de Bose-Einstein ne peut donc pas expliquer à elle seule la superfluidité de l'hélium II, et une description microscopique précise des interactions au sein de l'hélium manque encore à ce jour. Cependant le formalisme qui découle de l'approximation de Bogoliubov, même s'il n'est pas justifié ici permet de reproduire qualitativement la phénoménologie de l'hélium II et est largement employé dans la littérature [19, 23, 37–40]. Dans le cadre de cette thèse on se place donc dans ce formalisme, et on se propose de donner un modèle pour les interactions au sein de l'hélium II qui soit capable de reproduire relativement fidèlement une partie des observations expérimentales. Cette modélisation est l'objet du chapitre 3.

2.2 Équations de la dynamique

2.2.1 Formulation lagrangienne

Dans le cadre de l'approximation de Bogoliubov, on décrit l'hélium II à température nulle par une fonction d'onde macroscopique – ou paramètre d'ordre $\Psi(\vec{r}, t)$. Pour établir la dynamique de cette fonction d'onde on choisit de se placer dans une formulation lagrangienne, qui présente l'avantage d'un traitement systématique des symétries du problème et des quantités conservées.

La dynamique du paramètre d'ordre Ψ est régie par la minimalisation de l'action suivante [19] :

$$S = \int dt \int d^3r \left\{ \frac{i\hbar}{2} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \Psi^* \nabla \Psi \right\}$$
$$- \frac{1}{2} \int dt \iint d^3r d^3r' \Psi^*(\vec{r}, t) \Psi^*(\vec{r}', t) G\left(|\vec{r} - \vec{r}'| \right) \Psi(\vec{r}', t) \Psi(\vec{r}, t)$$
$$+ \mu \int dt \int d^3r \Psi^* \Psi.$$
(2.1)

Le premier terme correspond à l'énergie cinétique du système, et le second est l'énergie potentielle d'auto-interaction. La forme de ce terme est issue d'une approximation de champ moyen; on choisit en plus un pseudo-potentiel d'interaction isotrope $G(|\vec{r} - \vec{r'}|)$. Enfin on note dans le troisième terme que le potentiel chimique μ apparaît comme le multiplicateur de Lagrange assurant un nombre total de particule $N = \int d^3r \Psi^* \Psi$ fixe.

L'équation du mouvement est obtenue en minimisant l'action (2.1) par rapport à Ψ ou Ψ^* . On obtient de manière équivalente, à une conjuguaison complexe près :

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi - \mu\Psi + \Psi\left(G*|\Psi|^2\right),\tag{2.2}$$

où $(G * |\Psi|^2) = \int G(|\vec{r} - \vec{r'}|) |\Psi(\vec{r'}, t)|^2 d^3r'$ est le produit de convolution du pseudo-potentiel *G* avec la densité du fluide $|\Psi|^2$. Cette équation est appelée équation de Gross-Pitaevskii au sens large, c'est à dire sans préciser la forme du pseudo-potentiel *G*. Dans la littérature, l'appellation «équation de Gross-Pitaevskii» est employée spécifiquement dans le cas d'une interaction locale, qu'on détaille dans la partie 2.4. On remarque que l'équation (2.2) est une forme non-linéaire et a priori non-locale d'équation de Schrödinger. On verra dans les chapitres suivants que ces deux caractères font de la modélisation des interactions un problème subtil.

Avant d'étudier la dynamique de l'équation de Gross-Pitaevskii on s'intéresse à la description du fluide au repos, i.e. à l'existence d'une solution stationnaire homogène. Par la condition de normalisation $N = \int d^3 r \Psi^* \Psi$, une telle solution s'écrira $\Psi = \sqrt{n}$ où n = N/V est la densité de particule du fluide au repos dans le volume V. Alors en injectant cette expression de la fonction d'onde dans l'équation (2.2) on obtient immédiatement que $\Psi = \sqrt{n}$ est solution si et seulement si le potentiel chimique μ vérifie la relation suivante :

$$\mu = n \int G(r) \,\mathrm{d}^3 r. \tag{2.3}$$

Cette valeur du potentiel chimique est donc une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une solution uniforme sous la contrainte d'un nombre de particules fixé. On utilisera notamment cette expression dans les chapitres suivants pour les simulations numériques de l'équation (2.2).

Afin de se faire une idée plus précise de la dynamique impliquée par l'équation (2.2), on étudie les symétries de l'action définie à l'équation (2.1). On peut montrer que l'action de Gross-Pitaevskii est invariante sous transformation de phase $\Psi \mapsto e^{i\alpha}\Psi$, ainsi que par les translations temporelles $t \mapsto t + \tau$ et spatiales $\vec{r} \mapsto \vec{r} + \vec{\ell}$. Ces symétries sont associées respectivement à la conservation de la masse M, de l'énergie E et de l'impulsion \vec{p} au cours de la dynamique de Gross-Pitaevskii. On peut alors expliciter la forme locale de l'équation de conservation de ces quantités. Pour la masse, l'invariance par transformation de phase permet d'écrire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \qquad (2.4)$$

avec
$$\begin{cases} \rho = m\Psi^*\Psi\\ \vec{j} = \frac{\hbar}{2i} \left(\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^*\right) \end{cases}, \tag{2.5}$$

où ρ est la densité du fluide et \vec{j} le vecteur densité de flux de masse. On a alors l'équation globale de conservation de la masse :

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \rho \mathrm{d}^3 r = 0 \tag{2.6}$$

De même, l'invariance par translation temporelle permet d'écrire pour l'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t}(e_c + e_p) + \vec{\nabla}.\vec{W} = 0, \qquad (2.7)$$

avec
$$\begin{cases} e_c = \frac{\hbar}{2m} |\nabla \Psi|^2 \\ e_p = \frac{1}{2} |\Psi|^2 \left(G * |\Psi|^2 \right) - \mu |\Psi|^2 \\ \overrightarrow{W} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\partial_t \Psi^* \overrightarrow{\nabla} \Psi + \partial_t \Psi \overrightarrow{\nabla} \Psi^* \right) \end{cases}$$
(2.8)

où e_c et e_p sont les densités volumiques d'énergie cinétique et potentielle respectivement, et \vec{W} le vecteur densité de flux d'énergie. L'équation globale de conservation de l'énergie s'écrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int (e_c + e_p) \mathrm{d}^3 r = 0$$
(2.9)

Enfin l'invariance sous les translations spatiale donne pour l'impulsion :

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \partial_j \Pi_{ij} = 0, \qquad (2.10)$$

avec
$$\Pi_{ij} = \frac{\hbar^2}{4m} \left(\partial_i \Psi^* \partial_j \Psi - \Psi^* \partial_{ij} \Psi + \text{c.c.} \right) + \delta_{ij} e_p, \qquad (2.11)$$

où \vec{j} est la densité d'impulsion, identique au vecteur densité de flux massique défini à l'équation (2.4), et Π_{ij} est le tenseur densité de flux d'impulsion, avec «c.c.» signifiant le complexe conjugué des termes précédents. On a alors une équation de conservation globale de l'impulsion :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \vec{j} \,\mathrm{d}^3 r = \vec{0} \tag{2.12}$$

La conservation de ces grandeurs physique constituera un test pour les simulations numériques de l'équation de Gross-Pitaevskii présentées dans les chapitres suivants.

À ce stade il est intéressant de noter l'analogie de cette description avec une description hydrodynamique. En effet la transformation de Madelung $\Psi = \sqrt{\rho/m}e^{i\phi}$ permet de réécrire les équations (2.4) et (2.2) en termes de ρ et ϕ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} \phi\right) = 0 \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\hbar}{m}\phi\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{m} \vec{\nabla}\phi\right)^2 + \frac{e_p}{\rho} - \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} = 0.$$
(2.14)

On remarque alors que ces équations sont formellement équivalentes à une équation de continuité de la masse et une relation de Bernoulli pour un écoulement parfait, compressible, irrotationnel et barotrope dérivant d'un potentiel des vitesses $\frac{\hbar}{m}\phi$. Le dernier terme dans l'équation (2.14) est cependant un terme additionnel par rapport à une relation de Bernoulli : il s'agît du terme de «pression quantique» caractéristique de la dynamique d'une équation de Schrödinger. Les effets quantiques restent donc important même dans cette version hydrodynamique de l'équation de Gross-Pitaevskii (2.2).

2.2.2 Relation de dispersion des excitations linéaires

On peut sonder analytiquement la dynamique de l'équation de Gross-Pitaevskii en étudiant les excitations linéaires du système. Pour cela on considère que le fluide est dans un état de repos, perturbé par une onde $\delta \Psi$ de faible amplitude. On écrit alors la fonction d'onde macroscopique comme un développement autour de la solution stationnaire uniforme explicitée dans la partie précédente :

$$\Psi(\vec{r},t) = \sqrt{n} + \delta \Psi(\vec{r},t), \qquad (2.15)$$

avec $|\delta \Psi(\vec{r},t)|^2 \ll n$. On injecte alors la relation (2.15) dans l'équation (2.2) qu'on linéarise par rapport à $\delta \Psi$. En séparant partie réelle et partie imaginaire et en passant dans le domaine de Fourier, on montre que l'onde (2.15) est alors solution non identiquement nulle de l'équation de Gross-Pitaevskii linéarisée si et seulement si la relation de dispersion suivante est vérifiée :

$$\omega^2 = \frac{\hbar^2 k^4}{4m^2} + \frac{n}{m} k^2 \hat{G}(k), \qquad (2.16)$$

qui fait apparaître la transformée de Fourier $\widehat{G}(k)$ du pseudo-potentiel d'interaction. Le poteniel $G(|\vec{r}|)$ étant choisi isotrope, sa transformée de Fourier est réelle et ne dépend que de la norme k du vecteur d'onde. On voit que la forme du potentiel d'interaction a une forte influence sur la relation de dispersion (2.16). En particulier, on peut calculer la célérité du son :

$$c = \lim_{k \to 0} \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{n\widehat{G}(0)}{m}} = \sqrt{\frac{\mu}{m}},$$
(2.17)



Fig. 2.1 Relation de dispersion expérimentale dans l'hélium II obtenue par diffraction de neutron, d'après [3].

où on a utilisé la relation $\widehat{G}(0) = \int G(r) d^3r$ ainsi que l'expression (2.3) du potentiel chimique. Expérimentalement, on peut mesurer cette relation de dispersion par diffraction de neutrons. La courbe de dispersion prescrite pour l'hélium II est représentée sur la figure 2.1.

On retrouve une branche phonon à faible nombre d'onde, dont la pente correspond à la célérité du son. La valeur mesurée expérimentalement est $c = 238 \text{ m s}^{-1}$ [3]. On observe de plus l'existence d'un minimum bien défini de la relation de dispersion au nombre d'onde $k_0 = 1.93 \text{ Å}^{-1}$ et à la pulsation $\omega_0 = 1.13 \text{ ps}^{-1}$. Ces excitations sont appelées rotons et sont typiques de la physique de l'hélium II : une modélisation fidèle de l'hélium superfluide se devra donc au moins de reproduire cet aspect. On a vu à l'équation (2.16) que la forme du potentiel d'interaction jouait un rôle prépondérant sur la relation de dispersion. La modélisation qu'on propose dans le cadre de cette thèse se base sur l'ajustement de la forme du potentiel $\hat{G}(k)$ dans l'espace de Fourier, afin de reproduire les aspects essentiels de la relation de dispersion (2.16), à savoir la célérité du son et la forme du minimum roton. Pour cela on s'inspirera de ce qui a été fait dans la littérature [23,38,39] en s'efforçant de concilier fidélité de la modélisation et stabilité modulationnelle de l'équation (2.2). Cette modélisation est détaillée dans le chapitre 3.

2.2.3 Forme adimensionnée et choix d'unités

Afin d'expliciter les différents paramètres du problème, ainsi que pour simplifier la réalisation des simulations numériques, on cherche à adimensionner l'équation de Gross-Pitaevskii (2.2). L'adimensionalisation revient entre autres à choisir une unité de longueur et une unité de temps. Le choix le plus commun dans la littérature [38–40] pour l'unité de longueur est la longueur de cohérence ou healing length $\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\mu}}$ définie par le potentiel chimique. L'unité de temps est alors choisie pour obtenir un coefficient unité devant le terme de dérivée temporelle dans l'équation (2.2), i.e. $\tau = \frac{2m\xi^2}{\hbar} = \frac{\hbar}{\mu}$. On obtient alors la forme adimensionnée suivante pour l'équation de Gross-Pitaevskii :

$$i\frac{\partial\Psi'}{\partial t'} = -\nabla'^2\Psi' - \Psi' + \Psi'\left(G'*'|\Psi'|^2\right),\tag{2.18}$$

où $t' = t/\tau$, $\Psi' = \Psi/\sqrt{n}$, et ∇' et *' représentent respectivement le gradient et le produit de convolution par rapport à la variable d'espace adimensionnée $\vec{r}' = \vec{r}/\xi$. Le potentiel adimensionné est $G'(r') = \frac{n\xi^3}{\mu}G(\xi r')$, et doit vérifier la relation (2.3) qui devient dans ce système d'unités $\int G'(r')d^3r' = 1$.

Nous avons choisi dans le cadre de cette thèse de ne pas baser notre système d'unités sur

la longueur de cohérence ξ . En effet nous n'avons pas pu trouver dans la littérature de mesure directe de cette longueur dans l'hélium II. Afin de rapprocher notre modélisation de la réalité expérimentale et de pouvoir comparer nos résultats à ceux de la littérature dans le système d'unités SI, nous avons cherché une unité de longueur typique du système dont il existe une mesure directe dans l'hélium II. Nous avons choisi comme unité de longueur la longueur d'onde du minimum roton $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} = 3.26$ Å. De même que dans le système d'unités basé sur la longueur de cohérence ξ , on choisit l'unité de temps $\tau_0 = \frac{2m\lambda_0^2}{\hbar} = 13.3$ ps de telle sorte que le coefficient devant le terme de dérivée temporelle soit unitaire dans l'équation de Gross-Pitaevskii adimensionnée. On obtient alors l'équation suivante :

$$i\frac{\partial\Psi'}{\partial t'} = -\nabla'^{2}\Psi' - \mu'\Psi' + \Psi'\left(G'*'|\Psi'|^{2}\right),$$
(2.19)

où $t' = t/\tau_0$, $\Psi' = \Psi/\sqrt{n}$, et ∇' et *' représentent respectivement le gradient et le produit de convolution par rapport à la variable d'espace adimensionnée $\vec{r}' = \vec{r}/\lambda_0$. En comparaison à l'équation (2.19) on note que le potentiel chimique n'est pas unitaire dans ce système d'unités et vaut $\mu' = \frac{2m\lambda_0^2}{h^2}\mu$. La condition (2.3) s'écrit alors $\int G'(r')d^3r' = \mu'$ avec $G'(r') = \frac{n\lambda_0^3}{\mu}G(\xi r')$. On utilisera dans la suite exclusivement la forme adimensionnée (2.19), dans laquelle on omettera les primes par simplicité quand il n'y aura aucune ambiguïté.

2.3 Solution vortex stationnaire

On a vu au chapitre 1 que le vortex quantique était un objet fondamental de la turbulence des superfluides. On s'intéresse ici à l'existence d'une solution de l'équation (2.19) modélisant un vortex stationnaire. On cherche donc une solution invariante selon l'axe Oz, choisi arbitrairement comme l'axe du vortex. L'équation (2.19) peut alors être réduite à un problème bidimendionnel :

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Psi + \left[\left(G_{2D} * |\Psi|^2\right) - \mu\right]\Psi,\tag{2.20}$$

où $G_{2D}(x, y) = \int G(r) dz$ est la version 2D du potentiel d'interaction et où le produit de convolution n'est alors intégré que sur les variables x et y dans le plan orthogonal à l'axe du vortex. Il est immédiat de noter que le potentiel d'interaction reste isotrope même à deux dimensions :

$$G_{2D}(x,y) = \int G(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dz = \int G(\sqrt{r_{\perp}^2 + z^2}) dz = G_{2D}(r_{\perp}), \qquad (2.21)$$

où r_{\perp} représente la distance à l'axe Oz. Pour modéliser l'écoulement autour du vortex, on cherche alors une solution de l'équation (2.20) qui présente une circulation non-nulle autour de l'axe Oz. Pour un vortex axisymétrique on cherche typiquement une solution de la forme $\Psi(r_{\perp}, \theta, t) = f(r_{\perp})e^{iq\theta}$ où on a introduit les coordonnées polaires (r_{\perp}, θ) dans le plan Oxy. Le facteur multiplicatif q dans la phase doit être un entier afin que la fonction d'onde soit mono-valuée, l'angle azimutal θ variant de 2π lors d'une rotation autour de l'axe du vortex. On remarque alors que dans ce cadre de description par une fonction d'onde complexe, la quantification de la circulation des vortex apparaît naturellement sous la transformation de Madelung. Pour un contour C fermé entourant l'axe Oz:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{u_s} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\hbar}{m} \Delta \phi = q \frac{2\pi\hbar}{m}.$$
(2.22)

On retrouve alors l'expression du quantum de circulation $K = \frac{2\pi\hbar}{m}$. En injectant la forme choisie pour la fonction d'onde dans l'équation (2.20), on obtient [41] une équation différentielle ordinaire pour l'amplitude $f(r_{\perp})$:

$$0 = \frac{1}{r_{\perp}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_{\perp}} \left(r_{\perp} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r_{\perp}} \right) + \left(\mu - \frac{q^2}{r_{\perp}^2} \right) f - \left(G_{2D} * f^2 \right) f, \qquad (2.23)$$

où il est utile de réécrire le produit de convolution comme une fonction de la variable radiale r_{\perp} uniquement, via un changement de variable angulaire :

$$\left(G_{2D} * f^2 \right) (r_{\perp}) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta' \int_0^{+\infty} G_{2D} \left(\sqrt{r_{\perp}^2 - 2r_{\perp}r_{\perp}' \cos(\theta') + r_{\perp}'^2} \right) f^2 \left(r_{\perp}'^2 \right) r_{\perp}' \mathrm{d}r_{\perp}'.$$
 (2.24)

On peut alors étudier les limites $r_{\perp} \to 0$ et $r_{\perp} \to +\infty$ dans l'équation (2.23) pour déduire le comportement de la densité du fluide proche et loin du vortex respectivement. On peut montrer que [41] :

$$\begin{cases} f(r_{\perp}) \underset{r_{\perp} \to 0}{\sim} r_{\perp}^{q} \\ f(r_{\perp}) \underset{r_{\perp} \to +\infty}{\rightarrow} 1 \end{cases}, \qquad (2.25)$$

i.e. la densité du fluide s'annule au centre du vortex et tend vers la densité uniforme à l'infini. En particulier, dans le cas q = 1 la densité du fluide se comporte comme $|\Psi|^2 = f^2 \underset{r_{\perp} \to 0}{\sim} r_{\perp}^2$. On utilisera ce résultat dans le cadre de l'analyse des quantités hydrodynamiques issues de nos simulations numériques. Dans toute la suite, on se limitera au cas q = 1. En effet on montre que les vortex avec q > 1 sont instables et tendent à se fragmenter en q tourbillons à un quantum de circulation, en l'absence d'autres forces extérieures. Le comportement intermédiaire entre les limites proche et loin du vortex est subtil et dépend fortement de la forme du potentiel G. L'étude numérique du profil radial de densité complet est présentée dans le chapitre 3, en s'inspirant de ce qui a été fait dans [23, 38, 39, 42].

Enfin, l'intérêt premier du formalisme de Gross-Pitaevskii par rapport aux modèles basés sur le modèle à deux fluides réside en sa capacité à reproduire naturellement le phénomène de reconnexion, sans modélisation supplémentaire. En effet la dynamique de Gross-Pitaevskii permet la reconnexion de deux vortex quantiques lorsqu'ils sont assez proches, contrairement aux équations d'Euler [43, 44] ou aux modèles de filaments vorticitaires basés sur la loi de Biot-Savart ou sur la LIA. Dans ces modèles, la reconnexion doit être implémentée de manière *ad hoc* par exemple en définissant une séparation minimale en dessous de laquelle deux vortex se reconnectent [13, 18, 33, 36]. La première simulation numérique d'une reconnexion dans le cadre de l'équation de Gross-Pitaevskii a été réalisée par Koplik et Levine en 1993 [20] avec un terme d'interaction local. Ce formalisme est depuis vastement utilisé pour étudier la dynamique de la reconnexion vorticitaire dans les superfluides [19, 23, 37–40].

2.4 Équation de Gross-Pitaevksii locale

On a jusqu'à maintenant raisonné sur l'équation de Gross-Pitaevskii générale (2.19), c'est-àdire sans préciser la forme du pseudo-potentiel G(r). Comme on l'a vu dans la partie précédente, le choix de G influence fortement la forme de la relation de dispersion (2.16) des excitations linéaires. Le choix de G, basé sur une comparaison avec la relation de dispersion expérimentale de l'hélium II sera le sujet du chapitre 3. On présente dans cette partie un cas particulier d'interaction : l'approximation de l'interaction locale. L'approximation de l'interaction locale consiste à supposer que l'échelle de l'interaction est négligeable devant l'échelle caractéristique de variation de la fonction d'onde Ψ . Dans ce cas, on modélise l'interaction par une fonction delta de Dirac $G(r) = g\delta(r)$, où g > 0 modélise une interaction répulsive. L'équation (2.2) devient alors :

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi - \mu\Psi + g\Psi |\Psi|^2. \qquad (2.26)$$

L'équation (2.26) est appelée équation de Gross-Pitaevskii au sens strict, ayant été établie indépendamment par Gross et Pitaevskii en 1961 [19]. Dans le cadre de cette thèse, on désignera cette équation par équation de Gross-Pitaevksii locale, par opposition à l'équation (2.2) où le potentiel n'est a priori pas une fonction delta de Dirac, qu'on appellera alors équation de Gross-Pitaevskii non-locale.

On peut chercher comme dans la partie 2.2.1 une solution uniforme $\Psi = \sqrt{n}$ à l'équation (2.26). On obtient de manière similaire une condition sur le potentiel chimique μ :

$$\mu = ng \tag{2.27}$$

L'équation de Gross-Pitaevskii locale possède les même symétries que celles présentées dans la partie 2.2.1 pour la version non-locale, à savoir entre autres l'invariance de phase et l'invariance par translation spatiale et temporelle. Il en résulte la conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie respectivement. L'équation de conservation de la masse dans le cas local est identique à l'équation (2.4) dans le cas non-local. Les autres équations de conservations ont une forme identique dans les cas local et non-local, en changeant le terme d'interaction non-local $(G * |\Psi|^2)$ par $g |\Psi|^2$ dans le cas local.

La différence fondamentale entre le modèle local et les modèles non-locaux réside en la forme de la relation de dispersion. En effet dans le cas de l'interaction locale la relation (2.16) devient :

$$\omega^2 = \frac{\hbar^2 k^4}{4m^2} + \frac{\mu}{m} k^2. \tag{2.28}$$

On remarque qu'on obtient pour la célérité du son la même expression en fonction du potentiel chimique que dans le cas non-local $c = \sqrt{\frac{\mu}{m}}$. Cependant la forme générale de la relation de dispersion, représentée sur la figure 2.2, est très différente de la relation expérimentale de l'hélium II.



Fig. 2.2 Relation de dispersion de l'équation de Gross-Pitaevskii locale, donnée à l'équation (2.28). La valeur choisie pour le potentiel chimique est $\mu = 2.35 \text{ meV}$ afin d'obtenir pour la célérité du son la valeur $c = 238 \text{ m s}^{-1}$ observée expérimentalement [3].

En effet on passe directement de la branche phonon $\omega = ck$ à faible nombre d'onde, à la branche particule libre $\omega \propto k^2$ à grand nombre d'onde, sans présenter de minimum roton. Cette absence de minimum roton vient du choix de potentiel $G(r) = q\delta(r)$, qui se traduit dans l'espace de Fourier par G(k) = q. On a vu dans la partie 2.2.2 que la forme du potentiel G dans l'espace de Fourier avait une influence importante sur la forme de la relation de dispersion : le modèle local ici avec un potentiel constant dans l'espace de Fourier ne permet pas de reproduire le minimum roton. Ce défaut de modélisation ne doit finalement pas être surprenant : il est issu d'une approximation de localité des interactions, qui n'est pas justifiée pour une phase condensée comme l'hélium liquide dans laquelle la portée des interactions est de l'ordre de la distance interatomique. L'invalidité de l'approximation locale dans le cadre de l'hélium II est la principale motivation de la modélisation non-locale qu'on propose dans cette thèse : le chapitre 3 se concentre sur un choix de potentiel G(r) qui permette de reproduire le minimum des rotons de manière relativement fidèle à la réalité expérimentale. Cependant on gardera à l'esprit que malgré cette volonté de raffinement de la modélisation, l'approche suivie ici reste très schématique, puisque l'approximation de Bogoliubov à l'origine de l'équation de Gross-Pitaevskii n'est déjà pas justifiée pour l'hélium II, comme expliqué dans la partie 2.1.1.

Dans toute cette thèse, on comparera systématiquement l'analyse du modèle non-local avec celle du cas local. Pour simuler numériquement l'équation de Gross-Pitaevskii locale on cherche comme dans la partie 2.2.3 un système d'unités adéquat pour l'adimensionalisation de l'équation (2.26). Le système le plus couramment utilisé dans la littérature [19,38–40] est celui construit sur la longueur de cohérence $\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\mu}}$ et le temps caractéristique correspondant $\tau = \frac{\hbar}{\mu}$. L'équation adimensionnée obtenue est :

$$i\frac{\partial\Psi'}{\partial t'} = -\nabla'^{2}\Psi' + \Psi'\left(|\Psi'|^{2} - 1\right),$$
(2.29)

où $t' = t/\tau$, $\Psi' = \Psi/\sqrt{n}$, et ∇' représente le gradient par rapport à la variable d'espace adimensionnée $\vec{r}' = \vec{r}'/\xi$. L'équation (2.29) présente l'avantage de n'avoir aucun paramètre libre, et donc de pouvoir comparer aisément les résultats de différentes simulations numérique de cette équation. Cependant comme dans la partie 2.2.3, nous avons fait le choix de ne pas nous baser sur la longueur de cohérence ξ pour construire une version adimensionnée de l'équation (2.26). On utilisera à la place la logueur d'onde du minimum des rotons $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} = 3.26$ Å ainsi que le temps caractéristique correspondant $\tau_0 = \frac{2m\lambda_0^2}{\hbar} = 13.3$ ps. L'équation adimensionnée obtenue est alors :

$$i\frac{\partial\Psi'}{\partial t'} = -\nabla'^{2}\Psi' + \mu'\Psi'\left(|\Psi'|^{2} - 1\right),$$
(2.30)

où $t' = t/\tau_0$, $\Psi' = \Psi/\sqrt{n}$, et ∇' représente le gradient par rapport à la variable d'espace adimensionnée $\vec{r}' = \vec{r}'/\lambda_0$. Le potentiel chimique adimensionné est $\mu' = \frac{2m\lambda_0^2}{\hbar^2}\mu$. Dans la suite on utilisera donc l'équation (2.30) pour les simulations numériques du modèle local. Afin de comparer les résultats aux simulations du modèle non-local, on choisira la valeur de μ' comme égale à celle du modèle non-local afin d'avoir la même longueur de cohérence ξ et la même célérité du son cdans les deux modèles. Ce choix sera détaillé dans le chapitre 3.

Enfin l'équation de Gross-Pitaveskii locale admet aussi une solution décrivant un vortex stationnaire de la forme $\Psi(r_{\perp}, \theta, t) = f(r_{\perp})e^{iq\theta}$ où (r_{\perp}, θ) sont les coordonnées cylindriques d'axe Oz. La circulation du champ de vitesse induit est aussi quantifiée par pas de $K = \frac{2\pi\hbar}{m}$. Comme dans la partie 2.3, on injecte cette forme de solution dans l'équation (2.30) afin d'obtenir une équation radiale sur l'amplitude [19,41] :

$$0 = \frac{1}{r_{\perp}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_{\perp}} \left(r_{\perp} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r_{\perp}} \right) + \left(\mu - \frac{q^2}{r_{\perp}^2} \right) f - \mu f^3.$$
(2.31)

Le comportement proche et loin du vortex est identique au cas non-local. En particulier, l'amplitude très proche du cœur se comporte comme $r_{\perp}^{q^2}$. Comme dans le cas non-local, on se limitera à q = 1, les vortex à plusieurs quanta de circulations étant instables. Le modèle local reproduit de même le phénomène de reconnexion de manière naturelle, comme l'ont montré Koplik et Levine en 1993 [20] avec la première simulation numérique de la reconnexion de deux vortex.

Dans la suite de cette thèse on réalisera coinjointement des simulations numériques de l'équation (2.19) pour le modèle non-local et l'équation (2.30) pour le modèle local. On comparera de manière systématique les résultats des deux modèles dans le chapitre 3.

3 Calibration d'un modèle non-local

3.1 Modèle de potentiel d'interaction

3.1.1 Choix du modèle

Rappelons ici l'équation de Gross-Pitaevskii non-locale adimensionnée, qui sera le cadre de la modélisation que l'on propose pour l'hélium II :

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\nabla^2\Psi - \mu\Psi + \Psi\left(G * |\Psi|^2\right),\tag{3.1}$$

où les grandeurs \vec{r} et t sont exprimées en unités de la longueur d'onde des rotons $\lambda_0 = 3.26$ Å et du temps caractéristique $\tau_0 = \frac{2m\lambda_0^2}{\hbar} = 13.3$ ps. Dans ce système d'unités, l'équation (3.1) admet une solution stationnaire uniforme $\Psi(\vec{r},t) = 1$ si et seulement si le potentiel chimique μ et le potentiel d'interaction G(r) vérifient la relation suivante :

$$\int G(r) \mathrm{d}^3 r = \mu. \tag{3.2}$$

La forme du potentiel G(r) joue un rôle essentiel dans la relation de dispersion de l'équation (3.1) linéarisée autour de la solution uniforme $\Psi = 1$:

$$\omega^2 = k^4 + 2k^2 \widehat{G}(k), \tag{3.3}$$

où $\hat{G}(k)$ est la transformée de Fourier du potentiel d'interaction, une fonction réelle et isotrope en nombre d'onde de par l'isotropie de G dans l'espace réel. On a vu dans le chapitre 2 que le choix de G était déterminant dans la modélisation du minimum des rotons, propriété caractéristique de la relation de dispersion expérimentale de l'hélium liquide [3]. En particulier un modèle local de l'interaction $G(r) = g\delta(r)$ ne parvient pas à reproduire le minimum des rotons, du fait de sa transformée de Fourier constante en nombre d'onde. La fonction $\hat{G}(k)$ doit donc vérifier certaines propriétés afin que la relation de dispersion (3.3) présente un minimum roton convainquant. Schématiquement, la transformée de Fourier de G devra être de portée finie et présenter une excursion négative suffisante pour infléchir la relation de dispersion et créer un minimum local proche de $k = 2\pi$, position du minimum roton dans notre système d'unités.

3.1.1.1 Modèle de Pomeau-Rica

Un premier modèle simple qui présente ces propriétés consiste à choisir pour G(r) une fonction porte :

$$G_{PM}(r) = \begin{cases} a & \text{si} \quad r < d, \\ 0 & \text{sinon}, \end{cases}$$
(3.4)

où les paramètres (a, d) sont deux réels positifs définissant la hauteur et la largeur du potentiel respectivement. Ce modèle proposé par Pomeau et Rica [23] permet de reproduire très simplement l'aspect essentiel du minimum des rotons. De manière simplifiée, le paramètre d permet d'ajuster le nombre d'onde k_0 du minimum des rotons et le paramètre a sa hauteur ω_0 . On verra dans la partie 3.1.2 que ce modèle à deux paramètres libres, bien qu'il donne une image qualitative du minimum des rotons, est trop schématique pour modéliser la relation de dispersion de manière quantitative. En particulier, on verra que la reproduction de la bonne célérité du son élimine un paramètre du modèle, et que l'unique paramètre libre restant n'est pas suffisant pour obtenir une relation de dispersion réaliste.

3.1.1.2 Modèle de Berloff-Roberts

Un modèle plus détaillé a été développé par Berloff et Roberts [38]. Dans ce modèle le potentiel d'interaction prend la forme d'un développement en dérivées paires de gaussiennes :

$$G_{BR}(r) = \left(\alpha + \beta A^2 r^2 + \delta A^4 r^4\right) e^{-A^2 r^2} + \eta e^{-B^2 r^2}, \qquad (3.5)$$

où $A, B, \alpha, \beta, \delta$ sont des paramètres libres du modèle. En plus de ce potentiel non-local, le modèle de Berloff-Roberts ajoute un terme local d'ordre supérieur en $|\Psi|^2$, de telle sorte que l'équation de Gross-Pitaevskii prend la forme :

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\nabla^2\Psi - \mu\Psi + \Psi\left(G_{BR} * |\Psi|^2\right) + \chi\Psi\left|\Psi\right|^{2(\gamma+1)},\tag{3.6}$$

où χ et γ sont deux autres paramètres libres. En pratique le paramètre γ est fixé indépendamment des autres paramètres du modèle. Dans le cadre d'un développement de l'énergie en puissances de la densité [38,45], on choisit la valeur $\gamma = 1$ ce qui revient à une non-linéarité d'ordre cinq dans l'équation (3.6). Dans ce modèle, la condition de normalisation (3.2) devient :

$$\int G_{BR}(r) \mathrm{d}^3 r = \mu - \chi, \qquad (3.7)$$

et la relation de dispersion :

$$\omega_{BR}^{2} = k^{4} + 2k^{2} \left[2\chi + \hat{G}_{BR}(k) \right].$$
(3.8)

Ce modèle permet un ajustement très réaliste de la relation de dispersion expérimentale, comme on le verra dans la partie 3.1.2. Cependant il nécessite au total sept paramètres libres et propose un niveau de description qui n'est pas cohérent avec l'aspect schématique du cadre de l'approximation de Bogoliubov pour l'hélium liquide. De plus, le modèle de Berloff-Roberts présente de fortes instabilités non-linéaires qui rendent difficiles les simulations numériques. Pour ces raisons, nous avons choisi de nous baser sur un modèle similaire avec un nombre de paramètres plus réduit, tout en proposant une description plus précise que le modèle de Pomeau et Rica.

3.1.1.3 Proposition de modèle

On propose ici un modèle de potentiel d'interaction qui permette une description plus détaillée du minimum des rotons que le modèle schématique de Pomeau-Rica, tout en gardant un nombre raisonnable de paramètres libres au vu des approximations faites pour aboutir à une description par l'équation de Gross-Pitaevskii. On s'efforcera de plus de proposer un modèle ajusté afin de minimiser les instabilités modulationnelles typiques observées par Berloff et Roberts. L'étude de ces instabilités est réalisée dans la partie 3.2.

On construit notre proposition de potentiel par une série de dérivées paires de gaussiennes, comme proposé par Berloff et Roberts en s'inspirant des travaux de Jones [38,39]. On se limite ici à une seule gaussienne et ses deux premières dérivées paires :

$$G(r) = \left(\alpha + \beta r^2 + \epsilon r^4\right) e^{-\frac{r^2}{2\delta^2}},\tag{3.9}$$

où $\alpha, \beta, \delta, \epsilon$ sont les paramètres libres du modèle. Cette forme fonctionnelle est motivée par le fait que la transformée de Fourier de G(r) est alors aussi une série de dérivées paires de gaussiennes, par analogie avec le développement de Edgeworth pour les lois de probabilités :

$$\widehat{G}(k) = \left(A - B^2 k^2 + E^4 k^4\right) e^{-\frac{k^2}{2D^2}},\tag{3.10}$$

où les paramètres A, B, D, E dans l'espace de Fourier peuvent être exprimés analytiquement en fonction des paramètres dans l'espace réel $\alpha, \beta, \delta, \epsilon$: le détail du calcul est présenté dans l'annexe A. Le choix du signe des coefficients devant les termes k^2 et k^4 est justifié par la méthode d'ajustement de la relation de dispersion présentée dans la partie 3.1.2. On verra que le choix de la célérité du son permet d'éliminer directement le paramètre A, et que les paramètres restants B, D et Epermettent d'ajuster la position et la largeur du creux de rotons dans le plan (k, ω) .

3.1.2 Ajustement de la relation de dispersion

Afin de calibrer notre modèle, on cherche à reproduire le plus fidèlement possible certaines propriétés de la relation de dispersion expérimentale. On présente dans cette partie la procédure suivie pour l'ajustement de la relation (3.3) issue de la modélisation aux résultats expérimentaux. Les aspects essentiels de la relation de dispersion que l'on cherche à reproduire sont la célérité du son c, ainsi que la forme du creux des rotons schématisée par le nombre d'onde k_0 du minimum, sa hauteur ω_0 ainsi que sa largeur, représentée par la dérivée seconde de la relation de dispersion au point du minimum $\kappa_0 = \frac{d^2 \omega}{dk^2}\Big|_{k_0}$.

La célérité du son c peut être ajustée exactement en fixant l'un des paramètres du modèle. En effet la relation de dispersion (3.3) donne la célérité du son suivante :

$$c = \lim_{k \to 0} \frac{\omega}{k} = \sqrt{2\hat{G}(0)},$$
 (3.11)

i.e.
$$\widehat{G}(0) = \int G(r) \mathrm{d}^3 r = \frac{c^2}{2}.$$
 (3.12)

Dans le cas du potentiel de Pomeau-Rica (3.4), la relation (3.12) fixe par exemple le paramètre a:

$$G_{PM}(r) = \begin{cases} a = \frac{3c^2}{8\pi d^3} & \text{si} \quad r < d, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
(3.13)

Le modèle ne possède alors plus qu'un paramètre ajustable d.

Pour notre proposition à l'équation (3.10), la relation (3.12) permet d'éliminer le paramètre A:

$$\widehat{G}(k) = \left(\frac{c^2}{2} - B^2 k^2 + E^4 k^4\right) e^{-\frac{k^2}{2D^2}}.$$
(3.14)

Le modèle ne possède alors plus que trois paramètres ajustable B, D et E.

Dans le cas du potentiel de Berloff-Roberts à l'équation (3.5), une relation similaire peut être établie en utilisant la relation de dispersion (3.8). On obtient alors :

$$\frac{c^2}{2} = 2\chi + \alpha + \eta, \qquad (3.15)$$

qui permet d'éliminer le paramètre $\eta = \frac{c^2}{2} - 2\chi - \alpha$ par exemple. Le modèle de Berloff-Roberts ne possède alors plus que six paramètres libres.

Après avoir réduit ainsi le nombre de paramètres libres de chaque modèle en fixant la célérité du son, il reste à ajuster la forme du creux des rotons schématisée par les trois grandeurs caractéristiques k_0 , ω_0 et κ_0 . Contrairement à la célérité du son c, ces trois grandeurs ne sont pas simplement explicitables à partir de la relation de dispersion et de l'expression du potentiel G. On procède alors à un ajustement numérique, en calculant pour chaque modèle les valeurs de k_0 , ω_0 et κ_0 puis en minimisant la fonction suivante par rapport aux paramètres du modèle choisi :

$$\mathcal{D}(\vec{p}) = \sqrt{\left(k_0(\vec{p}) - \tilde{k}_0\right)^2 + \left(\omega_0(\vec{p}) - \tilde{\omega}_0\right)^2 + \left(\kappa_0(\vec{p}) - \tilde{\kappa}_0\right)^2},\tag{3.16}$$

où $\tilde{k}_0 = 1.93 \text{ Å}^{-1}$, $\tilde{\omega}_0 = 1.13 \text{ ps}^{-1}$ et $\tilde{\kappa}_0 = 1.07 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ sont les valeurs expérimentales des grandeurs caractéristiques du minimum roton d'après [3], et \vec{p} le vecteur des paramètres libres du modèle après avoir fixé la célérité du son. Dans notre proposition de modèle à l'équation (3.14), on choisit les coefficients $-B^2$ et $+E^4$ afin de faciliter la recherche numérique du minimum de la fonction $\mathcal{D}(\vec{p})$ dans l'espace des paramètres. En particulier, imposer un coefficient négatif devant le terme en k^2 permet d'obtenir une excursion négative de $\hat{G}(k)$ nécessaire à la présence d'un minimum roton dans la relation de dispersion. Notons que le modèle à trois paramètres B, D et E proposé ici se prête facilement à la minimisation de la distance $\mathcal{D}(\vec{p})$, puisqu'il possède trois paramètres ajustables pour trois contraintes expérmentales $\tilde{k}_0, \tilde{\omega}_0$ et $\tilde{\kappa}_0$. Au contraire, le modèle de Pomeau-Rica est sur-contraint puisqu'il ne possède qu'un seul paramètre ajustable. À l'opposé pour le modèle de Berloff-Roberts, la présence de six paramètres libres n'apporte pas de précision supplémentaire par rapport à notre modèle à trois paramètres : l'ajustement par minimisation de la distance $\mathcal{D}(\vec{p})$ donne exactement la même forme de relation de dispersion. Pour cette raison, on ajuste numériquement le modèle de Berloff-Roberts par minimisation de la distance par rapport à la relation de dispersion expérimentale complète, dans l'espace des fonctions L_2 :

$$\mathcal{D}_{BR}(\vec{p}) = \sqrt{\int_0^{+\infty} \left[\omega_{BR}(\vec{p},k) - \tilde{\omega}(k)\right]^2 \mathrm{d}k},\tag{3.17}$$

où $\omega_{BR}(\vec{p}, k)$ est la relation de dispersion obtenue dans le modèle de Berloff-Roberts à l'équation (3.8) avec le jeu de paramètres \vec{p} , et $\tilde{\omega}(k)$ la relation de dispersion expérimentale. Le résultat des ajustements numériques pour les trois modèles sont présentés sur la figure 3.1.

Pour le potentiel de Pomeau-Rica on voit que l'ajustement par minimisation de la distance \mathcal{D} définie à l'équation (3.16) est relativement mauvais par rapport aux deux autres modèles, avec notamment un écart de près d'un facteur deux sur le vecteur d'onde du minimum roton. On peut ajuster à la main l'unique paramètre libre d pour essayer de se rapprocher de la valeur expérimentale $\tilde{k}_0 = 2\pi$ dans notre système d'unités, mais la hauteur ω_0 et la courbure κ_0 deviennent alors irréalistes : on obtient un minimum roton très peu marqué et beaucoup plus haut que ce qu'on peut obtenir avec les deux autres modèles. Pour cette raison, on abandonnera le modèle de Pomeau-Rica pour la suite. Les deux autres modèles donnent une description plus précise de



Fig. 3.1 Comparaison des relations de dispersions dans différents modèle d'interaction. En trait plein noir, la relation mesurée expérimentalement par diffraction de neutrons, issue de [3]. Les relations de dispersion dans le modèle de Pomeau-Rica (pointillés bleus) et dans notre proposition de modèle (tirets jaunes) sont obtenues en ajustant le creux des rotons par minimisation de la distance \mathcal{D} définie à l'équation (3.16). Dans le cas du modèle de Berloff-Roberts (points-tirets rouges) la relation de dispersion est obtenue en ajustant la relation complète par minimisation de la distance \mathcal{D}_{BR} définie à l'équation (3.17). Les valeurs des paramètres utilisés pour ces ajustements sont, pour le modèle de Pomeau-Rica a = 5.1392 et d = 1.3013; pour le modèle de Berloff-Roberts A = 2.2096, B = 10.0573, $\alpha = 650.74$, $\beta = -992.27$, $\delta = 222.2390$, $\eta = 5.6186$ et $\chi = 3.1761$; pour notre modèle c = 9.74, B = 1.5740, D = 5.9412 et E = 0.3402.

la relation de dispersion expérimentale, notamment du minimum roton dans le cadre de notre modèle qui est ajusté spécifiquement sur cet aspect de la relation.

Ces résultats montrent qu'il est possible de donner une reproduction fidèle de la relation de dispersion expérimentale observée dans l'hélium II, à l'aide d'un modèle d'interaction relativement simple comme celui proposé à l'équation (3.10). Le modèle proposé par Berloff et Roberts [38,39] et présenté ici à l'équation (3.5) permet une plus grande liberté dans l'ajustement de par ses plus nombreux paramètres, au prix de la simplicité de la modélisation. Malheureusement on ne décrit ici que la version *linéarisée* de l'équation de Gross-Pitaevskii (3.1). Or même si cette description est relativement fidèle à la réalité expérimentale, le problème décrit par l'équation (3.1) est fortement non-linéaire. On décrit dans la partie 3.2 la recherche d'une solution à un vortex stationnaire dans le problème non-linéaire, et on présente les difficultés liées à la présence de cette non-linéarité.

3.2 Tendance à la cristallisation

3.2.1 Recherche d'une solution vortex stationnaire

Afin de tester les différents modèles ajustés dans la partie 3.1.2, on commence par étudier la structure interne des vortex dans chacun de ces modèles. Pour cela, on recherche une solution à un vortex stationnaire à l'équation (3.1). Comme expliqué dans la partie 3.1.2, on s'intéresse uniquement au modèle de Berloff-Roberts et à notre proposition de modèle donnée à l'équation (3.10). Pour le modèle de Berloff-Roberts, on cherche alors une solution vortex stationnaire à l'équation (3.6).

3.2.1.1 Principe

On recherche une solution stationnaire à un vortex, qu'on choisit d'axe Oz sans perte de généralité. Comme dans le chapitre précédent, l'invariance par translation le long de l'axe du vortex permet de réduire le problème à une équation à deux dimensions. La solution stationnaire

recherchée vérifie alors l'équation à deux dimensions suivante :

$$0 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Psi + \left[\left(G_{2D} * |\Psi|^2\right) - \mu\right]\Psi,\tag{3.18}$$

où $G_{2D}(x, y) = \int G(r) dz$ est la version 2D du potentiel d'interaction et où le produit de convolution n'est alors intégré que sur les variables x et y dans le plan orthogonal à l'axe du vortex. Afin de résoudre numériquement l'équation (3.18), on utilise une méthode dite de relaxation. Cette méthode consiste à remarquer que la solution stationnaire de l'équation de Gross-Pitaevskii est aussi solution stationnaire de l'équation suivante :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = +\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Psi - \left[\left(G_{2D} * |\Psi|^2\right) - \mu\right]\Psi,\tag{3.19}$$

qui est une équation de type équation de la chaleur où le terme d'énergie potentielle apparaît comme un terme de source. Par analogie avec le problème de la chaleur, on s'attend alors à ce que la solution de l'équation stationnaire (3.18) soit la solution à temps long de l'équation (3.19). En pratique la recherche d'une solution stationnaire de l'équation de Gross-Pitaevskii (ou plus généralement toute équation de type Schrödinger) revient à résoudre l'équation (3.19) et chercher sa solution à temps long pour une condition initiale donnée. Cette méthode est aussi appelée propagation en temps imaginaire, puisque l'équation (3.18) est obtenue depuis l'équation de Gross-Pitaevskii par le changement de variable temporelle $t \mapsto -it$.

Dans notre cas, on choisit une condition initiale vérifiant les contraintes imposées par la présence d'un vortex à savoir une variation de 2π de la phase lors d'un tour autour du cœur du vortex, et l'annulation de la fonction d'onde Ψ sur le cœur. En pratique, on choisit la condition initiale suivante :

$$\Psi\left(\vec{r},t\right) = f(r)e^{i\theta},\tag{3.20}$$

où on a introduit les coordonnées polaires (r, θ) dans le plan perpendiculaire à l'axe du vortex. L'amplitude f(r) est choisie de telle sorte à vérifier les propriétés essentielles de la solution de l'équation (2.23), à savoir f(0) = 0 et $f(\infty) = 1$. La forme exacte de cette amplitude n'a pas d'importance sur le résultat final de la relaxation, mais choisir une condition initiale proche de la solution attendue permet de réduire le temps d'établissement de l'état stationnaire de l'équation (3.19). Typiquement, on utilise un profil en tangente hyperbolique $f(r) = \tanh(r)$.

3.2.1.2 Méthodes numériques

Contrairement au chapitre 2, on ne réduit pas ici l'équation (3.19) à une équation radiale en utilisant l'invariance par rotation. Au lieu de cela on résout le problème de relaxation à deux dimensions, en utilisant une méthode pseudo-spectrale : les conditions aux limites sont donc périodiques et imposées par le calcul dans l'espace de Fourier. On s'attend donc à ce que l'invariance par rotation soit brisée près des bords du domaine de résolution, à cause des effets de la périodicité dans les directions x et y. Plus explicitement, la méthode pseudo-spectrale consiste à résoudre l'équation (3.19) dans le domaine de Fourier :

$$\frac{\partial \widehat{\Psi}}{\partial t} = -k^2 \widehat{\Psi} + \mu \widehat{\Psi} - \widehat{NL}, \qquad (3.21)$$

où le chapeau représente la transformée de Fourier spatiale et $NL = (G_{2D} * |\Psi|^2) \Psi$ le terme d'interaction non-linéaire et non-locale. La périodicité ainsi imposée pose un problème pour la

condition initiale choisie. En effet la condition $\Psi(r, 0) = \tanh(r)e^{i\theta}$ représente un vortex centré en l'origine du domaine, mais n'est pas périodique en x et en y: elle présente une discontinuité en amplitude et en phase au bord du domaine. Si la discontinuité en amplitude peut être minimisée en augmentant la taille du domaine, la discontinuité en phase ne dépend pas de la taille du domaine. Pour palier à ce problème, on choisit comme condition initiale un ensemble de quatre vortex disposés en carré et alternant le signe de leur circulation. La discontinuité de la phase est ainsi minimisée et la relaxation dans l'espace de Fourier gomme rapidement les défauts de périodicité. Cette procédure est visualisée sur la figure 3.2. Le résultat est que la fonction d'onde présente une symétrie due à la périodicité : on ne représentera plus qu'un quart du plan de la simulation, les trois autres étant simplement des images permettant d'obtenir la périodicité et n'apportent pas de physique supplémentaire au problème. Pour les simulations à trois dimensions du chapitre 4, on ne montrera de même qu'un huitième du cube et on omettra les images présentes dans le reste du domaine.



Fig. 3.2 Profil de la phase de la condition initiale choisie. (a) : une condition initiale à un seul vortex présente une importante discontinuité aux bords et n'est donc pas périodique en x et en y. (b) : une condition à quatre vortex en carré alternés limite la discontinuité de phase au bord et facilite la périodisation lors de la relaxation dans l'espace spectral.

Le terme non-linéaire nécessite un traitement soigneux dans cette méthode de résolution. Tout d'abord, à cause de sa non-linéarité il n'est pas calculable simplement dans l'espace de Fourier. En pratique, on doit repasser dans l'espace réel pour calculer le module au carré de Ψ , puis repasser dans l'espace spectral pour calculer la convolution avec G_{2D} qui devient simplement un produit. Finalement le produit de convolution est retransformé dans l'espace réel pour la multiplication avec Ψ , puis repassé une dernière fois dans l'espace de Fourier pour calculer la dérivée $\partial_t \Psi$ et intégrer l'équation (3.21). En outre, le terme non-linéaire est suceptible de créer des hautes fréquences dans le spectre de Ψ . Dans le cadre discrétisé d'une simulation numérique ces hautes fréquences peuvent devenir problématiques si elles dépassent la fréquence de Nyquist de la simulation. Dans ce cas, ces nouvelles fréquence apparaîtront sous la forme d'alias à basse fréquence par repliement spectral et fausseront la dynamique réelle du système non discrétisé. Pour s'affranchir de ce problème, on peut s'affranchir des alias en filtrant manuellement toutes les fréquences susceptibles d'être repliées dans le spectre par effet de la non-linéarité. Pour une non-linéarité d'ordre deux, Orszag [46] montre ainsi qu'il est suffisant de couper toutes les fréquences au-delà de deux tiers de la fréquence de Nyquist, avant et après multiplication deux à deux dans l'espace réel. On pourrait argumenter que la non-linéarité de l'équation de Gross-Pitaevskii étant d'ordre trois, il ne faut pas utiliser la règle des deux-tiers d'Orszag mais son équivalent à l'ordre trois qui préconise de couper toutes les fréquences au dessus de la moitié de la fréquence de Nyquist. Cependant cette méthode implique un coût plus important en résolution spatiale, puisqu'elle implique d'éliminer plus de fréquences que la règle des deux-tiers. De plus ici le terme non-linéaire est calculé par produits deux à deux successifs : on ne manipule réellement à chaque étape du calcul qu'une non-linéarité quadratique. Il suffit donc d'appliquer successivement la règle des deux-tiers à chaque multiplication pour éliminer les alias. Cette méthode est évidemment plus coûteuse en temps puisqu'on réalise deux déaliasings successifs au lieu d'un seul pour la «règle des un-demi» prescrite pour une non-linéarité d'ordre trois. Cependant le coût en temps de calcul de ces deux opérations successives est préférable au coût en résolution spatiale. En effet pour garder la même résolution spatiale que le problème non déaliasé, il faudrait multiplier la résolution de la simulation par 2^d où d est la dimensionalité du problème dans le cas de la règle des un-demi, contre $(3/2)^d$ pour la règle des deux tiers. Cette différence est importante notamment pour le cas des simulations à trois dimensions présentées dans chapitre 4. Pour cette raison, on utilise dans toutes les simulations numériques la règle des deux-tiers successivement à chaque produit deux à deux dans l'espace réel.

Afin d'intégrer en temps l'équation (3.21) on choisit comme schéma numérique le schéma Runge-Kutta d'ordre quatre. Ce schéma est soumis à une condition de stabilité numérique que nous avons cherché de manière empirique en partant de la condition Courant-Friedrisch-Lewy (CFL) de l'équation de la chaleur $\delta t < \delta x^2/2$ [47]. Le terme non-linéaire de l'équation de Gross-Pitaevskii impose une condition plus drastique, et on observe que prendre $\delta t = \delta x^2/64$ est suffisant pour obtenir un schéma stable numériquement. Pour faire ce choix on fixe arbitrairement la résolution spatiale $\delta x = 1/16$, ce qui correspond à seize pixels par longueur d'onde de roton. La taille de la grille de simulation donne alors la taille physique du domaine de résolution. Afin de tester les effets de la périodicité, on réalise la relaxation numérique sur des grilles de $128^2, 256^2, 512^2$ et 1024^2 ce qui correspond à des tailles de domaines de L = 8, 16, 32 et L = 64 longueurs d'ondes de rotons respectivement.

La relaxation est arrêtée arbitrairement quand le champ $\Psi(\vec{r}, t)$ semble avoir atteint un état stationnaire. Pour cela on calcule l'énergie totale à chaque pas de temps :

$$E = \iint_{\mathbb{R}^2} \left[|\nabla \Psi|^2 + \frac{1}{2} |\Psi|^2 \left(G_{2D} * |\Psi|^2 \right) - \mu |\Psi|^2 \right] d^2r$$
(3.22)

On choisit alors d'arrêter la relaxation au bout de 50000 pas de temps, ce qui correspond à une durée $T \approx 3$. La variation relative d'énergie entre deux pas de temps est alors de l'ordre de $\left|\frac{\delta E}{E}\right| \sim 10^{-7}$.

Les relaxations numériques sont réalisée par un code MATLAB, la DNS de l'équation (3.19) étant peu coûteuse à deux dimensions pour des tailles de grille allant jusqu'à 1024². On réalise de même des relaxations numériques du modèle d'interaction locale afin de pouvoir en déduire l'influence des rotons dans un modèle de superfluide. Afin de pouvoir comparer les deux modèles, on choisit comme potentiel chimique du modèle local la valeur $\mu = c^2/2$ obtenue par ajustement du modèle non-local. Choisir le même potentiel chimique permet alors de comparer deux modèles avec la même célérité du son $c = \sqrt{2\mu}$ et la même longueur de cohérence $\xi = 1/\sqrt{\mu}$.

Les résultats de ces simulations sont présentés dans les parties suivantes.

3.2.2 Cristallisation statique

L'étude de la relation de dispersion à la partie 3.1.2 est basée sur la linéarisation de l'équation (3.1) autour de la solution uniforme $\Psi(\vec{r},t) = 1$: elle ne prend donc pas en compte les effets de la non-linéarité du problème de Gross-Pitaevskii. Ces effets peuvent être importants et notamment déclencher des instabilités non présentes dans le problème linéaire. On présente dans cette partie les effets non-linéaires observés dans la recherche d'une solution stationnaire à un vortex, à travers une démarche phénoménologique.

La solutions stationnaires à un vortex obtenues par la méthode numérique décrite à la partie 3.2.1 sont présentée sur la figure 3.3.

Dans le cas du modèle de Berloff-Roberts on observe des modulations intenses de la densité du fluide autour du coeur du vortex, alignées sur un réseau hexagonal. La phase tourne toujours


Fig. 3.3 Résultats de la relaxation numérique décrite dans la partie 3.2.1. (a,c) : densité et phase respectivement de la solution stationnaire obtenue à la fin de la relaxation dans le modèle de Berloff-Roberts. (b,d) : densité et phase respectivement de la solution stationnaire obtenue après 40000 itérations dans notre proposition de modèle. Dans ce modèle les fluctuations de la densité divergent au cours de la relaxation et la simulation explose peu après 40000 itérations. Les profils de densité et de phase sont issus des relaxations sur un grille de taille 512².

régulièrement de 2π autour du cœur du vortex, suggérant que le fluide s'écoule toujours selon l'écoulement induit par un quantum de circulation. Mais contrairement à l'image d'un écoulement fluide la densité est ici fortement modulée sur un réseau figé dans le temps, ce qui évoque plutôt l'image d'un solide cristallin. On désignera donc dans la suite par *cristallisation* cette modulation intense de la densité sur un réseau. On note que le pas du réseau de cristallisation ne dépend pas de la taille de la simulation, mais est proche de la taille caractéristique du potentiel d'interaction, à savoir la longueur d'onde du roton. Ce résultat a été observé dans la littérature [48,49] où des modèles de Gross-Pitaevskii sont utilisés pour modéliser un éventuel état supersolide de l'hélium. Dans le cas de notre proposition de modèle, l'effet de la modulation est encore plus important : la non-linéarité ne sature pas les oscillations de densités qui divergent et font exploser la simulation. La figure 3.3 montre l'état du système peut avant la divergence des oscillations de densité. On observe de fortes modulations autour du cœur du vortex, qui même si elles ne sont pas développé sur un large réseau hexagonal comme dans le modèle de Berloff-Roberts, semblent s'aligner selon trois directions préférentielles. La phase de la fonction d'onde est similaire au cas de Berloff-Roberts : on remarque en effet au cours des simulations que le profil de phase autour du vortex ne change quasiment pas durant la relaxation, ce qui suggère que l'écoulement est déjà qualitativement décrit par la phase de la condition initiale représentée sur la figure 3.2.

Notons qu'il n'existe pas encore à notre connaissance de mesure expérimentale de la structure interne du cœur des vortex dans l'hélium II à l'échelle des rotons. En conséquence, il nous est impossible d'affirmer avec certitude qu'une structure cristalline telle qu'observée sur la figure 3.3 est impossible dans l'hélium 4. Cependant à des échelles plus grandes, l'existence de vortex non cristallisés est bien démontrée expérimentalement dans l'hélium superfluide [9] et dans les conden-

sats de Bose atomiques [50]. Par conséquent, on cherche à obtenir une solution stationnaire à un vortex non cristallisé -i.e. axisymétrique, avec le modèle d'interaction proposé à l'équation (3.10). Pour obtenir une telle solution non-cristallisée en gardant la même proposition de potentiel, il est nécessaire de modifier l'ajustement de la relation de dispersion réalisé dans la partie 3.1.2. En effet il est observé [23, 48] que la tendance à la cristallisation dépend de la hauteur du minimum des rotons : plus leur énergie est basse, plus les rotons sont facilement excités et susceptibles de mener à l'apparition d'un cristal. Pour cette raison, on décide de relever arbitrairement l'énergie du minimum roton reproduite par notre modèle, jusqu'à que la solution stationnaire obtenue par relaxation soit raisonnablement axisymétrique. Pour cela, on suit toujours la procédure d'ajustement décrite à la partie 3.1.2 mais on choisit une valeur plus grande pour la valeur de référence $\tilde{\omega}_0$ dans la minimisation de la fonction \mathcal{D} donnée à l'équation (3.16). En partant de la valeur expérimentale [3] $\tilde{\omega}_0 = 15.1$ et en augmentant progressivement $\tilde{\omega}_0$ on trouve qu'il suffit de prendre $\tilde{\omega}_0 = 18$ pour obtenir une solution stationnaire à un vortex non-cristallisé. Les paramètres issus de ce réajustement du minimum roton sont c = 9.74, B = 1.5948, D = 10.512 et E = 0.3851. La nouvelle relation de dispersion ainsi obtenue est présentée sur la figure 3.4, ainsi que le profil radial du potentiel dans l'espace réel et le profil de densité de la solution stationnaire obtenue.



Fig. 3.4 (a) : relation de dispersion dans notre modèle (tirets bleus) réajusté de façon à obtenir une solution stationnaire non cristallisée, comparée à la relation de dispersion expérimentale (trait plein noir) et à son ajustement optimal par notre modèle (points-tirets rouges). (b) : profil radial des potentiels d'interaction normalisés par leur amplitude respective en zéro G_0 , dans notre modèle réajusté (tirets bleus) ainsi que pour son ajustement optimal (points-tirets rouges). Ces amplitudes valent $G_0 = 0.03$ eV dans l'ajustement optimal et $G_0 = 11.60$ eV dans le réajustement du minimum roton. (c) : densité de la solution stationnaire obtenue à la fin de la relaxation dans notre modèle réajusté. (d) : densité de la solution stationnaire obtenue à la fin de la relaxation dans l'ajustement optimal de notre modèle. Les profils de densité (c) et (d) sont issus des relaxations sur un grille de taille 512^2 soit une taille physique de L = 32longueurs d'ondes de rotons ; on représente ici un agrandissement sur une zone de taille 12×12 longueurs d'ondes de roton centrée sur le cœur du vortex.

La relation de dispersion obtenue reste relativement proche de la relation expérimentale, comme on peut le voir sur la figure 3.4. Les profils radiaux du potentiel d'interaction présentés sur la figure 3.4 sont cependant relativement différents : on observe un facteur 1000 entre les deux amplitudes, et l'intensité relative des extrema secondaires est aussi radicalement différente. Ce résultat est typique d'un ajustement fin dans l'espace de Fourier, qui peut donner des résultats très différents dans l'espace réel. En ce qui concerne les profils de densité, on observe bien une solution stationnaire axisymétrique sur la figure 3.4(c) dans le cas d'un réajustement du minimum roton.

On voit donc via cette procédure que les modèles utilisés, que ce soit celui de Berloff-Roberts ou notre proposition, sont incapables de modéliser à la fois une relation de dispersion fidèle à l'expérience et un écoulement fluide dénué de modulations de densités typiques d'un état cristallin. Face à cette difficulté à réconcilier la description linéarisée du problème et les effets de la nonlinéarité, et au niveau de schématisation de la description par l'équation de Gross-Pitaevskii, nous avons décidé d'abandonner complètement le modèle de Berloff-Roberts. En effet le niveau de description proposé par ce modèle nous a semblé incohérent avec les approximations du formalisme de Gross-Pitaevskii pour l'hélium II.

3.2.3 Cristallisation dynamique

La démarche de réajustement du minimum roton présentée dans la partie 3.2.2 permet d'obtenir une solution stationnaire à un vortex non cristallisé. Cependant ce premier réajustement n'est pas suffisant pour garantir la stabilité modulationnelle des solutions dynamiques de l'équation de Gross-Pitaevskii. En effet on observe lors des simulations de reconnexion de deux vortex décrites au chapitre 4 que l'événement de reconnexion est suffisamment intense pour déclencher des instabilités modulationnelles. On observe alors l'apparition d'un réseau cristallin, équivalent tridimensionnel de celui observé sur la figure 3.3, et ceci même en partant de conditions initiales non cristallisées obtenues par la démarche de la partie 3.2.2. Ce réseau tridimensionnel est visualisé sur la figure 4.1.

Pour palier à ce problème, nous avons décidé d'aller plus loin dans notre démarche de réajustement et de relever à nouveau le minimum des rotons jusqu'à obtenir une simulation de reconnexion qui ne fasse pas apparaître de cristallisation spontanée. Pour cela nous avons de plus dû augmenter la célérité du son, car notre modèle ne permettait pas de relever le minimum des rotons sans ajuster simultanément les autres caractéristiques c, ω_0 et κ_0 . Les paramètres du modèle finalement retenus pour toute la suite sont c = 16, B = 2.2635, D = 5.5970 et E = 0.4408. Le résultat de ce second ajustement est représenté sur la figure 3.5.



Fig. 3.5 (a) : relation de dispersion dans notre modèle (tirets bleus) réajusté de façon à obtenir une reconnexion sans cristallisation dans le chapitre 4 : l'énergie des rotnons ainsi que la vitesse du son sont relevées par rapport à la figure 3.4. Comparaison avec la relation de dispersion expérimentale (trait plein noir) et à son ajustement optimal par notre modèle (points-tirets rouges). (b) : profil radial des potentiels d'interaction normalisés par leur amplitude respective en zéro G_0 , dans notre modèle réajusté (tirets bleus) ainsi que pour son ajustement optimal (points-tirets rouges). Ces amplitudes valent $G_0 = 0.03$ eV dans l'ajustement optimal et $G_0 =$ 0.11 eV dans le réajustement du minimum roton. (c) : densité de la solution stationnaire obtenue à la fin de la relaxation dans notre modèle réajusté. (d) : densité de la solution stationnaire obtenue à la fin de la relaxation dans l'ajustement optimal de notre modèle. Les profils de densité (c) et (d) sont issus des relaxations sur un grille de taille 512² soit une taille physique de L = 32 longueurs d'ondes de rotons; on représente ici un agrandissement sur une zone de taille 12 × 12 longueurs d'ondes de roton centrée sur le cœur du vortex.

On obtient bien une solution stationnaire à un vortex non cristallisé, comme on peut le voir sur la figure 3.5(c). En contrepartie, la célérité du son reproduite est c = 16.0 et les caractéristiques du creux des rotons $k_0 = 6.5963$, $\omega_0 = 29.6$ et $\kappa = 13.7$ contre $\tilde{c} = 9.74$, $\tilde{k}_0 = 2\pi$, $\tilde{\omega}_0 = 15.1$ et $\tilde{\kappa}_0 =$ 12.9 observés expérimentalement dans notre système d'unités. Les propriétés hydrodynamiques de la solution stationnaire obtenue sont édudiées plus quantitativement dans la partie 3.3.

3.3 Analyse de la solution stationnaire

On étudie dans cette partie la solution stationnaire à un vortex obtenue dans notre modèle réajusté à la partie 3.2.3. On se place dans le cadre de la description hydrodynamique présentée dans le chapitre 2 et basé sur la transformation de Madelung $\Psi = \sqrt{\rho}e^{i\phi}$. Sous cette transformation et dans notre système d'unités, le module au carré de la fonction d'onde s'interprète comme la densité du superfluide $\rho = |\Psi|^2$, et la phase de la fonction d'onde comme un potentiel des vitesses $\vec{u} = 2\vec{\nabla}\phi$. On comparera systématiquement les propriétés du vortex stationnaire dans notre modèle non-local à la solution stationnaire du modèle local.

3.3.1 Profil radial de densité

Le profil bidimensionnel de densité obtenu sur la figure 3.5(c) est raisonnablement axisymétrique à faible distance du cœur du vortex. On peut alors étudier le profil radial de densité, en relevant les valeurs de la densité suivant l'axe x suffisamment proche du cœur. On compare alors ce profil radial obtenu à celui observé par la même méthode dans le modèle local. Les deux profils sont représentés sur la figure 3.6.



Fig. 3.6 Profils radiaux de densité dans notre modèle non-local (en bleu) et dans le cas local (en rouge), obtenus à partir des solutions stationnaires sur une grille de taille 1024^2 . Les oscillations de densité dans le cas non-local s'atténuent sur une distance typique $1/k_1$ liée aux propriétés ω_0 et κ_0 du minimum roton.

On observe dans notre modèle non-local que la densité s'annule bien au cœur du vortex en $\rho \propto r^2$, et qu'elle tend en s'éloignant du cœur vers la densité uniforme $\rho = 1$, en présentant des oscillations autour de cette densité uniforme. Ces oscillations avaient déjà été observées [23,38,42] et s'atténuent sur une distance caractéristique $\lambda_1 = 2\pi/k_1$ liée à la hauteur et la courbure du creux des rotons :

$$k_1 = 2\sqrt{\frac{\omega_0}{\kappa_0}}.\tag{3.23}$$

Dans le cas local la densité croît de manière monotone jusqu'à la densité uniforme, et exhibe comme unique distance caractéristique la longueur de cohérence $\xi = \mu^{-1/2}$. Les oscillations de densités autour du cœur du vortex sont une signature typique des rotons dans le cadre d'une description par l'équation de Gross-Pitaevskii. On retrouve ces mêmes oscillations près de toute annulation de la densité, notamment en présence de parois [38, 39]. On verra dans la partie 3.3.2

que ces oscillations sont aussi présentes dans d'autres quantités hydrodynamiques dans le cas non-local.

3.3.2 Profils de vitesse, densité d'impulsion et pseudo-vorticité

Dans le cadre de la transformation de Madelung et dans notre système d'unités, le champ de vitesse induit par un quantum de circulation est $\vec{u} = \frac{2}{r}\vec{e_{\theta}}$. Ce champ de vitesse diverge au cœur du vortex et la vorticité associée $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$ est alors distributionnelle : Ω est infinie sur le cœur du vortex et nulle ailleurs. Numériquement, un champ distributionnel ou simplement divergent pose de nombreux problèmes, que ce soit ici dans l'analyse de la solution stationnaire ou pour l'étude dynamique présentée dans le chapitre 4. Pour cette raison on va considérer plutôt la densité d'impulsion \vec{j} et la pseudo-vorticité \vec{w} associée :

$$\vec{j} = \frac{1}{i} \left(\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^* \right), \qquad (3.24)$$

$$\vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{j} = 4\vec{\nabla}\Psi_r \times \vec{\nabla}\Psi_i, \qquad (3.25)$$

où Ψ_r et Ψ_i sont les parties réelle et imaginaire de la fonction d'onde respectivement. La seconde expression de \vec{w} est notamment utile pour les calculs numériques. Dans le cas d'un quantum de circulation en l'origine, la densité d'impulsion s'exprime alors $\vec{j} = 2\rho/r\vec{e_{\theta}}$. Ce champ est donc borné et s'annule au cœur du vortex en $j \propto r$. La pseudo-vorticité est alors elle aussi bornée et alignée selon l'axe du vortex $\vec{w} = (2/r)d\rho/dr\vec{e_z}$; en particulier w prend une valeur finie sur le cœur du vortex.

Comme pour le profil de densité présenté à la partie 3.3.1, on suppose que les champs \vec{u} , \vec{j} et \vec{w} sont axisymétriques près du cœur du vortex, et on les évalue en relevant leurs valeurs sur l'axe Ox assez près du cœur. Les profils obtenus sont présentés sur la figure 3.7.



Fig. 3.7 (a) : profils radiaux de vitesse (trait plein noir) et de densité d'impulsion dans notre modèle non-local (tirets bleus) et dans le modèle local (points-tirets rouges). Le profil de vitesse est identique dans les deux cas et est numériquement indiscernable du profil u = 2/r prédit par la loi de Biot-Savart. (b) : profils radiaux de pseudo-vorticité dans notre modèle non-local (triangles bleus) et dans le modèle local (carrés rouges), ainsi que leur comparaison à un modèle schématique (en tirets et points-tirets respectivement) décrit dans l'équation (3.26).

On observe effectivement sur la figure 3.7(a) que le profil de vitesse diverge en u = 2/r, dans le cas local comme dans le non-local. Ce comportement est extrêmement bien vérifié numériquement, ce qui suggère que le champ de vitesse induit par un vortex stationnaire est un aspect robuste de la description de Gross-Pitaevksii du superfluide, et qu'il ne dépend pas du modèle d'interaction. On

retrouve de même des profils bornés pour la densité d'impulsion qui s'annule au cœur du vortex en $j \propto r$. On observe dans le profil non-local de très légères oscillations typiques des rotons, contrairement au cas local.

La figure 3.7(b) représente les profils de pseudo-vorticité dans les deux modèles. On retrouve dans les deux cas un profil qui prend une valeur finie sur le cœur du vortex. Dans le cas local (en rouge), w décroît de manière monotone quand on s'éloigne du cœur. Comme on le verra dans le chapitre 4, en particulier pour donner une interprétation statistique des quantités décrites ici, il est intéressant de modéliser cette décroissance radiale de w. Dans cette optique, on propose le modèle suivant :

$$w(r) = \frac{w_0}{\left[1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^{\alpha}},\tag{3.26}$$

où w_0 est la valeur de la pseudo-vorticité sur le cœur du vortex et (r_0, α) sont les paramètres libres du modèle. On commence par ajuster ce modèle sur le profil obtenu avec l'équation de Gross-Pitaevskii locale. On obtient une reproduction raisonablement fidèle de la décroissance monotone avec les valeurs de paramètres $r_0 = 0.22$ et $\alpha = 3.125$. Dans le cadre non-local, les paramètres $r_0 = 0.62$ et la même valeur de α reproduisent qualitativement la décroissance de w, mais le modèle (3.26) est incapable de reproduire les oscillations typiques de la présence de rotons.

Remarquons que la valeur $\alpha = 3.125$ est relativement différente de l'exposant $\alpha = 2$ attendu dans le cas de la résolution de l'équation radiale pour la densité présentée au chapitre 2. En effet loin du cœur et en négligeant les variations d'ordre deux, la densité tend vers la densité uniforme comme l'inverse du carré de la distance au cœur du vortex [19]. En utilisant l'expression $w = (2/r)d\rho/dr$ on obtient alors aisément que la pseudo-vorticité se comporte à grand r comme $w \propto 1/r^4$, ce qui correspond à $\alpha = 2$ dans le modèle donné par l'équation (3.26). Dans notre cas, on ajuste le modèle sur des distances qui ne peuvent être considérées comme grandes étant loin du cœur du vortex – voir par exemple les valeurs obtenues pour le paramètre r_0 . De plus, la solution stationnaire est obtenue ici sur un domaine fini avec des conditions aux bords périodiques. Cette périodicité implique la présence de vortex images qui sont susceptibles d'interagir d'une manière subtile, de telle sorte que l'exposant $\alpha = 3.125$ décrit mieux la décroissance de w observée ici. Ceci pourrait expliquer que l'on n'observe pas une décroissance en $w \propto 1/r^4$.

Après l'analyse statique réalisée ici, on étudiera dans le chapitre 4 l'évolution dans le temps des quantités hydrodynamiques lors d'un événement de reconnexion de deux vortex initialement rectilignes.

4 Étude de la reconnexion de deux vortex

Dans le chapitre 3 nous avons proposé un modèle d'interaction non-locale, ainsi qu'un jeu de paramètres pour ce modèle permettant d'obtenir une solution stationnaire à un vortex non cristallisé en s'éloignant le moins possible de la relation de dispersion expérimentale. Dans ce chapitre, on s'intéresse aux solutions dynamiques de l'équation de Gross-Pitaevskii, dans notre proposition de modèle non-local comme dans le modèle local. La configuration que l'on étudie est celle de la reconnexion de deux vortex, obtenus individuellement par la méthode de relaxation décrite au chapitre 3. On analyse alors l'événement de reconnexion via une étude statistique des quantités hydrodynamiques impliquée, ainsi que par le suivi de la position des vortex au cours du temps.

4.1 Simulation numérique directe et analyse statistique de la reconnexion

4.1.1 Méthode numérique

Le phénomène de reconnexion des vortex est naturellement décrit par l'équation de Gross-Pitaevskii, et a été étudié numériquement de manière extensive [18, 20, 25] dans le cas du modèle local. On cherche ici à étudier la reconnexion dans notre modèle non-local via une Simulation Numérique Directe (DNS) de l'équation de Gross-Pitaevskii. Pour cela on résout les équations couplées sur la partie réelle et la partie imaginaire de la fonction d'onde dans un domaine à trois dimensions avec des conditions aux bords périodiques. On utilise une méthode pseudo-spectrale avec déaliasing identique à celle décrite dans le chapitre 3, sur des grilles de tailles 128³, 256³ et 512³ afin de tester les effets de la périodicité. Comme pour la relaxation décrite au chapitre 3, on fixe la résolution spatiale $\delta x = 1/16$, ce qui donne des tailles physiques de L = 8, L = 16 et L = 32 pour le domaine de simulation. On choisit de même la résolution temporelle $\delta t = \delta x^2/64$ afin d'obtenir un schéma numérique stable. La DNS est réalisée par un code FORTRAN parallélisé avec MPI sur 32 cœurs exécuté au Pôle Scientifique de Modélisation Numérique de l'ENS de Lyon. Je remercie à ce titre tout particulièrement Emmanuel Lévêque pour son code des équations de Navier-Stokes que j'ai pu adapter pour réaliser les DNS des équations de Gross-Pitaevskii au cours de cette thèse.

Pour simuler la reconnexion, on prépare au préalable une condition initiale constituée de deux vortex orthogonaux et séparés d'une distance d. En pratique, on construit la fonction d'onde d'un vortex stationnaire à trois dimensions en copiant sur chaque tranche orthogonale à son axe les valeurs de la fonction d'onde à deux dimensions obtenue par relaxation, en utilisant l'invariance par translation le long de l'axe du vortex. On multiplie ensuite cette fonction d'onde à trois dimensions par une copie tournée de 90 degrés et translatée de la distance d. Cette distance est choisie de telle sorte à pouvoir observer un événement de reconnexion dans un temps raisonnable de simulation aux résolutions choisies. On choisit typiquement d = 1 longueur d'onde de roton et on conserve cette valeur pour l'ensemble des reconnexions. On teste l'influence de cette distance uniquement pour l'observation de la cristallisation dynamique présentée dans la partie 4.1.2. Rappelons que la fonction d'onde issue de la relaxation contient un vortex ainsi que trois images nécessaires à la

périodicité, de telle sorte que seul un quart du plan est utile à la description physique du problème. De la même manière, la condition initiale construite ici contient un jeu de deux vortex orthogonaux ainsi que sept images nécessaires à la périodicité à trois dimension. Ainsi on ne considèrera qu'un huitième du domaine de simulation dans la présentation des résultats.

On arrête la simulation après un événement de reconnexion et avant que les vortex rencontrent leurs images nécessaires à la périodicité. On choisit d'arrêter la DNS au bout de 100000 pas de temps, ce qui correspond à une durée physique de $T \approx 6$ soit environ 80 ps. On sauvegarde le champ complet sur toute la grille de simulation tous les 1000 pas de temps; aux instants proches de la reconnexion on enregistre le champ tous les 100 voir 10 pas de temps afin d'augmenter la résolution temporelle des mesures de vitesse d'approche notamment, comme expliqué dans la partie 4.3.1.

4.1.2 Cristallisation

On a vu au chapitre 3 que l'obtention d'une solution stationnaire non-cristallisée n'était pas suffisante pour éviter la cristallisation lors de l'évolution dynamique du problème. En effet en utilisant le jeu de paramètres issu du premier réajustement du minimum roton, on observe l'apparition d'une zone cristallisée au moment de la reconnexion en partant d'une condition initiale non-cristallisée. Le cristal apparaît au point de reconnexion des vortex, et persiste jusqu'à la fin de la simulation; les deux vortex initialement séparés restent alors reliés par le cristal. Cette cristallisation est représentée sur la figure 4.1.



Fig. 4.1 Visualisation de la densité du fluide lors de la cristallisation induite par reconnexion des vortex. Les faibles densités $\rho \ll 1$ sont représentées en rouge-orange et les densités $\rho \sim 1$ sont représentées en bleu-violet. De gauche à droite, les images sont prises pour des distance initiales $d = \{1, 2, 3\}$ respectivement entre les vortex.

Géométriquement, la zone cristalline est pleinement tridimensionnelle et s'étend sur quelques longueurs d'ondes de roton dans toutes les directions. On constate que la zone cristallisée reste relativement statique au cours de la simulation, ce qui suggère que cette cristallisation est bien une manifestation des rotons. En effet le minimum roton est une excitation stationnaire, sa vitesse de groupe étant nulle $d\omega/dk = 0$: on s'attend donc à ce qu'un paquet d'onde centré sur le minimum roton se déplace très lentement par rapport aux phonons. On étudie l'influence de la distance initiale entre les vortex en testant les valeurs $d = \{1, 2, 3\}$, et on observe que ce paramètre a relativement peu d'influence sur le phénomène. Afin de ne pas observer de cristallisation dynamique au cours de la reconnexion des vortex, on procède de la même manière qu'au chapitre 3 : on relève le minimum roton jusqu'à obtenir une solution dynamique sans cristallisation. La valeur des paramètres finalement choisis et la forme de la relation de dispersion obtenue sont présentés au chapitre 3.

Une fois ce choix fait pour les paramètres du modèle, on réalise la simulation de la reconnexion

non-cristallisée en utilisant la méthode décrite dans la partie 4.1.1. On simule d'une part notre modèle non-local avec ce dernier jeu de paramètres, et d'autre part le modèle local afin d'étudier l'influence des rotons sur la reconnexion. Des exemples de champs de densité issus de ces simulations sont représentés sur la figure 4.2.



Fig. 4.2 Visualisation 3D de la densité du superfluide lors de la reconnexion, dans le modèle local (haut) et dans notre modèle non-local (bas). Un seuil en densité est appliqué par souci de clarté, de sorte que les densités proches de la densité uniforme $\rho \sim 1$ soient transparentes. Quatre instants sont représentés, de gauche à droite respectivement : la condition initiale t = 0, le temps de reconnexion $t = t_{\rm rec}$, deux fois le temps de reconnexion $t = 2t_{\rm rec}$, et la fin de la simulation $t = t_{\rm end} = 6.1$. L'instant de reconnexion $t_{\rm rec}$ est légèrement différent dans les deux modèles : on observe $t_{\rm rec} = 1.08$ dans le cas non-local et $t_{\rm rec} = 1.16$ dans le cas local.

On observe à l'œil une image similaire dans les deux modèles, bien que les détails de petite échelle le long de filaments semblent différents. On retrouve la présence d'oscillations de densité autour du cœur du vortex dans la cas non-local, comme c'était observé dans l'analyse du profil de densité du vortex stationnaire au chapitre 3. L'étude de la densité du fluide ainsi que d'autres quantités hydrodynamiques est présentée dans la partie 4.1.3 via une analyse de leurs statistiques.

4.1.3 Analyse statistique de quantités hydrodynamiques

On a étudié dans le chapitre 3 le profil de quantités hydrodynamiques dans le cas d'un vortex stationnaire telles que la densité ρ , la vitesse \vec{u} , la densité d'impulsion $\vec{j} = \rho \vec{u}$ ainsi que la pseudo-vorticité $\vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{j}$. On souhaite étendre cette étude au cas de la reconnexion de deux vortex, cependant la géométrie de la reconnexion se prête difficilement à l'étude d'un profil radial comme pour l'étude de la solution stationnaire. Pour cette raison, on se tourne vers une étude statistique de ces quantités hydrodynamiques, en évaluant leurs densités de probabilité (PDF) au cours de la reconnexion. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 4.3.

Les PDF de la densité ρ sur les figures 4.3(a,b) présentent une différence fondamentale entre le cas local et le cas non-local. Pour la condition initiale en trait plein bleu, on note dans les deux cas un pic à $\rho = 1$, ce qui correspond à la densité uniforme du fluide. Dans le cas non-local seulement on observe des pics secondaires à des densités proches de $\rho = 1$, qui sont expliqués par les oscillations observées sur le profil de densité de la solution stationnaire étudiée au chapitre 3. Au moment de la reconnexion des événements allant jusqu'à $\rho = 3$ sont observés, et par la suite les densités jusqu'à $\rho = 2$ restent peuplées quantitativement jusqu'à la fin de la simulation.

Afin d'interpréter les PDF de j et w, on se concentre d'abord le cas de la solution axisymétrique



Fig. 4.3 Densités de probabilité (PDF) de différentes quantités hydrodynamiques au cours de la reconnexion, dans le modèle local (haut) et dans notre modèle non-local (bas). (a,b) : PDF de la densité du superfluide $\rho = |\Psi|^2$. Les hautes densités sont bien représentées dans le cas non-local (b), alors qu'elles sont absentes du cas local (a). (c,d) : PDF de la norme de la densité d'impulsion j. On observe une décroissance en j^{-3} sur la queue à droite de la PDF dans les deux modèles, signature de la décroissance de j à distance moyenne du cœur du vortex. La queue à gauche présente une loi d'échelle en $j^{1.76}$ dans les deux cas. (e,f) : PDF de la norme de la norme de la pseudo-vorticité w. Une loi de puissance en $w^{-1.3}$ est observée dans les deux modèles.

obtenue par relaxation au chapitre 3. Considérons alors une grandeur physique F(x, y, z) évaluée sur un domaine \mathcal{D} de volume V. On peut alors évaluer la PDF \mathbf{P}_F par une moyenne empirique :

$$\mathbf{P}_F(f) = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{D}} \delta\left(f - F(x, y, z)\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z.$$
(4.1)

Dans le cas d'un vortex rectiligne au centre d'un domaine cylindrique, on montre dans l'annexe **B** que la PDF de la norme de la vitesse se calcule analytiquement en insérant F(x, y, z) = u = 2/r dans l'équation (4.1). On obtient $\mathbf{P}_u(u) \propto u^{-3}$, ce qui montre que la décroissance de \mathbf{P}_u est gouvernée par la divergence de u au cœur du vortex, comme observé dans les références [31, 32, 51]. On observe cette décroissance en u^{-3} de la PDF de la norme de la vitesse pour un vortex stationnaire comme pour la condition initiale à deux vortex orthogonaux, que ce soit dans le modèle local ou non-local. Ce résultat ne dépend en effet pas du modèle, puisqu'il est dicté par le profil $u \propto r^{-1}$ qui est indépendant de la forme du potentiel d'interaction dans l'équation de Gross-Pitaevksii.

On peut alors à la lumière de ce résultat commenter les PDF de la norme de la densité d'impulsion j représentées sur les figures 4.3(c,d). On observe des comportements similaires dans les deux modèles, à savoir une loi de puissance en $j^{-1.76}$ aux valeurs $j \ll 1$ ainsi qu'une décroissance en j^{-3} sur un domaine d'extension finie, rappelant le comportement attendu pour la PDF de la norme de la vitesse comme expliqué précédemment. Le comportement à faible j pourrait être expliqué par les interactions entre les vortex et leurs images nécessaires à la périodicité, ainsi que par la taille finie du domaine de simulation. Même si l'on observe des valeurs de j légèrement plus grandes dans le cas non-local, ces valeurs n'excèdent jamais celles observées à l'instant initial. Pour cette raison, nous sommes poussés à conclure que la présence de rotons a relativement peu d'influence sur la forme globale des PDF de j.

On poursuit cette analyse en étudiant les PDF de la norme de la pseudo-vorticité représentées sur les figures 4.3(e,d), afin de quantifier l'éventuelle création de petites échelles comme c'est le cas en présence d'une cascade directe d'énergie, qui est au cœur de la phénoménologie de la turbulence tri-dimensionnelle classique [24]. En effet rappelons que dans la turbulence classique la PDF de la vitesse est proche d'une fonction gaussienne, alors que la PDF des gradients – et en particulier de la vorticité – est fortement non-gaussienne. Pour un vortex rectiligne le long de l'axe Oz, on a montré que la pseudo-vorticité est un champ borné, ne prenant des valeurs significatives que suffisamment proche du cœur du vortex. En utilisant alors un modèle de profil radial tel que celui proposé au chapitre 3, on montre dans l'annexe B que l'équation (4.1) donne une pour la PDF de w une loi de puissance en $\mathbf{P}_w(w) \propto w^{-1-\alpha^{-1}}$. Cette modélisation du profil radial de la pseudovorticité nous permet de reproduire la loi de puissance observée sur la PDF de la pseudo-vorticité à tout instant de la reconnexion, pour le cas local comme non-local comme montré sur les figures 4.3(e,d). Selon ce modèle, un exposant $\alpha = 3.125$ donnne une loi de puissance de la PDF en $w^{-1.3}$ comme observée ici. Comme on l'a mentionné au chapitre 3, le comportement asymptotique de la pseudo-vorticité pour un vortex rectiligne donne $w \propto r^{-4}$ loin du cœur du vortex, ce qui suggère $\alpha = 2$ soit une loi de puissance de la PDF en $w^{-1.5}$. Encore une fois, ce résultat est issu d'une analyse asymptotique pour un unique vortex rectiligne dans un domaine infini. La différence d'exposant observée ici pourrait être due au fait qu'on simule l'interaction entre deux vortex dans un domaine finie avec des conditions aux bords périodiques.

4.2 Suivi des vortex

On souhaite maintenant étudier d'autres aspects de la reconnexion, notamment ceux liés à l'évolution des vortex comme objets individuels. De telles études sont basées sur des algorithmes de suivi des vortex, qui permettent d'extraire leur position dans l'espace au cours du temps. On revisite dans cette partie les études qui ont pu être menées dans le cadre de l'équation de Gross-Pitaevskii locale [18, 40, 52, 53] ou d'expériences [11], en appliquant un algorithme de suivi des vortex à nos simulations des équations de Gross-Piatevskii locale et non-locale.

L'algorithme que l'on utilise est inspiré de celui décrit dans [40]. Il consiste à chercher un zéro de la densité ρ par méthode de Newton-Raphson bi-dimensionnelle dans le plan orthogonal au cœur du vortex. On utilise en plus le champ de pseudo-vorticité pour connaître l'orientation du filament et ainsi parcourir le vortex de manière itérative. À un pas de temps fixé de la simulation, on initialise l'algorithme en cherchant l'intersection d'un filament avec un bord du domaine, en commençant par le plan z = 0. Ce premier point constituera l'origine du filament à chaque instant. Le cœur du vortex est le point où la densité du fluide $\rho = -|\Psi|^2$ s'annule : cette annulation étant aussi un minimum global du champ de densité, on peut le rechercher par une méthode de minimisation. On utilise alors la méthode de Newton-Raphson – ou méthode des tangentes – pour trouver la position de ce minimum dans le plan z = 0. La position réelle du cœur avant une probabilité nulle de coïncider avec un point de la grille, on initialise la minimisation en cherchant le point de la grille le plus proche possible de cette position, typiquement en cherchant les valeurs de la densité sous un seuil arbitraire $\rho < \epsilon_1$. Ce seuil doit être assez faible pour obtenir un point de grille assez proche du cœur, mais doit être assez élevé pour garantir qu'un point de grille vérifie cette condition à chaque pas de temps. On choisit par des tests successifs la valeur $\epsilon_1 = 0.015$. La méthode de Newton-Raphson permet ensuite de trouver la position du minimum en interpolant les valeurs de la densité et de ses gradients entre les points de grille. On obtient la position réelle du cœur à une précision finie près, i.e. on arrête la minimisation quand la densité passe en dessous d'un second seuil arbitraire $\rho = \epsilon_2$. La position obtenue sera d'autant plus précise que ce seuil est faible, au prix du temps de calcul. La valeur $\epsilon_2 = 10^{-9}$ représente un bon compromis entre précision et temps de calcul. Une fois ce premier point trouvé dans le plan z = 0, on interpole la valeur du vecteur pseudo-vorticité \vec{w} en ce point : ce vecteur étant tangent au vortex, il permet de connaître

l'orientation locale du filament au point calculé précédemment. On réalise alors un «saut» d'une distance η dans la direction de \vec{w} pour initialiser la recherche du prochaint point du filament. La valeur de η doit être suffisament petite pour ne pas trop s'éloigner du cœur pendant le saut et garantir une minimisation rapide pour le point suivant. On choisit typiquement $\eta = \delta x$ où δx est la résolution spatiale de la grille de la simulation; les filaments étant bien résolus spatialement à l'échelle du pas de la grille, ce choix nous assure de rester proche du filament pendant le saut vers le prochain point. Une fois ce saut effectué, on recherche à nouveau la position réelle du cœur par la même méthode de minimisation que pour le premier point ; afin de garder une méthode bidimensionnelle on réalise cette minimisation dans le plan orthogonal au vortex construit à l'aide de la direction de la pseudo-vorticité. Une fois ce nouveau point obtenu par minimisation, on réitère la procédure de saut et de minimisation jusqu'à avoir parcouru tout le filament. En pratique, on se donne une condition pour arrêter la propagation le long du vortex. Le domaine de simulation étant périodique, tout filament est en fait fermé sur lui même : on arrête donc la propagation dès qu'un point trouvé par minimisation est assez proche du point de départ de l'algorithme, à savoir à une distance inférieure au pas de la propagation η . Une fois la propagation arrêtée, la position du vortex est enregistrée et on relance l'algorithme au pas de temps suivant. En réalisant ce suivi à tous les pas de temps de la simulation, on obtient pour le vortex i une courbe dans l'espace $\vec{r}_i(s,t)$ paramétrée par le temps t et l'abscisse curviligne s définie depuis l'origine du filament i sur l'une des faces du cube. On note que la longueur $L_i(t)$ d'un filament dépendant a priori du temps, l'abscisse curviligne est définie à l'instant t sur un intervalle $[0, L_i(t)]$ dépendant du temps. Un exemple de suivi des vortex peu après l'instant de la reconnexion est présenté sur la figure 4.4.



Fig. 4.4 Position des deux vortex obtenu par la méthode de suivi présentée dans le texte, peu après la reconnexion dans le modèle non-local.

En pratique, l'utilisation de l'algorithme de suivi présenté précédemment nécessite quelques précautions supplémentaires afin d'extraire de la simulation l'ensemble des positions $\vec{r}_i(s,t)$ des vortex. Tout d'abord, l'algorithme doit à chaque pas de temps trouver successivement la position de plusieurs vortex; cependant sans précaution suplémentaire par rapport à la procédure décrite, l'algorithme peut potentiellement détecter les vortex dans des ordres différents entre deux pas de temps. Si c'est le cas, le résultat obtenu est une courbe $\vec{r}_i(s,t)$ discontinue en la variable temporelle t, l'algorithme «sautant» d'un vortex à l'autre à un instant du suivi. Pour éviter ce problème, on traite le résultat brut de l'algorithme en vérifiant à chaque pas de temps que la courbe obtenue est suffisamment proche de la courbe obtenue au pas précédent. Une fois que les position enregistrées sont bien continues en temps, les courbes $\vec{r}_i(s,t)$ peuvent encore être discontinues en la variable d'espace s, puisque par périodicité un filament passe d'un bord du domaine au bord opposé. Pour régler ce problème, on «déplie» les filaments en translatant certaines portions de $\pm L$ dans les directions x, y ou z afin d'obtenir des filaments continus en espace à chaque instant t. Enfin la procédure de minimisation par méthode de Newton-Raphson présente en soi des faiblesses, notamment si les minima de densité à trouver sont trop larges ou le champ de densité présente des fluctuation importantes. C'est notamment le cas de la zone très proche du point de reconnexion autour de l'instant $t_{\rm rec}$, où la proximité des deux vortex induit des fluctuations de densité importantes. Ce problème limite la résolution temporelle de la résolution, puisque les pas de temps les plus proches de $t_{\rm rec}$ présentent des champs de densité qui mettent en défaut la méthode de minimisation utilisée : l'algorithme oscille alors autour du minimum recherché sans jamais le trouver. Pour cette raison nous nous somme limités à une sauvegarde tous les dix pas de temps au plus près de la reconnexion; on obtient ainsi une résolution suffisante pour étudier les vitesses d'approche des vortex tout en pouvant suivre les filaments à tout instant.

4.3 Analyse géométrique de la reconnexion

Le résultat de l'agorithme de suivi des vortex est donc un ensemble de courbes paramétrées $\vec{r}_i(s,t)$. La première étude que l'on souhaite mener à l'aide de ces courbes est une analyse de la géométrie des filaments au cours du temps. On présente dans cette partie l'analyse de propriétés globales, comme l'évolution de la longueur des filaments L(t) ou leur vitesse d'approche et d'éloignement, ainsi que des propriétés locales comme la propagation d'un paquet d'ondes localisé après la reconnexion.

4.3.1 Propriétés globales

4.3.1.1 Longueur totale

On commence par s'intéresser à la longueur totale des filaments au cours de la reconnexion, qui est la quantité la plus facilement mesurable après suivi des vortex. En effet par construction les filaments sont enregistrés à chaque instant comme une liste ordonnée de points sur le cœur du vortex, régulièrement espacés d'une distance η . Le pas de discrétisation η étant choisi suffisamment petit, la longueur du filament i à l'instant t est bien approximée par $L_i(t) = \eta n_i(t)$ où n_i est le nombre de points enregistrés sur le filament à cet instant. On somme alors la longueur de tous les vortex et de leurs images pour obtenir la longueur totale de filament $\ell(t)$. Le résultat de cette mesure est présenté sur la figure 4.5(a).



Fig. 4.5 (a) Longueur totale de l'ensemble des deux vortex (voir texte), dans les modèles local (tirets rouge) et non-local (trait plein bleu). (b) Distance entre les deux vortex, en local (rouge) et non local (en bleu). Encart : carré de la distance entre les deux vortex pour les deux modèles et leur ajustement linéaire respectif (en pointillés et tirets-pointillés). Les pentes des ajustements linéaires avant et après la reconnexion sont indiquées dans le texte.

On note dans les deux modèles que la longueur des vortex augmente légèrement avant la reconnexion (de l'ordre de 5%) avant de diminuer. Plus longtemps après la reconnexion, on observe dans le cas local une augmentation monotone de la longueur, contre un comportement plus complexe pour le cas non-local. Près de la fin de la simulation les vortex se rapprochent des bords du domaine et donc de leurs images, l'évolution de ℓ est donc affectée par les effets de la périodicité et n'est pas caractéristique du premier événement de reconnexion.

4.3.1.2 Vitesse d'approche et d'éloignement

Afin de poursuivre l'étude des aspects dynamiques de la reconnexion, on étudie l'évolution de la distance δ entre les deux vortex avant et après la reconnexion. On définit cette distance à chaque instant comme la distance minimale entre deux points sur les deux vortex étudiés. Une telle étude a déjà été menée de manière systématique à partir de différentes conditions initiales dans le cadre de l'équation de Gross-Pitaevskii locale [53], et il a été observé que cette distance se comporte comme $\delta \propto |t - t_{\rm rec}|^{1/2}$, avant comme après la reconnexion. Ce comportement en racine carrée peut être compris par une approche linéarisée de la reconnexion, justifiée près du cœur du vortex où la densité s'annule [54], ou par une analyse dimensionnelle [55]. Il a été de plus observé que la constante de proportionnalité de cette loi de puissance dépend de la condition initiale choisie pour les deux vortex, est n'est donc pas un aspect universel de la reconnexion. On représente sur la figure 4.5(b) l'évolution temporelle de la distance $\delta(t)$ entre les deux vortex, ainsi que son carré $\delta^2(t)$ en encart. On retrouve dans les deux modèles le comportement en racine carrée autour de l'instant de reconnexion $t_{\rm rec}$, avec des constantes de proportionnalités légèrement différentes : on trouve dans le cas local 0.23 avant reconnexion et 0.38 après reconnexion, contre 0.33 avant reconnexion et 0.81 après reconnexion dans le cas nonlocal. La condition initiale étant identique pour les deux modèles, on observe ici l'influence des rotons sur l'évolution temporelle de δ . On note de plus que les valeurs numériques observées ici sont différentes de celles de la référence [53] pour la reconnexion de vortex orthogonaux, ou les valeurs observées étaient 0.55 et 0.63. Rappelons cependant que ces constantes de proportionnalités dépendent de la condition initiale, or nous avons choisit ici deux vortex orthogonaux initialement séparés d'une longueur d'onde de rotons, contre une distance initiale de l'odre de six fois plus grande dans la référence [53]. Cette différence de condition initiale, ainsi qu'un système d'unités différent pourrait expliquer cette différence observée dans les constantes de proportionnalité. Cependant malgré cette différence, on remarque que l'on trouve dans les deux modèles un facteur plus grand après reconnexion qu'avant reconnexion, de manière similaire à [53].

4.3.2 Propagation d'un paquet d'onde localisé

Sur les visualisations telles que celles de la figure 4.2 on peut observer que la reconnexion crée une déformation des vortex, au départ localisée autour du point de reconnexion puis se propageant par la suite le long des filaments. Ces déformations propagatives le long des vortex sont appelées ondes de Kelvin et sont étudiées dans la littérature dans le cadre de l'équation de Gross-Pitaevskii locale [56–59]. On cherche dans cette partie à étudier la perturbation des filaments créée par la reconnexion dans nos simulations des modèles local et non-local. Pour cela on emprunte une approche géométrique dans le repère de Frenet local lié aux filaments, afin d'étudier la forme de cette perturbation et sa propagation.

4.3.2.1 Repère de Frenet et approximation d'induction locale (LIA)

Les quantités géométriques que l'on souhaite utiliser pour l'analyse du paquet d'onde émis par la reconnexion sont définies dans le repère de Frenet local lié au filament. Ce repère est défini à l'abscisse curviligne s par la base orthonormée directe $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ constituée des vecteurs tangent, normal et binormal respectivement. Ces vecteurs sont définis formellement à partir de la courbe paramétrée $\vec{r}(s,t)$ par les équations suivantes :

$$\vec{T}(s,t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s}, \quad \vec{N}(s,t) = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \vec{T}}{\partial s}, \quad \vec{B}(s,t) = \vec{T} \times \vec{N},$$
(4.2)

où on a simultanément définit la courbure $\kappa(s,t) = |\partial_s \vec{T}|$ qui quantifie l'écart local de la courbe $\vec{r}(s,t)$ à une ligne droite. On peut alors définir de manière similaire la torsion $\tau(s,t) = |\partial_s \vec{B}|$, qui quantifie localement l'écart à une courbe plane. La figure 4.6 résume graphiquement la construction de ce repère pour plus de clarté.



Fig. 4.6 Repère de Frenet local sur un exemple de courbe paramétrée. Le vecteur tangent \vec{T} oriente la courbe, de manière similaire à la vitesse sur la trajectoire d'un mobile. Le vecteur normal \vec{N} pointe vers le centre de courbure et définit la courbure κ . Le vecteur binormal \vec{B} est orthogonal au plan osculateur de la courbe, et définit la torsion τ .

L'utilisation du repère de Frenet ainsi que la courbure et la torsion est motivée par les prédictions analytiques [15,60] dans le cadre de l'approximation d'induction locale (LIA). Cette approximation valide dans le cas des faibles courbures consiste à supposer que le mouvement d'un point du vortex n'est induit que par son voisinage local le long du filament. Le déplacement du vortex est alors donné par $\partial_t \vec{r}(s,t) = A\kappa(s,t)\vec{B}(s,t)$ où A est une constante qui diverge logarithmiquement avec la taille du cœur du vortex. La vitesse d'un point du vortex est alors proportionnelle à sa courbure locale et dirigée dans le sens de la binormale. Dans le cadre de cette approximation, on montre [15] alors qu'il existe une solution aux équations du mouvement décrivant la propagation d'un soliton de courbure le long d'un filament rectiligne, se propageant à célérité constante et proportionnelle à la torsion du filament.

4.3.2.2 Caractérisation du paquet d'onde

On souhaite maintenant caractériser la propagation de la déformation des vortex créée par la reconnexion, en s'inspirant des prédictions de la LIA. La géométrie étant ici plus complexe que le cas d'un unique filament rectiligne perturbé, on emprunte une approche plus phénoménologique que le cadre de la référence [15]. On se restreint ici à l'étude sur le filament i = 1 seulement à l'issue de l'algorithme de suivi, i.e. celui dont l'origine se trouve sur le bord z = 0 du domaine de simulation.

La courbe $\vec{r}(s,t)$ permet de calculer le repère de Frenet local le long du filament, ainsi que la courbure locale $\kappa(s,t)$. On représente sur la figure 4.7 les cartes spatio-temporelles de cette courbure en tout point s du vortex et aux instants $t \ge t_{\rm rec}$ suivant la reconnexion. On observe dans le cas local comme non-local la propagation d'un paquet d'onde de courbure le long du filament. Cependant contrairement aux prédictions dans le cadre de la LIA présentées dans [15], ce paquet d'onde n'est pas un soliton : on note son étalement rapide au cours de la propagation. Dans le cas du modèle local, on étudie en plus deux valeurs particulières du potentiel chimique μ . Comme expliqué dans le chapitre 2, le potentiel chimique gouverne la célérité du son $c = \sqrt{2\mu}$ et la longueur de cohérence $\xi = 1/\sqrt{\mu}$. Dans notre situation la valeur $\mu = 128$ (représentée sur les figures 4.7(a-d)) permet d'obtenir la même vitesse du son et la même longueur de cohérence que dans le modèle non-local, mais avec un cœur de vortex plus fin – comme on peut le voir sur la figure 3.6. On étudie aussi la valeur $\mu = 21.345$ (représentée sur les figures 4.7(e-h)) qui permet d'obtenir un cœur de vortex de taille similaire au cas non-local, mais avec une célérité du son plus faible (c = 6.5 au lieu de c = 16). Comme on le verra par la suite, la propagation du maximum de courbure est relativement claire dans le cas local avec $\mu = 21.345$ et le cas non-local, mais est peu claire dans le cas local avec $\mu = 128$. Cela pourrait être dû à la finesse du cœur des vortex qui les rend alors plus rigides et augmente la vitesse de propagation des déformations, les rendant plus difficiles à suivre.



Fig. 4.7 (a,e,i) : cartes spatio-temporelles de la courbure locale $\kappa(s,t)$ d'un filament de vortex après reconnexion, dans le cas local pour g = 128 (a) et g = 21.345 (e) et dans le modèle non local (i). La position du maximum principal de courbure est suivie dans le temps. (b,f,j) : profils de courbure correspondants au maximum suivi à cinq instants régulièrement espacés durant sa propagation. Chaque profil est ajusté sur la condition initiale à reconnexion. Les instants représentés sont $t_1 = t_{rec}$, $t_2 = t_{rec} + 0.09$, $t_3 = t_{rec} + 0.17$, $t_4 = t_{rec} + 0.26$ et $t_4 = t_{rec} + 0.34$. On observe la croissance de maxima de courbure secondaires dans le cas non local (j). (c,g,k) : évolution temporelle des paramètres d'ajustement σ , γ et c, qui représentent la largeur, la hauteur et la vitesse de la courbure paquet d'onde respectivement, comme détaillé à l'équation (4.3). (d,h,l) : projections du vecteur vitesse du maximum local de courbure sur la base orthonormée de Frenet ($\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$)

Afin de quantifier plus précisément la forme du maximum de courbure au cours de sa propagation on cherche à mesurer sa célérité v(t), sa largeur $\sigma(t)$ et son amplitude $\gamma(t)$. Pour cela on propose un ajustement du maximum de courbure dans le référentiel où il est immobile :

$$\kappa \left(s - v(t)t, t\right) = \gamma(t) f\left(\frac{s - v(t)t}{\sigma(t)}\right),\tag{4.3}$$

où f(x) est une fonction test décrivant schématiquement un maximum, de largeur et d'amplitude de l'ordre de l'unité. On choisit typiquement $f(x) = \operatorname{sech}(x)$, qui vérifie les propriétés susmentionnées nécessaires à l'ajustement. De plus il s'agit de la forme du soliton de courbure dans le cadre de la LIA [15], où le paquet d'onde se propage à vitesse constante donnée par la torsion initiale $v(t) = 2\tau$ sans se déformer, i.e. $\gamma(t) = \sigma(t) = 1$. Le résultat de cet ajustement est présenté sur les figure 4.7(b,f,j). On observe en effet que la forme du maximum de courbure au cours de sa propagation peut être réajustée sur sa forme initiale juste après reconnexion par l'ajustement décrit à l'équation (4.3). Dans la suite, on se concentrera pour le modèle local sur la valeur $\mu = 21.345$ puisque le cas $\mu = 128$ ne permet pas un ajustement satisfaisant du maximum de courbure.

On note qu'en bonne approximation et en excluant les temps les plus proches de la reconnexion $(t - t_{\rm rec} < 0.1)$, la vitesse de propagation du maximum de courbure est plutôt constante, d'ordre $v(t) \approx 1$ dans le cas local (figure 4.7(g)) et d'ordre $v(t) \approx 2$ dans le cas local (figure 4.7(k)), comme suggéré par l'approche par la LIA. En comparaison, la vitesse du son dans le fluide est c = 16 dans notre système d'unités; le paquet d'ondes le long du filament se propage donc à des vitesses nettement inférieures à celle des ondes acoustiques, bien que dans le cas local à $\mu = 128$ la célérité du paquet d'onde puisse atteindre de telles valeurs. Contrairement à la LIA on observe cependant un étalement du paquet d'onde, i.e. le coefficient de largeur $\sigma(t)$ augmente et le coefficient d'amplitude $\gamma(t)$ diminue au cours du temps. Plus précisément, la décroissance de l'amplitude est décrite en bonne approximation par $\gamma(t) \propto 1/t$, ce qui n'est pas prédit par la LIA.

Afin d'interpréter ces comportements, on présente sur les figures 4.7(d,h,l) les projections sur la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ du vecteur vitesse locale du vortex $\partial_t \vec{r}(s_{\max}, t)$ au cours du temps, mesurées à la position s_{max} du maximum de courbure. On constate que la projection suivant la binormale \dot{B} est constante, comme supposé dans le cadre de la LIA. Cependant précisons que si la valeur de cette projection est indépendante du temps, elle ne peut être donnée comme dans la LIA par la seule valeur de la courbure, puisque celle-ci dépend du temps comme le montrent les figures 4.7(g,k). De manière intéressante, on note qu'aux temps $t - t_{\rm rec} < 0.1$ la contribution suivant la normale \vec{N} est non-négligeable par rapport aux autres projections. Il est montré dans la référence [60] que cette contribution est associée à une élongation des filaments de vortex, qu'on observe en effet sur la figure 4.5(a). Au cours de la propagation du paquet d'onde cette contribution devient négligeable. Enfin on observe que dans le cas local la contribution suivant la tangente \vec{T} est toujours négligeable, ce qui n'est pas le cas dans le modèle non-local. Cette différence pourrait être expliquée par la croissance de maxima secondaires de courbure dans le cas non-local, comme observé sur la figure 4.7(j). Notons que la projection de la vitesse du vortex sur la tangente est difficile à interpréter puisqu'elle n'induit pas de déplacement physique du filament, seulement une translation de l'abscisse curviligne s. Cette contribution devrait avoir une influence sur la direction locale de l'écoulement très proche du cœur du vortex, que nous n'avons pas étudiée ici. On peut commenter le cas local à $\mu = 128$ (figure 4.7(d)), où on observe que la projection sur la normale reste négligeable au cours de la propagation. Au contraire, la projection sur la tangente prend de grandes valeurs négatives, ce que nous ne savons pas expliquer à ce jour. Rappelons que dans ce cas le paquet d'onde se déplace et s'étale très rapidement (figures 4.7(a-c)), ce qui rend son suivi difficile. On remarque notamment des sauts dans les composantes suivant \vec{B} et \vec{N} qui corrsepondent aux instants ou le suivi du maximum est rendu ambigu par la forme du paquet d'onde et où l'algorithme utilisé passe subitement d'un maximum local à un autre.

4.4 Analyse énergétique de la reconnexion

En plus de l'analyse géométrique des vortex, on s'intéresse maintenant aux aspects énergétiques de la reconnexion. Rappelons que l'équation de Gross-Pitaevskii est obtenue dans un formalisme lagrangien dont l'action est indépendante du temps : l'énergie totale est donc conservée au long de la dynamique. On vérifie cette conservation numériquement en calculant l'énergie totale sur le domaine de simulation \mathcal{D} , dont on rappelle l'expression :

$$E = \int_{\mathcal{D}} |\nabla \Psi|^2 \,\mathrm{d}^3 r + \int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{2} \,|\Psi|^2 \left(G * |\Psi|^2 \right) - \mu \,|\Psi|^2 \right] \mathrm{d}^3 r, \tag{4.4}$$

où le premier terme correspond à l'énergie cinétique et le second terme à l'énergie potentielle. On observe que l'énergie totale est relativement constante et dépend du volume simulé et du modèle d'interaction. En 512³ on observe des valeurs de l'ordre de $E = -10^6$ dans le cas non-local et $E = -10^5$, avec des fluctuations relatives de l'ordre de $|\Delta E/E| \sim 10^{-12}$ dans les deux cas. En 256³ on observe des valeurs moyennes un ordre de grandeur plus faible dans les deux cas, avec des fluctuations relatives du même ordre de grandeur. Même si cette énergie totale est conservée au cours de la reconnexion, on peut la décomposer en parties qui dépendront a priori du temps, et dont l'évolution peut être intéressante dans la caractérisation du phénomène de reconnexion. On procède donc à plusieurs types de décompositions, notamment en contributions cinétique et potentielle comme à l'équation (3.22). On propose aussi une décomposition spatiale de l'énergie, entre la partie portée localement par le cœur des vortex et celle portée par le reste du fluide. Enfin on s'intéresse brièvement à la décomposition en énergie compressible et incompressible.

4.4.1 Bilans d'énergie locaux et globaux

On commence par décomposer l'énergie en une partie cinétique et une partie potentielle. Les densités respectives de ces énergies sont données par :

$$e_{\rm c} = |\nabla\Psi|^2, \quad e_{\rm p} = \frac{1}{2} |\Psi|^2 \left(G * |\Psi|^2\right) - \mu |\Psi|^2.$$
 (4.5)

On souhaite alors étudier la part de ces énergies portée par les vortex, et la comparer à l'énergie de la totalité du fluide. Pour cela on se propose d'intégrer les densités définies à l'équation (4.5) sur des volumes de contrôle contenant essentiellement le cœur des vortex. On choisit donc comme volumes de contrôle des tubes de rayon constant centrés sur les filaments obtenus par l'algorithme de suivi décrit dans la partie 4.2. Le rayon de ces tubes doit être assez grand pour contenir un nombre significatif de points de la grille de simulation à chaque instant, mais rester assez faible pour être représentatif de la géométrie du vortex. On choisit alors comme rayon $r_0 = 0.25$, ce qui correspond à un diamètre de huit points de grille. On intègre les densités e_c et e_p sur les points de grille contenus dans ces volumes à chaque instant afin d'estimer l'énergie cinétique et potentielle portée par les vortex. On compare ce résultat dans les cas local et non-local à l'intégrale des densités d'énergie sur le domaine total. Notons que si l'énergie totale sur le domaine (équation (3.22)) est conservée, ce n'est a priori pas le cas de l'énergie cinétique totale ou l'énergie potentielle totale, et a fortiori pas non plus des énergies portées localement par les vortex. On présente les résultats de ces estimations sur la figure 4.8.

On note que le profil temporel de l'énergie cinétique portée par les vortex partage dans le cas non-local (figures 4.8(a,b)) des similarités avec le profil temporel de la longueur des filaments présenté sur la figure 4.5(a). En effet on observe une augmentation de l'énergie cinétique jusqu'à un pic au moment de l'instant de reconnexion $t_{\rm rec}$, puis une diminuation vers un plateau avant de réaugmenter vers la fin de la simulation. À la résolution 265³, cette augmentation finale est plus marquée qu'en 512³, ce qui laisse suggérer qu'il s'agit d'un effet de taille finie du domaine de simulation. En effet après un premier événement de reconnexion les vortex s'éloignent l'un de l'autre en direction des bords du domaines où ils sont susceptibles d'interagir avec leurs images par périodicité. Cet effet pourrait expliquer une variation différente de l'énergie comme de la longueur de filament en fin de simulation entre deux tailles de domaine différentes.

Si l'on se concentre sur la simulation en 256^3 sur la figure 4.8(a), on note que la variation de l'énergie cinétique des vortex représente une part de l'énergie totale E du même ordre de



Fig. 4.8 Énergies mesurées en intégrant les densités d'énergie cinétique (rouge) et potentielle (bleu) de l'équation (4.5), sur les volumes de contrôle entourant le cœur des vortex d'une part (trait plein) et sur tout le domaine d'autre part (pointillés). La mesure est réalisée dans le modèle non-local (haut) et local (bas), aux résolution de 256³ (gauche) et 512³ (droite). On trace dans chaque cas la variation d'énergie $\Delta E_{c,p}$ par rapport à la condition initiale, rapportée à l'énergie totale E qui est un invariant de la dynamique.

grandeur que celle de la variation de l'énergie cinétique totale. Ce résultat suggère que la variation d'énergie cinétique du système est dominée par la variation d'énergie cinétique des vortex. De plus, la ressemblence schématique entre l'énergie cinétique des vortex et leur longueur suggère que cette variation d'énergie cinétique est essentiellement due à l'allongement des filaments au cours de la reconnexion. Ce résultat est précisé par la mesure de la quantité de son émise durant la reconnexion dans la partie 4.4.2, qui suggère que la quantité d'énergie émise acoustiquement pendant la reconnexion est très faible devant l'énergie cinétique totale.

Pour la simulation en 512³ on note sur la figure 4.8(b) un aspect similaire de l'énergie cinétique des vortex. Les variations relatives d'énergie prennent des valeurs de l'ordre de 10^{-4} contre 10^{-3} en 256³. Cette différence peut s'expliquer simplement dans l'hypothèse où l'énergie cinétique est en effet liée à la longueur des vortex. En effet la variation d'énergie cinétique est alors proportionnelle à la taille du domaine alors que l'énergie totale conservée est proportionnelle au volume du domaine. La variation rapportée à l'énergie totale est alors plus faible dans un domaine plus grand. Cependant l'énergie cinétique totale présente dans le modèle local comme non-local de fortes oscillations à basse fréquence. Une mesure de la fréquence de ces oscillations donne $f \approx 1$, ce qui correspond d'après la relation de dispersion présentée dans le chapitre 3 à une longueur d'onde $\lambda \approx 16$ soit la moitié de la taille physique du domaine en 512³. L'excitation de cette longueur d'onde $\lambda \approx L/2$ pourrait être expliquée par le fait que la condition initiale choisie est constituée d'un réseau de quatre vortex images espacés de L/2. En choisissant une telle condition initiale, on crée donc une modulation de la densité de longueur d'onde L/2, qui est ensuite susceptible de se propager dans le système au cours de son évolution. Cette explication est soutenue par le fait que les oscillations de l'énergie débutent dès le début de la simulation, avant même la reconnexion. On note par ailleurs en examinant plus précisément l'évolution de l'énergie cinétique totale en 256^3 (figures 4.8(a,c)) la présence d'oscillations de faible amplitude à une fréquence $f \approx 0.5$, ce qui correspond à une longueur d'onde $\lambda \approx 8$ soit à nouveau la moitié de la taille physique du domaine. Cependant nous ne savons pas à ce jour expliquer pourquoi l'amplitude de ces oscillations est beaucoup plus grande en 512^3 qu'en 256^3 , même si on rappelle que les variations globales observées en 512^3 sont un ordre de grandeur en dessous de celles en 256^3 .

Dans le modèle local (figures 4.8(c,d)) on note que l'évolution de l'énergie cinétique des vortex est moins clairement liée à celle de leur longueur, représentée sur la figure 4.5(a). On constate cependant que le sens de l'évolution reste le même que dans le cas non-local, avec une augmentation de l'énergie cinétique plus forte avant l'instant de reconnexion. Notons aussi qu'on observe la même oscillation à basse fréquence des énergies totales dans la simulation en 512^3 (figure 4.8(d)), alors que leur somme reste conservée. Enfin dans la simulation en 256^3 (figure 4.8(c)) l'augmentation importante de l'énergie cinétique des vortex en toute fin de simulation correspond à un second événement de reconnexion dû aux effets de périodicité : les vortex en s'éloignant finissent par s'approcher des bords du domaine simulé et se reconnectent avec leurs images.

Enfin on peut commenter brièvement l'évolution de l'énergie potentielle (en bleu). On remarque que les courbes d'énergie potentielle totale (en pointillés) sont exactement l'opposé des courbes d'énergie cinétique totale, ce qui traduit le fait que leur somme est conservée au cours de la dynamique. L'énergie potentielle portée localement par les vortex a une évolution schématiquement opposée à celle de l'énergie cinétique locale. On peut interpréter ce résultat en rappelant que la densité d'énergie potentielle définie à l'équation (4.5) est d'autant plus grande que la densité du fluide est élevée. Le cœur des vortex étant le lieu de faibles densités, leur allongement est associé à une diminution de l'énergie potentielle.

4.4.2 Émission de son

Nous avons brièvement étudié l'émission de son dans le fluide au cours de la reconnexion. Une telle étude a été menée dans la littérature [37,61] dans le cas de l'équation de Gross-Pitaevskii locale, qu'on reproduit ici dans notre modèle non-local. On calcule l'énergie cinétique totale du fluide à chaque instant, qu'on peut exprimer comme la norme au carré du vecteur $\sqrt{\rho u}$. La décomposition de Helmhlotz de ce vecteur en la somme d'un champ de divergence nulle et un champ de rotationnel nul permet de décomposer l'énergie cinétique totale en une partie due à un écoulement incompressible $E_{c,comp}$ et une partie due à un écoulement compressible $E_{c,incomp}$ respectivement. Dans les simulations numériques présentées ici, on observe pour le ratio $E_{c,comp}/E_{c,incomp}$ moyenné sur la durée de la simulation des valeurs de 0.045 dans le cas local et 0.073 dans le cas non-local. Bien que plus de son soit généré dans le cas non-local, ces résultats montrent que la majorité de l'énergie cinétique est portée par la partie incompressible de l'écoulement.

4.5 Perspectives

Nous avons au chapitre précédent proposé et calibré un modèle d'interaction non-locale pour l'équation de Gross-Pitaevskii, afin de reproduire le minimum roton de la relation de dispersion expérimentale de l'hélium liquide. Nous avons vu que la calibration de ce modèle sur la relation de dispersion seule était susceptible de mener à de fortes instabilités de modulation, et que la naissance de ces instabilités était fortement liée à l'énergie du minimum roton. Nous avons pu obtenir des solutions stables vis-à-vis de la modulation d'amplitude en relevant arbitrairement l'énergie des rotons et la vitesse du son, ce qui a permis la réalisation de DNS de l'équation de Gross-Pitaevskii non-locale et leur analyse telle que présentée dans ce chapitre.

L'approche que nous avons suivie ici est cependant complètement empirique, au sens où nous avons trouvé une condition suffisante à l'absence d'instabilité sans avoir étudié le mécanisme de cette instabilité et a fortiori sans pouvoir en faire de prédiction. Dans une volonté de modéliser plus fidèlement les interactions au sein de l'hélium liquide, il nous semble important de préciser le mécanisme de ces instabilités et notamment le rôle que joue la non-linéarité de l'équation de Gross-Pitaevskii dans ce mécanisme. Pour cela on peut envisager une analyse de la répartition de l'énergie dans le plan (k, ω) au cours d'une dynamique pleinement non-linéaire, par exemple en calculant des spectres spatio-temporels d'énergie [59,62]. En effet il est possible que la non-linéarité injecte de l'énergie loin de la relation de dispersion $\omega(k)$ et notamment proche de $\omega = 0$ à k fini, ce qui pourrait expliquer l'apparition de modulations stationnaires de la densité, comme observées lors des événements de cristallisation. Parallèlement à une telle étude, on peut envisager de changer la forme de la non-linéarité dans l'équation de Gross-Pitaevskii, comme proposé dans [38,39] afin de mieux représenter les interactions dans une phase condensée telle que l'hélium liquide. En effet le développement du terme d'interaction en puissances de la densité $\rho = |\Psi|^2$ revient à établir une équation d'état pour le fluide décrit. Choisir une équation d'état représentative d'un liquide plutôt que d'un gaz pourrait permettre de pénaliser les fortes compressibilités et donc potentiellement de diminuer les instabilités de modulation de la densité.

Seconde partie

Modélisation aléatoire de la structure spatio-temporelle de la turbulence homogène et isotrope

1 Introduction

La *turbulence* désigne l'écoulement d'un fluide caractérisé par un aspect désordonné et imprévisible. Plus formellement, on peut définir la turbulence comme le régime des écoulements dominés par les effets inertiels, dont le caractère non-linéaire engendre des structures tourbillonaires sur une large gamme d'échelles [24, 63, 64]. La turbulence atmosphérique par exemple met en jeu des échelles allant du millier de kilomètres au centimètre [65]. La présence de telles structures rend chaotique l'évolution spatiale et temporelle des grandeurs locales de l'écoulement comme le champ de vitesse et le champ de pression. Cet aspect chaotique, ainsi que l'implication d'une vaste gamme d'échelles font de la turbulence un problème complexe, dont on n'a aujourd'hui encore qu'une vision incomplète. Ce régime d'écoulements est pourtant impliqué dans de nombreux problèmes, de l'aérodynamique [66] aux écoulements de fluides corporels [67] en passant par la dispersion de particules dans l'atmosphère [68]. La compréhension du phénomène de la turbulence, et plus précisément de sa structure spatio-temporelle est donc le sujet d'un intérêt scientifique particulièrement important, pour ses retombées autant fondamentales qu'appliquées.

Léonard De Vinci fut à la fin du XV^{ème} siècle un des premiers à décrire la turbulence, principalement à travers des dessins remarquablement précis des tourbillons qui la constituent. Quatre siècles plus tard Leonhard Euler met en équations les écoulements parfaits et incompressibles; la notion formelle de viscosité y est ajoutée peu après par le mathématicien et ingénieur Henri Navier et le physicien Georges Gabriel Stokes, donnant alors naissance aux équations qui décrivent toujours aujourd'hui la dynamique des fluides. En 1883, Osborne Reynolds établit un critère d'apparition de la turbulence dans un écoulement, basé sur la construction d'un paramètre sans dimension qui porte désormais son nom. En 1922 le mathématicien Lewis Fry Richardson explique qualitativement le mécanisme de transfert de l'énergie vers les petites échelles, donnant son nom à la cascade turbulente. Face au comportement chaotique de la turbulence, Reynolds en cherche une description probabiliste, suivi à la fin des années 1930 par Frederick Winslow Taylor. C'est alors Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov qui propose en 1941 [69,70] la théorie probabiliste qui deviendra la base de la phénoménologie moderne de la turbulence. L'étude du phénomène d'intermittence [24] vient ensuite compléter et détailler cette première description probabiliste.

La problématique de cette seconde partie de ma thèse se place dans le cadre de cette phénoménologie. La littérature traite extensiblement la structure spatiale [24,69,70] de la turbulence, mais beaucoup moins sa structure temporelle [71–73]. On se propose ici de coupler ces deux approches et de modéliser la structure spatio-temporelle de la turbulence homogène et isotrope à l'aide de champs aléatoires construit par comparaison avec une analyse statistique de données de référence. On commence par une description de la phénoménologie existante pour la structure spatiale de la turbulence dans le chapitre 2. Le chapitre 3 présente une analyse statistique détaillée de données issues d'une Simulation Numérique Directe (DNS) des équations de Navier-Stokes. Cette analyse propose une généralisation au cadre spatio-temporel des outils standards de l'analyse statistique de données de turbulence. Enfin dans le chapitre 4 on développe une proposition de champ aléatoire dont les propriétés statistiques reproduisent les résultats de cette analyse spatio-temporelle de la DNS.

2 Phénoménologie de la turbulence

2.1 Nécessité d'une approche phénoménologique

La turbulence, en tant que régime particulier des écoulements fluides, est décrite par les équations de Navier-Stokes. Dans leur forme adimensionnée et pour un fluide incompressible :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{u} = -\vec{\nabla}P + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{u} + \vec{f} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases},$$
(2.1)

où \vec{u} et P sont les champs de vitesse eulérienne et de pression respectivement, et \vec{f} le forçage extérieur exercé sur le fluide. Le nombre de Reynolds Re apparaît comme l'unique paramètre libre du problème, et est donc la seule grandeur qui différencie la physique des différents écoulements. Le régime des écoulements turbulents pleinement développés est celui des grands nombres de Reynolds, typiquement supérieurs à quelques milliers.

Les équations (2.1) sont à l'heure actuelle la description la plus précise que l'on ait de la turbulence, au sens où elles contiennent toute la physique des écoulements Newtoniens incompressibles connue à ce jour. Malheureusement, ce contenu physique reste en grande partie inaccessible dans cette formulation du problème. En effet il n'existe aujourd'hui aucune résolution mathématique satisfaisante des équations de Navier-Stokes, à cause de leur caractère non-linéaire et non-local. De plus cette formulation reste encore trop éloignée de la réalité expérimentale, puisque l'accès à l'intégralité du champ $\vec{u}(x, y, z, t)$ à toutes les échelles impliquée par la turbulence est encore difficile à réaliser expérimentalement [74, 75]. Enfin numériquement la complexité des équations (2.1) rend leur résolution extrêmement exigente en terme de ressources informatiques. En effet même si les Simulations Numériques Directes des équations de Navier-Stokes offrent l'accès au champ de vitesse complet, les meilleures de ces simulations restent en arrière des expériences en terme de nombre de Reynolds, de taille et de durée de la mesure.

Pour ces raisons, les approches les plus fructueuses de la turbulence depuis le vingtième siècle sont basées sur une description plus phénoménologique que par les équations de Navier-Stokes. On doit à Kolmogorov en 1941 [69,70] le développement de la phénoménologie moderne de turbulence, basée sur une description probabiliste des signaux de vitesse. Cette phénoménologie, qu'on notera K41 par la suite, sera le cadre de l'analyse et de la modélisation spatio-temporelle de la turbulence qu'on se propose de développer dans cette thèse. On commence dans la partie 2.2 par présenter le traitement probabiliste des signaux de vitesse, en lien avec leur acquisition expérimentale. Dans la partie 2.3 on présente la phénoménologie K41 de la turbulence, pour enfin la compléter dans la partie 2.4 par la phénoménologie de l'intermittence.

2.2 Description probabiliste des signaux de vitesse

La phénoménologie K41 se base sur la description probabiliste des signaux de vitesse turbulente. Cette description découle naturellement de l'acquisition expérimentale des signaux de vitesse, qu'on décrit ici.

2.2.1 Acquisition expérimentale et hypothèse de Taylor

Un signal de vitesse turbulente est typiquement acquis expérimentalement en plaçant une sonde telle qu'un fil chaud ou un tube Pitot en un point fixe de l'écoulement, et en mesurant la vitesse au cours du temps en ce point fixe M = (x, y, z) dans le référentiel du laboratoire. Le résultat de la mesure est alors un signal temporel u(M, t), dont il reste à donner une interprétation.

Dans le cas d'un écoulement de grille dans une soufflerie, le champ de vitesse se décompose comme la somme d'un écoulement moyen U et de fluctuations de vitesse u': pour un écoulement dans la direction x on écrira alors $\vec{u}(M,t) = U\vec{e_x} + \vec{u}'(M,t)$. Dans le cas où l'écart-type des fluctuations est faible devant l'écoulement moyen $\sqrt{\langle u'^2 \rangle}/U \ll 1$, on peut montrer [24] qu'un fil chaud fixe dans cet écoulement ne sera sensible qu'à la composante u_x de la vitesse dans la direction de l'écoulement moyen. Le signal temporel mesuré sera donc $u(M,t) = U + u'_x(M,t)$ où M est le point choisi pour la mesure, fixe au cours du temps.

La description probabiliste de ces signaux de vitesse se base sur les variations *spatiales* des fluctuations de vitesses plutôt que sur les variations temporelles. En effet toujours dans le cadre de fluctuations faibles devant l'écoulement moyen on fait l'hypothèse dite de Taylor, selon laquelle les fluctuations de la vitesse sont advectées en bloc par l'écoulement moyen. En d'autre termes, les variations temporelles du signal u(M,t) sont essentiellement dues aux variations *spatiales* de la vitesse $\vec{u}^*(M^*,t)$ dans le référentiel de l'écoulement moyen, où $M^* = (x - Ut, y, z)$ est la position du point de mesure dans le référentiel lié à l'écoulement moyen. En résumé, l'hypothèse de Taylor permet d'interpréter le signal temporel u(M,t) comme un signal spatial $u_x^*(x^*)$ dans le référentiel lié à l'écoulement moyen en signal spatial $u_x^*(x^*)$ dans le référentiel lié à l'écoulement moyen.

$$u(M,t) = U + u'_{x}(M,t) = U + u^{*}_{x}(M^{*},t) = U + u^{*}_{x}(x^{*}), \qquad (2.2)$$

où on omet dans u_x^* la dépendance en y^* et z^* , fixés lors de la mesure, ainsi que la dépendance explicite en t selon l'hypothèse de Taylor, qui revient donc à supposer $|\partial_t u'_x| \ll U |\partial_x u'_x|$. On a alors enregistré un signal *longitudinal* de vitesse, dans le sens où la composante de la vitesse fluctuante mesurée est parallèle à la direction des variations spatiales enregistrées. Un exemple de signal longitudinal acquis par cette méthode est présenté sur la figure 2.1.



Fig. 2.1 Exemple de signal de vitesse longitudinale acquis par un fil chaud, représenté ici en unités arbitraires (fréquence d'échantillonnage de 5 kHz). Figure issue de [24].

2.2.2 Hypothèses et outils statistiques

A première vue, les signaux expérimentaux de vitesse turbulente tels que celui représenté sur la figure 2.1 ont un aspect fortement imprédictible. On retrouve cet aspect dans les résultats de simulations des équations de Navier-Stokes, ce qui traduit leur nature chaotique [24]. Malgré cet aspect chaotique, les signaux de vitesse conservent une forme de prédictibilité à travers leurs propriétés statistiques. Pour cette raison, la description statistique de ces signaux est à la base de la phénoménologie moderne de la turbulence. On considère en effet chaque signal de vitesse comme une réalisation d'un processus aléatoire, dont les propriétés statistiques présentent un certain degré d'universalité : ces propriétés sont alors reproductibles expérimentalement et numériquement et offrent des informations précises sur la structure des solutions des équations de Navier-Stokes.

On se place dans cette thèse dans le cadre de plusieurs hyptohèses statistiques. On considère le cas de la turbulence *homogène* et *isotrope*, c'est à dire que les lois de probabilité de \vec{u}' sont invariantes par translation et rotation respectivement. Ces hypothèses simplificatrices permettent en pratique de moyenner les statistiques de la vitesse sur les positions dans l'espace du point de mesure (par homogénéité) ainsi que sur les composantes de la vitesse (par isotropie).

Le premier outil que l'on utilise pour sonder la structure des signaux de vitesse est la corrélation du champ de vitesse entre deux points $C_{ij}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathbb{E}[u_i(\vec{x})u_j(\vec{y})]$. Dans le cadre de la turbulence homogène et isotrope, on montre [76] que le tenseur $C_{ij}(\vec{x}, \vec{y})$ est entièrement déterminé par une fonction f(r) de la distance $r = |\vec{r}| = |\vec{x} - \vec{y}|$:

$$C_{ij}(r) = [f(r) - g(r)] \frac{r_i r_j}{r^2} + g(r)\delta_{ij},$$
(2.3)

où
$$g(r) = f(r) + \frac{r}{2} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}.$$
 (2.4)

La fonction $f(r) = \mathbb{E} [u_x(x+r, y, z, t)u_x(x, y, z, t)]$ représente alors la corrélation de la composante longitudinale de la vitesse, et la fonction $g(r) = \mathbb{E} [u_y(x+r, y, z, t)u_y(x, y, z, t)]$ la corrélation de la composante transverse. Dans un cadre homogène et isotrope, les fonctions f(r) et g(r) dépendent uniquement de la distance r, et pas du point de mesure de la vitesse ou de la composante mesurée.

On étudie aussi les statistiques de l'incrément longitudinal de la vitesse à l'échelle $\ell : \delta_{\ell} u_x = u_x(x+\ell, y, z, t) - u_x(x, y, z, t)$. Pour caractériser leur distribution les quantités statistiques d'intérêt sont alors les moments d'ordre $q : S_q(\ell) = \mathbb{E} [\delta_{\ell} u_x^q]$. La fonction $S_q(\ell)$ est aussi appelée fonction de structure d'ordre q du champ de vitesse u(x). Le comportement en fonction de ℓ et de q des fonctions de structure constitue le coeur de la phénoménologie moderne de la turbulence. Dans un cadre homogène et isotrope, les fonctions $S_q(\ell)$ dépendent uniquement de ℓ , et pas du point de mesure de l'incrément ou de la composante mesurée.

2.3 Phénoménologie K41 de la turbulence homogène et isotrope

Les travaux de Kolmogorov en 1941 [69,70] ont posé les bases de la phénoménologie actuelle de la turbulence. On décrit ici ses prédictions initiales sur le comportement des fonctions de structure. La description du phénomène d'intermittence a fait par la suite l'objet de corrections qui sont décrites dans la partie 2.4.

Dans le cadre de cette phénoménologie, on fait trois hypothèses. Pour des échelles suffisamment petites et suffisamment loin des couches limites de l'écoulement, on suppose que :

- H1 : l'écoulement est statistiquement homogène et isotrope.
- H2 : l'écoulement est auto-similaire, i.e. il existe un exposant $H \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \lambda \ge 0$, $S_q(\lambda \ell) = \lambda^{qH} S_q(\ell).$

— H3 : le taux de dissipation d'énergie par unité de masse ϵ admet une limite finie quand la viscosité tend vers zéro.

On entend par «échelles assez petites» des échelles négligeables devant l'échelle L caractéristique du forçage, appelée échelle d'injection de l'énergie ou simplement «grande échelle». Les deux dernières hypothèses sont justifiées expérimentalement. En effet, on observe [24] pour la fonction de structure d'ordre 2 un comportement en loi de puissance $S_2(\ell) \propto \ell^{\zeta_2}$ avec un exposant $\zeta_2 \sim \frac{2}{3}$. De plus les mesures de ϵ pour des nombres de Reynolds de plus en plus grands semblent converger vers une limite finie du taux de dissipation d'énergie [77–79].

Sous ces hypothèses, on peut alors montrer par analyse dimensionnelle que $H = \frac{1}{3}$ est la seule valeur admissible. En particulier on a, dans la limite de viscosité nulle et pour des échelles assez petites :

$$S_2(\ell) = C\epsilon^{2/3}\ell^{2/3},\tag{2.5}$$

où ${\cal C}$ est une constante sans dimension que Kolmogorov prédit initialement comme étant universelle.

Plus généralement on peut alors montrer que les fonctions de structures se comportent comme des lois de puissance dans la limite de viscosité nulle et pour des échelles petites devant L:

$$S_q(\ell) \propto \ell^{\zeta_q}, \quad \text{avec} \quad \zeta_q = \frac{q}{3}.$$
 (2.6)

L'ordre trois est un cas très particulier de cette loi, puisqu'on peut montrer exactement à partir des équation de Navier-Stokes et sous les hypothèses d'homogénéité, isotropie et incompressibilité l'expression de $S_3(\ell)$ dans la limite de viscosité nulle et pour $\ell \ll L$:

$$S_3(\ell) = -\frac{4}{5}\epsilon\ell. \tag{2.7}$$

Cette loi, appelée communément «loi des quatre-cinquièmes» est la seule loi de la phénoménologie de la turbulence qui soit dérivée exactement des équations de Navier-Stokes. De ce fait, elle doit être reproduite par toute théorie ou modélisation de la turbulence. Expérimentalement, la loi des quatre-cinquièmes n'est pas vérifiable aussi aisément que celle des deux-tiers à l'ordre deux, principalement à cause des problèmes de convergence des moments d'ordre impair et aux effets de nombre de Reynolds finis [80].

Expérimentalement, le régime de viscosité nulle n'est en effet jamais atteint rigoureusement. Les lois asymptotiques (2.5) et (2.7) sont alors vérifiées de manière approchée dans un régime d'échelles particulier. En effet on peut montrer sous les hypothèses H1, H2 et H3 et par analyse dimensionnelle, que les effets de viscosité deviennent dominant aux échelles de l'ordre de l'échelle de Kolmogorov $\eta = \nu^{3/4} \epsilon^{-1/4}$. En dessous de cette échelle le champ de vitesse est lisse et l'hypothèse H2 n'est plus valide. A viscosité finie, les lois de la phénoménologie K41 ne sont donc observables que pour des échelles $\eta \ll \ell \ll L$.

La phénoménologie K41 organise donc les écoulements turbulents en trois régimes définis par leurs échelles typiques. Aux grandes échelles, supérieures ou de l'ordre de L l'écoulement dépend fortement des conditions de forçage ainsi que de la géométrie du système étudié. Le champ de vitesse est alors décorrélé, et plus généralement les statistiques de la vitesse et des incréments sont souvent fortement anisotropes et inhomogènes, et ne présentent pas de caractère universel. Dans le régime dit *inertiel* des échelles $\eta \ll \ell \ll L$, les hypothèses de K41 s'appliquent et les lois (2.5) et (2.7) sont observables expérimentalement et numériquement. Enfin aux échelles inférieures à l'échelle de Kolmogorov η on parle de régime *dissipatif*, dans lequel la viscosité rend le champ de vitesse lisse.

2.4 Intermittence

Expérimentalement, si les lois phénoménologiques (2.5) et (2.7) sont observées de manière satisfaisante [24], ce n'est pas le cas pour les lois (2.6) aux ordres supérieurs. En effet on observe expérimentalement [24] des lois d'échelle $S_q(\ell) \propto \ell^{\zeta_q}$, mais dont les exposants dévient de la prédiction K41 $\zeta_q = \frac{q}{3}$, d'autant plus largement que l'ordre q est grand. Cet écart est intimement lié à la nature intermitente de la turbulence, dont l'étude a permis de proposer des corrections à la phénoménologie K41.

Le phénomène d'intermittence correspond à la tendance des écoulements turbulents à dissiper l'énergie par bouffées intermittentes. Un exemple de mesure temporelle des fluctuations du taux de dissipation est représenté sur la figure 2.2(b): on voit que l'énergie est fortement dissipée lors d'événements courts et intenses. Ces événements correspondent pour le champ de vitesse à des incréments élevés sur des échelles très faibles. Statistiquement, ces événements rares se traduisent par des valeurs plus élevées dans les queues des Fonctions de Densité de Probbilité (PDF) des incréments de la vitesse. Un exemple de mesure des PDF des incréments est représenté sur la figure 2.2(a): on observe un comportement gaussien aux grandes échelles où la vitesse est décorrélée, et des queues de plus en plus importantes pour les distributions aux petites échelles où les bouffées intermittentes ont lieu.



Fig. 2.2 (a) : PDF des incréments de vitesse à différentes échelles ℓ dans l'expérience de Modane [81]. Les courbes sont remontées arbitrairement pour plus de lisibilité et sont d'autant plus hautes que l'échelle de l'incrément est petite. Les points représentent les mesures expérimentales et les traits pleins les prédictions théoriques, d'après [82] dont est issue la figure. (b) : Fluctuations du taux de dissipation d'énergie ϵ au cours du temps, mesurée par un fil chaud à $R_{\lambda} \sim 1500$. Figure issue de [83].

Quantitativement, cet effet est mesuré par les moments d'ordre q > 2, typiquement l'ordre quatre. On définit la «flatness» des incréments $\mathcal{F}(\ell) = S_4(\ell)/S_2^{-2}(\ell)$. Dans le régime inertiel, la flatness présente une loi de puissance d'exposant $\zeta_4 - 2\zeta_2$. Dans le cadre d'un *spectre* des exposants linéaire, i.e. $\zeta_q \propto q$ comme la prédiction K41 de l'équation (2.6), l'exposant de la flatness est nul : $\mathcal{F}(\ell)$ est alors indépendant de l'échelle ℓ . Or l'observation des PDF des incréments montre des évènements forts d'autant plus fréquents que l'échelle est faible : la flatness observée est en réalité plus grande aux petites échelles qu'aux grandes échelles. Plus explicitement, on observe une loi de puissance d'exposant négatif pour la flatness, ce qui suggère une croissance plus lente pour le spectre des exposants ζ_q qu'une croissance linéaire suggérée par K41. En effet les spectres observés expérimentalement exhibent un comportement non-linéaire en q avec une concavité vers le bas comme le montre la figure 2.3.

De nombreux modèles décrivent le comportement non-linéaire du spectre des ζ_q [24, 82]. On peut notamment citer le modèle log-normal [84], basé sur une modélisation du taux de dissipation local par une loi log-normale. Ce modèle prédit un spectre quadratique des ζ_q :



Fig. 2.3 Comparaison des prédictions issues de différents modèles pour l'intermittence. En trait plein, le modèle log-normal dont le spectre quadratique des ζ_q est donné à l'équation (2.8). En pointillés, le modèle log-Poisson ou modèle de She-Lévêque dont les spectre prédit est donné à l'équation (2.9). En tirets le modèle β qui prédit un spectre affine des ζ_q , non présenté ici. Les symboles représentent différents jeux de mesures expérimentales. Ces jeux de données ainsi que le modèle β sont décrits plus en détail dans [24], d'où la figure est issue.

$$\zeta_q = c_1 q - c_2 \frac{q^2}{2}, \tag{2.8}$$

où c_1 et c_2 sont des paramètres du modèle. L'ajustement de ce modèle sur la loi des quatrecinquièmes d'une part et sur les observations expérimentales pour $S_4(\ell)$ d'autre part permettent de choisir $c_2 = 0.025$ et $c_1 = 1/3 + 3c_2/2 \approx 0.37$ [82]. Le coefficient c_2 est alors appelé *coefficient* d'intermittence et quantifie l'écart à la prédiction de K41. Le modèle log-normal est un modèle simple qui donne un bon accord avec les données expérimentales pour les moments de bas ordre, typiquement $q \leq 6$. En comparaison, le modèle de She-Lévêque [85,86] modélise la distribution du taux de dissipation local par une loi log-Poisson et prédit une forme plus complexe pour le spectre des ζ_q :

$$\zeta_q = \frac{q}{9} + 2\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{q/3}\right].$$
(2.9)

Il reste cependant difficile de différencier les statistiques log-normale et log-Poisson pour la dissipation, surtout aux bas ordres [82]. Pour cette raison on interprètera dans cette thèse les résultats obtenus pour l'intermittence dans le cadre simple du modèle log-normal. 3

Analyse d'une DNS

3.1 Simulation Numérique Directe des équations de Navier-Stokes

3.1.1 Motivation

La phénoménologie présentée au chapitre 2 a été largement étudiée dans le cas purement spatial [24], mais relativement peu dans le cas purement temporel [71–73]. Le but de l'analyse présentée dans ce chapitre est de concilier ces deux cadres en réalisant une étude *spatio-temporelle* des propriétés statistiques de la turbulence homogène et isotrope. Le premier temps de notre démarche consiste donc à choisir un jeu de données de référence, c'est-à-dire dont on pourra justifier la fidélité à la réalité de la turbulence. Les propriétés issues de l'analyse statistique nous serviront ensuite de cahier des charges pour la modélisation présentée au chapitre 4.

Le choix de données de référence est à faire essentiellement entre deux possibilités : les données issues de l'expérience ou de la simulation numérique. Expérimentalement, il reste difficile de construire un tel jeu de données, particulièrement dans le cadre statistiquement homogène et isotrope. Pour cette raison on se tournera vers les résultats de simulations numériques, qui présentent l'avantage d'être plus précis et plus complets. On pourra en effet baser notre étude sur l'exploitation d'un champ de vitesse complet avec une grande résolution spatiale et temporelle.

3.1.2 Simulation et données choisies

Les données que nous avons choisi d'analyser sont issues de la base de donnée de turbulence homogène et isotrope forcée mise à disposition de la communauté par l'Université Johns Hopkins [87].

Cette base de données contient les résultats d'une Simulation Numérique Directe (DNS) des équations de Navier-Stokes, à savoir la sauvegarde du champ de vitesse complet $\vec{u}(x, y, z, t)$ sur une grille de taille 1024³ pour 5028 pas de temps. La résolution spatiale de la DNS est de $dx = 2\pi/1024$ avec des conditions aux bords tri-périodiques sur le domaine $[0, 2\pi]^3$. La résolution temporelle est dt = 0.0002; cependant le champ de vitesse n'est sauvegardé dans la base de données que tous les dix pas de temps après avoir atteint un état statistiquement stationnaire : la résolution temporelle réellement accessible est donc $\delta t = 0.002$. On résume dans le tableau 3.1 quelques propriétés de la simulation auxquelles on se réfèrera au cours de notre analyse :

$$\frac{N_x \quad N_t \quad \mathrm{d}x \quad \delta t \quad \nu \quad \sigma \quad L \quad T_L \quad \epsilon \quad \mathrm{R}_{\lambda}}{1024 \quad 5028 \quad 2\pi/1024 \quad 0.002 \quad 1.85 \, 10^{-4} \quad 0.686 \quad 1.364 \quad 1.99 \quad 0.103 \quad 418}$$

Tab. 3.1 Propriétés de la DNS issue de la documentation fournie par les auteurs. N_x nombre de points par dimension d'espace; N_t nombre de pas de temps; dx résolution spatiale; dt résolution temporelle accessible (résolution de la DNS $dt = \delta t/10$); σ écart-type de la vitesse; $L = \frac{\pi}{2\sigma} \int \frac{E(k)}{k} dk$ échelle intégrale; $T_L = L/\sigma$ temps de retournement à l'échelle intégrale; $\epsilon = 15\nu \langle (\partial_x u_x)^2 \rangle$ taux moyen de dissipation d'énergie; R_λ nombre de Reynolds à l'échelle de Taylor.

En termes de taille des données, l'utilisation de l'intégralité de la DNS n'est pas envisageable : à

raison de 25 GB pour toute la grille à un instant donné, l'intégralité des pas de temps disponibles représente plus de 100 TB. Cela pose un problème d'abord pour le téléchargement depuis les serveurs de l'Univeristé Johns Hopkins, puis pour le stockage local et l'accès rapide au données pour les calculs. Pour cela, nous avons dû trouver un compromis entre précision et faisabilité de l'étude, qui a consisté à ne télécharger pour chaque pas de temps qu'une fraction de la grille qui soit suffisante pour dresser des statistiques. On décrit maintenant ce choix des données téléchargées.

Dans le cadre de la phénoménologie de la turbulence homogène et isotrope, notre analyse se base sur l'étude de signaux longitudinaux de vitesse. Pour obtenir ces signaux à partir des résultats de la DNS, il suffit de réaliser des «coupes» linéiques à travers la grille de simulation. Le suivi d'une coupe spatiale au cours du temps nous donne accès à une carte spatio-temporelle de vitesse longitudinale. Chaque carte est alors considérée comme une réalisation indépendante du signal de vitesse $u_i(x_i, t)$. On pourra ainsi moyenner les statistiques sur l'ensemble des réalisations et sur les trois directions de l'espace, par homogénéité et isotropie respectivement. On se limite alors à $32 \times 32 = 1024$ coupes par direction et par pas de temps, ce qui nous permet de ne télécharger qu'une fraction de l'ordre d'un millième des données totales. Le processus de découpe des données est décrit plus précisément à la figure 3.1, et un exemple de carte est donné à la figure 3.2.



Fig. 3.1 Découpage des données téléchargées : exemple suivant la direction y. À un instant t donné, chaque position (x, z) dans le plan y = 0 définit une droite dans la direction y. Cette droite contient 1024 points sur la grille de simulation, sur lesquels on relève les valeurs de la composante u_y du champ de vitesse. On obtient alors un signal de vitesse longitudinale $u_y(y)$, à x, z et t fixés. Pour un couple (x, z) donné sur la grille, la collection des signaux de vitesse sur l'ensemble des pas de temps donne accès à une carte spatio-temporelle $u_y(y, t)$ de la vitesse longitudinale suivant y, sur 1024 points d'espace et 5028 points de temps. En considérant chaque droite comme une réalisation indépendante du signal longitudinal $u_y(y, t)$, on pourra moyenner les statistiques spatio-temporelles de ce signal sur l'ensemble des couples (x, z) par homogénéité statistique. Afin d'alléger les données téléchargées, on se limite à des droites espacées dans les directions x et z de $\Delta x = \Delta z = 2\pi/32$ soit $32 \times 32 = 1024$ cartes spatio-temporelles pour la direction y, chacune de taille 1024×5028 . On répète cette opération sur des droites dans les directions x et z afin de pourvoir moyenner par la suite les statistiques longitudinales sur toutes les directions par isotropie.

3.2 Statistiques spatio-temporelles de la DNS

3.2.1 Méthodes

Notre objectif a été d'étudier la structure spatio-temporelle de la turbulence, toujours dans le cadre de la phénoménologie présentée dans le chapitre 2. Pour cela, on base notre analyse sur la généralisation spatio-temporelle de l'incrément du champ de vitesse :



Fig. 3.2 Carte spatio-temporelle de vitesse longitudinale $u_y(t, y)$ extraite de la base de donnée de turbulence homogène et isotrope forcée de l'Université Johns Hopkins. 1024 points d'espace et 5028 points de temps.

$$\delta_{\ell,\tau} u(t,x) = u(x+\ell,t+\tau) - u(x,t)$$
(3.1)

De manière similaire au chapitre 2, le calcul de cet incrément généralisé nous a permis de construire les fonctions de structure spatio-temporelles, i.e. les différents moments de la distribution des incréments. A l'ordre q:

$$S_q(\ell,\tau) = \mathbb{E}\left[\left(\delta_{\ell,\tau} u(x,t)\right)^q\right] \tag{3.2}$$

En pratique l'espérance dans l'équation (3.2) est estimée numériquement via une moyenne spatio-temporelle, par hypothèse d'ergodicité [24]. Pour une direction donnée de la vitesse longitudinale, on calcule cette moyenne pour chaque carte spatio-temporelle issue d'une ligne rouge dans la représentation de la figure 3.1. On moyenne ensuite la fonction de structure obtenue sur chacune de ces lignes en utilisant la propriété d'homogénéité statistique, puis sur les trois directions x, y et z en utilisant l'isotropie statistique. On calcule par la même méthode la corrélation spatio-temporelle du champ de vitesse :

$$C(\ell,\tau) = \mathbb{E}\left[u(x+\ell,t+\tau)u(x,t)\right]$$
(3.3)

Enfin on calcule aussi la densité de probabilité $\mathbf{P}_{\ell,\tau}$ des incréments, qui est un bon estimateur de l'intermitence du signal. La méthode de calcul est similaire à celle des moments et des corrélations : on trace un histogramme de chaque réalisation de l'incrément spatio-temporel, puis on moyenne cet histogramme sur toutes les réalisation puis sur toutes les directions.

On moyenne par cette méthode chaque grandeur sur $3 \times 1024 = 3072$ réalisations du signal spatio-temporel u(x, t), ce qui permet dobtenir une convergence statistique satisfaisante. Les résultats obtenus par cette analyse sont présentés dans la partie 3.2.2.

3.2.2 Résultats

3.2.2.1 Corrélations spatiotemporelles

On commence par s'intéresser à la structure spatio-temporelle des corrélation du signal de vitesse u(x,t) [88]. La fonction de corrélation $C(\ell,\tau)$ obtenue dans la partie 3.2.1 est représentée sur la figure 3.3.



Fig. 3.3 Contours de la fonction de corrélation $C(\ell, \tau)$ du signal spatio-temporel de vitesse u(x,t). (a) : les axes sont normalisés par les grandes échelles L et T, ce qui montre une anisotropie aux petites échelles. (b) : les axes sont normalisées par les échelles «de Taylor» λ et τ_{λ} . Les corrélations sont alors isotropes aux petites échelles, mais plus aux grandes échelles. Les lignes en tirets blants correspondent aux coupes pour l'évaluation des fonctions de structures mixtes étudiées dans le paragraphe suivant.

La première représentation que nous avons choisie consiste à tracer les iso-contours de la fonction de corrélation dans le plan des échelles adimensionnées ℓ/L et τ/T , comme représenté sur la figure 3.3 (a). Les échelles L et T sont ici les échelles de décorrélation du champs de vitesse, ou «grandes échelles». Nous les avons évaluées en cherchant l'intersection du régime inertiel avec l'axe C = 0. Nous avons trouvé L = 1.70 et T = 4.72; ces valeurs sont comparables à celles données dans le tableau 3.1, à un facteur multiplicatif de l'ordre de l'unité près. Notons que l'évaluation de ces échelles est généralement peu précise, d'abord car elle dépend fortement de la définition choisie. De plus la mesure de quantités de grande échelle est soumise à des problèmes de convergence statistique, dus au fait que la simulation ne contient que quelques grandes échelles en espace et en temps.

Dans cette représentation adimensionnée par les grandes échelles les courbes iso-C sont, dans les régimes dissipatif et inertiel, des ellipses de grand axe l'axe des échelles spatiales ℓ . L'existence d'un axe privilégié dans le plan des échelles, malgré la normalisation des axes par les grandes échelles L et T, nous indique une certaine forme d'«anisotropie» spatio-temporelle : aux petites échelles notamment, les iso-contours de C sont toujours des ellipses alignées sur ℓ . Cette anisotropie entre échelles de temps et d'espace ainsi adimensionnées suggère que le rapport de la grande échelle sur l'échelle dissipative n'est pas le même suivant l'axe temporel que suivant l'axe spatial.

Nous avons donc cherché une deuxième représentation capable d'éliminer l'anisotropie spatiotemporelle aux petites échelles. Pour cela nous nous sommes inspirés du modèle elliptique développé dans les références [89,90] pour les corrélations spatio-temporelles. En développant la fonction de corrélation à l'ordre deux autour du point $(\ell, \tau) = (0, 0)$:

$$C(\ell,\tau) = \sigma^2 + \left. \frac{\partial^2 C}{\partial \ell \partial \tau} \right|_{(0,0)} \ell \tau + \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2 C}{\partial \ell^2} \right|_{(0,0)} \ell^2 + \left. \frac{\partial^2 C}{\partial \tau^2} \right|_{(0,0)} \tau^2 \right)$$
(3.4)

où $C(0,0) = \sigma^2$ est la variance du signal de vitesse, et où les dérivées premières de C sont nulles par homogénéité statistique. On voit alors immédiatemment qu'en se plaçant suffisamment proche de l'origine, les iso-contours sont toujours des coniques dont les axes et l'eccentricité sont définies par les dérivées secondes de la fonction de corrélation. On observe ici des ellipses alignées sur les axes τ et ℓ ce qui implique que la dérivée croisée soit négligeable par rapport aux autres dérivées secondes en (0,0), et que celles-ci soit du même signe. De plus, comme la corrélation est toujours inférieure à la variance, ces dérivées secondes doivent être négatives.

On peut expliciter simplement la valeur de ces dérivées secondes afin de vérifier ces implications ainsi que pour les calculer numériquement. En utilisant l'équation (3.3) on a :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial \ell^2} \Big|_{(0,0)} = \mathbb{E} \left[u \partial_{xx} u \right] \\
= \mathbb{E} \left[\partial_x \left(u \partial_x u \right) \right] - \mathbb{E} \left[\left(\partial_x u \right)^2 \right] \\
= -\mathbb{E} \left[\left(\partial_x u \right)^2 \right] = -\sigma_x^2 \leqslant 0$$
(3.5)

car l'espérance d'une dérivée est nulle par homogénéité statistique, et où on a noté σ_x^2 la variance des gradients longitudinaux. On montre de même :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial \tau^2}\Big|_{(0,0)} = -\mathbb{E}\left[\left(\partial_t u\right)^2\right] = -\sigma_t^2 \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 C}{\partial \ell \partial \tau}\Big|_{(0,0)} = -\mathbb{E}\left[\partial_x u \partial_t u\right] = -\sigma_{xt}^2 \tag{3.6}$$

On a donc bien les dérivées secondes par rapport à ℓ et τ négatives en (0, 0). On vérifie numériquement que la dérivée croisée est négligeable devant les autres dérivées secondes, en évaluant la variance et la covariance des gradients longitudinaux et temporels. On trouve $\sigma_x^2 = 37.1$, $\sigma_x^2 = 77.6$ et $\sigma_{xt}^2 = 0.3$, soit $\sigma_{xt}^2 \ll \sigma_x \sigma_t$ et $\sigma_x^2 < \sigma_t^2$ ce qui est bien cohérent avec l'observation de courbes iso-*C* elliptiques alignées avec l'axe ℓ . On notera en complément que la valeur obtenue pour la variance des gradients longitudinaux donne une valeur pour le taux de dissipation moyen $\epsilon = 15\nu \langle (\partial_x u)^2 \rangle = 0.103$, ce qui est cohérent à trois chiffres significatifs avec la valeur donnée par les auteurs de la DNS [87] et répertoriée dans le tableau 3.1.

Les ellipses des iso-contours aux petites échelles peuvent alors être transformées en des cercles de centre l'origine en choisissant une nouvelle adimensionnalisation basée sur les variances des gradients. Le choix naturel d'après l'équation (3.4) pour les échelles de normalisation est l'échelle de Taylor $\lambda = \sigma/\sigma_x$ et son équivalent temporel $\tau_{\lambda} = \sigma/\sigma_t$. Les courbes iso-*C* dans ce cadre adimensionnel sont représentées sur la figure 3.3 (b) : on observe en effet des iso-contours qui tendent vers des cercles aux petites échelles.

Nous avons donc choisi une représentation adimensionnée des corrélations spatio-temporelles dans laquelle les dimensions d'espace et de temps sont «isotropes» aux petites échelles. Cette isotropie n'est évidemment pas retrouvée aux grandes échelles puisque les rapports $L/\lambda = 15.1$ et $T/\tau_{\lambda} = 60.7$ sont différents, et ceci indépendamment de l'adimensionnalisation choisie. Cette anisotropie sera retrouvée et précisée dans l'étude des fonctions de structure au paragraphe suivant. Le cadre du modèle elliptique étudié ici nous donne malgré tout une description de la structure spatio-temporelle des corrélations qui sera déterminante dans le choix du noyau utilisé pour la modélisation aléatoire du champ de vitesse présentée dans le chapitre 4.

3.2.2.2 Fonctions de structure

L'étude dans la littérature [24, 71–73] des moments purement longitudinaux $S_q(\ell, 0)$ et purement temporels $S_q(0, \tau)$ comme présentée dans le chapitre 2 nous donne un cadre que nous souhaitons compléter par l'analyse du cas spatio-temporel, i.e. à $\ell \neq 0$ et $\tau \neq 0$. Pour cela, on se place dans la représentation adimensionnée par les «échelles de Taylor» présentées au paragraphe précédent, et on réalise des coupes rectilignes dans le plan adimensionné $\ell - \tau$ suivant trois angles régulièrement répartis entre les axes ℓ et τ , comme indiqué sur la figure 3.3 (b). Les fonctions de structure d'ordre 2, skewness et flatness ainsi obtenues sont représentées sur la figure 3.4.

À l'ordre deux, on retrouve pour les fonctions de structure S_2 représentées sur la figure 3.4 (a) la forme typique décrite par la phénoménologie du chapitre 2. La loi d'échelle d'exposant 2 dans


Fig. 3.4 Fonctions de structure aux ordres 2, 3 et 4 en longitudinal (trait plein), temporel (tirets) et spatio-temporel (tirets-points) avec trois angles différents dans le plan $\tau - \ell$ adimensionné. En ordonnée sont représentées la fonction de structure d'ordre deux (a) normalisée par deux fois la variance de la vitesse, la skewness (b) et la flatness (c). Chaque grandeur est représentée en fonction de l'échelle ξ définie comme la norme du vecteur d'incrément spatio-temporel $(\ell/L, \tau/T)$ adimensionné par les grandes échelles. Les courbes intermédiaires correspondent à des coupes d'angles $\pi/8$, $\pi/4$ et $3\pi/8$ dans le plan $\ell-\tau$ adimensionné par les échelles de Taylors, comme expliqué dans la partie 3.2.2.1.

le domaine dissipatif est la signature de la régularité du champ de vitesse en dessous de l'échelle de Kolmogorov, et ceci quelque soit la direction choisie dans le plan $\ell - \tau$ adimensionné. On note de plus que dans ce cadre adimensionné, la courbe purement temporelle de $S_2(0,\tau)$ descend plus loin dans les petites échelles, car la DNS est en fait plus résolue en temps qu'en espace. Dans le régime inertiel, on retrouve des lois d'échelles d'exposants proche de 2/3: on trouve 0.68 pour le purement longitudinal et 0.56 pour le purement temporel. Si l'exposant longitudinal est proche des corrections observées à l'ordre deux [24], on note que la valeur en purement temporel est légèrement plus basse que les observations faites sur d'autres DNS, notemment [72]. On remarque cependant que la valeur observée ici reste relativement proche de la prédiction $\zeta_2 = 2/3$ pour le comportement temporel eulérien [71, 73], et est notemment assez éloignée de la valeur $\zeta_2 = 1$ observée dans le cadre lagrangien [82]. Pour les fonctions de structure mixtes spatio-temporelles on observe des exposants intermédiaires qui semblent varier continument entre ces deux cas, purement longitudinal et purement temporel. Les valeurs de ces exposants restent donc relativement proche de 2/3, mais ces légères différences entre lois d'échelle sont une marque supplémentaire de l'anisotropie spatio-temporelle exhibée dans l'étude de la corrélation au paragraphe précédent. Enfin aux grandes échelles on retrouve la décorrélation du signal de vitesse à travers la saturation des fonctions de structure à une valeur de deux fois la variance du champ de vitesse. On observe cependant des problèmes de convergence à ces échelles. En effet la fonction de structure purement temporelle ne semble pas atteindre totalement le plateau à $2\sigma^2$, malgré le calcul de l'incrément sur la période maximale permise par la DNS. De plus la fonction de structure purement longitudinale semble saturer à une valeur inférieure à deux fois la variance : on observe un palier à 0.68 au lieu de $2\sigma^2 = 0.94$. Nous ignorons à ce jour l'origine de ces différences, que nous supposons être liées à un manque de statistiques à grande échelle, la taille de la DNS n'excédant pas quatre grandes échelles en espace et trois en temps.

À l'ordre 3, on s'intéresse à la skewness $-S_3/S_2^{3/2}$ tracée sur la figure 3.4 (b). On retrouve la skewness non nulle attendue dans le cas purement longitudinal [24]. Plus précisément, on note la tendance de la skewness longitudinale à tendre vers un plateau dans le régime inertiel, ce qui est la manifestation de la loi des 4/5 présentée au chapitre 2 : si $S_3(\ell, 0) \propto \ell$ avec $S_2(\ell, 0) \propto \ell^{2/3}$ alors la skewness doit être indépendante de l'échelle ℓ dans le régime inertiel. La valeur de ce plateau, proche de 0.3, est aussi cohérente avec les observations issues d'expériences et de simulations numériques [91]. L'absence de réel plateau ici est expliqué d'une part par la taille finie du régime inertiel : les effets de courbure important aux limites de ce régime rendent généralement difficile l'observation d'un éventuel plateau [81,92]. D'autre part, la dépendance en ℓ de S_3 étant exactement issue des équations de Navier-Stokes [24], un plateau de la skewness n'existera rigoureusement que si l'exposant de la loi d'échelle à l'ordre deux est 2/3; or l'observation de corrections intermittente à l'ordre deux [24] contredisent cette prédiction de K41 : il serait donc normal, même avec un régime inertiel assez grand pour s'affranchir des effets de courbure, de ne pas observer un véritable plateau ici [93]. La correction intermittente donnant un exposant à l'ordre deux légèrement supérieur à 2/3, on s'attend à observer une loi d'échelle de pente très légèrement négative dans le régime inertiel. Cette loi d'échelle n'est pas aisément observable dans la représentation semi-logarithmique de la figure 3.4. Nous avons choisi de ne pas pousser plus loin l'investigation de cette loi d'échelle pour deux raison : d'abord son observation est rendue difficile par la taille du régime inertiel et les problèmes de convergence des statistiques d'ordre 3 dus à l'alternance de leur signe. D'autre part la propriété qui nous a intéressé pour la modélisation stochastique présentée au chapitre 4 était l'existence d'une skewness longitudinale non nulle. Dans le cas purement temporel en tirets sur la figure 3.4 (b), on retrouve l'absence de skewness attendue [72]. Dans les cas mixtes spatio-temporels, on passe continument du cas purement longitudinal avec skewness au cas purement temporel sans skewness. Cependant, on note que cette transition n'est pas linéaire : les courbes de skewness ne sont pas régulièrement espacées sur la figure 3.4 (b), bien qu'elles correspondent à des coupes rectilignes régulièrement espacées dans le plan $\ell - \tau$ présenté sur la figure 3.3 (b). Cette transition continue mais non-linéaire d'incréments statistiquement asymétriques vers des incréments symétriques est une nouvelle caractéristique de l'anisotropie spatio-temporelle observée depuis l'étude des corrélations au paragraphe précédent.

À l'ordre 4, on a calculé la flatness S_4/S_2^2 qui est représentée sur la figure 3.4 (c). Comme expliqué au chapitre 2, la flatness est un indicateur caractéristique de l'intermittence. En effet en l'absence d'intermittence, la phénoménologie K41 prédit que la flatness est indépendante de l'échelle à laquelle elle est mesurée [24], car les exposants des moments d'ordres 2 et 4 sont liés par la relation $\zeta_4 = 2\zeta_2$. En présence de corrections intermittente, cette relation n'est plus vérifiée et on observe une déviation à la prédiction K41 : la flatness dépend de l'échelle considérée et présente aussi une loi d'échelle. Dans le cadre du modèle log-normal [24, 84], l'exposant de cette loi de puissance est directement relié au coefficient d'intermittence c_2 : $\zeta_4 - 2\zeta_2 = -4c_2$. Ici on observe pour toutes les directions dans le plan $\ell - \tau$ un exposant de -0.12, ce qui correspond à un coefficient d'intermittence $c_2 = 0.03$; cette valeur est légèrement supérieure à la valeur attendue $c_2 = 0.025$ [82]. Remarquons cependant que les deux valeurs restent relativement proches, et que malgré cette légère différence la loi d'échelle observée reste sensiblement la même en purement longitudinal et en purement temporel. Ce résultat suggère que le champ de vitesse présente des niveaux d'intermittence similaires en temporel et en longitudinal dans le régime inertiel. Dans le régime dissipatif au contraire on observe une différence d'un facteur deux pour les valeurs maximales de la flatness entre le cas purement temporel et le purement longitudinal. Cette différence suggère que le domaine dissipatif est plus intermittent dans le cadre temporel que dans le longitudinal. Ce résultat n'a rien de trivial et on verra dans le chapitre 4 qu'il est difficile de le modéliser avec un champ aléatoire. Remarquons cependant qu'on ne peut exclure la possibilité que cette différence soit liée à un effet de résolution de la simulation, comme expliqué dans la discussion des PDF des incréments présentée dans la section suivante. De même que pour les ordres 2 et 3, on observe une transition continue des courbes de flatness d'un axe à l'autre du plan $\ell - \tau$. Enfin aux grandes échelles on retrouve la valeur F = 3, typique du comportement gaussien du champ de vitesse au-delà des échelles de corrélation.

3.2.2.3 PDF des incréments

Un outil important dans l'étude de l'intermittence présenté au chapitre 2 est la Fonction de Densité de Probabilités (PDF) des incréments [84]. Les PDF des incréments longitudinaux et temporels sont calculées à différentes échelles suivant la méthode présentée à la partie 3.2.1 et présentées sur la figure 3.5.



Fig. 3.5 Fonction de Densité de Probabilités (PDF) des incréments longitudinaux (a) et temporels (b), à dix échelles logarithmiquement espacées entre l'échelle maximale (courbe en trait plein la plus basse) et l'échelle des gradients (courbe en trait plein la plus haute). Les courbes ont été déplacées verticalement de manière arbitraire pour faciliter la lecture. La courbe noire en tirets correspond à la PDF d'un champ gaussien.

Les PDF des incréments sont calculées sur dix échelles logarithmiquement espacées. Les plus grandes échelles de calcul sont $L_{\rm max}/2$ en longitudinal pour éviter les effets de la périodicité, et $T_{\rm max}$ en temporel. Dans les deux cas ces échelles maximales correspondent à peu près à deux fois l'échelle de décorrélation. Les PDF calculées à ces échelles sont tracées en jaune clair sur la figure 3.5. On retrouve un comportement gaussien (tracé en tirets noirs pour la comparaison), typique de la décorrélation du champ de vitesse à ces échelles. Lorsqu'on va vers les échelles les plus petites, le champ de vitesse est de plus en plus corrélé et perd ce comportement gaussien. Sur la figure 3.5, les courbes qui vont vers le bleu foncé correspondent à des échelles plus petites ; les courbes ont été relevées arbitrairement afin de faciliter la lecture. On note l'élargissement des PDF vers les échelles les plus petites, ce qui est la manifestation de l'intermittence du champ de vitesse, un comportement non-gaussien.

L'échelle de calcul la plus petite correspond à la résolution de la DNS dans les deux cas : la courbe en bleu foncé est donc la plus proche de la PDF des gradients. On note que les PDF des incréments temporels sont nettement moins gaussiennes que celles des incréments longitudinaux : on observe des évènements à 25 écarts-types aux maximum en longitudinal contre une cinquantaine d'écarts-types en temporel. Cette différence est à rapprocher de la différence observée entre les valeurs de la flatness dans le régime dissipatif sur la figure 3.4 (c). En effet des valeurs plus importantes des moments d'ordre élevé correspondent à de plus nombreux événements $\delta_{\ell,\tau}u$ de valeur élevée et donc des queues plus larges sur la PDF. Cependant on note sur la figure 3.4 (c) que les incréments longitudinaux accessibles dans la simulation atteignent des échelles moins petites que les incréments temporels. On ne peut donc exclure que la différence d'intermittence observée ici aux plus petites échelles soit liée à une différence de résolution spatiale et temporelle de la simulation. En effet la résolution temporelle accessible correspond à $\delta t = 0.03\tau_{\lambda}$ contre

 $dx = 0.05\lambda$ en espace. Il est donc possible que le régime dissipatif profond ne soit pas assez bien résolu spatialement pour observer des valeurs de flatness comparable au cas temporel. En effet il est montré dans la littérature [94–96] qu'à nombre de Reynolds fixé la résolution spatiale des DNS a une forte influence sur l'observation des événements rares de l'intermittence.

En comparant soigneusement les figures 3.5 (a) et (b), on peut de plus constater l'asymétrie des PDF des incréments longitudinaux aux petites échelles, comparées à celles des incréments temporels qui sont symétriques. Cette observation est cohérente avec l'étude de la skewness spatio-temporelle présentée sur la figure 3.4 (b). On avait en effet observé une skewness non nulle en longitudinal, et nulle en temporel.

3.3 Mesures complémentaires

Nous avons pu effectuer au cours de l'étude de la DNS des analyses supplémentaires par rapport à celles présentées jusqu'ici. Ces analyses ne nous ont pas servi pour la modélisation stochastique présentée au chapitre 4. Cependant elles font partie de l'analyse statistique standard des données de turbulence, et leur développement sera utile dans la perspective d'une modélisation complète du champ de vitesse à trois dimensions. Pour ces raisons, nous avons tenu à présenter ces mesures ici, en guise de complément.

3.3.1 Statistiques du champ de vitesse transverse

Nous n'avons étudié jusqu'ici que la composante longitudinale du champ de vitesse, or le protocole de téléchargement des données de la DNS nous a permis de télécharger simultanément toutes les composantes de la vitesse quelque soit la direction considérée. Nous avons donc pu réaliser une étude similaire à celle de la partie 3.2.2 pour la composante transverse du champ de vitesse. On présente dans cette partie les résultats de cette analyse succincte.

La figure 3.6 présente les résultats du calcul des fonctions de structures transverses aux ordres 2, 3 et 4, ainsi que leur comparaison au cas purement temporel – dans le même esprit que ce qui avait été fait sur la figure 3.4.



Fig. 3.6 Fonctions de structure aux ordres 2, 3 et 4 en transverse (trait plein), temporel (tirets) et spatio-temporel transverse (tirets-points) avec trois angles différents dans le plan $\tau - \ell$ adimensionné. En ordonnée sont représentées la fonction de structure d'ordre deux (a) normalisée par deux fois la variance de la vitesse, la skewness (b) et la flatness (c). Chaque grandeur est représentée en fonction de l'échelle ξ définie comme la norme du vecteur d'incrément spatio-temporel ($\ell/L, \tau/T$) adimensionné par les grandes échelles. Les courbes intermédiaires correspondent à des coupes d'angles $\pi/8$, $\pi/4$ et $3\pi/8$ dans le plan $\ell - \tau$ adimensionné par les échelles de Taylors, comme expliqué dans la partie 3.2.2.1.

À l'ordre deux, on observe une loi d'échelle d'exposant 0.72 dans le régime inertiel pour le cas purement transverse. Cet exposant est supérieur à la valeur 0.68 trouvée pour le cas purement longitudinal : le champ transverse est donc plus intermittent que le champ longitudinal, ce qui est cohérent avec les observations de la littérature [97–99]. La fonction de structure d'ordre deux du cas purement temporel est la même que celle de la figure 3.4 (a). Les courbes des cas mixtes spatio-temporels transitent progressivement du cas purement transverse au cas purement temporel, de manière similaire au cas du champ de vitesse longitudinal.

À l'ordre trois, la skewness est nulle dans les deux cas purement transverse et temporel. Ces résultats sont prédits dans le cas transverse d'une part par l'incompressibilité du champ de vitesse ainsi que l'hypothèse d'isotropie statistique [24], et dans le cas temporel d'autre part par un argument de réversibilité [100]. Les cas intermédiaires spatio-temporels présentent aussi tous une skewness nulle : les statistiques transverse-temporelles sont donc ici isotropes à l'ordre trois.

À l'ordre quatre, on retrouve la même flatness purement temporelle que sur la figure 3.4 (c). Pour le cas purement transverse, on observe une loi d'échelle d'exposant -0.17, ce qui correspond à un coefficient d'intermittence $c_2 = 0.043$. On retrouve donc une intermittence plus forte qu'en longitudinal, où on avait trouvé $c_2 = 0.030$.

3.3.2 Étude du champ de vitesse lagrangien

L'étude que nous avons menée jusqu'ici était basée sur le champ spatio-temporel de vitesse eulériennne $u_x(x,t)$. Or la littérature est riche d'exemples d'analyse statistique des champs de vitesse lagrangienne $U_x(x(t = 0), t) = u_x(x(t), t)$ [71, 82]. Dans la perspective de l'étude de la dispersion de particules dans le modèle de champ proposé au chapitre 4, nous avons débuté une analyse des statistiques lagrangiennes de la DNS, que nous présentons ici.

Cette analyse débute par une étape préliminaire de construction des trajectoires lagrangiennes à partir du champ de vitesse eulériene. Pour cela, nous avons dû intégrer l'équation du mouvement :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u_x(x,t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$
(3.7)

où chaque valeur de x_0 dans le domaine de la DNS donne une trajectoire lagrangienne. On utilise pour l'intégration un schéma simple Euler explicite, et une interpolation linéaire pour le calcul de $U_x(x_0, t)$. La valeur champ de vitesse lagrangienne au point (x_0, t) est ensuite obtenue en interpolant la valeur de la vitesse eulérienne au point x(t). On utilise pour l'intégration un schéma simple Euler explicite, et une interpolation linéaire pour le calcul de $U_x(x_0, t)$. On donne un exemple des trajectoires lagrangiennes obtenues sur la figure 3.7.

A la fin du temps d'intégration les cinquantes trajectoires initiales ont convergé vers trois trajectoires distinctes. On observe un comportement similaire quelque soit la réalisation choisie de la carte spatio-temporelle de la vitesse, pour une composante longitudinale du champ de vitesse comme pour une composante transverse : quelque soit le nombre initial de trajectoires elles convergent toujours toutes vers un petit nombre de trajectoires asymptotiques, de l'ordre de l'unité. Cela signifie que quel que soit le champ de vitesse eulérien choisi, le sytème dynamique (3.7) présente au moins un point fixe stable qui attire l'intégralité des trajectoires au cours de la dynamique. Même si ce résultat peut être surprenant au premier abord, on gardera à l'esprit que le système dynamique (3.7) n'est que de dimension un. Ainsi les seuls comportements possibles des trajectoires à grand temps sont la divergence, l'attraction par un cycle ou par un point fixe stable. La divergence des trajectoires n'étant pas permise dans ce cadre périodique, elles ne peuvent que tendre vers une solution périodique ou vers un point fixe : l'espace des phases à une dimension n'est «pas assez grand» pour premettre des solutions chaotiques. L'utilisation d'un champ de vitesse à une dimension d'espace n'est donc pas suffisante pour étudier la dispersion de particules. Aux dimensions plus élevées, la notion de compressibilité du champ d'advection est alors cruciale au phénomène de dispersion des particules [101, 102]. En effet à une dimension les seuls champs de vitesse incompressibles sont les champs uniformes. Dans la perspective d'une telle étude, il



Fig. 3.7 Trajectoires lagrangiennes obtenues par intégration du système (3.7), pour cinquantes positions initiales régulièrement réparties entre 0 et 2π . La position x est périodique sur le domaine $[0, 2\pi]$.

faudra donc modéliser la totalité d'un champ de vitesse incompressible à trois dimensions. Cette modélisation complète sort du cadre de cette thèse, mais représente une perspective à garder à l'esprit.

4 Modélisation aléatoire d'un champ de vitesse spatio-temporel

4.1 Choix d'un modèle aléatoire

4.1.1 Motivation et cahier des charges

Dans le chapitre 3 nous avons présenté l'analyse de données issues d'une DNS de «haute résolution». L'utilisation de ce type de données est séduisante, puisqu'elle donne potentiellement accès à la totalité d'un champ de vitesse eulérien, résolu en espace et en temps des échelles dissipatives aux échelles de décorrélation. Cependant en pratique, la réalisation d'une telle DNS est contraignante. En effet comme nous l'avons mentionné au chapitre 3, la simple estimation numérique des trois composantes du champ de vitesse sur une telle grille représente déjà un défi en terme de mémoire; l'étude de la dynamique multipliant cette difficulté par le nombre de pas de temps à simuler. De plus, la nature multi-échelles de la turbulence impose des résolutions importantes aux DNS afin de capturer la totalité de la physique des équations de Navier-Stokes. Dans ce cadre, les DNS qui résolvent la totalité des échelles de la turbulence sont limitées en temps ou en nombre de Reynolds simulé, et les simulations les plus récentes restent encore en arrière des expériences en termes de nombre de Reynolds atteignable.

Faces aux contraintes imposées par l'utilisation d'une DNS, nous nous proposons de construire un champ de vitesse synthétique qui puisse capturer un maximum de propriétés caractéristiques de la turbulence pour un coût numérique plus réduit. Le cahier des charges d'une telle tâche est important; on résume ici les propriétés à vérifier. Le champ synthétisé devra, pour la composante longitudinale :

- être résolu des échelles dissipatives aux échelles de décorrélation, en temps comme en espace
- être lisse en dessous de l'échelle dissipative, et se comporter comme un bruit blanc gaussien au-delà de l'échelle de décorrélation
- être statistiquement homogène et isotrope
- être de variance finie
- être de régularité 1/3 au sens de Hölder en espace et en temps, aux corrections intermittentes près
- présenter un caractère non-gaussien en dessous des échelles de corrélation, avec un coefficient d'intermittence proche de $c_2 = 0.025$ dans un cadre log-normal
- présenter une skewness non-nulle pour la composante longitudinale seulement.

En plus de ces propriétés pour la composante longitudinale, le champ vectoriel complet devra aussi vérifier les propriétés statistiques de la composante transverse [97–99] ainsi que les propriétés d'incompressibilité et d'étirement de la vorticité [103]. On se concentrera dans le cadre de cette thèse de la modélisation de la composante longitudinale de la vitesse seulement. De telles modélisations sont étudiées avec intérêt dans la littérature [104], et présentent des applications importantes comme l'initialisation de DNS de haute résolution pour l'étude du sillage d'éoliennes [105]. On présente dans la partie 4.1.2 deux approches basées sur des champs aléatoires de vitesse eulérienne.

4.1.2 Champs aléatoire

La phénoménologie de la turbulence étant basée sur une description statistique des signaux de vitesse, une modélisation *aléatoire* de ces signaux apparaît comme un moyen naturel de se raccrocher à cette phénoménologie. On présente ici deux approches pour synthétiser de tels champs aléatoires : une première basée sur les spectres d'énergie cinétique et une seconde basée sur les statistiques du champ de vitesse aux ordres 2, 3 et 4.

4.1.2.1 Approche par les ondes aléatoires

Une première méthode consiste à construire le champ de vitesse dans l'espace de Fourier de façon à pouvoir choisir son spectre d'énergie cinétique. Cette méthode est utilisée notamment dans le domaine des simulations cinématiques pour l'étude de la dispersion de particules [106, 107]. Le champ eulérien de vitesse est alors construit comme la superposition d'ondes planes aléatoires :

$$\vec{u}(\vec{r},t) = \sum_{n=1}^{N_k} \left[\vec{A}_n \cos\left(\vec{k}_n \cdot \vec{r} + \omega_n t\right) + \vec{B}_n \sin\left(\vec{k}_n \cdot \vec{r} + \omega_n t\right) \right], \tag{4.1}$$

où N_k est le nombre de vecteurs d'ondes \vec{k}_n présents dans la simulation. Les normes des vecteurs d'ondes sont logarithmiquement distribuées entre l'échelle de Kolmogorov et la grande échelle, et leurs directions sont tirées aléatoirement avec une distribution angulaire uniforme. Les directions des amplitudes \vec{A}_n et \vec{B}_n sont de même distribuées uniformément dans le plan orthogonal à \vec{k}_n afin d'obtenir un champ incompressible. Leurs amplitudes sont choisies de telle sorte à obtenir le spectre d'énergie cinétique de K41 $E(k) \propto k^{-5/3}$. En effet on a pour le spectre spatial d'énergie cinétique :

$$E(\vec{k}_{n}) = \frac{1}{2} \left| \widehat{\vec{u}}(\vec{k}_{n}, t) \right|^{2} = \frac{1}{2} \left| \vec{A}_{n} + \vec{B}_{n} \right|^{2}, \qquad (4.2)$$

où $\widehat{\vec{u}}(\vec{k}_n,t)$ représente la transformée de Fourier spatiale du champ de vitesse. On voit que le spectre spatial d'énergie cinétique est alors obtenu en choisissant la condition suivante sur les amplitudes \vec{A}_n et \vec{B}_n :

$$\left|\vec{A}_{n} + \vec{B}_{n}\right|^{2} = k_{n}^{-5/3}.$$
 (4.3)

On peut choisir de la même manière le spectre temporel de l'énergie cinétique en calculant la transformée de Fourier temporelle $\tilde{\vec{u}}(\vec{r}, \omega_n)$:

$$E(\omega_n) = \frac{1}{2} \left| \widetilde{\vec{u}}(\vec{r}, \omega) \right|^2 = \frac{1}{2} \left| \vec{A}_n + \vec{B}_n \right|^2.$$
(4.4)

On note que le spectre temporel a la même dépendance en les amplitudes \vec{A}_n et \vec{B}_n que le spectre spatial, définie à l'équation (4.2). Ce résultat est immédiat par construction du champ de vitesse à l'équation (4.1). Par conséquent, choisir le spectre temporel après avoir fixé le spectre spatial revient à choisir une relation de dispersion entre ω_n et \vec{k}_n . Il est immédiat de remarquer que qu'une relation linéaire $\omega_n = Uk_n$, avec U la vitesse de *sweeping* d'après l'argument de Tennekes [71] permet alors d'obtenir le spectre temporel de l'énergie cinétique en $E(\omega_n) \propto \omega_n^{-5/3}$ observé dans l'étude eulérienne du champ de vitesse [72].

Notons que le choix d'une relation de dispersion de la forme $\omega_n = \lambda \sqrt{k_n^3 E(k_n)} \propto k_n^{2/3}$ basé sur le temps de retournement du *n*-ème mode [107,108] donne lieu à un spectre temporel différent :

$$E(\omega_n) = \frac{1}{2} \left| \vec{A}_n + \vec{B}_n \right|^2 \propto k_n^{-5/3} \propto \omega_n^{-5/2}.$$

$$\tag{4.5}$$

Cette approche permet donc par construction d'obtenir un champ spatio-temporel à trois dimension d'espace, incompressible et présentant les spectres spatio-temporels d'énergie observés en turbulence développée [24,71,72]. Cependant la construction utilisée ici ne tient pas compte des propriétés statistiques des champs de vitesse turbulente. Si le choix du spectre d'énergie cinétique est équivalent à la reproduction des statistiques d'ordre deux – i.e. de la loi des 2/3, les statistiques aux ordres supérieur ne sont pas contrôlées ici. Il n'y a a priori aucune raison que cette construction reproduise les aspects non-gaussiens imposés par le phénomène d'intermittence. Pour cette raison, on se tourne dans la suite de ce chapitre vers un autre type de modélisation présenté dans la partie suivante.

4.1.2.2 Approche par les champs gaussiens fractionnaires

Une seconde approche est basée sur l'utilisation de *champs gaussiens fractionnaires*, afin de reproduire notamment la régularité 1/3 du champ de vitesse dans le régime inertiel par une approximation gaussienne. Cette approximation est ensuite modifiée par une mesure multi-fractale afin de reproduire les aspects non-gaussiens typiques de l'intermittence. Cette méthode a été employée pour modéliser des champs purement spatiaux à une et trois dimensions [103, 109]; on se propose dans ce chapitre de généraliser cette approche à un cadre spatio-temporel à une dimension d'espace et une dimension de temps. Le champ aléatoire que l'on propose est alors le suivant :

$$u_{\varepsilon}(x,t) = \iint_{\mathbb{R}^2} \Phi_{\varepsilon}(x-x',t-t') Y_{\varepsilon}(x',t') \Gamma_{\varepsilon}(x',t') W(\mathrm{d}x',\mathrm{d}t'), \tag{4.6}$$

ec
$$Y_{\varepsilon}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{\mathbb{R}^2} \tilde{k}_{\varepsilon}(x-x',t-t')\Gamma_{\varepsilon}(x',t')W(\mathrm{d}x',\mathrm{d}t'),$$
 (4.7)

$$\Gamma_{\varepsilon}(x,t) = \exp\left(\gamma X_{\varepsilon}(x,t) - \gamma^{2} \mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^{2}\right]\right), \qquad (4.8)$$

et
$$X_{\varepsilon}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{k}_{\varepsilon}(x-x',t-t') \widetilde{W}(\mathrm{d}x',\mathrm{d}t'),$$
 (4.9)

où $u_{\varepsilon}(x,t)$ est un champ scalaire des variables (x,t) et modélise la composante longitudinale du champ de vitesse. On travail ici dans un cadre schématique où x et t sont traitées comme des variables sans dimension. En particulier, les paramètres L et ε modélisant les échelles de l'écoulement sont pris identiques en temps et en espace dans la majeure partie de ce chapitre. Une proposition de champ présentant des échelles différentes en temps et en espace est présentée dans la partie 4.5.1. Le paramètre ε modélise l'échelle disipative : elle est finie lors des simulations numériques du champ (4.6), et est prise dans la limite $\varepsilon \to 0$ dans l'étude analytique afin de modéliser le comportement à Reynolds infini. Les champs présentés ici sont construit sur des mesures gaussiennes W et \widetilde{W} qui sont la base de cette modélisation aléatoire. Ces mesures gaussiennes sont ensuite modifiées par les noyaux Φ_{ε} et $\widetilde{k}_{\varepsilon}$ à travers des opération linéaires et non-linéaires, afin de reproduire la phénoménologie K41 et l'intermittence respectivement. Le but de ce chapitre est de décrire pas à pas la construction du champ aléatoire (4.6) et notamment le choix des noyaux de lissage Φ_{ε} et $\widetilde{k}_{\varepsilon}$. Une fois cette forme choisie pour le champ de vitesse, les paramètres libres du modèle sont la petite échelle ε , la grande échelle L, l'exposant de Hölder H et le paramètre d'intermittence γ .

4.2 Le Champ Gaussien Fractionnaire

4.2.1 À une dimension

av

L'approche suivie dans la littérature [103,109] et que nous souhaitons compléter ici a pour point de départ l'approximation du champ de vitesse par un champ gaussien. En précisant soigneusement la structure des corrélations de ce champ, on pourra modéliser les propriétés statistiques issues de la phénoménologie K41. Évidemment, une telle approximation ne pourra prétendre reproduire les comportements non-gaussiens typiques de l'intermittence. Cependant cette première modélisation constitue une brique élémentaire qui pose solidement les bases de la phénoménologie à reproduire. Elle sera modifiée par la suite afin d'y incorporer les aspects non-gaussiens qui font la richesse de la turbulence.

L'approximation gaussienne que nous construisons est plus précisément un processus appelé Champ Gaussien Fractionnaire (CGF) [103, 109, 110]. Un CGF à une dimension est construit de la manière suivante :

$$u_{\varepsilon}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_L(x-y)}{|x-y|_{\varepsilon}^{-1/2-H}} W(\mathrm{d}y), \qquad (4.10)$$

où W(dy) est une mesure blanche gaussienne, convoluée par le noyau de lissage $\Phi_{\varepsilon}(x-y) = \varphi_L(x-y)|x-y|_{\varepsilon}^{H-1/2}$. Le noyau Φ_{ε} est lui-même constitué de deux ingrédients : la fonction de coupure à grande échelle φ_L et la régularisation à petite échelle $|\cdot|_{\varepsilon}^{1/2-H}$. Le réel positif H est l'exposant de Hölder du champ ainsi construit. Cette forme particulière du noyau de lissage $\Phi_{\varepsilon}(x-y)$ permet de reconstruire de manière précise la structure des corrélations du CGF. On explique maintenant le choix des éléments qui le constituent.

La fonction de coupure à grande échelle φ_L assure une variance finie du CGF, ainsi qu'une corrélation tendant vers zéro à grand argument. C'est une fonction à décroissance rapide de largeur caractéristique L > 0, dont l'archétype est la gaussienne $\exp\left(\frac{-x^2}{2L^2}\right)$. On montrera qu'à part sa variance, aucune propriété du CGF ne dépend de la forme de φ_L . On ne fera un choix explicite de coupure à grande échelle que pour les besoins du calcul numérique, décrit à la fin de cette partie.

La régularisation à petite échelle $|\cdot|_{\varepsilon}^{1/2-H}$ est construite à partir de la norme régularisée sur l'échelle $\varepsilon > 0$:

$$\left|\cdot\right|_{\varepsilon} : x \mapsto \begin{cases} |x|_{\varepsilon} \sim |x| \\ |x| \gg \varepsilon \\ |x|_{\varepsilon} \sim \varepsilon \\ |x| \ll \varepsilon \end{cases}, \tag{4.11}$$

où l'équivalent à $|x| \ll \varepsilon$ permet de rendre le champ lisse à ces échelles. On montrera qu'aucune propriété du CGF ne dépend de la forme explicite de cette régularisation. De même que pour la coupure à grande échelle, on ne choisira donc une forme de régularisation que pour réaliser numériquement le champ $u_{\varepsilon}(x)$. L'exposant fractionnaire 1/2 - H du noyau assure que le CGF est de régularité H au sens de Hölder dans la limite $\varepsilon \to 0$; le paramètre ε jouant ici le rôle de l'échelle de Kolmogorov η_K , cette limite correspond à la limite des Reynolds infinis. On explicitera dans ce chapitre les valeurs de H pour lesquelles le CGF est «bien défini» statistiquement.

Le CGF étant construit par convolution, il est naturel dans pour son estimation numérique d'utiliser la transformée de Fourier : on se ramène ainsi simplement à une multiplication dans l'espace spectral. Par conséquent le signal que l'on obtiendra sera périodique, ce qu'il faudra garder à l'esprit pour l'évaluation des incréments.

Pour le calcul numérique, il nous faudra choisir des valeurs pour les paramètres L, ε et H ainsi que des formes explicites pour la fonction de coupure à grande échelle φ_L et la régularisation à petite échelle $|\cdot|_{\varepsilon}$. La phénoménologie de la turbulence nous aiguille pour le choix des paramètres. En effet l'exposant H étant la régularité du CGF au sens de Hölder, la prédiction K41 nous suggère de choisir H = 1/3. Les échelles ε et L définiront quant à elles la taille du régime inertiel observable : nous aurons donc tout intérêt à les choisir les plus séparées possibles, dans la limite du domaine choisi. On choisi pour la petite échelle $\varepsilon = 4dx$ où dx est la résolution de notre réalisation, afin de bien résoudre les échelles dissipatives et de pouvoir vérifier que le CGF est bien lisse. Pour la grande échelle on choisit $L = 2\pi/4$ où 2π est la taille du domaine spatial de simulation du CGF; on simule ainsi deux grandes échelles à chaque réalisation. Enfin on calcule le CGF à une dimension sur une grille de 2^{23} points, ce qui est un bon compromis entre largeur du régime inertiel et coût numérique, comme expliqué dans la partie 4.2.1.3. On résume dans le tableau suivant les paramètres choisis pour l'estimation du CGF à une dimension :

$$\frac{N}{2^{23}} \frac{\mathrm{d}x}{2\pi/N} \frac{\varepsilon}{4\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{L}}{2\pi/4} \frac{\mathrm{H}}{1/3}$$

Tab. 4.1 Paramètre choisis pour le calcul numérique du CGF défini à l'équation (4.10). Taille de la grille N, résolution dx (domaine spatial périodique $x \in [0, 2\pi[)$, échelle dissipative ε , échelle de décorrélation L, exposant de Hölder H.

Pour la fonction de coupure à grande échelle nous avons choisi une fonction C^{∞} à support compact ou «bump» $\varphi_L(x) = B(x/L)$ avec :

$$B(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-x^2}{1-x^2}\right) & \text{si } |x| < 1\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
(4.12)

L'utilisation d'une fonction à support compact nous permet d'éviter l'apparition d'une discontinuité par périodicité aux bornes du domaine. On comparera aussi les statistiques avec une coupure gaussienne à grande échelle, pour se donner une idée de l'effet de la forme de φ_L . Pour la régularisation à petite échelle, on choisit $|x|_{\varepsilon} = \sqrt{x^2 + \varepsilon^2}$, qui vérifie simplement la définition (4.11). Une réalisation numérique du CGF avec ces paramètres est représentée sur la figure 4.2.



Tab. 4.2 Exemple de réalisation numérique du CGF avec les paramètres de la table 4.1. Le champ de vitesse est représenté à différentes échelles : sur le domaine total $x \sim L$ (a), aux échelles inertielles $\varepsilon \ll x \ll L$ (b) et aux échelles dissipatives $x \ll \varepsilon$ (c).

Étudions maintenant plus en détail les propriétés statistiques du CGF, et montrons qu'il permet de modéliser la phénoménologie K41.

4.2.1.1 Homogénéité et isotropie

Le CGF étant construit par opération linéaire sur un bruit blanc gaussien, il conserve de manière immédiate un certain nombre de ses propriétés. En particulier, le CGF est statistiquement homogène et isotrope. En effet les propriétés statistiques du champ $u_{\varepsilon}(x)$ sont invariantes par tanslation (homogénéité), ainsi que sous la transformation $u_{\varepsilon}(x) \mapsto -u_{\varepsilon}(x)$ (isotropie).

De plus le bruit blanc gaussien W étant par définition centré, le CGF l'est aussi par linéarité. La moyenne de $u_{\varepsilon}(x)$ est donc nulle : on reproduit bien ainsi un champ de vitesse fluctuante, sans écoulement moyen.

4.2.1.2 Variance

On montre dans l'annexe C que pour des exposants de Hölder H > 0 le CGF admet une variance finie même dans la limite $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left[u_{\varepsilon}^{2}\right] = \sigma^{2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_{L}^{2}(y)}{|y|^{1-2H}} \mathrm{d}y < +\infty.$$
(4.13)

On note que cette variance ne dépend pas de la position : on retrouve bien l'homogénéité statistique du CGF.

Pour la modélisation d'un champ de vitesse turbulente, le choix H = 1/3 permet donc bien l'existence de la limite. On note de plus que cette limite est indépendante du choix de la régularisation à petite échelle. On reproduit donc bien ici la phénoménologie des fluctuations de la vitesse, qui restent de variance finie même dans la limite des Reynolds infinis et ce de manière indépendante de la viscosité.

En revanche on constate que la valeur de cette limite est complètement déterminée par la forme de la coupure à grande échelle. On retrouve donc l'absence d'universalité des propriétés de la vitesse à grande échelle.

4.2.1.3 Variance des incréments

De manière similaire à l'analyse de la DNS présentée au chapitre précédent, on calcule les incréments du CGF afin d'en étudier les statistiques. Ici dans un cadre uni-dimensionnel :

$$\delta_{\ell} u_{\varepsilon}(x) = u_{\varepsilon}(x+\ell) - u_{\varepsilon}(x). \tag{4.14}$$

On calcule alors la variance de ces incréments, et on étudie sa limite à $\varepsilon \to 0$ ainsi que son comportement en fonction de l'échelle ℓ .

De même que pour la variance de u_{ε} , le détail des calculs est précisé dans l'annexe C. On trouve premièrement que quelque soit la valeur de ε , la variance des incréments est constante à $\ell \gg L$ et vaut deux fois la variance du CGF :

$$\lim_{\ell \to +\infty} \mathbb{E}\left[\delta_{\ell} u_{\varepsilon}^{2}\right] = 2\sigma^{2}.$$
(4.15)

Ce résultat est assuré par la décroissance rapide de la fonction de coupure φ_L , et signifie que le champ de vitesse est décorrélé à grande échelle.

De la même manière, on trouve un équivalent de la variance des incréments à $\ell \to 0$, quelque soit la valeur de $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{E}\left[\delta_{\ell} u_{\varepsilon}^{2}\right] \underset{\ell \to 0}{\sim} \ell^{2} \mathbb{E}\left[\left(\partial_{x} u_{\varepsilon}\right)^{2}\right], \qquad (4.16)$$

où la proportionalité à ℓ^2 est caractéristique de la régularité du CGF dans ce régime.

On a donc montré la régularité du CGF en dessous de la petite échelle ε ainsi que sa décorrélation au dessus de la grande échelle L. On s'intéresse maintenant au comportement dans le régime inertiel, i.e. pour $\varepsilon \ll \ell \ll L$. Analytiquement, le calcul consiste à étudier l'existence successivement de la limite à $\varepsilon \to 0$ puis celle à $\ell \to 0$. On montre dans l'annexe C que la limite à viscosité nulle existe pour H > 0, comme pour la variance de la vitesse. On obtient en plus, sous la condition supplémentaire H < 1, un équivalent à $\ell \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left[\delta_{\ell} u_{\varepsilon}^{2}\right] = S_{2}(\ell) \underset{\ell \to 0}{\sim} C_{2} |\ell|^{2H}$$
(4.17)

avec
$$C_2 = \varphi_L^2(0) \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{|y+1|^{1/2-H}} - \frac{1}{|y|^{1/2-H}} \right]^2 \mathrm{d}y.$$
 (4.18)

Cette limite existe donc dans le cas H = 1/3 choisi pour modéliser la turbulence. La fonction de structure d'ordre deux du CGF présente alors une loi d'échelle d'exposant 2/3 dans le régime inertiel, conformément à la phénoménologie K41. Dans ce régime, le champ construit n'est plus

lisse mais de régularité höldérienne 1/3. On note ici l'importance de l'ordre des limites dans ce calcul.

En résumé, on a construit ici un champ de vitesse aléatoire qui reproduit les propriétés essentielles de la phénoménologie K41 de la turbulence homogène et isotrope. On souhaite maintenant réaliser numériquement un tel champ, afin de tester les prédictions analytique dans le cadre contraint du calcul numérique. Pour cela on procède comme pour l'analyse des signaux issus de la DNS au chapitre 3 : on calcule l'incrément à 20 échelles ℓ puis sa variance sur une réalisation du numérique du CGF, puis on moyenne sur 100 réalisations du champ aléatoire. La fonction de structure $S_2(\ell)$ obtenue est représentée sur la figure 4.1, pour deux tailles différentes et deux fonctions de coupure φ_L différentes.



Fig. 4.1 Fonction de structure d'ordre deux du CGF calculée numériquement pour deux tailles de simulation : $N = 2^{23}$ (a) et $N = 2^{10}$ (b). Dans chaque cas le CGF est simulé en utilisant une coupure grande échelle gaussienne (tirets rouges) et «bump» (trait plein bleu). La variance des incréments est moyennée sur 100 réalisations du champ. En pointillés sont tracées les lois d'échelles asymptotiques des régimes inertiel et dissipatif.

Sur la figure 4.1 avec $N = 2^{23}$ points on observe bien la loi d'échelle en ℓ^2 dans le régime dissipatif ainsi que celle en $\ell^{2/3}$ dans le régime inertiel. On note une forme particulière pour la saturation à grande échelle, que l'on n'observait pas au chapitre 3 pour la DNS. En effet la fonction de structure présente une concavité à la limite supérieure du régime inertiel, où elle augmente subitement pour atteindre la saturation à $2\sigma^2$. Nous avons dans un premier temps suspecté la coupure à grande échelle en forme de «bump» d'être à l'origine de cette concavité (en trait plein bleu sur la figure 4.1. Cependant un second test avec une coupure gaussienne (en tirets rouges sur la figure 4.1) présente la même concavité. Nous n'avons à ce jour pas d'explication pour ce phénomène, et nous poursuivrons les calculs numériques avec une coupure à grande échelle de type «bump». Les statistiques de petite échelle étant uniquement déterminées par $\varphi_L(0)$, ce choix peut être fait sans perte de généralité pour la suite de la discussion.

Le cadre (b) de la figure 4.1 montre le résultat pour une évaluation du CGF sur $N = 2^{10}$ points, i.e. la même résolution que la DNS présentée au chapitre 3. On observe la loi d'échelle attendue dans le régime dissipatif ainsi que la saturation à $2\sigma^2$ à grande échelle. En revanche le comportement inertiel dévie fortement de la prédiction en $\ell^{2/3}$. On interprète cette déviation comme un effet de taille finie du régime inertiel. En effet des tests sur des tailles de simulation plus grandes ont montré que la bonne loi d'échelle est en fait observable pour des régimes inertiels plus larges, comme sur le cadre (a) de la figure 4.1 avec $N = 2^{23}$ points. Une telle taille donne un régime inertiel de près de quatre décades, ce qui est très grand comparé à ce qui est observé pour des DNS, même de haute résolution – on observait deux décades au maximum au chapitre 3. Cependant il semble que les effets de courbure des coupures à petite et grande échelle soient beaucoup plus important dans le cadre aléatoire que dans une DNS des équations de Navier-Stokes. Pour cela, nous avons choisi de poursuivre les tests numériques sur $N = 2^{23}$ points afin d'observer les lois d'échelles attendues. Même si les régimes inertiels alors représentés sont de taille irréaliste comparé à la plupart des DNS actuelles, ils restent envisageables dans certaines expériences [111].

4.2.1.4 Limites du CGF : aux ordres supérieurs

Nous avons construit un champ synthétique capable de reproduire les propriétés statistiques essentielles de la phénoménologie K41. Cependant, ce champ est construit linéairement à partir d'un processus gaussien. Ainsi il sera impossible de modéliser avec le CGF les propriétés d'intermittence de la vitesse, qui sont des comportements typiquement non-gaussiens.

En particulier, on montre dans l'annexe C que les moments d'ordre 3 et 4 du CGF sont respectivement nuls ou triviaux : la skewness est nulle à toute les échelles, et la flatness est constante et égale à 3. On vérifie numériquement ces résultats sur la figure 4.2. On retrouve bien une skewness nulle et une flatness égale à 3, aux problèmes de convergence près à grande échelle.



Fig. 4.2 Moment d'ordre 2 (a), skewness (b) et flatness (c) du CGF réalisé sur $N = 2^{23}$ points. La fonction de coupure à grande échelle est une fonction «bump» et les statistiques sont moyennées sur 100 réalisations.

Pour modéliser l'intermittence de la vitesse, on devra donc apporter des modifications nongaussiennes au CGF afin de reproduire les statistiques d'ordres 3 et 4 observées pour la DNS au chapitre 3. Ces modifications sont présentées dans la partie 4.3 pour la flatness et dans la partie 4.4 pour la skewness.

4.2.2 Généralisation à deux dimensions

Nous avons pour l'instant seulement construit un champ aléatoire à une dimension, or notre objectif est de généraliser les modélisations stochastiques de la littérature [103,109] à un cadre à une dimension d'espace et une dimension de temps. Avant d'implémenter les corrections intermittentes au CGF on cherche donc à le généraliser au cas bi-dimensionnel :

$$u_{\varepsilon}(x,t) = \iint_{\mathbb{R}^2} \Phi_{\varepsilon}(x-x',t-t')W(\mathrm{d}x',\mathrm{d}t'), \qquad (4.19)$$

où les variables x et t sont sans dimension, comme expliqué dans la partie 4.1.2.2. Afin de faire cette généralisation, on se base sur une mesure blanche gaussienne à deux dimensions W(dx', dt'). On cherche ensuite à écrire une version du noyau de lissage Φ_{ε} comme une fonction des deux variables x et t. Le choix de la forme de Φ_{ε} à deux dimensions nous est aiguillée par l'analyse spatio-temporelle de la DNS au chapitre 3.

L'étude des corrélations spatio-temporelle de la DNS avait aboutit à un cadre adimensionné par les échelles de Taylor spatiale et temporelle λ et τ_{λ} respectivement, afin d'éliminer l'«anisotropie» spatio-temporelle aux petites échelles. Dans ce cadre adimensionné nous avions observé que les corrélations aux petites échelles étaient isotropes, c'est-à-dire que la dépendance en ℓ , τ de la fonction de corrélation spatio-temporelle pouvait se résumer à une dépendance en $\sqrt{(\ell/\lambda)^2 + (\tau/\tau_\lambda)^2}$. Cette dépendance «radiale» nous a suggéré de choisir pour l'expression de Φ_{ε} la forme suivante :

$$\Phi_{\varepsilon}(x,t) = \frac{\varphi_L\left(|(x,t)|\right)}{|(x,t)|_{\varepsilon}^{1-H}},\tag{4.20}$$

où $|\cdot|_{\varepsilon}$ est construite sur la norme $|(x,t)| = \sqrt{x^2 + t^2}$, de manière similaire à l'équation (4.11). Le passage à l'exposant 1 - H vient de la dimensionalité d = 2. On construit ainsi un CGF à deux dimensions parfaitement isotrope. On exclue donc pour l'instant la modélisation de l'anisotropie spatio-temporelle observée dans la DNS au chapitre 3, afin de se concentrer sur le passage à deux dimensions des propriétés modélisées jusqu'ici. L'anisotropie pourra être ajoutée par la suite, par exemple en remplaçant la norme 2 dans l'expression de $\Phi_{\varepsilon}(x,t)$ par une version anisotrope [112]. Une telle implémentation de l'anisotropie est l'objet de la partie 4.5.1.

Numériquement, l'évaluation du CGF à deux dimensions se fait de la même manière que pour le cas uni-dimensionnel. La seule contrainte est que l'on ne peut conserver le même nombre de points par dimension : une réalisation du champ aléatoire sur $2^{23} \times 2^{23}$ points serait complètement irréaliste en terme de mémoire et de temps de calcul. Nous avons donc choisit comme résolution $2^{15} \times 2^{15}$ points, ce qui représente un bon compromis entre faisabilité des calculs numériques et taille du régime inertiel. Un exemple de réalisation numérique du CGF est repésenté sur la figure 4.3.



Fig. 4.3 Exemple de réalisation numérique du CGF à deux dimensions sur $2^{15} \times 2^{15}$ points, tel que définit à l'équation (4.19).

Comme pour l'analyse de la DNS au chapitre 3, l'analyse des propriétés statistiques du CGF se base sur l'incrément bi-dimensionnel du champ de vitesse :

$$\delta_{\ell} u_{\varepsilon}(x,t) = u_{\varepsilon}(x+\ell,t+\tau) - u_{\varepsilon}(x,t), \qquad (4.21)$$

où (ℓ, τ) est le vecteur d'incrément à deux dimensions. On rappelle que le champ u_{ε} manipulé ici est un champ scalaire : on ne modélise que la composante longitudinale de la vitesse. En utilisant un noyau $\Phi_{\varepsilon}(x, t)$ isotrope, on s'attend à ce que les statistiques des incréments bi-dimensionnels ne dépendent pas de la direction de (ℓ, τ) . En effet on montre dans l'annexe C qu'en passant par un changement de variables aux coordonnées polaires on retrouve les mêmes résultats que dans le cadre uni-dimensionnel, à un facteur multiplicatif π près. On représente les résultats de l'analyse des statistiques à deux dimensions sur la figure 4.4.



Fig. 4.4 Statistiques d'ordre 2 (a), 3 (b) et 4 (c) pour le CGF à deux dimensions isotropes. Le champ est évalué sur une grille de $2^{15} \times 2^{15}$ points, et les statistiques sont moyennées sur dix réalisations. L'abscisse $\xi = |(\ell, \tau)|/L$ correspond à l'échelle de calcul de l'incrément normalisée par la grande échelle. Comme pour l'étude de la DNS au chapitre 3, on calcule les incréments suivant la direction de chaque axe du plan des échelles, plus trois directions intermédiaires entre ces deux axes. Les courbes intermédiaires correspondent à des coupes d'angles $\pi/8$, $\pi/4$ et $3\pi/8$ dans le plan $\ell - \tau$ adimensionné par les échelles de Taylor, comme expliqué au chapitre 3.

On retrouve alors bien l'isotropie prévue analytiquement. En effet la fonction de structure d'ordre deux sur la figure 4.4 (a) est identique quelque soit la direction choisie pour le calcul des incréments. Sur les cadres (b) et (c) on retrouve le caractère gaussien du CGF : la skewness est nulle et la flatness égale à 3 dans toutes les directions.

4.3 Modélisation de la flatness : le Chaos Multiplicatif Gaussien

Nous avons construit dans la partie précédente une généralisation à deux dimensions d'une approximation gaussienne d'un champ de vitesse turbulent. Ce premier modèle aléatoire reproduit les propriétés de la phénoménologie K41. Cependant à cause de sa nature gaussienne nous avons montré que le CGF était incapable de modéliser les corrections intermittentes, que ce soit l'asymétrie ou la flatness des incréments. On se propose donc maintenant d'apporter des modifications à la brique élémentaire que constitue le CGF afin de pouvoir modéliser les comportements typiquement non-gaussiens que représentent l'intermittence.

Dans cette partie, on présente un premier essai de correction intermittente du CGF. Nous allons montrer que cette première correction permet de modéliser une partie des propriétés nongaussiennes de la turbulence, mais qu'elle reste insuffisante pour modéliser la skewness de la vitesse notamment. De la même manière qu'à la partie précédente, on s'inspire des modélisations aléatoires proposées par la littérature [103, 109] dans un cadre uni-dimensionnel. Après avoir montré quelles propriétés sont reproduites par ce modèle et les avoir vérifiées numériquement, on généralisera au cas bi-dimensionnel.

Le modèle étudié dans cette partie reprend comme base le CGF de la partie précédente, dans lequel on perturbe la mesure blanche gaussienne W par un terme multiplicatif non-gaussien. Dans ce modèle le champ de vitesse prend la forme suivante :

$$u_{\varepsilon}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_L(x-y)}{|x-y|_{\varepsilon}^{-1/2-H}} \Gamma_{\varepsilon}(y) W(\mathrm{d}y)$$
(4.22)

avec
$$\Gamma_{\varepsilon}(y) = \exp\left(\gamma X_{\varepsilon}(y) - \gamma^2 \mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^2\right]\right),$$
 (4.23)

où φ_L , $|\cdot|_{\varepsilon}$ et H sont identiques au modèle du CGF. Le terme supplémentaire $\Gamma_{\varepsilon}(y)$ est construit sur le CGF log-corrélé X_{ε} :

$$X_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{|x-y| \leq L} \frac{1}{|x-y|_{\varepsilon}^{1/2}} \widetilde{W}(\mathrm{d}y), \qquad (4.24)$$

où \widetilde{W} est une mesure blanche gaussienne indépendante de W. Le champ X_{ε} apparaît comme un CGF d'exposant de Hölder H = 0. L'appellation «CGF log-corrélé» vient de la forme des corrélations de ce champ, qui est essentielle à l'obtention de corrections intermittentes réalistes. L'étude de ces corrélations est présentée dans la partie 4.3.1.2. Le paramètre γ pilote l'intensité de l'intermittence, et on l'ajustera pour retrouver le coefficient d'intermittence observé dans la DNS au chapitre 3 dans le cadre du modèle log-normal. Le terme $\Gamma_{\varepsilon}(y)$ apparaît donc comme une perturbation multiplicative non-gaussienne de la mesure W(dy), et est construite comme l'exponentielle du champ gaussien log-corrélé $X_{\varepsilon}(y)$. Cette perturbation est appelée *Chaos Multiplicatif Gaussien* (CMG) et est l'ingrédient essentiel de la modélisation des corrections intermittentes [113].

4.3.1 Le CGF log-corrélé

On commence ici par étudier le CGF log-corrélé X_{ε} , notamment en explicitant sa variance et la structure de ses corrélations. Ces propriétés permettront de justifier la forme du CMG utilisé pour modéliser les corrections intermittentes de la phénoménologie K41.

4.3.1.1 Variance

Le champ X_{ε} est défini à l'équation (4.24) comme un CGF d'exposant de Hölder H = 0. Nous avons montré dans la partie 4.2.1.2 que le CGF admettait une variance finie dans la limite de viscosité nulle que pour H > 0. On s'attend donc par cette définition à ce que la variance de X_{ε} n'admette pas de limite finie quand $\varepsilon \to 0$.

On montre en effet dans l'annexe D que cette variance diverge dans la limite $\varepsilon \to 0$. On obtient en plus le comportement asymptotique en ε , qui est indépendant de la forme de la régularisation à petite échelle :

$$\mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^{2}\right] \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} \log\left(\frac{L}{\varepsilon}\right).$$
(4.25)

Cette divergence est problématique pour le passage à la limite de viscosité nulle dans le calcul des statistiques du champ de vitesse. On verra dans la partie 4.3.2.4 que ce problème est réglé par la présence du terme de normalisation en $\gamma^2 \mathbb{E} \left[X_{\varepsilon}^2 \right]$ dans la définition du CMG à l'équation (4.23).

4.3.1.2 Corrélation

Le modèle de champ aléatoire avec CMG se base sur la forme des corrélations de X_{ε} pour reproduire les corrections intermittentes observées. On calcule dans l'annexe D la fonction de corrélation $\mathbb{E}[X_{\varepsilon}(x)X_{\varepsilon}(y)]$, et on montre que pour $x \neq y$ elle admet une limite finie $C_X(|x-y|)$ quand $\varepsilon \to 0$. On obtient de plus un équivalent dans le cas des petites échelles $|x-y| \to 0$, de manière indépendante de la forme de la régularisation à petite échelle :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E} \left[X_{\varepsilon}(x) X_{\varepsilon}(y) \right] = C_X(|x-y|) \underset{|x-y| \to 0}{\sim} \log \left(\frac{L}{|x-y|} \right).$$
(4.26)

Le champ X_{ε} est donc bien un CGF *log-corrélé*, de par la divergence logarithmique de sa corrélation aux petites échelles. Cette divergence est universelle, puisqu'elle ne dépend ni de la coupure à grande échelle ni de la régularisation à petite échelle. On montrera dans la partie 4.3.2.4 que cette forme logarithmique permet d'obtenir une correction intermittente sous la forme d'une loi d'échelle pilotée par le paramètre d'intermittence γ . Dans le cadre des réalisations numérique du champ aléatoire $u_{\varepsilon}(x)$, le choix particulier de la régularisation à petite échelle $|x|_{\varepsilon} = \sqrt{x^2 + \varepsilon^2}$ nous permet de donner une forme analytique à $C_X(|x-y|)$. On montre dans l'annexe D que dans ce choix de régularisation on a :

$$C_X(|x-y|) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x-y| \leq 2L\\ \arcsin\left(\frac{2L}{|x-y|} - 1\right) & \text{si } L < |x-y| < 2L\\ \frac{\pi}{2} + \operatorname{argch}\left(\frac{2L}{|x-y|} - 1\right) & \text{si } |x-y| < L \end{cases}$$
(4.27)

On peut alors vérifier numériquement cette expression en la comparant à une estimation directe de la fonction de corrélation $\mathbb{E}[X_{\varepsilon}(x)X_{\varepsilon}(y)]$ dans la limite des petits ε . On représente le résultat de cette comparaison sur la figure 4.5 : on trouve un bon accord aux erreurs de convergence à grande échelle près.



Fig. 4.5 Comparaison de l'estimation numérique (en trait plein bleu) de la fonction de corrélation du champ X_{ε} à la prédiction analytique (tirets rouges) de l'équation (4.27). La fonction de corrélation C_X est estimée dans l'espace de fourier à l'aide du théorème de Wiener-Khintchine, puis moyennée sur cent réalisations du champ X_{ε} . On approche numériquement la limite $\varepsilon \to 0$ en prenant $\varepsilon = 0.1 dx$.

4.3.2 Construction d'un champ intermittent

On montre maintenant comment les propriétés du champ X_{ε} permettent, à travers le CMG présenté à l'équation (4.23) de modéliser une partie des propriétés intermittentes étudiées au chapitre 3. Nous allons voir que l'indépendance des mesures W et \widetilde{W} sur lesquelles sont construits les champs u_{ε} et X_{ε} respectivement permet de retrouver la plupart des propriétés du CGF simple tout en incorporant des comportements non-gaussiens.

Notons que le champ X_{ε} étant défini comme une convolution sur une mesure gaussienne W, les champs construits ici sont toujours statistiquement homogènes et isotropes.

4.3.2.1 Variance

Le détail du calcul de la variance du nouveau champ de vitesse est présenté dans l'annexe D. L'indépendance des mesures W et \widetilde{W} permet de factoriser les espérances et de faire apparaître la variance du CMG Γ_{ε} . On note alors l'importance du facteur de normalisation $\exp\left(\gamma^2 \mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^2\right]\right)$. En effet la variance de Γ_{ε} est unitaire quelle que soit la valeur de ε , ce qui régularise la divergence de $\mathbb{E}[X_{\varepsilon}^2]$ dans la limite de viscosité nulle. On montre alors que la variance du champ de vitesse admet une limite finie à $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left[u_{\varepsilon}^{2}\right] = \sigma^{2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_{L}^{2}(y)}{|y|^{1-2H}} \mathrm{d}y < +\infty.$$
(4.28)

Cette limite est la même que dans le cas du CGF à l'équation (4.13) et est obtenue sous la même condition H > 0. La perturbation par le CMG n'affecte donc pas la variance du champ de vitesse, grâce à l'indépendance des mesures gaussiennes et à la renormalisation soigneuse de $\Gamma_{\varepsilon}(y)$.

4.3.2.2 Variance des incréments

De la même manière que pour la variance de la vitesse, on montre dans l'annexe D que la variance des incréments admet une limite finie à $\varepsilon \to 0$ pour H > 0. Comme pour le CGF, on obtient pour 0 < H < 1 un équivalent à $\ell \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left[\delta_{\ell} u_{\varepsilon}^{2}\right] = S_{2}(\ell) \underset{\ell \to 0}{\sim} C_{2} |\ell|^{2H}$$

$$(4.29)$$

avec
$$C_2 = \varphi_L^2(0) \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{|y+1|^{1/2-H}} - \frac{1}{|y|^{1/2-H}} \right]^2 \mathrm{d}y.$$
 (4.30)

La perturbation par le CMG laisse donc inchangées les statistiques d'ordre deux du champ de vitesse. En particulier, elle ne permet pas de modéliser la correction intermittente à la variance des incréments : on retrouve pour H = 1/3 la loi des 2/3 de la phénoménologie K41.

On vérifie numériquement ce comportement d'ordre 2 sur la figure 4.6 (a).

4.3.2.3 Ordre 3 : skewness

On a montré que l'indépendance des mesures gaussiennes dans la définition du champ $u_{\varepsilon}(x)$ conservait les propriétés statistiques d'ordre 2 du CGF. On montre dans l'annexe D qu'il en va de même pour les statistiques d'ordre 3, et que la skewness du CGF modifié est toujours nulle. La modification que nous avons apportée ici ne permet donc pas de modéliser les propriétés intermittentes d'ordre 3. L'implémentation de ces propriétés sera l'objet de la partie 4.4.

On vérifie numériquement l'absence de skewness du CGF modifié sur la figure 4.6 (b).

4.3.2.4 Ordre 4 : flatness

Jusqu'à présent l'application du CMG ne change aucune propriété statistique du CGF. On montre dans cette partie que les corrections notables apportées par le CMG apparaissent à l'ordre quatre, et permettent de reproduire la flatness observée dans les signaux de vitesse issus de la DNS. Pour cela on calcule dans l'annexe D le moment d'ordre quatre des incréments. On montre, sous des conditions précises, l'existence de la limite à $\varepsilon \to 0$ ainsi que le comportement aux petites échelles :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left[\delta_{\ell} u_{\varepsilon}^{4}\right] = S_{4}(\ell) \underset{\ell \to 0}{\sim} C_{4}|\ell|^{4H-4\gamma^{2}} \quad \text{si} \quad \begin{cases} 0 < H < 1\\ \gamma < 1/2 \\ \gamma^{2} < H \end{cases}$$
(4.31)

avec
$$C_4 = 3\varphi_L^4(0)e^{4\gamma^2 g(0)} \iint_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|y+1|^{1/2-H}} - \frac{1}{|y|^{1/2-H}} \right]^2 \left[\frac{1}{|z+1|^{1/2-H}} - \frac{1}{|z|^{1/2-H}} \right]^2 \left| \frac{L}{y-z} \right|^{4\gamma^2} dy dz.$$
 (4.32)

La corrélation en log du champ X_{ε} montrée dans la partie 4.3.1.2 permet d'obtenir la correction d'exposant $-4\gamma^2$ à la loi d'échelle d'ordre quatre, au prix de conditions de convergence supplémetaires sur le paramètre d'intermittence γ . Plus généralement, on peut montrer [103] l'expression générale de l'exposant ζ_q de la loi d'échelle du moment d'ordre q dans le régime inertiel :

$$\mathbb{E}\left[\left(\delta_{\ell} u_{\varepsilon}\right)^{q}\right] \lim_{\varepsilon \to 0} S_{q}(\ell) \underset{\ell \to 0}{\sim} \ell^{\zeta_{q}}$$

$$(4.33)$$

où
$$\zeta_q = qH - q(q-2)\frac{\gamma^2}{2}$$
 (4.34)

On peut alors calculer la flatness du champ aléatoire :

$$\mathcal{F}(\ell) = \frac{S_4(\ell)}{S_2^{\ 2}(\ell)} \underset{\ell \to 0}{\sim} \frac{C_4}{C_2^{\ 2}} |\ell|^{-4\gamma^2}, \qquad (4.35)$$

où C_2 et C_4 sont les constantes définies aux équations (4.18) et (4.32) respectivement. Ce sont des constantes non-universelles, au sens où elles dépendent de la forme de la coupure à grande échelle φ_L . On obtient donc bien une correction intermittente sur la flatness, et on voit que le paramètre γ est lié au coefficient d'intermittence c_2 du modèle log-normal par la relation $\gamma^2 = c_2$. Pour modéliser les statistiques observées dans la DNS au chapitre 3 on prendra pour valeur des paramètres H = 1/3 et $\gamma^2 = 0.03$, ce qui valide bien les conditions d'existence des limites à $\varepsilon \to 0$ et $\ell \to 0$.

On teste numériquement cette correction intermittente. Le résultat est présenté sur la figure 4.6 (c).



Fig. 4.6 Statistiques d'orde 2 (a), 3 (b) et 4 (c) du CMG modifié par un chaos multiplicatif indépendant. Le champ est réalisé sur 2^{23} points et les incréments calculés sur 20 points d'échelle espacés logarithmiquement entre le pas de la grille et la moitié u domaine. Les statistiques sont moyennées sur 100 réalisations.

On observe efectivement une loi d'échelle proche de $\ell^{-4\gamma^2}$ pour la flatness dans le régime inertiel. Cependant le comportement à la transition avec le régime dissipatif est différente de celui qui était observé dans la DNS au 3. En effet ici la flatness sature directement à une valeur constante, et ne présente pas l'augmentation rapide typique du régime dissipatif intermédiaire [114] que l'on avait observé pour la DNS. Cette saturation directe est une faiblesse de notre modélisation telle que présentée ici, et nous ne savons pas à ce jour comment reproduire l'augmentation rapide de la flatness dans le régime dissipatif intermédiaire avec ce champ aléatoire.

4.3.3 Généralisation à deux dimensions

On a montré dans un cadre uni-dimensionnel que la perturbation du CGF par le CMG ainsi implémentée permettait de modéliser la correction intermittente sur la flatness observée dans la DNS, mais qu'elle échoue à reproduire les corrections aux ordres 2 et 3. De la même manière qu'à la partie 4.2.2, on va généraliser ce résultat à deux dimensions avant de chercher à modéliser les propriétés statistiques manquantes. En effet, on a observé au chapitre 3 une skewness non-nulle dans la direction longitudinale seulement. Afin de reproduire cette anisotropie entre les dimensions spatiale et temporelle, il nous faut déjà être capable de créer un champ aléatoire à deux dimensions reproduisant les propriétés précédentes.

On se base sur la construction isotrope de la partie 4.2.2, à laquelle on ajoute la perturbation par un CMG à deux dimensions :

$$u_{\varepsilon}(x,t) = \iint_{\mathbb{R}^2} \Phi_{\varepsilon}(x-x',t-t') \Gamma_{\varepsilon}(x',t') W\left(\mathrm{d}x',\mathrm{d}t'\right), \qquad (4.36)$$

avec
$$\Gamma_{\varepsilon}(x,t) = \exp\left(\gamma X_{\varepsilon}(x,t) - \gamma^2 \mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^2\right]\right)$$
 (4.37)

et
$$X_{\varepsilon}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{\mathbb{R}^2} k_{\varepsilon}(x-x',t-t') \widetilde{W}(\mathrm{d}x',\mathrm{d}t'),$$
 (4.38)

où Φ_{ε} est le noyau isotrope défini à l'équation (4.20), et $k_{\varepsilon}(x,t) = \frac{\mathbf{1}_{r \leq L}}{|(x,t)|_{\varepsilon}}$ la généralisation à deux dimensions isotropes du noyau de l'équation (4.24). De la même manière qu'à la partie 4.2.2, la construction isotrope de ce champ à deux dimensions permet d'effectuer un changement de variable en coordonnées polaires et de se ramener au cas unidimensionnel. Ici cependant, le facteur 2π introduit par l'intégration sur la variable d'angle polaire est à traiter soigneusement. En effet tout facteur multiplicatif dans la définition du champ X_{ε} se répercute dans son corrélation et donc dans l'exposant de la correction intermittente à l'ordre quatre. Ainsi, on renormalise le champ log-corrélé par un facteur $\sqrt{2\pi}$ à deux dimensions, comme défini à l'équation (4.38). Cette renormalisation adaptée au cas bidimensionnel isotrope permet de retrouver les mêmes résultats que dans le cas à une dimension quelque soit la direction choisie pour le calcul des incréments, comme pour le CGF à la partie 4.2.2.

On réalise numériquement le champ aléatoire défini par l'équation (4.36) afin de vérifier ces prédictions à deux dimensions isotropes. Un exemple de réalisation numérique de ce champ est représenté sur la figure 4.7, et comparé à la réalisation du CGF simple basé sur la même réalisation du bruit blanc gaussien W. Les différences sont subtiles dans cette représentation : il est difficile de discerner les deux version du champ aléatoire, même si leurs statistiques à petite échelle sont très différentes.

Comme pour la partie 4.2.2 on estime les moments d'ordre 2, 3 et 4 des incréments dans plusieurs directions du plan, en les moyennant sur dix réalisations du champ sur $2^{15} \times 2^{15}$ points. Les résultats de cette analyse sont consignés sur la figure 4.8.

On remarque comme pour le cas à une dimension présenté sur la figure 4.6(c) que la flatness présente une loi d'échelle en $x^{-4\gamma^2}$ dans le régime inertiel, et ici de manière beaucoup plus claire que dans le cas unidimensionnel. Cependant on note aussi l'absence d'augmentation rapide de la flatness dans le régime dissipatif intermédiaire, comme observé à une dimension. Cette caractéristique typique de l'intermittence aux très petites échelles [114] reste encore à modéliser dans l'état du champ aléatoire proposé ici.

4.4 Modélisation de la skewness

4.4.1 Le Chaos Multiplicatif Corrélé

Nous avons proposé dans la partie 4.3 un champ aléatoire à deux dimensions capable de reproduire la phénoménologie K41 ainsi que la correction intermittente à l'ordre quatre. Nous nous sommes pour cela inspirés des modélisations à une dimension proposées dans la littérature [103, 109], que nous avons ensuite généralisé à deux dimensions isotropes.



Fig. 4.7 Comparaison de deux versions du champ de vitesse aléatoire, réalisées sur une grille de $2^{15} \times 2^{15}$ points et basées sur les mêmes réalisations du bruit blanc gaussien W. (a) : CGF simple définit à l'équation (4.19). (b) : CGF modifié par un CMG indépendant, comme définit à l'équation (4.36).

On souhaite maintenant modéliser la skewness observée dans la DNS au chapitre 3. Nous avons vu que cette skewness ne se manifeste que pour les incréments longitudinaux, et est nulle dans le cas purement temporel. Cette skewness étant naturellement anisotrope en espace et en temps, nous nous proposons ici d'étudier directement un champ à deux dimensions x, t et d'implémenter la skewness suivant la direction x seulement.

Pour implémenter cette skewness nous nous sommes inspirées des propositions faites dans [109]. Le champ que nous avons choisi d'étudier est le suivant :

$$u_{\varepsilon}(x,t) = \iint_{\mathbb{R}^2} \Phi_{\varepsilon}(x-x',t-t') \Gamma_{\varepsilon}(x',t') W\left(\mathrm{d}x',\mathrm{d}t'\right), \qquad (4.39)$$

avec $\Gamma_{\varepsilon}(x,t) = \exp\left(\gamma X_{\varepsilon}(x,t) - \gamma^2 \mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^2\right]\right)$ (4.40)

et
$$X_{\varepsilon}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{k}_{\varepsilon}(x-x',t-t')W(\mathrm{d}x',\mathrm{d}t'),$$
 (4.41)

où $\tilde{k}_{\varepsilon}(x,t) = \frac{\operatorname{sgn}(x)}{|(x,t)|_{\varepsilon}} \mathbf{1}_{r \leq L}$ est la version impaire en x du noyau défini à l'équation (4.38). Le champ X_{ε} est dorénavant définit sur la même mesure gaussienne W que le champ de vitesse u_{ε} , ainsi que sur un noyau impair en x. Cette imparité couplée à la corrélation entre le CMG et W permet d'implémenter une skewness non nulle en x tout en gardant une skewness nulle en t.

4.4.2 Réalisation numérique

Nous commençons l'étude du processus (4.39) par une étude numérique de ses propriétés statistiques. Nous allons voir que ce processus reproduit numériquement les résultats de la phénoménologie de la turbulence de manière très satisfaisante, malgré des problèmes asymptotiques explicités dans la partie 4.4.3.

Comme pour les autres processus bi-dimensionnels, nous avons réalisé le champ aléatoire (4.39) sur une grille de $2^{15} \times 2^{15}$ points. Une réalisation de ce champ est représentée sur la figure 4.9, et comparé aux réalisations du CGF modifié sans skewness et du CGF simple. Les trois exemples sont basés sur la même réalisation du bruit blanc gaussien W, et leurs différences sont essentiellement visibles au petites échelles.

Pour chaque réalisation on calcule de même l'incrément bi-dimensionnel $\delta_{\ell}u(x,t) = u(x+\ell,t+\tau) - u(x,t)$ pour cinq directions de (ℓ,τ) dans le plan, comprenant les directions des axes x, t. On



Fig. 4.8 Statistiques d'ordre 2 (a), 3 (b) et 4 (c) pour le CGF à deux dimensions isotropes modifié par action du CGM. Le champ est évalué sur une grille de $2^{15} \times 2^{15}$ points, et les statistiques sont moyennées sur dix réalisations. L'abscisse $\xi = |(\ell, \tau)|/L$ correspond à l'échelle de calcul de l'incrément normalisée par la grande échelle. Comme pour l'étude de la DNS au chapitre 3, on calcule les incréments suivant la direction de chaque axe du plan des échelles, plus trois directions intermédiaires entre ces deux axes. Les courbes intermédiaires correspondent à des coupes d'angles $\pi/8$, $\pi/4$ et $3\pi/8$ dans le plan $\ell - \tau$ adimensionné par les échelles de Taylor, comme expliqué au chapitre 3.



Fig. 4.9 Comparaison de trois versions du champ de vitesse aléatoire, toutes réalisées sur une grille de $2^{15} \times 2^{15}$ points et basées sur les mêmes réalisations du bruit blanc gaussiens W. (a) : CGF simple définit à l'équation (4.19). (b) : CGF modifié par un CMG indépendant, comme définit à l'équation (4.36). (c) : première proposition de champ intermittent avec skewness, définie à l'équation (4.39).

calcule à partir de cet incrément les fonctions de structure aux ordres 2, 3 et 4 puis la skewness et la flatness du champ de vitesse. Les statistiques sont ensuite moyennées sur dix réalisations du champ aléatoire. Les résultats de cette analyse sont représentés sur la figure 4.10.

On retrouve les lois d'échelles en ℓ^2 et ℓ^{2H} à l'ordre 2, quelque soit la direction choisie pour le calcul de l'incrément. Le champ aléatoire construit ici est donc toujours isotrope à l'ordre 2 malgré l'utilisation d'un noyau asymétrique pour le champ log-corrélé à l'équation (4.41); il ne présente cependant toujours pas de correction intermittente à cet ordre.

À l'ordre 3 on constate une skewness nulle dans la direction t, et maximale dans la direction x. La skewness prend des valeurs continues entre ces deux limites pour des directions intermédiaires entre les deux axes. On constate cependant que la skewness n'est pas nulle à grande échelle, ce qui est probablement dû à un problème de convergence statistique.

À l'ordre 4 on observe bien une loi d'échelle en $\ell^{-4\gamma^2}$ pour la flatness, et ce quelque soit la direction de l'incrément. On note des différences à petite échelle où la direction spatiale x semble présenter des valeurs de flatness légèrement supérieures à la direction temporelle t.



Fig. 4.10 Statistiques d'ordre 2 (a), 3 (b) et 4 (c) pour le champ aléatoire intermittent avec skewness. Le champ est évalué sur une grille de $2^{15} \times 2^{15}$ points, et les statistiques sont moyennées sur dix réalisations. L'abscisse $\xi = |(\ell, \tau)|/L$ correspond à l'échelle de calcul de l'incrément normalisée par la grande échelle. Comme pour l'étude de la DNS au chapitre 3, on calcule les incréments suivant la direction de chaque axe du plan des échelles, plus trois directions intermédiaires entre ces deux axes. Les courbes intermédiaires correspondent à des coupes d'angles $\pi/8$, $\pi/4$ et $3\pi/8$ dans le plan $\ell - \tau$ adimensionné par les échelles de Taylor, comme expliqué au chapitre 3.

4.4.3 Problèmes dans la limite de viscosité nulle

Les réalisations numériques du champ (4.39) semblent reproduire de manière convainquante les statistiques spatio-temporelle observée dans la DNS au chapitre 3. Cependant il est démontré dans [109] qu'un tel processus présente, dans sa version uni-dimensionnelle, de nombreux problèmes au moment de passer à la limite $\varepsilon \to 0$. Nous avons tout de même tenu à étudier le champ proposé à l'équation (4.39) afin de déterminer si ces problèmes asymptotiques sont lié à la dimensionalité du problème. Nous montrons dans cette partie que ces difficultés sont aussi retrouvées à deux dimensions.

4.4.3.1 Moyenne

La corrélation entre le CMG et la mesure gaussienne W à l'équation (4.39) complique le calcul des espérances de produits de variables aléatoire. Pour tous les calculs relatifs à cette partie on utilise le lemme d'intégration gaussienne par parties présenté dans [110]. À l'aide de ce lemme on montre dans l'annexe \mathbf{E} que le processus u_{ε} est toujours de moyenne nulle, grâce à l'imparité du noyau sur lequel est construit le champ intermédiaire X_{ε} . Cette propriété est conservée quelque soit la valeur de ε .

4.4.3.2 Variance de la vitesse

On montre dans l'annexe E que la variance du champ de vitesse u_{ε} admet une limite finie à $\varepsilon \to 0$ sous les mêmes conditions que le CGF :

$$\mathbb{E}\left[u_{\varepsilon}^{2}\right] \underset{\varepsilon \to 0}{\to} \sigma^{2}\left(1 - \gamma^{2}L^{\gamma^{2}}e^{\gamma^{2}g(0)}\int_{0}^{+\infty}\frac{h^{1-\gamma^{2}}}{\left|h\right|_{1}^{2}}\mathrm{d}h\right) < +\infty,$$

$$(4.42)$$

où σ^2 est la limite de la variance trouvée pour le CGF à la partie 4.2.1.2. Cette limite dépend d'une part de la forme de la fonction de coupure grande échelle, comme dans le cas du CGF. On montre en plus qu'elle dépend de la forme de la régularisation à petite échelle $|\cdot|_1$, ce qui n'était pas le cas du CGF même modifié par le CMG. Cette dépendance en la régularisation de petite échelle est problématique pour une modélisation de la turbulence, puisqu'elle est en contradiction avec une variance indépendante de la viscosité dans la limite des Reynolds infinis. Le champ de vitesse ainsi construit ne reproduit donc pas de manière universelle le comportement aux petites échelles de la turbulence.

4.4.3.3 Variance des incréments

Comme pour la variance, on montre dans l'annexe E que la fonction de structure d'ordre 2 admet une limite finie à viscosité nulle, sous les mêmes conditions que le CGF :

$$\mathbb{E}\left[\delta_{\ell} u_{\varepsilon}^{2}\right] \underset{\varepsilon \to 0}{\to} S_{2}(\ell) \left(1 - \gamma^{2} L^{\gamma^{2}} e^{\gamma^{2} g(0)} \int_{0}^{+\infty} \frac{h^{1-\gamma^{2}}}{\left|h\right|_{1}^{2}} \mathrm{d}h\right) < +\infty,$$

$$(4.43)$$

où $S_2(\ell)$ est la limite à $\varepsilon \to 0$ de la fonction de structure du CGF explicitée dans la partie 4.2.1.3. En particulier on retrouve les lois d'échelles en ℓ^2 et ℓ^{2H} dans les régimes dissipatifs et inertiels, et ce quelque soit la direction choisie pour l'incrément. Cette prédiction est cohérente avec les observations numériques présentées sur la figure 4.10 (a) : les statistiques d'ordre 2 sont isotropes, mais on ne reproduit pas ici les corrections intermittentes à l'ordre 2. De plus on note le même facteur correctif que pour la variance, dépendant de la régularisation à petite échelle et donc en contradiction avec une variance indépendante de la viscosité à Re $\to +\infty$.

4.4.3.4 Moment d'ordre 3 et skewness

L'imparité du noyau du champ X_{ε} à l'équation (4.41) joue un rôle fondamental dans les statistiques d'ordre 3, tout comme elle permet la moyenne nulle du champ de vitesse. En effet on montre dans l'annexe E que le moment d'ordre 3, et donc la skewness sont nuls quelque soit ε dans la direction t, et négatifs dans les autres directions :

$$\mathbb{E}\left[\delta_{\ell} u_{\varepsilon}^{3}\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell = 0\\ S_{3,\varepsilon}(\ell,\tau) < 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
(4.44)

On retrouve donc la propriété observée numériquement sur la figure 4.10(b). La direction x modélise donc la direction temporelle de la DNS, et la direction y modélise la direction longitudinale.

Cependant comme pour les propriétés d'ordre 2, la skewness devient problématique à viscosité nulle. En effet on montre dans l'annexe E que la skewness tend vers une limite nulle à $\varepsilon \to 0$, et ce quelle que soit la direction :

$$\mathbb{E}\left[\delta_{\ell} u_{\varepsilon}^{2}\right] \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0 \quad \forall (\ell, \tau) \in \mathbb{R}^{2}.$$

$$(4.45)$$

La skewness du champ construit disparaît donc à viscosité nulle, ce qui est en contradiction avec la loi des quatre-cinquièmes.

On a donc construit un champ bi-dimensionnel, qui bien que donnant numériquement une image satisfaisante des statistiques de la DNS, est profondément non-universel dans la limite de viscosité nulle. Une telle descritpion de la turbulence n'est pas satisfaisante, et pour cela nous n'avons pas poussé à l'ordre 4 les calculs analytiques sur ce champ. On note sur la figure 4.10(c) que la flatness semble présenter les bonnes propriétés intermittentes et isotropes numériquement et à viscosité finie, mais nous n'avons pas cherché à retrouver ces résultats par le calcul.

4.4.4 Nouvelle proposition

Le processus proposé à l'équation (4.39) donne une image satisfaisante de la phénoménologie de la turbulence dans le cadre de réalisations numériques. Cependant nous avons montré qu'il conservait à deux dimensions des problèmes d'universalité déjà observé à une dimension dans la littérature [109], dans la limite de viscosité nulle. Afin de modéliser correctement l'aspect universel des propriétés statistiques de la turbulence, nous proposons une dernière version du champ aléatoire à deux dimensions :

$$u_{\varepsilon}(x,t) = \iint_{\mathbb{R}^2} \Phi_{\varepsilon}(x-x',t-t') Y_{\varepsilon}(x',t') \Gamma_{\varepsilon}(x',t') W\left(\mathrm{d}x',\mathrm{d}t'\right), \tag{4.46}$$

avec
$$Y_{\varepsilon}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{k}_{\varepsilon}(x-x',t-t') \Gamma_{\varepsilon}(x',t') W(\mathrm{d}x',\mathrm{d}t'),$$
 (4.47)

$$\Gamma_{\varepsilon}(x,t) = \exp\left(\gamma X_{\varepsilon}(x,t) - \gamma^{2} \mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^{2}\right]\right), \qquad (4.48)$$

et
$$X_{\varepsilon}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{k}_{\varepsilon}(x-x',t-t') \widetilde{W}(\mathrm{d}x',\mathrm{d}t'),$$
 (4.49)

où le champ Y_{ε} est construit sur la même mesure gaussienne W que le champ de vitesse, mais le champ X_{ε} est construit sur une mesure gaussienne indépendante \widetilde{W} . Ces deux champs sont construits par le noyau impair $\widetilde{k}_{\varepsilon}$ défini à l'équation (4.41).

Cette proposition est une généralisation à deux dimensions du processus proposé dans [109] pour régler les problèmes d'universalité du champ précédent. Dans le cadre de cette thèse, nous n'avons pas encore développé les calculs pour prouver que cette version à deux dimensions permet de régler les problèmes du champ (4.39). Cependant nous avons pu le tester numériquement et le comparer aux résultats du champ non-universel présentés sur la figure 4.10. Une réalisation de cette nouvelle proposition est présentée sur la figure 4.11(d), et est comparée aux trois versions précédentes (a-c) du champ aléatoire réalisées sur le même bruit blanc gaussien W. Si ces trois dernières versions étaient difficilement discernables à l'oeil, la dernière proposition se distingue clairement aux grandes comme aux petites échelles.



Fig. 4.11 Comparaison des quatres versions du champ de vitesse aléatoire, toutes réalisées sur une grille de $2^{15} \times 2^{15}$ points et basées sur les mêmes réalisations des bruits blancs gaussiens W et \widetilde{W} . (a) : CGF simple définit à l'équation (4.19). (b) : CGF modifié par un CMG indépendant, comme définit à l'équation (4.36). (c) : première proposition de champ intermittent avec skewness, définie à l'équation (4.39). (d) : seconde proposition de champ intermittent avec skewness, définie à l'équation (4.46). Les champs (a-c) sont réalisés en prenant les valeurs de paramètres H = 1/3, $\gamma^2 = 0.03$ utilisées jusqu'ici. Le champ (d) est réalisé en prenant H = 0.355, $\gamma^2 = 0.0075$ afin de pouvoir comparer les lois statistiques à celles des champs précédents et de la DNS, comme expliqué dans le texte pour la discussion de la figure 4.12.

Tout comme pour les champs bi-dimensionnels précédents, on calcule les incréments du champ de vitesse dans plusieurs directions du plan afin d'estimer les statistiques d'ordres 2, 3 et 4. Les résultats de ces estimations sont présentés sur la figure 4.12.

On retrouve une image proche de celle donnée par la première proposition de champ avec skewness à la figure 4.10. À l'ordre 2 on observe sur la figure 4.12(a) la loi d'échelle en ℓ^2 dans le domaine dissipatif. Dans le régime inertiel, la référence [109] prédit une correction intermittente en



Fig. 4.12 Statistiques d'ordre 2 (a), 3 (b) et 4 (c) pour le champ aléatoire 2D intermittent avec skewness. Le champ est évalué sur une grille de $2^{15} \times 2^{15}$ points, et les statistiques sont moyennées sur dix réalisations. Les réalisations du champ aléatoire sont calculées en prenant H = 0.355, $\gamma^2 = 0.0075$ afin de pouvoir comparer les lois statistiques à celles des champs précédents et de la DNS, comme expliqué dans le texte. L'abscisse $\xi = |(\ell, \tau)|/L$ correspond à l'échelle de calcul de l'incrément normalisée par la grande échelle. Comme pour l'étude de la DNS au chapitre 3, on calcule les incréments suivant la direction de chaque axe du plan des échelles, plus trois directions intermédiaires entre ces deux axes. Les courbes intermédiaires correspondent à des coupes d'angles $\pi/8$, $\pi/4$ et $3\pi/8$ dans le plan $\ell - \tau$ adimensionné par les échelles de Taylor, comme expliqué au chapitre 3.

 $-4\gamma^2$ à la loi précédente en ℓ^{2H} . Nous n'avons pas vérifié par le calcul que cette loi était toujours vérifiée à deux dimensions, mais l'estimation numérique donne une loi d'échelle qui semble être proche de cette prédiction. On constate que si on prend comme jusqu'à maintenant H = 1/3, la correction intermittente observée ici à l'ordre deux va dans le sens opposée à celle observée dans la DNS au chapitre 3 : l'intermittence diminue la régularité du champ de vitesse. À γ fixé, il suffit de modifier la valeur de H pour obtenir la bonne loi d'échelle à l'ordre deux. On prend alors H = 0.355, qui permet avec la valeur de $\gamma^2 = 0.0075$ (discutée dans la suite) d'obtenir une prédiction $\zeta_2 = 2H - 4\gamma^2 = 0.68$ pour l'exposant de l'ordre 2.

À l'ordre 3 on observe bien sur la figure 4.12(b) une skewness nulle dans la direction x analogue à la direction temporelle de la DNS, et une skewness maximale dans la direction y analogue à la direction longitudinale. Les direction intermédiaires présentent des valeurs de skewness qui varient continuement entre ces deux limites.

À l'ordre 4 on retrouve sur la figure 4.12(c)la manifestation de l'intermittence sur la flatness du champ de vitesse. Cependant ici la loi d'échelle observée est sensiblement différente de la loi en $\ell^{-4\gamma^2}$ obtenue par la version précédente du champ avec skewness sur la figure 4.10. En effet on observe une loi d'échelle proche de la prédiction en $\ell^{-16\gamma^2}$ avancée dans [109]. À cause de cette différence, il faut redéfinir le paramètre d'intermittence γ pour obtenir la bonne valeur numérique pour l'exposant de la loi d'échelle sur la flatness. Toujours dans un cadre log-normal, la relation entre γ et le coefficient d'intermittence c_2 est maintenant $4\gamma^2 = c_2$. Ayant observé au chapitre 3 une valeur $c_2 = 0.03$, on choisit dans cette version du champ aléatoire la valeur $\gamma^2 = 0.0075$ afin de reproduire la pente observée dans la DNS pour la flatness. Cette valeur de γ^2 permet alors de déduire la valeur de H = 0.355 discutée précédemment pour l'obtention de la bonne loi de puissance à l'ordre deux.

4.5 Perspectives

En plus des propriétés présentées jusqu'ici, nous nous sommes intéressés birèvement à deux aspects supplémentaires de la modélisation : la reproduction de l'anisotropie observée dans les corrélations spatio-temporelles de la DNS, ainsi que la causalité du champ synthétisé. On présente dans cette partie des premiers essais numériques sur ces deux sujets, sans essayer de détailler analytiquement les propriétés asymptotiques. Pour cela on se base sur le cas du champ gaussien 2D de la partie 4.2.2, dans une volonté de manipuler ces différents aspects dans un cadre aléatoire simple.

4.5.1 Anisotropie

Nous avons observé au cours de l'analyse spatio-temporelle de la DNS au chapitre 3 une «anisotropie» des corrélations du champ de vitesse, entre la direction longitudinale et la direction temporelle. En effet nous avons constaté l'eccentricité des lignes d'iso-corrélation dans le plan \mathbb{R}^2 . La renormalisation des axes par les échelles de Taylor avait permis de retrouver un cadre isotrope aux petites échelles, mais conservait des lignes de contours non circulaires pour la corrélation à grande échelle. Nous avons interprété cette impossibilité de concilier à la fois les petites et grandes échelles spatiales et temporelles comme une différence entre les rapports de la grande échelle sur l'échelle de Taylor : $\frac{L}{\lambda} \neq \frac{T}{\tau_{\lambda}}$.

Afin de reproduire cette anisotropie des corrélations à l'aide du CGF, on propose une version anisotrope du noyau de lissage Φ_{ε} défini à l'équation (4.20). Cette version choisie pour les calculs numériques est :

$$\widetilde{\Phi}_{\varepsilon}(x,t) = \frac{B\left(\sqrt{\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{t}{T}\right)^2}\right)}{\sqrt{x^2 + qt^2 + \varepsilon^2}},\tag{4.50}$$

où *B* est la fonction «bump» définie à l'équation (4.12), *L*, *T* sont les grandes échelles dans les directions *x*, *t* respectivement et q > 1 est le facteur d'anisotropie aux petites échelles. On choisit les valeurs de ces paramètres par comparaison avec la DNS. Pour les grandes échelles on prend $T = 2\pi/4$ arbitrairement pour avoir deux grandes échelles temporelles sur le domaine de taille 2π , puis L = T/2.1 ce qui correspond au rapport des grandes échelles T/L = 2.1 dans la DNS. On choisit pour le facteur d'anisotropie aux petites échelles q = 2.8, ce qui correspond au carré du rapport des petites échelles $(\lambda/\tau_{\lambda})^2 = 2.8$ dans la DNS. Un exemple de réalisation du CGF construit sur le noyau anisotrope (4.50) est présenté sur la figure 4.13.



Fig. 4.13 Comparaison du CGF à deux dimension isotropes (a) avec sa version anisotrope (b) définie par le noyau de l'équation (4.50). Les deux champs sont calculés sur une grille de taille $2^{15} \times 2^{15}$ à partir de la même réalisation du bruit blanc gaussien W.

On calcule comme pour la DNS les corrélations spatio-temporelles ainsi que la fonction de

structure d'ordre 2 du CGF anisotrope. Les résultats de cette analyse et leur comparaison à la DNS sont présentés sur la figure 4.14.



Fig. 4.14 Comparaison des statistiques d'ordre 2 entre la DNS et le CGF anisotrope proposé à l'équation (4.50), avec pour exposant de Hölder H = 1/3. (a) : lignes iso-corrélation de la DNS, (a,b) : lignes iso-corrélation de la DNS et du champ aléatoire respectivement. (c,d) : fonctions de structures d'ordre 2 de la DNS et du champ aléatoire respectivement, dans les directions longitudinale et temporelle. Les axes sont adimensionnés par les échelles de Taylor dans la direction considérée.

On retrouve dans le plan adimensionné par les échelles de Taylor une corrélation isotrope aux petites échelles, et anisotrope aux grandes échelles. Cependant l'image de l'anisotropie à grande échelle n'est reproduit que qualitativement par le champ aléatoire. On observe en particulier que cette anisotropie semble ne se manifester que sur le haut du régime inertiel, proche de la grande échelle. Dans la DNS cette anisotropie apparaît de manière plus homogène sur la totalité du régime inertiel.

4.5.2 Causalité

Nous nous sommes proposés dans cette thèse de modéliser la structure spatio-temporelle de la turbulence. En particulier, une propriété temporelle que nous n'avons pas mentionné jusqu'ici est la causalité. On peut se convaicre aisément que les champs que nous avons construit jusqu'à maintenant ne sont pas causaux. En effet ces champs sont construits par convolution d'un noyau sur tout le plan \mathbb{R}^2 : si on fait l'analogie entre la direction x du plan de notre modélisation et la direction temporelle t de la DNS, on a alors construit le champ de vitesse à l'instant t en intégrant aussi sur les temps supérieurs à t, c'est-à-dire dans le futur.

Pour remédier à se problème, on cherche une version causale du noyau de convolution Φ_{ε} . Par simplicité on se limite ici à un cadre à une seule dimension t. Une proposition naturelle pour un noyau causal est alors :

$$\Phi_{\varepsilon}(t) = \Theta(t)\Phi_{\varepsilon}(t), \tag{4.51}$$

où $\Theta(t)$ est la distribution de Heaviside et $\Phi_{\varepsilon}(t)$ le noyau à une dimension défini à l'équation (4.10). Ainsi le champ de vitesse à l'instant t est construit par convolution sur les temps passés à t uniquement.

Le calcul des statistiques d'ordre 2 montre que le champ ainsi construit n'est plus lisse, puisque la variance des incréments converge vers une loi d'échelle d'exposant inférieur à 2 dans le régime dissipatif. Cette absence de régularité à petite échelle est due à la discontinuité en zéro du noyau $\tilde{\Phi}_{\varepsilon}$. En effet, on retrouve la régularité du champ en choisissant un noyau continu en zéro :

$$\widetilde{\Phi}_{\varepsilon}(t) = \Theta(t) \frac{t}{|t|_{\varepsilon}} \Phi_{\varepsilon}(t), \qquad (4.52)$$

où le terme $t/|t|_{\varepsilon}$ permet d'obtenir la contiuité du noyau en zéro et donc de retrouver la régularité du champ de vitesse en dessous de ε . La comparaison des statistiques d'ordre 2 pour ces différents noyaux est représentée sur la figure 4.15.



Fig. 4.15 Comparaison des fonctions de structure d'ordre 2 pour plusieurs versions du CGF à une dimension. (a) : CGF acausal défini à l'équation (4.10). (b) : CGF causal construit sur un noyau discontinu, défini à l'équation (4.51). (c) : CGF causal construit sur un noyau continu, défini à l'équation (4.52).

Conclusion

On s'est intéressé dans cette thèse à deux domaines différents de la turbulence, à travers une problématique commune : modéliser des phénomènes de petite échelle.

Dans une première partie sur la turbulence quantique, on a proposé un potentiel d'interaction non-local pour l'équation de Gross-Pitaevskii utilisée pour décrire l'hélium 4 à température nulle. Ce potentiel a été choisi en s'inspirant de modèles existants [23, 38, 39] pour reproduire le creux des rotons de la relation de dispersion expérimentale de l'hélium liquide 3. Nous avons montré qu'il est possible avec un modèle à peu de paramètres libres d'obtenir un très bon ajustement de la vitesse du son ainsi que de la forme du creux des rotons. Cependant l'ajustement de la relation de dispersion constitue une approche linéarisée qui ne tient pas compte du comportement non-linéaire de l'équation de Gross-Pitaevskii. Ainsi nous avons observé que cette équation était sensible à de fortes instabilités générant d'importantes modulations de la densité du superfluide. Un réajustement empirique de notre modèle consistant à relever arbitrairement l'énergie des rotons permet d'éviter ce phénomène de cristallisation en gardant une image relativement réaliste de la relation de dispersion de l'hélium. L'utilisation de ce modèle non-local dans des Simulations Numériques Directes (DNS) de l'équation de Gross-Pitaevskii nous a permi d'étudier le phénomène de reconnexion vorticitaire. Les résultats de la DNS sont analysés d'abord par un algorithme de suivi qui permet de détecter la position des tourbillons dans l'espace à chaque instant. La connaissance de cette position a servi à l'étude géométrique de la propagation d'une déformation le long des filaments des tourbillons après la reconnexion. Nous avons observé la propagation d'une déformation au départ localisée sur le point de reconnexion, qui s'étale et s'atténue ensuite le long du filament. L'étude de la vitesse de propagation de cette structure a montré des résultat conformes en partie aux prédictions de l'Approximation d'Induction Locale (LIA) [15], à part aux instants courts après reconnexion où l'étirement des filaments semble jouer un rôle important [60]. Nous avons de plus observé l'apparition de maxima secondaires de courbure du filament dans le cas non-local, contrairement au cas local où un seul maximum de courbure persistait au cours de la propagation. Enfin une étude énergétique a suggéré que la majorité des variations d'énergie cinétique étaient dues à la variation de longueur des filaments des tourbillons, avec une partie minoritaire de l'énergie cinétique transformée en son au cours de la reconnexion, dans les cas local comme non-local. L'ensemble de ces résultats ont fait l'objet d'une publication récente [1]. On peut envisager comme perspective à cette étude de préciser le mécanisme des instabilités modulationnelles de l'équation de Gross-Pitaevskii non-locale, et notamment leur lien avec l'énergie du creux des rotons. Dans un second temps, la modification de la non-linéarité de l'équation ou son développement pourrait permettre de modéliser plus fidèlement les interactions au sein d'une phase condensée comme l'hélium liquide, notamment en défavorisant les fortes compressibilités typiques d'un système gazeux.

Dans une seconde partie nous avons proposé une modélisation aléatoire des champs spatiotemporels de vitesse eulérienne en turbulence homogène et isotrope. Afin d'expliciter les propriétés nécessaires à la calibration de notre modèle, nous avons commencé par l'étude de donées issues d'une DNS des équations de Navier-Stokes, mise à disposition par l'Université Johns Hopkins. L'analyse de ces données, basée sur le calcul des corrélations ainsi que des incréments spatiotemporels du champ de vitesse nous a permis de dresser un portrait statistique de la turbulence homogène et isotrope dans un cadre eulérien spatio-temporel, dans l'esprit de la phénoménologie standard de la turbulence [24]. Nous avons ensuite proposé un champ aléatoire scalaire à une dimension d'espace et une dimension de temps, de manière à généraliser les modèles similaires existant dans le cas purement spatial [103, 109]. Nous avons aboutit à une proposition de champ capable de reproduire numériquement l'essentiel des propriétés spatio-temporelles observées précédemment dans la DNS, à savoir la structure des corrélations ainsi les propriétés intermittentes comme l'asymétrie et l'aplatissement des distributions des incréments aux petites échelles. Nous avons encore à vérifier analytiquement que cette image numérique est bien représentative de la réalité mathématique, et particulièrement dans la limite des Reynolds infinis. Une fois cette vérification faite, les perspectives de cette modélisations sont nombreuses. Deux aspects que nous avons étudié très brièvement sont notamment l'anisotropie spatio-temporelle des corrélations en fonction de l'échelle ainsi que la causalité du champ de vitesse. Un autre aspect que nous avons évoqué consisterait à reproduire plus fidèlement le comportement du coefficient d'aplatissement dans le régime dissipatif intermédiaire [114]. Enfin pour pouvoir modéliser un champ de vitesse complet, il faudra reproduire les deux autres composantes de la vitesse en respectant les conditions d'incompressibilité et d'étirement de la vorticité [103], et ajouter deux dimensions spatiales à la description proposée ici.

Annexes

A Forme du potentiel dans l'espace réel

On choisit un potentiel dans l'espace spectral de la forme :

$$\hat{G}(k) = \left(A - B^2 k^2 + E^4 k^4\right) e^{-\frac{k^2}{2D^2}},\tag{A.1}$$

dont on cherche à calculer la transformée de Fourier inverse G(r). On commence par rappeler l'expression de la transformée de Fourier d'une fonction gaussienne isotrope à trois dimensions :

$$\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{k^2}{2D^2}}\right] = \left(\frac{D}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 e^{-\frac{D^2 x^2}{2}}.$$
 (A.2)

On remarque alors que le second et troisième terme du potentiel $\widehat{G}(k)$ sont respectivement les transformées de Fourier de la dérivée seconde et de la dérivée quatrième d'une fonction gaussienne. On peut alors calculer explicitement la transformée de Fourier inverse de l'équation (A.1) :

$$G(r) = \left(\frac{D}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \left[A - B^2 \nabla^2 + E^4 \nabla^4\right] e^{-\frac{D^2 x^2}{2}}.$$
 (A.3)

On peut alors développer les termes en dérivées seconde et quatrième. On obtient finalement :

$$G(r) = \left(\alpha + \beta r^2 + \epsilon r^4\right) e^{-\frac{r^2}{2\delta^2}},\tag{A.4}$$

où les paramètres dans l'espace réel sont donnés par :

$$\alpha = \left(\frac{D}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \left(A - 3B^2 D^2 + 15D^4 E^4\right),$$
(A.5)

$$\beta = \left(\frac{D}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \left(B^2 D^4 - 10D^6 E^4\right),\tag{A.6}$$

$$\epsilon = \left(\frac{D}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 D^8 E^4,\tag{A.7}$$

$$\delta = \frac{1}{D}.\tag{A.8}$$

B Densités de probabilités et profils radiaux

On cherche à relier les densités de probabilité (PDF) de quantités hydrodynamiques à leur profil radial autour d'un vortex superfluide dans les modèles de Gross-Pitaevskii. On considère une grandeur physique F(x, y, z) = F(r) dans un domaine cylindrique \mathcal{D} de rayon R et de hauteur H, et on cherche à établir l'expression de $\mathbf{P}_F(F)$.

B.1 PDF de la vitesse

Le profil radial de la vitesse autour d'un vortex est donné par :

$$\vec{u} = \frac{2}{r} \vec{e}_{\theta}, \tag{B.1}$$

où \vec{e}_{θ} est le vecteur unitaire orthoradial au vortex. L'expression (B.1) est valable pour un vortex rectiligne dans un espace libre, quelque soit le modèle d'interaction. On peut alors calculer la PDF la norme u(r) = 2/r de la vitesse par une moyenne empirique :

$$\mathbf{P}_{u}(u) = \frac{1}{\pi R^{2}H} \int_{\mathcal{D}} \delta\left(u - \frac{2}{r}\right) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z. \tag{B.2}$$

On intègre immédiatement sur θ et z puis on opère le changement de variable u'=2/r pour écrire :

$$\mathbf{P}_{u}(u) = \frac{8}{R^{2}} \int_{u(R)}^{+\infty} \delta\left(u - u'\right) \frac{\mathrm{d}u'}{{u'}^{3}} = \frac{8}{R^{2}u^{3}} \mathbf{1}_{u > u(R)}.$$
(B.3)

On a donc finalement $\mathbf{P}_u(u) \propto u^3$ à cause de la divergence en $u \propto 1/r$ près du cœur du vortex.

B.2 PDF de la pseudo-vorticité

On cherche à l'inverse à proposer un profil radial w = W(r) de la pseudo-vorticité à partir de la forme en loi de puissance observée pour la PDF de sa norme $\mathbf{P}_w(w) \propto w^{-\beta}$. Pour cela on utilise la moyenne empirique de manière similaire à l'équation (B.2) :

$$\mathbf{P}_{w}(w) = \frac{1}{\pi R^{2} H} \int_{\mathcal{D}} \delta\left(w - W(r)\right) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z \tag{B.4}$$

$$= \frac{2}{R^2} \int_{w(R)}^{w(0)} \delta(w - w') r\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r}\right)^{-1} \mathrm{d}w', \tag{B.5}$$

où on a effectué le changement de variable w' = W(r), en supposant que W(r) est une fonction monotone de r. Cette hyptohèse est justifiée dans le cas local où on observe que w décroit de manière monotone de $w(0) = w_0 > 0$ à $w(+\infty) = 0$. On peut alors écrire :
$$\mathbf{P}_{w}(w) = \frac{2}{R^{2}} \int_{w(R)}^{w(0)} \delta\left(w - w'\right) f(w') \mathrm{d}w' = \frac{2}{R^{2}} f(w) \mathbf{1}_{w(R) < w < w_{0}},\tag{B.6}$$

où on a introduit $f(w') = r(dW/dr)^{-1}$ qui est une fonction bien définie si W(r) est monotone en r. Or on observe numériquement $f(w) \propto w^{-\beta}$, ce qui permet d'établir une équation différentielle sur W(r):

$$r\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r}\right)^{-1} = f(W) = CW^{-\beta} \tag{B.7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r} = CrW^{-\beta},\tag{B.8}$$

qui s'intègre en :

$$W(r) = \frac{w_0}{\left[1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{\beta - 1}}}.$$
(B.9)

On peut alors redéfinir l'exposant par $\alpha = 1/(1 - \beta)$, ce qui donne pour le profil radial de la pseudo-vorticité :

$$W(r) = \frac{w_0}{\left[1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^{\alpha}},\tag{B.10}$$

qui correspond alors à une loi de puissance de la PDF en $\mathbf{P}_w(w) \propto w^{-1-\alpha^{-1}}$.

C Champ gausien fractionnaire

Définition du Champ Gausien Fractionnaire (CGF) à 1D :

$$u_{\varepsilon}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_L(x-y)}{|x-y|_{\varepsilon}^{-1/2-H}} W(\mathrm{d}y).$$
(C.1)

C.1 Convergence de la variance

$$\mathbb{E}\left[u_{\varepsilon}^{2}\right] = \mathbb{E}\iint_{\mathbb{R}^{2}} \frac{\varphi_{L}(x-y)}{\left|x-y\right|_{\varepsilon}^{1/2-H}} \frac{\varphi_{L}(x-z)}{\left|x-z\right|_{\varepsilon}^{1/2-H}} W(\mathrm{d}y) W(\mathrm{d}z),\tag{C.2}$$

soit par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\left[u_{\varepsilon}^{2}\right] = \iint_{\mathbb{R}^{2}} \frac{\varphi_{L}(x-y)}{\left|x-y\right|_{\varepsilon}^{1/2-H}} \frac{\varphi_{L}(x-z)}{\left|x-z\right|_{\varepsilon}^{1/2-H}} \mathbb{E}[W(\mathrm{d}y)W(\mathrm{d}z)].$$
(C.3)

Règle de calcul pour $\mathbb{E}[W(dy)W(dz)]$ de deux mesures gaussiennes indépendantes :

$$\mathbb{E}\left[u_{\varepsilon}^{2}\right] = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_{L}^{2}(x-y)}{|x-y|_{\varepsilon}^{1-2H}} \mathrm{d}y \qquad (C.4)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_L^2(y)}{|y|_{\varepsilon}^{1-2H}} \mathrm{d}y, \qquad (C.5)$$

où on a utilisé le changement de variable $x - y \mapsto y$ dans l'intégrale : par homogénéité statistique, $\mathbb{E}[u_{\varepsilon}^2]$ ne dépend pas de x.

On cherche alors la limite $\varepsilon \to 0$ (Re $\to +\infty$). Il faut étudier la convergence en y = 0 et $y = \infty$; la convergence ou non en $y = -\infty$ sera alors obtenue par parité.

- En y = 0 : φ_L^2 est continue et finie. L'intégrale existe alors en y = 0 si la singularité au dénominateur est intégrable , i.e. si H > 0.
- En $y = \infty$: la décroissance rapide de φ_L^2 domine l'intégrale qui converge alors quelque soit la valeur de H.

En conclusion, la limite de $\mathbb{E}[u_{\varepsilon}^2]$ quand $\varepsilon \to 0$ existe si H > 0 et vaut :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left[u_{\varepsilon}^{2}\right] = \sigma^{2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_{L}^{2}(y)}{\left|y\right|^{1-2H}} \mathrm{d}y.$$
(C.6)

On note que la valeur de la variance est indépendante du choix de la régularisation à petite échelle, mais qu'elle dépend de la forme de la fonction de coupure à grande échelle φ_L .

C.2 Convergence de la variance des incréments : moment d'ordre 2

On définit l'incrément à l'échelle ℓ du champ de vites se par :

$$\delta_{\ell} u_{\varepsilon}(x) = u_{\varepsilon}(x+\ell) - u_{\varepsilon}(x). \tag{C.7}$$

On cherche alors, de manière similaire à la section précédente, à étudier la convergence de la variance des incréments :

$$\mathbb{E}\left[\delta_{\ell}u_{\varepsilon}^{2}\right] = \mathbb{E}\iint_{\mathbb{R}^{2}}\left[\frac{\varphi_{L}(x+\ell-y)}{|x+\ell-y|_{\varepsilon}^{1/2-H}} - \frac{\varphi_{L}(x-y)}{|x-y|_{\varepsilon}^{1/2-H}}\right] \times \left[\frac{\varphi_{L}(x+\ell-z)}{|x+\ell-z|_{\varepsilon}^{1/2-H}} - \frac{\varphi_{L}(x-z)}{|x-z|_{\varepsilon}^{1/2-H}}\right]W(\mathrm{d}y)W(\mathrm{d}z).$$
(C.8)

De même que pour le calcul de la variance, on utilise succesivement la linéraité de l'espérance, l'indépendance des mesures gaussiennes puis l'homogénéité statistique de $u_{\varepsilon}(x)$:

$$\mathbb{E}\left[\delta_{\ell} u_{\varepsilon}^{2}\right] = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\varphi_{L}(y+\ell)}{|y+\ell|_{\varepsilon}^{1/2-H}} - \frac{\varphi_{L}(y)}{|y|_{\varepsilon}^{1/2-H}}\right]^{2} \mathrm{d}y.$$
(C.9)

A la limite $\varepsilon \to 0$, l'intégrande présente alors deux pôles d'ordre 1 - 2H en y = 0 et $y = -\ell$. La convergence étant assurée à l'infini par la fonction de coupur φ_L , l'intégrale sera donc finie si les deux singularités sont intégrables, i.e. si H > 0 comme c'était le cas pour la convergence de la variance dans la partie précédente. On peut alors écrire, pour H > 0:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left[\delta_{\ell} u_{\varepsilon}^{2}\right] = S_{2}(\ell) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\varphi_{L}(y+\ell)}{|y+\ell|^{1/2-H}} - \frac{\varphi_{L}(y)}{|y|^{1/2-H}}\right]^{2} \mathrm{d}y, \tag{C.10}$$

et on appelle alors $S_2(\ell)$ la fonction de structure (ou moment) d'ordre 2 du champ de vitesse. On s'intéresse ensuite à la limite $\ell \to 0$, qui correspond au régime inertiel asymptotique. Pour cela, on procède d'abord au changement de variable $y \mapsto \ell y$, qui donne :

$$S_{2}(\ell) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\varphi_{L}(\ell(y+1))}{|\ell(y+1)|^{1/2-H}} - \frac{\varphi_{L}(\ell y)}{|\ell y|^{1/2-H}} \right]^{2} \ell \mathrm{d}y$$
(C.11)

$$= |\ell|^{2H} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\varphi_L(\ell(y+1))}{|y+1|^{1/2-H}} - \frac{\varphi_L(\ell y)}{|y|^{1/2-H}} \right]^2 \mathrm{d}y.$$
(C.12)

On cherche alors un équivalent de $S_2(\ell)$ quand $\ell \to 0$. La fonction de coupure à grande échelle φ_L étant continue en zéro, l'équivalent s'écrira s'il existe :

$$S_2(\ell) \underset{\ell \to 0}{\sim} |\ell|^{2H} \varphi_L^2(0) \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{|y+1|^{1/2-H}} - \frac{1}{|y|^{1/2-H}} \right]^2 \mathrm{d}y.$$
(C.13)

Un tel équivalent n'aura donc un sens que si l'intégrale dans le membre de droite est finie. Comme précédemment, il faut étudier la convergence aux pôles y = 0 et $y = -\ell$ ainsi qu'en $y = +\infty$; la convergence ou non en $y = -\infty$ sera alors obtenue par parité.

— En y = 0 et $y = -\ell$, l'intégrande est dominée par un pôle d'ordre 1 - 2H, qui est intégrable si H > 0.

— En $y = +\infty$, on cherche un équivalent de l'intégrande. En notant que dans cette limite, y > 0:

$$\left[\frac{1}{\left(y+1\right)^{1/2-H}} - \frac{1}{y^{1/2-H}}\right]^2 = \frac{1}{y^{1-2H}} \left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{1/2-H}} - 1\right]^2$$
(C.14)

$$\underset{y \to +\infty}{\sim} \quad \frac{1}{y^{1-2H}} \left[-\left(\frac{1}{2} - H\right) \frac{1}{y} \right]^2 \tag{C.15}$$

$$\sum_{\substack{y \to +\infty}} \frac{\left(\frac{1}{2} - H\right)^2}{y^{3-2H}},\tag{C.16}$$

qui est intégrable en $y = +\infty$ si 3 - 2H > 1, i.e. H < 1.

En conclusion, $\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E} \left[\delta_{\ell} u_{\varepsilon}^2 \right] = S_2(\ell)$ existe si H > 0. Si en plus 0 < H < 1 alors $S_2(\ell)$ admet un équivalent en $\ell \to 0$:

$$S_2(\ell) \underset{\ell \to 0}{\sim} C_2 |\ell|^{2H} \tag{C.17}$$

avec
$$C_2 = \varphi_L^2(0) \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{|y+1|^{1/2-H}} - \frac{1}{|y|^{1/2-H}} \right]^2 \mathrm{d}y.$$
 (C.18)

On note alors que la constante de proportionalité C_2 est indépendante du choix de la régularisation à petite échelle. De plus, cette constante ne dépend que de la valeur en zéro de la fonction de coupure à grande échelle.

C.3 Moment d'ordre 3 et skewness

On cherche à calculer le moment d'ordre 3 du champ de vitesse construit en (C.1), i.e. l'espérance du cube des incréments. Or nous avons construit ce CGF par opérations linéaires sur un champ gausien, dont le moment d'ordre 3 est nul. Par linéarité de l'espérance, le moment d'ordre 3 du CGF est ausi nul :

$$\mathbb{E}\left[\delta_{\ell} u_{\varepsilon}^{3}\right] = 0 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}.$$
(C.19)

C.4 Moment d'ordre 4 et flatness

On cherche à calculer le moment d'ordre 4 du CGF :

$$\mathbb{E}\left[\delta_{\ell} u_{\varepsilon}^{4}\right] = \iiint_{\mathbb{R}^{4}} \prod_{i=1}^{4} \delta_{\ell} \Phi_{\varepsilon}(x-y_{i}) \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{4} W(\mathrm{d}y_{i})\right], \qquad (C.20)$$

où $\Phi_{\varepsilon}(x-y) = \frac{\varphi_L(x-y)}{|x-y|_{\varepsilon}^{-1/2-H}}$ est le noyau de lissage utilisé pour construire le CGF (C.1).

L'espérance du produit de variables gaussiennes peut être calculé à l'aide du théorème de Wick. Dans le cas ici d'un quadruple produit, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\delta_{\ell}u_{\varepsilon}^{4}\right] = 3\iint_{\mathbb{R}^{2}}\delta_{\ell}\Phi_{\varepsilon}^{2}(x-y)\delta_{\ell}\Phi_{\varepsilon}^{2}(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3\mathbb{E}\left[\delta_{\ell}u_{\varepsilon}^{2}\right]^{2}.$$
(C.21)

L'existence de la limite $\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E} \left[\delta_{\ell} u_{\varepsilon}^{4} \right] = S_{4}(\ell)$ est alors assurée par celle de $S_{2}(\ell)$ quand H > 0. Si en plus 0 < H < 1 alors on a un équivalent de $S_{4}(\ell)$ en $\ell \to 0$:

$$S_4(\ell) = 3S_2^{\ 2}(\ell) \underset{\ell \to 0}{\sim} 3C_2^{\ 2}\ell^{4H}.$$
 (C.22)

On définit alors la flatness :

$$\mathcal{F}(\ell) = \frac{S_4(\ell)}{S_2^{\ 2}(\ell)} = 3.$$
 (C.23)

Ici la flatness obtenue pour le CGF construit est constante et égale à 3, ce qui correspond à la flatness d'une variable gaussienne. Ce résultat correspond au fait que le CGF est construit par opérations linéaires sur une variable gaussienne.

C.5 Généralisation à deux dimensions

Généralisation du CGF à 2D :

$$u_{\varepsilon}(\vec{r}) = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\varphi_L(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|_{\varepsilon}^{1-H}} W(\mathrm{d}^2 r'), \qquad (C.24)$$

où on note $\vec{r} = (x, t)$ afin d'alléger les calculs, en gardant à l'esprit le cadre adimensionné choisi ici.

C.5.1 Variance

On se ramène au cas 1D en passant aux coordonnées polaires (ρ, θ). D'après la partie C.1 :

$$\mathbb{E}\left[u_{\varepsilon}^{2}\right] = \iint_{\mathbb{R}^{2}} \frac{\varphi_{L}^{2}(\vec{r})}{\left|\vec{r}\right|_{\varepsilon}^{2-2H}} \mathrm{d}^{2}r = 2\pi \int_{0}^{+\infty} \frac{\varphi_{L}^{2}(\rho)}{\left|\rho\right|_{\varepsilon}^{1-2H}} \mathrm{d}\rho = \pi \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_{L}^{2}(\rho)}{\left|\rho\right|_{\varepsilon}^{1-2H}} \mathrm{d}\rho.$$
(C.25)

On obtient donc les mêmes résultats que dans le cas 1D pour la variance, à un facteur multiplicatif π près.

C.5.2 Fonctions de structure

Calculons le moment d'ordre 2 des incréments :

$$\mathbb{E}\left[\delta_{\ell} u_{\varepsilon}^{2}\right] = \iint_{\mathbb{R}^{2}} \left[\frac{\varphi_{L}(\vec{r} + \vec{\ell})}{\left|\vec{r} + \vec{\ell}\right|_{\varepsilon}^{1-H}} - \frac{\varphi_{L}(\vec{r})}{\left|\vec{r}\right|_{\varepsilon}^{1-H}}\right]^{2} \mathrm{d}^{2}r.$$
(C.26)

On commence par remarquer que ce moment ne dépend pas de la direction de $\vec{\ell}$. En effet une rotation du repère d'intégration permet toujours de ce ramener au cas $\vec{\ell} = \ell \vec{e}_x$. On note ensuite que l'intégrande dans l'équation (C.26) présente à la limite $\varepsilon \to 0$ deux pôles d'ordre respectif 2 - 2H, qui seront donc intégrables si H > 0. On peut dans ce cas prendre la limite $\varepsilon \to 0$ puis étudier le comportement de $S_2(\ell)$ à $\ell \to 0$. En procédant comme à la partie C.2 :

$$\mathbb{E}\left[\delta_{\ell} u_{\varepsilon}^{2}\right] \lim_{\varepsilon \to 0} S_{2}(\ell) = \iint_{\mathbb{R}^{2}} \left[\frac{\varphi_{L}(\vec{r} + \vec{\ell})}{\left|\vec{r} + \vec{\ell}\right|^{1-H}} - \frac{\varphi_{L}(\vec{r})}{\left|\vec{r}\right|^{1-H}} \right]^{2} \mathrm{d}^{2}r \tag{C.27}$$

$$\sim_{\ell \to 0} \varphi_L^2(0) \ell^{2H} \iint_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|\vec{r} + \vec{e}|^{1-H}} - \frac{1}{|\vec{r}|^{1-H}} \right]^2 \mathrm{d}^2 r,$$
 (C.28)

sous réserve d'existence de l'intégrale dans le dernier équivalent, et où on a noté $\vec{e} = \vec{\ell}/|\vec{\ell}|$. Il reste à vérifier l'existence de cette intégrale, i.e. la décroissance suffisante de l'intégrande à l'infini. En notant $\vec{r} = \rho \vec{e}_{\rho}$ et $\cos(\theta) = \vec{e}_{\rho} \cdot \vec{e}$, on procède comme à la partie C.2 :

$$\left[\frac{1}{|\vec{r} + \vec{e}|^{1-H}} - \frac{1}{|\vec{r}|^{1-H}}\right]^2 \underset{\rho \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\rho^{2-2H}} \left[\frac{1}{|\vec{e}_{\rho} + \frac{1}{\rho}\vec{e}|^{1-H}} - 1\right]^2$$
(C.29)

$$\sum_{\substack{\rho \to +\infty}} (1-H)^2 \cos^2(\theta) \frac{1}{\rho^{4-2H}},\tag{C.30}$$

qui est intégrable à l'infini dans \mathbb{R}^2 si H < 1. On obtient donc, pour les mêmes conditions d'existence le même résultat que dans le cas 1D, avec une différence de la constante multiplicative C_2 uniquement :

$$S_2(\ell) \underset{\ell \to 0}{\sim} C_2 |\ell|^{2H} \tag{C.31}$$

avec
$$C_2 = \varphi_L^2(0) \iint_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|\vec{r} + \vec{e}|^{1-H}} - \frac{1}{|\vec{r}|^{1-H}} \right]^2 \mathrm{d}^2 r.$$
 (C.32)

Ce résultat est dû à l'isotropie du noyau de lissage choisi à l'équation (C.24), et on se convainc aisément qu'il se généralise aux fonctions de structures d'ordres supérieurs.

D Champ intermittent : Chaos multiplicatif indépendant

On va utiliser un chaos multiplicatif pour perturber la mesure gaussienne du CGF et ainsi obtenir un champ non-gausien afin de modéliser l'intermittence. Le nouveau champ de vitesse est construit ainsi :

$$u_{\varepsilon}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_L(x-y)}{|x-y|_{\varepsilon}^{-1/2-H}} e^{\gamma X_{\varepsilon}(x) - \gamma^2 \mathbb{E}[X_{\varepsilon}^2]} W(\mathrm{d}y), \tag{D.1}$$

où $X_\varepsilon(x)$ est un champ gausien fractionnaire log-corrélé, définit à partir d'une mesure gaussienne indépendante de W :

$$X_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{|x-y| \leq L} \frac{1}{|x-y|_{\varepsilon}^{-1/2}} \widetilde{W}(\mathrm{d}y), \tag{D.2}$$

où \widetilde{W} est une mesure blanche gaussienne indépendante de W.

D.1 Champ gaussien fractionnaire log-corrélé

D.1.1 Variance

On s'intéresse à la variance CGF log-corrélé :

$$\mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^{2}\right] = \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_{|x-y| \leq L} \int_{|x-z| \leq L} \frac{1}{|x-y|_{\varepsilon}^{1/2}} \frac{1}{|x-z|_{\varepsilon}^{1/2}} \widetilde{W}(\mathrm{d}y) \widetilde{W}(\mathrm{d}z) \tag{D.3}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{|y| \leq L} \frac{1}{|y|_{\varepsilon}} \mathrm{d}y \tag{D.4}$$

$$= \int_0^L \frac{1}{|y|_{\varepsilon}} \mathrm{d}y, \tag{D.5}$$

toujours par linéarité de l'espérance, indépendance de deux mesures gaussiennes et homogénéité statistique. Pour chercher la limite de la variance à $\varepsilon \to 0$ on utilise le changement de variable $\varepsilon y \mapsto y$:

$$\mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^{2}\right] = \int_{0}^{L/\varepsilon} \frac{1}{|y|_{1}} \mathrm{d}y, \qquad (D.6)$$

où $|\cdot|_1$ est une norme régularisée sur l'échelle 1. En particulier, $|y|_1 \underset{y \to +\infty}{\sim} y$ donc on a pour la variance l'équivalent quand $\varepsilon \to 0$:

$$\mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^{2}\right] \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} \log\left(\frac{L}{\varepsilon}\right), \tag{D.7}$$

et ce de manière indépendante de la forme de la régularisation à petite échelle. La divergence de la variance était attendue : on reconnaît en effet que $X_{\varepsilon}(x)$ est en fait un CGF avec H = 0, ce qui

est hors du domaine de convergence de la variance H > 0 trouvé dans la partie C.1. On montre ici que cette divergence est logarithmique.

Numériquement on choisit une régularisation à petite échelle de la forme $|y|_{\varepsilon} = \sqrt{y^2 + \varepsilon^2}$. On peut dans ce cas pousser le calcul de la variance plus loin :

$$\mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^{2}\right] = \int_{0}^{L} \frac{1}{\sqrt{y^{2} + \varepsilon^{2}}} \mathrm{d}y \qquad (D.8)$$

$$\mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^{2}\right] = \operatorname{argsh}\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} \log\left(\frac{L}{\varepsilon}\right).$$
(D.9)

On retrouve la divergence logarithmique de la variance, qui ne dépend pas de la forme choisie pour la régularisation à petite échelle.

D.1.2 Corrélation

On s'intéresse maintenant à la corrélation du champ libre, qui est la propriété qui va nous intéresser pour construire un champ de vitesse intermittent.

$$\mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}(x)X_{\varepsilon}(y)\right] = \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_{|x-z|\leqslant L}\int_{|y-z'|\leqslant L}\frac{1}{|x-z|_{\varepsilon}^{1/2}}\frac{1}{|y-z'|_{\varepsilon}^{1/2}}\widetilde{W}(\mathrm{d}z)\widetilde{W}(\mathrm{d}z') \quad (D.10)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\substack{|x-z| \leq L \\ |y-z| \leq L}} \frac{1}{|x-z|_{\varepsilon}^{1/2}} \frac{1}{|y-z|_{\varepsilon}^{1/2}} \mathrm{d}z.$$
(D.11)

On remarquera alors que le domaine d'intégration est vide si $|x - y| \leq 2L$, ce qui est cohérent avec le fait que $X_{\varepsilon}(x)$ est, par construction dans l'équation (D.2), parfaitement décorrélé sur des échelles strictement supérieures à 2L.

À la limite $\varepsilon \to 0$ l'intégrande de l'équation (D.11) admet alors au maximum deux pôles d'ordre 1/2 en x et y respectivement. Dans le cas où $x \neq y$ ces deux singularités sont intégrables individuellement sur le domaine ici borné. Le cas x = y correspondant au calcul de la variance effectué dans la partie D.1.1, on suppose pour la suite $x \neq y$ et on passe à la limite $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E} \left[X_{\varepsilon}(x) X_{\varepsilon}(y) \right] = C^X(x, y) < +\infty \quad \text{si} \quad x \neq y$$
(D.12)

$$= \frac{1}{2} \int_{\substack{|x-z| \leq L \\ |y-z| \leq L}} \frac{1}{|x-z|^{1/2}} \frac{1}{|y-z|^{1/2}} dz$$
(D.13)

$$= \frac{1}{2} \int_{\substack{|z| \leq L \\ |z+x-y| \leq L}} \frac{1}{|z|^{1/2}} \frac{1}{|z+x-y|^{1/2}} \mathrm{d}z, \qquad (D.14)$$

où on a utilisé le changement de variable $x - z \mapsto z$. Puisque $x \neq y$ on peut utiliser le changement de variable $\frac{z}{|x-y|} \mapsto z$ et écrire :

$$C^{X}(x,y) = C^{X}(|x-y|) = \frac{1}{2} \int_{\substack{|z| \leq \frac{L}{|x-y|} \\ |z+1| \leq \frac{L}{|x-y|}}} \frac{1}{|z|^{1/2}} \frac{1}{|z+1|^{1/2}} \mathrm{d}z.$$
(D.15)

On peut simplifier l'écriture du domaine d'intégration pour étudier le comportement quand $|x-y| \to 0$:

$$\left\{z, |z| \le \frac{L}{|x-y|}\right\} \cap \left\{z, |z+1| \le \frac{L}{|x-y|}\right\} = \left\{ \begin{cases} \emptyset & \text{si } |x-y| \le 2L\\ \{z, |z-1/2| \le \frac{L}{|x-y|} - 1/2 \} & \text{sinon} \end{cases} \right.$$
(D.16)

ce qui nous permet de réécrire l'intégrale, par le changement de variable $(z-1)/2 \mapsto z$:

$$C^{X}(|x-y|) = \int_{0}^{\frac{2L}{|x-y|}-1} \frac{1}{\sqrt{|z-1|}} \frac{1}{\sqrt{|z-1|}} \frac{1}{\sqrt{|z+1|}} dz.$$
 (D.17)

Il convient alors de distinguer deux cas pour la borne supérieure de l'intégrale, afin d'expliciter le signe de z - 1:

-- Si
$$0 < \frac{2L}{|x-y|} - 1 < 1$$
, i.e. $L < |x-y| < 2L$:
 $C^X(|x-y|) = \int_0^{\frac{2L}{|x-y|} - 1} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz$ (D.18)
 $= \arcsin\left(-\frac{2L}{2L} - 1\right)$

$$= \arcsin\left(\frac{2L}{|x-y|} - 1\right) \tag{D.19}$$

— Si $\frac{2L}{|x-y|} - 1 > 1$, i.e. |x-y| < L: $C^X(|x-y|) = \int_{-1}^{1} -$

$$C^{X}(|x-y|) = \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-z^{2}}} dz + \int_{0}^{\frac{2L}{|x-y|}-1} \frac{1}{\sqrt{z^{2}-1}} dz$$
(D.20)

$$= \frac{\pi}{2} + \operatorname{argch}\left(\frac{2L}{|x-y|} - 1\right)$$
(D.21)

En conclusion, on a explicité la forme complète de la covariance de $X_{\epsilon}(x)$ dans la limite $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E} \left[X_{\varepsilon}(x) X_{\varepsilon}(y) \right] = C^X(|x-y|) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad |x-y| \ge 2L \\ \arcsin\left(\frac{2L}{|x-y|} - 1\right) \quad \text{si} \quad L < |x-y| < 2L \\ \frac{\pi}{2} + \operatorname{argch}\left(\frac{2L}{|x-y|} - 1\right) \quad \text{si} \quad |x-y| < L \end{cases}$$
(D.22)

En particulier, on a un équivalent pour $|x-y| \to 0$:

$$C^X(|x-y|) \underset{|x-y|\to 0}{\sim} \log\left(\frac{L}{|x-y|}\right),$$
 (D.23)

ce qui justifie l'appellation de CGF log-corrélé pour $X_{\varepsilon}(x)$. On peut alors donner une écriture plus générale pour C(|x-y|):

$$C^{X}(|x-y|) = \log_{+}\left(\frac{L}{|x-y|}\right) + g(|x-y|),$$
 (D.24)

où $\log_+(|x|) = \max\{0, \log(|x|)\}$ est nulle si $|x| \leq 1$ et g(|x-y|) est bornée pour |x-y| < 2L et nulle sinon.

D.2 Construction d'un champ intermittent

Montrons que le champ de vitesse construit à l'équation (D.1) modélise une partie de la phénoménologie de l'intermittence, tout en conservant les propriétés statistiques de base du CGF.

On peut en préliminaire calculer la moyenne du processus ainsi construit :

$$\mathbb{E}[u_{\varepsilon}] = \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_L(x-y)}{|x-y|_{\varepsilon}^{1/2-H}} e^{\gamma X_{\varepsilon}(x) - \gamma^2 \mathbb{E}[X_{\varepsilon}^2]} W(\mathrm{d}y)$$
(D.25)

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_L(x-y)}{|x-y|_{\varepsilon}^{1/2-H}} \mathbb{E}\left[e^{\gamma X_{\varepsilon}(x)-\gamma^2 \mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^2\right]}\right] \mathbb{E}[W(\mathrm{d}y)]$$
(D.26)

$$= 0 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \tag{D.27}$$

car le processus $X_{\varepsilon}(x)$ est construit sur une mesure blanche \widetilde{W} indépendante de W. On a donc toujours bien un champ de vitesse de moyenne nulle.

D.2.1 Variance

$$\mathbb{E}\left[u_{\varepsilon}^{2}\right] = \iint_{\mathbb{R}^{2}} \frac{\varphi_{L}(x-y)}{\left|x-y\right|_{\varepsilon}^{1/2-H}} \frac{\varphi_{L}(x-z)}{\left|x-z\right|_{\varepsilon}^{1/2-H}} \mathbb{E}\left[e^{\gamma[X_{\varepsilon}(y)+X_{\varepsilon}(z)]-2\gamma^{2}\mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^{2}\right]}\right] \mathbb{E}[W(\mathrm{d}y)W(\mathrm{d}z)] \quad (D.28)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_L^2(x-y)}{|x-y|_{\varepsilon}^{1-2H}} \mathbb{E}\left[e^{2\gamma X_{\varepsilon}(y)-2\gamma^2 \mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^2\right]}\right] \mathrm{d}y.$$
(D.29)

On utilise alors le fait que pour une variable gaussienne g centrée, $\mathbb{E}[e^g] = e^{\frac{1}{2}\mathbb{E}[g^2]}$; comme $X_{\varepsilon}(x)$ est gaussien et de moyenne nulle par linéarité, l'espérance du terme exponentiel vaut donc 1 et on peut écrire :

$$\mathbb{E}\left[u_{\varepsilon}^{2}\right] = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_{L}^{2}(x-y)}{|x-y|_{\varepsilon}^{1-2H}} \mathrm{d}y.$$
(D.30)

On retrouve la même expression de la variance que dans la partie C.1. On sait donc que la limite à $\varepsilon \to 0$ existe pour H > 0 et vaut :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left[u_{\varepsilon}^{2}\right] = \sigma^{2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_{L}^{2}(y)}{|y|^{1-2H}} \mathrm{d}y.$$
(D.31)

La perturbation par le chaos multiplicatif ne change donc pas la variance du processus $u_{\varepsilon}(x)$.

D.2.2 Moment d'ordre 2

On calcule la variance des incréments de $u_{\varepsilon}(x)$.

$$\mathbb{E}\left[\delta_{\ell}u_{\varepsilon}^{2}\right] = \int_{\mathbb{R}}\left[\frac{\varphi_{L}(x+\ell-y)}{|x+\ell-y|_{\varepsilon}^{1/2-H}} - \frac{\varphi_{L}(x-y)}{|x-y|_{\varepsilon}^{1/2-H}}\right]^{2}\mathbb{E}\left[e^{2\gamma X_{\varepsilon}(y)-2\gamma^{2}\mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^{2}\right]}\right]\mathrm{d}y \quad (D.32)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\varphi_L(x+\ell-y)}{|x+\ell-y|_{\varepsilon}^{-1/2-H}} - \frac{\varphi_L(x-y)}{|x-y|_{\varepsilon}^{-1/2-H}} \right]^2 \mathrm{d}y.$$
(D.33)

On retrouve la même expression de la variance des incréments que dans la partie C.2. On sait donc que $\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E} \left[\delta_{\ell} u_{\varepsilon}^{2} \right] = S_{2}(\ell)$ existe si H > 0, et que si en plus 0 < H < 1 alors $S_{2}(\ell)$ admet un équivalent en $\ell \to 0$:

$$S_2(\ell) \underset{\ell \to 0}{\sim} C_2 |\ell|^{2H} \tag{D.34}$$

avec
$$C_2 = \varphi_L^2(0) \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{|y+1|^{1/2-H}} - \frac{1}{|y|^{1/2-H}} \right]^2 \mathrm{d}y.$$
 (D.35)

La perturbation par le chaos multiplicatif ne change donc pas la fonction de structure d'ordre 2 du champ de vitesse. Cette procédure ne permet donc pas de modéliser la correction intermittente à l'odre deux.

D.2.3 Moment d'ordre 3 et skewness

On calcule la moyenne du cube des incréments :

$$\mathbb{E}\left[\delta_{\ell}u_{\varepsilon}^{3}\right] = \iiint_{\mathbb{R}^{3}}\prod_{i=1}^{3}\delta_{\ell}\Phi_{\varepsilon}(x-y_{i})\mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma\sum_{i=1}^{3}X_{\varepsilon}(y_{i})-3\gamma^{2}\mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^{2}\right]\right)\right]\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{3}W(\mathrm{d}y_{i})\right],\quad(\mathrm{D.36})$$

où $\Phi_{\varepsilon}(x-y)$ est le noyau de lissage défini pour le CGF à l'équation (C.20). On sait grâce au théorème de Wick que l'espérance d'un produit d'un nombre impair de variables gaussiennes indépendantes est nulle. On a donc immédiatement :

$$\mathbb{E}\left[\delta_{\ell} u_{\varepsilon}^{3}\right] = 0 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}.$$
(D.37)

La skewness du champ de vitesse est donc toujours nulle. La perturbation par le chaos multiplicatif telle qu'elle est employée ici ne permet donc pas de modéliser les phénomènes d'asymétrie, et a fortiori les corrections intermittentes d'ordre impair non plus.

D.2.4 Moment d'ordre 4 et flatness

Comme dans la section C.2, le théorème de Wick nous permet de simplifier l'espérance du quadruple produit de variables gausiennes indépendantes. On peut alors écrire :

$$\mathbb{E}\left[\delta_{\ell}u_{\varepsilon}^{4}\right] = 3\iint_{\mathbb{R}^{2}} \delta_{\ell}\Phi_{\varepsilon}^{2}(x-y)\delta_{\ell}\Phi_{\varepsilon}^{2}(x-z)\mathbb{E}\left[e^{2\gamma[X_{\varepsilon}(y)+X_{\varepsilon}(z)]-4\gamma^{2}\mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^{2}\right]}\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{D.39}$$

$$= 3 \iint_{\mathbb{R}^2} \delta_{\ell} \Phi_{\varepsilon}^2(x-y) \delta_{\ell} \Phi_{\varepsilon}^2(x-z) e^{2\gamma^2 \mathbb{E}\left[[X_{\varepsilon}(y)+X_{\varepsilon}(z)]^2\right] - 4\gamma^2 \mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^2\right]} \mathrm{d}y \mathrm{d}z \tag{D.40}$$

$$= 3 \iint_{\mathbb{R}^2} \delta_\ell \Phi_\varepsilon^2(x-y) \delta_\ell \Phi_\varepsilon^2(x-z) e^{4\gamma^2 \mathbb{E}[X_\varepsilon(y)X_\varepsilon(z)]} \mathrm{d}y \mathrm{d}z, \tag{D.41}$$

soit en développant l'expression de $\delta_{\ell} \Phi_{\varepsilon}(x-y)$:

$$\mathbb{E}\left[\delta_{\ell}u_{\varepsilon}^{4}\right] = 3 \iint_{\mathbb{R}^{2}} \left[\frac{\varphi_{L}(x+\ell-y)}{|x+\ell-y|_{\varepsilon}^{1/2-H}} - \frac{\varphi_{L}(x-y)}{|x-y|_{\varepsilon}^{1/2-H}}\right]^{2} \\ \times \left[\frac{\varphi_{L}(x+\ell-z)}{|x+\ell-z|_{\varepsilon}^{1/2-H}} - \frac{\varphi_{L}(x-z)}{|x-z|_{\varepsilon}^{1/2-H}}\right]^{2} e^{4\gamma^{2}\mathbb{E}[X_{\varepsilon}(y)X_{\varepsilon}(z)]} dydz \qquad (D.42)$$
$$= 3 \iint_{\mathbb{R}^{2}} \left[\frac{\varphi_{L}(y+\ell)}{|y+\ell|_{\varepsilon}^{1/2-H}} - \frac{\varphi_{L}(y)}{|y|_{\varepsilon}^{1/2-H}}\right]^{2} \\ \times \left[\frac{\varphi_{L}(z+\ell)}{|z+\ell|_{\varepsilon}^{1/2-H}} - \frac{\varphi_{L}(z)}{|z|_{\varepsilon}^{1/2-H}}\right]^{2} e^{4\gamma^{2}\mathbb{E}[X_{\varepsilon}(y)X_{\varepsilon}(z)]} dydz. \qquad (D.43)$$

Etudions maintenant la limite de cette intégrale à $\varepsilon \to 0$. Cette limite s'écrit si elle existe :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E} \left[\delta_{\ell} u_{\varepsilon}^{4} \right] = 3 \iint_{\mathbb{R}^{2}} \left[\frac{\varphi_{L}(y+\ell)}{|y+\ell|^{1/2-H}} - \frac{\varphi_{L}(y)}{|y|^{1/2-H}} \right]^{2} \\ \times \left[\frac{\varphi_{L}(z+\ell)}{|z+\ell|^{1/2-H}} - \frac{\varphi_{L}(z)}{|z|^{1/2-H}} \right]^{2} \left| \frac{L}{|y-z|} \right|_{+}^{4\gamma^{2}} e^{4\gamma^{2}g(|y-z|)} \mathrm{d}y \mathrm{d}z, \tag{D.44}$$

où $|x|_{+} = \max\{1, |x|\}$ d'après l'écriture générale de $C^{X}(|x-y|)$ définie par l'équation (D.24).

Il s'agît donc de justifier l'existence de l'intégrale en (D.44). La convergence à l'infini est assurée par la fonction de coupure grande échelle φ_L . Il reste alors à étudier l'intégrabilité des singularités. Dans le plan \mathbb{R}^2 , les singularités sont les suivantes :

- Les droites $y = -\ell, 0$ et $z = -\ell, 0$ sont le lieu de singularités d'ordre 1 2H. Elles sont donc intégrables pour $z \neq y$ si 1 2H < 1, i.e. H > 0.
- La droite y = z est le lieu d'une singularité d'ordre $4\gamma^2$. Elle est intégrable pour $y \neq -\ell, 0$ si $4\gamma^2 < 1$, i.e. $|\gamma| < 1/2$.
- Les points $(x, y) = (0, -\ell)$ et $(x, y) = (-\ell, 0)$ sont des pôles d'ordre 2 4H. Ces pôles sont intégrables sur \mathbb{R}^2 si 2 4H < 2, i.e. H > 0: la condition avait déjà été trouvée.
- Les points $y = z = -\ell, 0$ sont des pôles d'ordre $2 4H + 4\gamma^2$. Ces pôles sont intégrables sur \mathbb{R}^2 si $2 4H + 4\gamma^2 < 2$, i.e. $\gamma^2 < H$.

En conclusion, si $\begin{cases} H > 0\\ \gamma < 1/2 & \text{ alors la limite } \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left[\delta_\ell u_\varepsilon^{\ 4}\right] \text{ existe et vaut :} \\ \gamma^2 < H \end{cases}$

$$\begin{split} \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E} \left[\delta_{\ell} u_{\varepsilon}^{4} \right] &= S_{4}(\ell) = 3 \iint_{\mathbb{R}^{2}} \left[\frac{\varphi_{L}(y+\ell)}{|y+\ell|^{1/2-H}} - \frac{\varphi_{L}(y)}{|y|^{1/2-H}} \right]^{2} \\ &\times \left[\frac{\varphi_{L}(z+\ell)}{|z+\ell|^{1/2-H}} - \frac{\varphi_{L}(z)}{|z|^{1/2-H}} \right]^{2} \left| \frac{L}{y-z} \right|_{+}^{4\gamma^{2}} e^{4\gamma^{2}g(|y-z|)} dy dz \quad (D.45) \\ &= 3 \left| \ell \right|^{4H} \iint_{\mathbb{R}^{2}} \left[\frac{\varphi_{L}(\ell(y+1))}{|y+1|^{1/2-H}} - \frac{\varphi_{L}(\ell y)}{|y|^{1/2-H}} \right]^{2} \\ &\times \left[\frac{\varphi_{L}(\ell(z+1))}{|z+1|^{1/2-H}} - \frac{\varphi_{L}(\ell z)}{|z|^{1/2-H}} \right]^{2} \left| \frac{L}{\ell(y-z)} \right|_{+}^{4\gamma^{2}} e^{4\gamma^{2}g(|\ell(y-z)|)} dy dz. \end{split}$$

$$(D.46)$$

On cherche alors le comportement de $S_4(\ell)$ dans la limite $\ell \to 0$. Comme dans la partie C.2, on va écrire l'équivalent potentiel pour justifier son existence. Si un tel équivalent existe, il s'écrira :

$$S_{4}(\ell) \underset{\ell \to 0}{\sim} 3\varphi_{L}^{4}(0)e^{4\gamma^{2}g(0)} |\ell|^{4H-4\gamma^{2}} \iint_{\mathbb{R}^{2}} \left[\frac{1}{|y+1|^{1/2-H}} - \frac{1}{|y|^{1/2-H}} \right]^{2} \\ \times \left[\frac{1}{|z+1|^{1/2-H}} - \frac{1}{|z|^{1/2-H}} \right]^{2} \left| \frac{L}{y-z} \right|^{4\gamma^{2}} dy dz.$$
(D.47)

On cherche alors à justifier l'existence de l'intégrale dans le membre de droite. On utilise le changement de variable h = z - y:

$$S_{4}(\ell) \underset{\ell \to 0}{\sim} 3\varphi_{L}^{4}(0)e^{4\gamma^{2}g(0)} |\ell|^{4H-4\gamma^{2}} \iint_{\mathbb{R}^{2}} \left[\frac{1}{|y+1|^{1/2-H}} - \frac{1}{|y|^{1/2-H}} \right]^{2} \\ \times \left[\frac{1}{|h+y+1|^{1/2-H}} - \frac{1}{|h+y|^{1/2-H}} \right]^{2} \left| \frac{L}{h} \right|^{4\gamma^{2}} dy dh, \quad (D.48)$$

so
it :

$$S_4(\ell) \underset{\ell \to 0}{\sim} 3\varphi_L^4(0) e^{4\gamma^2 g(0)} |\ell|^{4H - 4\gamma^2} \int_{\mathbb{R}} f(h) \mathrm{d}h, \qquad (\mathrm{D.49})$$

avec :

$$f(h) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{|y+1|^{1/2-H}} - \frac{1}{|y|^{1/2-H}} \right]^2 \left[\frac{1}{|h+y+1|^{1/2-H}} - \frac{1}{|h+y|^{1/2-H}} \right]^2 \left| \frac{L}{h} \right|^{4\gamma^2} \mathrm{d}y.$$
(D.50)

On se ramène alors à l'étude de l'existence et l'intégrabilité de f(h). Pour $h \neq 0$, l'intégrande dans f(h) présente des singularités en y = 0, -1, -h, -h - 1. Comme précédemment, ce sont des pôles d'ordre 1 - 2H: ces singularités seront donc intégrables si 1 - 2H < 1 i.e. H > 0, condition que nous avions déjà trouvée pour l'existence de la limite à $\varepsilon \to 0$. Pour étudier l'intégrabilité en $y \to \infty$ on peut écrire un équivalent de la même manière qu'à l'équation (C.16):

$$\left[\frac{1}{|y+1|^{1/2-H}} - \frac{1}{|y|^{1/2-H}}\right]^2 \left[\frac{1}{|h+y+1|^{1/2-H}} - \frac{1}{|h+y|^{1/2-H}}\right]^2 \sim \frac{\left(\frac{1}{2} - H\right)^4}{|y|^{6-4H}}, \quad (D.51)$$

qui est intégrable en $y \to \infty$ si 6 - 4H > 1 i.e. H < 5/4, ce qui est validé a fortiori en ayant supposé H < 1 pour l'existence de la limite à $\varepsilon \to 0$.

On sait donc que f(h) existe pour tout $h \neq 0$ sous les mêmes conditions d'existence que $S_4(\ell)$. Il reste maintenant à montrer l'intégrabilité de f(h) sur \mathbb{R} , i.e. à étudier le comportement de f(h) autour de la singularité h = 0 ainsi qu'en l'infini.

- en h = 0: f(h) présente une singularité d'ordre $4\gamma^2$, qui sera donc intégrable si $4\gamma^2 < 1$ i.e. $\gamma < 1/2$. À nouveau cette condition avait déjà été trouvée pour l'existence de la limite à $\varepsilon \to 0$.
- en $h \to \infty$: on écrit un équivalent de f(h). De la même manière que pour l'équation (D.51) on a :

$$f(h) \sim_{h \to \infty} \frac{L^{4\gamma^2} \left(\frac{1}{2} - H\right)^4}{|h|^{6-4H+4\gamma^2}} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{|y+1|^{1/2-H}} - \frac{1}{|y|^{1/2-H}}\right]^2 \mathrm{d}y, \tag{D.52}$$

et f(h) sera donc intégrable en $h \to \infty$ si $6 - 4H + 4\gamma^2 > 1$, ce qui est validé a fortiori par la condition d'existence 6 - 4H > 1 de f(h).

En conclusion, f(h) existe et est intégrable sous des conditions validées a fortiori par les conditions d'existence de $S_4(\ell)$. La limite $\ell \to 0$ existe donc et s'écrit :

$$S_4(\ell) \underset{\ell \to 0}{\sim} C_4 |\ell|^{4H - 4\gamma^2}$$
 (D.53)

avec
$$C_4 = 3\varphi_L^4(0)e^{4\gamma^2 g(0)} \iint_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|y+1|^{1/2-H}} - \frac{1}{|y|^{1/2-H}} \right]^2 \times \left[\frac{1}{|z+1|^{1/2-H}} - \frac{1}{|z|^{1/2-H}} \right]^2 \left| \frac{L}{y-z} \right|^{4\gamma^2} dy dz.$$
 (D.54)

On peut alors calculer la flatness du champ ainsi construit :

$$\mathcal{F}(\ell) = \frac{S_4(\ell)}{S_2^{2}(\ell)} \underset{\ell \to 0}{\sim} \frac{C_4}{C_2^{2}} |\ell|^{-4\gamma^2}.$$
 (D.55)

On a donc bien introduit une correction intermittente à l'aide du chaos multiplicatif, contrairement au cas gaussien de l'équation (C.23) où la flatness étai indépendante de ℓ dans la lilite $\ell \to 0$. On note cependant que cette construction n'apporte une correction qu'à l'ordre 4 au moins, et qu'elle ne permet pas de modéliser la skewness du champ de vitesse.

D.3 Généralisation à deux dimensions

Le champ se généralise à deux dimension de la façon suivante, en notant $\vec{r} = (x, t)$ comme à la partie C.5 :

$$u_{\varepsilon}(\vec{r}) = \iint_{\mathbb{R}^2} \Phi_{\varepsilon}(\vec{r} - \vec{r}') \Gamma_{\varepsilon}(\vec{r}') W\left(d^2r'\right), \qquad (D.56)$$

avec
$$\Gamma_{\varepsilon}(\vec{r}) = \exp\left(\gamma X_{\varepsilon}(\vec{r}) - \gamma^{2} \mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^{2}\right]\right)$$
 (D.57)

et
$$X_{\varepsilon}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{\mathbb{R}^2} k_{\varepsilon}(\vec{r} - \vec{r}') \widetilde{W}(\mathrm{d}^2 r').$$
 (D.58)

Comme dans la partie C.5, le champ est ici construit sur des noyaux isotropes. Les résultats du cas 1D restent donc valables et indépendant de la direction de l'incrément. De la même manière, seules les constantes multiplicatives changent, notemment la variance des champs qui est multipliée par π . Pour garder la bonne correction intermittente, il convient alors de renormaliser le champ X_{ε} par un facteur $\sqrt{\pi}$ supplémentaire.

E Champ asymétrique : chaos multiplicatif corrélé

La forme proposée pour le champ aléatoire 2D avec skewness dans la direction x est :

$$u_{\varepsilon}\left(\vec{r}\right) = \iint_{\mathbb{R}^2} \Phi_{\varepsilon}\left(\vec{r} - \vec{r}'\right) \Gamma_{\varepsilon}\left(\vec{r}'\right) W\left(\mathrm{d}^2 r'\right), \qquad (E.1)$$

avec
$$\Gamma_{\varepsilon}(\vec{r}') = \exp\left(\gamma X_{\varepsilon}(\vec{r}') - \gamma^2 \mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^2\right]\right)$$
 (E.2)

et
$$X_{\varepsilon}(\vec{r}') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|\vec{r}' - \vec{r}''| \leqslant L} \frac{\operatorname{sgn}(x' - x'')}{|\vec{r}' - \vec{r}''|_{\varepsilon}^{1/2}} W(\mathrm{d}^2 r''),$$
 (E.3)

où on a noté $\vec{r} = (x, t)$, comme expliqué à la partie C.5.

=

On peut calculer la moyenne de ce champ :

$$\mathbb{E}\left[u_{\varepsilon}(x,t)\right] = \int_{\mathbb{R}} \Phi_{\varepsilon}\left(\vec{r} - \vec{r}'\right) \mathbb{E}\left[\Gamma_{\varepsilon}\left(\vec{r}'\right) W\left(d^{2}r'\right)\right].$$
(E.4)

Les deux champs aléatoires Γ_{ε} et W n'étant plus indépendant, on ne peut factoriser les espérances. Pour calculer cette moyenne, on utilise alors le lemme d'intégration gaussienne par parties [110] :

$$\mathbb{E}\left[\Gamma_{\varepsilon}\left(\vec{r}'\right)W\left(\mathrm{d}^{2}r'\right)\right] = \mathbb{E}\left[W\left(\mathrm{d}^{2}r'\right)\gamma X_{\varepsilon}\left(\vec{r}'\right)\right]\mathbb{E}\left[e^{\gamma X_{\varepsilon}\left(\vec{r}'\right)}\right].$$
(E.5)

Le deuxième terme est égal à $e^{\frac{\gamma^2}{2}\mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^2\right]}$. On calcule explicitement le premier terme :

$$\mathbb{E}\left[W\left(\mathrm{d}^{2}r'\right)\gamma X_{\varepsilon}\left(\vec{r}'\right)\right] = \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} \iint_{\mathbb{R}^{2}} \operatorname{sgn}(y'-y'') \frac{\mathbf{1}_{|\vec{r}'-\vec{r}''|\leqslant L}}{|\vec{r}'-\vec{r}''|_{\varepsilon}} \mathbb{E}\left[W\left(\mathrm{d}^{2}r'\right)W\left(\mathrm{d}^{2}r''\right)\right]$$
(E.6)

$$\frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}}k_{\varepsilon}\left(\vec{0}\right)\mathrm{d}^{2}r',\tag{E.7}$$

où k_{ε} est le noyau utilisé dans la définition du champ X_{ε} . Ce noyau étant impair, on a $k_{\varepsilon}(\vec{0}) = 0$ et donc finalement $\mathbb{E}[u_{\varepsilon}(x,y)] = 0$. On conserve donc bien un champ de vitesse centré, grâce à la propriété d'imparité du noyau du champ log-corrélé X_{ε} .

E.1 Le champ log-corrélé impair

E.1.1 Variance

$$\mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^{2}(\vec{r})\right] = \iint_{\mathbb{R}^{2}} \iint_{\mathbb{R}^{2}} k_{\varepsilon}\left(\vec{r} - \vec{r}'\right) k_{\varepsilon}\left(\vec{r} - \vec{r}''\right) \mathbb{E}\left[W\left(d^{2}r'\right)W\left(d^{2}r''\right)\right]$$
(E.8)

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} k_{\varepsilon}^2 \left(\vec{r}' \right) \mathrm{d}^2 r' \tag{E.9}$$

$$= \int_{|\vec{r}'| \leqslant L} \frac{\operatorname{sgn}^2(x')}{|\vec{r}'|_{\varepsilon}} \mathrm{d}^2 r'$$
(E.10)

$$= \int_{|\vec{r}'| \leqslant L} \frac{1}{|\vec{r}'|_{\varepsilon}} \mathrm{d}^2 r', \tag{E.11}$$

où on a utilisé le fait que $\operatorname{sgn}^2(x') = 1$ sauf sur un ensemble de mesure nulle. On retrouve donc la même expression que dans le cas du CGF, et on sait alors qu'on a l'équivalent à $\varepsilon \to 0$:

$$\mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^{2}\right] \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} \log\left(\frac{L}{\varepsilon}\right).$$
(E.12)

E.1.2 Corrélation

La corrélation en log du champ X_{ε} étant essentielle à l'obtention des corrections intermittentes, on vérifie que l'on retrouve bien cette propriété même en construisant ce champ sur un noyau impair :

$$\mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}\left(\vec{r_{1}}\right)X_{\varepsilon}\left(\vec{r_{2}}\right)\right] = C_{\varepsilon}^{X}\left(\vec{r_{1}},\vec{r_{2}}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{\left|\vec{r_{1}}-\vec{r'}\right| \leqslant L\\\left|\vec{r_{2}}-\vec{r_{2'}}\right| \leqslant L}} \frac{\operatorname{sgn}\left(x_{1}-x'\right)}{\left|\vec{r_{1}}-\vec{r'}\right|_{\varepsilon}} \frac{\operatorname{sgn}\left(x_{2}-x''\right)}{\left|\vec{r_{2}}-\vec{r_{2'}}\right|_{\varepsilon}} \mathbb{E}\left[W\left(\mathrm{d}^{2}r'\right)W\left(\mathrm{d}^{2}r''\right)\right]$$

$$(E 12)$$

(E.13)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{|\vec{r_1} - \vec{r'}| \leqslant L \\ |\vec{r_2} - \vec{r'}| \leqslant L}} \frac{\operatorname{sgn}\left(x_1 - x'\right)}{|\vec{r_1} - \vec{r'}|_{\varepsilon}} \frac{\operatorname{sgn}\left(x_2 - x'\right)}{|\vec{r_2} - \vec{r'}|_{\varepsilon}} \mathrm{d}^2 r'$$
(E.14)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{|\vec{r}'| \leqslant L \\ |\vec{r}' + \vec{d}| \leqslant L}} \frac{\operatorname{sgn}(x')}{|\vec{r}'|_{\varepsilon}} \frac{\operatorname{sgn}(x' + d_x)}{\left|\vec{r}' + \vec{d}\right|_{\varepsilon}} \mathrm{d}^2 r'$$
(E.15)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{\left|\vec{r}'-\vec{d}\right| \leqslant 2L}} \frac{\operatorname{sgn}\left(x'-d_x\right)}{\left|\vec{r}'-\vec{d}\right|_{\varepsilon}} \frac{\operatorname{sgn}\left(x'+d_x\right)}{\left|\vec{r}'+\vec{d}\right|_{\varepsilon}} \mathrm{d}^2 r', \tag{E.16}$$

où on a noté $\vec{d} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$. On a donc $C_{\varepsilon}^X(\vec{r_1}, \vec{r_2}) = C_{\varepsilon}^X(\vec{r_1}, \vec{r_2})$, i.e. on retrouve bien l'homogénéité du champ X_{ε} . On ne retrouve cependant pas l'isotropie spatio-temporelle, à cause tu terme en $\operatorname{sgn}(x)$ dans le noyau k_{ε} . Comme pour le cas unidimensionnel, la corrélation est nulle si le domaine d'intégration est vide, i.e. si $|\vec{r_1} - \vec{r_2}| \ge 2L$.

À la limite $\varepsilon \to 0$, l'intégrale (E.16) admet deux pôles d'ordre 1 en $\pm \vec{d}$. Ces pôles sont intégrables sur le domaine d'intégration borné, à conditions qu'ils soient séparés i.e. que $\vec{d} \neq \vec{0}$. On peut donc passer écrire cette limite pour $\vec{d} \neq \vec{0}$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} C_{\varepsilon}^{X}\left(\vec{d}\right) = C^{X}\left(\vec{d}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{|\vec{r}' - \vec{d}| \leq 2L \\ |\vec{r}' + \vec{d}| \leq 2L}} \frac{\operatorname{sgn}\left(x' - d_{x}\right)}{\left|\vec{r}' - \vec{d}\right|} \frac{\operatorname{sgn}\left(x' + d_{x}\right)}{\left|\vec{r}' + \vec{d}\right|} \mathrm{d}^{2}r'.$$
(E.17)

On cherche alors, comme pour le cas unidimensionnel, le comportement quand $|\vec{r} - \vec{s}| \to 0$. En rescalant par $d = |\vec{d}|$:

$$C^{X}\left(\vec{d}\right) = \int_{\substack{|\vec{r}' - \vec{e}| \leq 2L/d \\ |\vec{r}' + \vec{e}| \leq 2L/d}} \frac{\operatorname{sgn}\left(x' - e_{x}\right)}{|\vec{r}' - \vec{e}|} \frac{\operatorname{sgn}\left(x' + e_{x}\right)}{|\vec{r}' + \vec{e}|} \mathrm{d}^{2}r',\tag{E.18}$$

où on a noté $\vec{e} = \vec{d}/d$. On sépare maintenant l'intégrale en deux parties afin d'étudiare les régions où le terme de signe est constant :

$$C^{X}\left(\vec{d}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{|\vec{r}'-\vec{e}| \leq 2L/d \\ |\vec{r}'+\vec{e}| \leq 2L/d \\ |x| > e_{x}}} \frac{1}{|\vec{r}'-\vec{e}|} \frac{1}{|\vec{r}'+\vec{e}|} d^{2}r' - \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{|\vec{r}'-\vec{e}| \leq 2L/d \\ |x| < e_{x}}} \frac{1}{|\vec{r}'-\vec{e}|} \frac{1}{|\vec{r}'+\vec{e}|} d^{2}r'$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{|\vec{r}'-\vec{e}| \leq 2L/d \\ |\vec{r}'+\vec{e}| \leq 2L/d}} \frac{1}{|\vec{r}'-\vec{e}|} \frac{1}{|\vec{r}'-\vec{e}|} \frac{1}{|\vec{r}'+\vec{e}|} d^{2}r' - \frac{1}{\pi} \int_{\substack{|\vec{r}'-\vec{e}| \leq 2L/d \\ |\vec{r}'+\vec{e}| \leq 2L/d}} \frac{1}{|\vec{r}'-\vec{e}|} \frac{1}{|\vec{r}'+\vec{e}|} d^{2}r'.$$

$$(E.19)$$

$$(E.20)$$

On étudie alors séparément le comportement de chaque terme quand $d \to 0$, en commençant par celui de droite. En notant que le domaine d'intégration tend vers un rectangle $[-2L/d, 2L/d] \times [-e_x, e_x]$:

$$\int_{\substack{|\vec{r}'-\vec{e}| \leq 2L/d \\ |\vec{r}'+\vec{e}| \leq 2L/d \\ |x| < e_x}} \frac{1}{|\vec{r}'-\vec{e}|} \frac{1}{|\vec{r}'+\vec{e}|} d^2r' \sim \int_{-\frac{2L}{d}}^{+\frac{2L}{d}} dr'_x \int_{-e_x}^{+e_x} dx' \frac{1}{|\vec{r}'-\vec{e}|} \frac{1}{|\vec{r}'+\vec{e}|}, \quad (E.21)$$

où l'intégrale sur x' admet un équivalent à $|r'_x| \to +\infty$:

$$\int_{-e_x}^{+e_x} \mathrm{d}x' \frac{1}{|\vec{r'} - \vec{e}|} \frac{1}{|\vec{r'} + \vec{e}|} \underset{|r'_x| \to +\infty}{\sim} \frac{2e_x}{|r'_x|^2},\tag{E.22}$$

qui est intégrable à $|r'_x| \to +\infty$. Quand la séparation d tend vers zéro, l'intégrale de droite dans l'équation (E.20) admet donc une limite finie :

$$\int_{\substack{|\vec{r}'-\vec{e}| \leq 2L/d \\ |\vec{r}'+\vec{e}| \leq 2L/d \\ |x| < e_x}} \frac{1}{|\vec{r}'-\vec{e}|} \frac{1}{|\vec{r}'+\vec{e}|} d^2r' \xrightarrow[d \to 0]{} B < +\infty.$$
(E.23)

On étudie maintenant l'intégrale de gauche dans l'équation (E.20). L'intégrande est équivalente à $1/|\vec{r'}|^2$ quand $|\vec{r'}| \to +\infty$, qui n'est pas intégrable sur \mathbb{R}^{\nvDash} . Dans la limite $d \to 0$, l'intégrale sera donc dominée par sa divergence à la borne supérieure. On peut alors écrire un équivalent, en passant aux coordonnées polaires :

$$\int_{\substack{|\vec{r}'-\vec{e}|\leqslant 2L/d\\|\vec{r}'+\vec{e}|\leqslant 2L/d}} \frac{1}{|\vec{r}'-\vec{e}|} \frac{1}{|\vec{r}'+\vec{e}|} d^2r' \underset{d\to 0}{\sim} 2\pi \int_1^{\frac{2L}{d}} \frac{dr'}{r'} \underset{d\to 0}{\sim} 2\pi \log\left(\frac{L}{d}\right).$$
(E.24)

Finalement dans l'équation (E.20), le terme de gauche diverge logarithmiquement alors que celui de droite est borné. La corrélation à viscosité nulle $C^X(\vec{d})$ est donc dominée par cette divergence logarithmique :

$$C^{X}\left(\vec{d}\right) \underset{d\to 0}{\sim} \log\left(\frac{L}{d}\right).$$
 (E.25)

On retrouve donc bien la corrélation en log aux petites séparations, comme dans le cas unidimensionnel. On remarque aussi que dans cette limite $d \to 0$ la corrélation ne dépend plus de la direction de la séparation \vec{d} , malgré l'anisotropie observée à d finie dans l'équation (E.16). On peut alors donner une écriture générale de C^X , comme dans le cas unidimensionnel :

$$C^{X}(d) = \log_{+}\left(\frac{L}{d}\right) + g\left(\vec{d}\right), \qquad (E.26)$$

où $\log_+(|x|) = \max\{0, \log(|x|)\}$ est nulle si $|x| \leq 1$ et $g\left(\overrightarrow{d}\right)$ est bornée pour d < 2L et nulle sinon.

E.2 Variance de la vitesse

On calcule la variance du champs de vitesse :

$$\mathbb{E}\left[u_{\varepsilon}^{2}\right] = \iint_{\mathbb{R}^{2}} \iint_{\mathbb{R}^{2}} \Phi_{\varepsilon}\left(\vec{r} - \vec{r}'\right) \Phi_{\varepsilon}\left(\vec{r} - \vec{r}''\right) \mathbb{E}\left[e^{\gamma\left(X_{\varepsilon}\left(\vec{r}'\right) + X_{\varepsilon}\left(\vec{r}''\right)\right) - 2\gamma^{2}\mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^{2}\right]}W(d^{2}r')W(d^{2}r'')\right].$$
(E.27)

De même que pour la moyenne, on utilise le lemme d'intégration gaussienne par parties [110] :

$$\mathbb{E}\left[e^{\gamma(X_{\varepsilon}(\vec{r}')+X_{\varepsilon}(\vec{r}''))}W(d^{2}r')W(d^{2}r'')\right] = \left(\mathbb{E}\left[W(d^{2}r')W(d^{2}r'')\right] - \frac{\gamma^{2}}{2\pi}k_{\varepsilon}^{2}\left(\vec{r}'-\vec{r}''\right)d^{2}r'd^{2}r''\right)\mathbb{E}\left[e^{\gamma(X_{\varepsilon}(\vec{r}')+X_{\varepsilon}(\vec{r}''))}\right],$$
(E.28)

avec
$$\mathbb{E}\left[e^{\gamma(X_{\varepsilon}(\vec{r}')+X_{\varepsilon}(\vec{r}''))}\right] = e^{\gamma^{2}\left(C_{\varepsilon}^{X}(\vec{r}'-\vec{r}'')+\mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^{2}\right]\right)}.$$
 (E.29)

On a donc, en intégrant :

$$\mathbb{E}\left[u_{\varepsilon}^{2}\right] = \iint_{\mathbb{R}^{2}} \Phi_{\varepsilon}^{2}\left(\vec{r}'\right) \mathrm{d}^{2}r' - \frac{\gamma^{2}}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^{2}} \iint_{\mathbb{R}^{2}} \Phi_{\varepsilon}\left(\vec{r}'\right) \Phi_{\varepsilon}\left(\vec{r}''\right) k_{\varepsilon}^{2}\left(\vec{r}' - \vec{r}''\right) \times e^{\gamma^{2}\left(C_{\varepsilon}^{X}\left(\vec{r}' - \vec{r}''\right) - \mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^{2}\right]\right)} \mathrm{d}^{2}r' \mathrm{d}^{2}r''.$$
(E.30)

On reconnaît dans le premier membre l'expression de la variance dans le cas du CGF isotrope, dont on a déjà établi la limite finie à $\varepsilon \to 0$. On note I_{ε} l'intégrale du membre de droite, dont on souhaite étudier le comportement à $\varepsilon \to 0$. Par le changement de variable $\vec{r}' - \vec{r}'' \mapsto \vec{h}$ et par isotropie du noyau Φ_{ε} , on écrit :

$$I_{\varepsilon} = \iint_{\mathbb{R}^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \Phi_{\varepsilon}\left(\vec{r}'\right) \Phi_{\varepsilon}\left(\vec{h} - \vec{r}'\right) \frac{\mathbf{1}_{|\vec{h}| \leq L}}{\left|\vec{h}\right|_{\varepsilon}^2} e^{\gamma^2 \left(C_{\varepsilon}^X(\vec{r}' - \vec{r}'') - \mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^2\right]\right)} \mathrm{d}^2 r' \mathrm{d}^2 h \tag{E.31}$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \left(\Phi_{\varepsilon} * \Phi_{\varepsilon} \right) \left(\overrightarrow{h} \right) \frac{\mathbf{1}_{|\overrightarrow{h}| \leq L}}{\left| \overrightarrow{h} \right|_{\varepsilon}^2} e^{\gamma^2 \left(C_{\varepsilon}^X \left(\overrightarrow{h} \right) - \mathbb{E} \left[X_{\varepsilon}^2 \right] \right)} \mathrm{d}^2 h, \tag{E.32}$$

où $(\Phi_{\varepsilon} * \Phi_{\varepsilon}) (\vec{h}) = \iint_{\mathbb{R}^2} \Phi_{\varepsilon} (\vec{r'}) \Phi_{\varepsilon} (\vec{h} - \vec{r'}) d^2 r'$ est le produit d'auto-convolution du noyau Φ_{ε} . On étudie maintenant le comportement de I_{ε} à $\varepsilon \to 0$. Pour cela on rescale par ε sous l'inté-

On étudie maintenant le comportement de I_{ε} a $\varepsilon \to 0$. Four cela on rescale par ε sous l'integrale :

$$I_{\varepsilon} = \int_{|\vec{h}| \leq L/\varepsilon} \left(\Phi_{\varepsilon} * \Phi_{\varepsilon} \right) \left(\varepsilon \vec{h} \right) \frac{1}{\left| \vec{h} \right|_{1}^{2}} e^{\gamma^{2} \left(C_{\varepsilon}^{X} \left(\varepsilon \vec{h} \right) - \mathbb{E} \left[X_{\varepsilon}^{2} \right] \right)} \mathrm{d}^{2} h, \tag{E.33}$$

où on a utiliser la propriété de la norme régularisée $|\vec{\epsilon h}|_{\varepsilon} = \varepsilon |\vec{h}|_1$, avec $|\cdot|_1$ la norme régularisée à l'échelle 1. On utilise alors les équivalents (E.12) et (E.26) pour réécrire I_{ε} comme une intégrale simple dans la limite $\varepsilon \to 0$, sous condition d'existence de l'intégrale impropre :

$$I_{\varepsilon} \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} 2\pi \sigma^2 L^{\gamma^2} e^{\gamma^2 g(0)} \int_0^{+\infty} \frac{h^{1-\gamma^2}}{\left|h\right|_1^2} \mathrm{d}h, \qquad (E.34)$$

où $\sigma^2 = \lim_{\varepsilon \to 0} (\Phi_{\varepsilon} * \Phi_{\varepsilon}) (0)$ est la variance de la vitesse obtenue pour le CGF. L'intégrale existe alors pour $\gamma > 0$. On a donc finalement montré que la variance admet une limite finie à viscosité nulle :

$$\mathbb{E}\left[u_{\varepsilon}^{2}\right] \underset{\varepsilon \to 0}{\to} \sigma^{2}\left(1 - \gamma^{2}L^{\gamma^{2}}e^{\gamma^{2}g(0)}\int_{0}^{+\infty}\frac{h^{1-\gamma^{2}}}{\left|h\right|_{1}^{2}}\mathrm{d}h\right) < +\infty.$$
(E.35)

On remarque cependant que cette limite bien que finie dépend de la régularisation à petite échelle $|\cdot|_1$: elle n'est donc pas universelle, contrairement à l'anomalie de dissipation de la phénoménologie de la turbulence.

E.3 Variance des incréments

$$\mathbb{E}\left[\delta_{\ell}u_{\varepsilon}^{2}\right] = \iint_{\mathbb{R}^{2}}\iint_{\mathbb{R}^{2}}\delta_{\ell}\Phi_{\varepsilon}\left(\vec{r}-\vec{r'}\right)\delta_{\ell}\Phi_{\varepsilon}\left(\vec{r}-\vec{r''}\right)\mathbb{E}\left[e^{\gamma\left(X_{\varepsilon}\left(\vec{r''}\right)+X_{\varepsilon}\left(\vec{r''}\right)\right)-2\gamma^{2}\mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^{2}\right]}W(\mathrm{d}^{2}r')W(\mathrm{d}^{2}r'')\right].$$
(E.36)

On reconnaît le même terme d'espérance que dans l'expression de la variance de la vitesse à l'équation (E.27). Le calcul se déroule de la même façon que celui de la variance, en remplaçant Φ_{ε} par son incrément $\delta_{\ell} \Phi_{\varepsilon}$ à l'échelle $\vec{\ell}$. On obtient une limite finie à $\varepsilon \to 0$:

$$\mathbb{E}\left[\delta_{\ell}u_{\varepsilon}^{2}\right] \underset{\varepsilon \to 0}{\to} S_{2}(\ell) \left(1 - \gamma^{2}L^{\gamma^{2}}e^{\gamma^{2}g(0)} \int_{0}^{+\infty} \frac{h^{1-\gamma^{2}}}{\left|h\right|_{1}^{2}} \mathrm{d}h\right) < +\infty,$$
(E.37)

où $S_2(\ell) = \lim_{\varepsilon \to 0} (\delta_\ell \Phi_\varepsilon * \delta_\ell \Phi_\varepsilon) (0)$ est l'expression trouvée pour la fonction de structure d'ordre 2 pour le CGF à deux dimensions isotropes. On retrouve donc une fonction de structure isotrope ainsi qu'une loi d'échelle en $\ell^{2/3}$. L'emploi d'un CMG corrélé ne permet donc pas non plus de modéliser les corrections intermittentes d'ordre 2. De plus, comme pour la variance la constante multiplicative supplémentaire n'est pas universelle puisqu'elle dépend de la régularisation à petite échelle $|\cdot|_1$.

E.4 Fonction de structure d'ordre 3

$$\mathbb{E}\left[\delta_{\ell}u_{\varepsilon}^{3}\right] = \iint_{\mathbb{R}^{2}}\iint_{\mathbb{R}^{2}}\iint_{\mathbb{R}^{2}}\delta_{\ell}\Phi_{\varepsilon}\left(\vec{r}-\vec{r_{1}}\right)\delta_{\ell}\Phi_{\varepsilon}\left(\vec{r}-\vec{r_{2}}\right)\delta_{\ell}\Phi_{\varepsilon}\left(\vec{r}-\vec{r_{3}}\right) \times \mathbb{E}\left[e^{\gamma\left(X_{\varepsilon}\left(\vec{r_{1}}\right)+X_{\varepsilon}\left(\vec{r_{2}}\right)+X_{\varepsilon}\left(\vec{r_{3}}\right)\right)-3\gamma^{2}\mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^{2}\right]}W(\mathrm{d}^{2}r_{1})W(\mathrm{d}^{2}r_{2})W(\mathrm{d}^{2}r_{3})\right].$$
 (E.38)

On calcule le terme d'espérance à l'aide du lemme d'intégration gaussienn par parties. De manière similaire aux calculs à l'ordre 2 on obtient en développant totalement :

$$\frac{\mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma\sum_{i=1}^{3}X_{\varepsilon}\left(\overrightarrow{r_{i}}\right)\right)W_{1}W_{2}W_{3}\right]}{\mathbb{E}\left[e^{\gamma\left(X_{\varepsilon}\left(\overrightarrow{r_{1}}\right)+X_{\varepsilon}\left(\overrightarrow{r_{2}}\right)\right)}\right]} = \gamma d^{2}r_{3}\left[k_{\varepsilon}\left(\overrightarrow{r_{13}}\right)+k_{\varepsilon}\left(\overrightarrow{r_{23}}\right)\right]\mathbb{E}\left[W_{1}W_{2}\right] + \gamma d^{2}r_{2}\left[k_{\varepsilon}\left(\overrightarrow{r_{32}}\right)+k_{\varepsilon}\left(\overrightarrow{r_{12}}\right)\right]\mathbb{E}\left[W_{3}W_{1}\right] + \gamma d^{2}r_{1}\left[k_{\varepsilon}\left(\overrightarrow{r_{21}}\right)+k_{\varepsilon}\left(\overrightarrow{r_{31}}\right)\right]\mathbb{E}\left[W_{2}W_{3}\right] + \gamma^{3}\left[k_{\varepsilon}\left(\overrightarrow{r_{13}}\right)+k_{\varepsilon}\left(\overrightarrow{r_{23}}\right)\right]\left[k_{\varepsilon}\left(\overrightarrow{r_{32}}\right)+k_{\varepsilon}\left(\overrightarrow{r_{12}}\right)\right]\left[k_{\varepsilon}\left(\overrightarrow{r_{21}}\right)+k_{\varepsilon}\left(\overrightarrow{r_{31}}\right)\right]\prod_{i=1}^{3}d^{2}r_{i} (E.39)$$

avec
$$\mathbb{E}\left[e^{\gamma(X_{\varepsilon}(\vec{r_{1}})+X_{\varepsilon}(\vec{r_{2}})+X_{\varepsilon}(\vec{r_{3}}))}\right] = \exp\left(\gamma^{2}\left[C_{\varepsilon}^{X}\left(\vec{r_{12}}\right)+C_{\varepsilon}^{X}\left(\vec{r_{23}}\right)+C_{\varepsilon}^{X}\left(\vec{r_{31}}\right)\right] + \frac{3}{2}\gamma^{2}\mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^{2}\right]\right),\tag{E.40}$$

où on a noté $\overrightarrow{r_{ij}} = \overrightarrow{r_i} - \overrightarrow{r_j}$ et $W_i = W(d^2r_i)$ pour alléger les notations. En intégrant dans l'équation (E.38), chacun des trois termes en γ donne deux termes identiques. En développant le produit du terme en γ^3 , les termes circulaires $k_{\varepsilon}(\overrightarrow{r_{13}}) k_{\varepsilon}(\overrightarrow{r_{21}})$ et $k_{\varepsilon}(\overrightarrow{r_{21}}) k_{\varepsilon}(\overrightarrow{r_{22}}) k_{\varepsilon}(\overrightarrow{r_{12}})$ s'annulent par imparité de k_{ε} en y. Restent six termes qui sont identiques une fois intégrés. En regroupant les termes identiques on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\delta_{\ell}u_{\varepsilon}^{3}\right] = 6\gamma \iint_{\mathbb{R}^{2}} \iint_{\mathbb{R}^{2}} \delta_{\ell}\Phi_{\varepsilon}^{2}\left(\vec{r_{1}}\right) \delta_{\ell}\Phi_{\varepsilon}\left(\vec{r_{2}}\right) k_{\varepsilon}\left(\vec{r_{12}}\right) e^{2\gamma^{2}C_{\varepsilon}^{X}\left(\vec{r_{12}}\right) - \frac{1}{2}\gamma^{2}\mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^{2}\right]} d^{2}r_{1}d^{2}r_{2}
- 6\gamma^{3} \iint_{\mathbb{R}^{2}} \iint_{\mathbb{R}^{2}} \int_{\mathbb{R}^{2}} k_{\varepsilon}^{2}\left(\vec{r_{12}}\right) k_{\varepsilon}\left(\vec{r_{23}}\right) e^{\gamma^{2}\left[C_{\varepsilon}^{X}\left(\vec{r_{12}}\right) + C_{\varepsilon}^{X}\left(\vec{r_{23}}\right) + C_{\varepsilon}^{X}\left(\vec{r_{31}}\right)\right] - \frac{3}{2}\gamma^{2}\mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^{2}\right]} \prod_{i=1}^{3} \delta_{\ell}\Phi_{\varepsilon}\left(\vec{r_{i}}\right) d^{2}r_{i}.$$
(E.41)

À ε et $\vec{\ell}$ finis cette fonction de structure est anisotrope, au sens où elle dépend de la direction de l'échelle d'incrément $\vec{\ell}$. En effet le noyau $k_{\varepsilon}(\vec{r})$ est impair en y et privilégie donc cette direction ; les deux intégrales dans l'expression de $\mathbb{E}\left[\delta_{\ell}u_{\varepsilon}^{3}\right]$ dépendront alors de l'angle entre la direction de l'incrément $\vec{\ell}$ et la direction y d'imparité du noyau k_{ε} .

On remarquera la propriété de parité de $\delta_{\ell} \Phi_{\varepsilon}(\vec{r})$ par rapport à la composante perpendiculaire à $\vec{\ell}$. En décomposant sur la base orthonormée $(\vec{e_{\parallel}}, \vec{e_{\perp}})$ telle que $\vec{\ell} = \ell \vec{e_{\parallel}}$:

$$\delta_{\ell} \Phi_{\varepsilon} \left(\vec{r} \right) = \Phi_{\varepsilon} \left(\vec{r} + \vec{\ell} \right) - \Phi_{\varepsilon} \left(\vec{r} \right)$$

$$= \Phi_{\varepsilon} \left(\left(r_{\parallel} + \ell \right) \vec{e_{\parallel}} + r_{\perp} \vec{e_{\perp}} \right) - \Phi_{\varepsilon} \left(r_{\parallel} \vec{e_{\parallel}} + r_{\perp} \vec{e_{\perp}} \right)$$

$$= \Phi_{\varepsilon} \left(\sqrt{\left(r_{\parallel} + \ell \right)^{2} + r_{\perp}^{2}} \right) - \Phi_{\varepsilon} \left(\sqrt{r_{\parallel}^{2} + r_{\perp}^{2}} \right)$$

$$= \Phi_{\varepsilon} \left(\left(r_{\parallel} + \ell \right) \vec{e_{\parallel}} - r_{\perp} \vec{e_{\perp}} \right) - \Phi_{\varepsilon} \left(r_{\parallel} \vec{e_{\parallel}} - r_{\perp} \vec{e_{\perp}} \right). \quad (E.42)$$

Dans le cas où $\vec{\ell} = \ell \vec{e_x}$, l'incrément $\delta_\ell \Phi_{\varepsilon}$ est alors pair en y. La corrélation C_{ε}^X est toujours paire en y ainsi que le carré du noyau k_{ε}^2 . En revanche le noyau simple k_{ε} demeure impair en y: on intègre finalement le produit d'une fonction paire avec une fonction impaire à l'équation (E.41). La fonction de structure d'ordre 3 est donc toujours nulle pour un incrément dans la direction \hat{x} , et ce quelque soit la valeur de $\varepsilon > 0$.

On cherche maintenant à étudier le comportement à $\varepsilon \to 0$. Commençons par A_{ε} . On utilise le changement de variable $\vec{h} = \vec{r_{12}}$ et on intègre sur $\vec{r_1}$:

$$A_{\varepsilon} = 6\gamma \iint_{\mathbb{R}^{2}} \left(\delta_{\ell} \Phi_{\varepsilon}^{2} * \delta_{\ell} \Phi_{\varepsilon} \right) \left(\overrightarrow{h} \right) k_{\varepsilon} \left(\overrightarrow{h} \right) e^{2\gamma^{2} C_{\varepsilon}^{X} \left(\overrightarrow{h} \right) - \frac{1}{2} \gamma^{2} \mathbb{E} \left[X_{\varepsilon}^{2} \right]} d^{2} h$$

$$= 6\gamma \int_{\left| \overrightarrow{h} \right| \leq L/\varepsilon} \left(\delta_{\ell} \Phi_{\varepsilon}^{2} * \delta_{\ell} \Phi_{\varepsilon} \right) \left(\varepsilon \overrightarrow{h} \right) \frac{\operatorname{sgn}(h_{x})}{\varepsilon \left| \overrightarrow{h} \right|_{1}} e^{2\gamma^{2} C_{\varepsilon}^{X} \left(\varepsilon \overrightarrow{h} \right) - \frac{1}{2} \gamma^{2} \mathbb{E} \left[X_{\varepsilon}^{2} \right]} \varepsilon^{2} d^{2} h$$

$$\underset{\varepsilon \to 0}{\sim} 6\gamma \left(\delta_{\ell} \Phi^{2} * \delta_{\ell} \Phi \right) (0) L^{\frac{3}{2} \gamma^{2}} \varepsilon^{1 - \frac{3}{2} \gamma^{2}} \iint_{\mathbb{R}^{2}} \operatorname{sgn}(h_{x}) \frac{\left| \overrightarrow{h} \right|^{-2\gamma^{2}}}{\left| \overrightarrow{h} \right|_{1}} d^{2} h, \qquad (E.43)$$

sous condition d'existence de la dernière intégrale. L'intégrande étant impaire en y, son intégrale sur \mathbb{R}^2 est nulle. Pour $3\gamma^2/2 < 1$, le terme en $\varepsilon^{1-\frac{3}{2}\gamma^2}$ tend aussi vers zéro et on a finalement $\lim_{\varepsilon \to 0} A_{\varepsilon} = 0$.

On étudie alors le second terme de l'équation (E.41). On utilise les changements de variable $\vec{h_1} = \vec{r_{12}}$ et $\vec{h_2} = \vec{r_{13}}$ et on intègre sur $\vec{r_1}$:

$$B_{\varepsilon} = -6\gamma^{3} \iint_{\mathbb{R}^{2}} \iint_{\mathbb{R}^{2}} F_{\varepsilon}\left(\overrightarrow{h_{1}}, \overrightarrow{h_{2}}\right) k_{\varepsilon}^{2}\left(\overrightarrow{h_{1}}\right) k_{\varepsilon}\left(\overrightarrow{h_{2}}\right) e^{\gamma^{2}\left[C_{\varepsilon}^{X}\left(\overrightarrow{h_{1}}\right) + C_{\varepsilon}^{X}\left(\overrightarrow{h_{2}}\right) + C_{\varepsilon}^{X}\left(\overrightarrow{h_{12}}\right)\right] - \frac{3}{2}\gamma^{2}\mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^{2}\right]} d^{2}h_{1}d^{2}h_{2},$$
(E.44)

où
$$F_{\varepsilon}\left(\overrightarrow{h_{1}},\overrightarrow{h_{2}}\right) = \iint_{\mathbb{R}^{2}} \delta_{\ell} \Phi_{\varepsilon}\left(\overrightarrow{r_{1}}\right) \delta_{\ell} \Phi_{\varepsilon}\left(\overrightarrow{r_{1}}-\overrightarrow{h_{1}}\right) \delta_{\ell} \Phi_{\varepsilon}\left(\overrightarrow{r_{1}}-\overrightarrow{h_{2}}\right) \mathrm{d}^{2}r_{1}.$$
 (E.45)

On rescale alors par ε :

$$B_{\varepsilon} = -6\gamma^{3}\varepsilon \int_{\substack{\left|\vec{h_{1}}\right| \leq L/\varepsilon}} F_{\varepsilon}\left(\varepsilon\vec{h_{1}},\varepsilon\vec{h_{2}}\right) \frac{1}{\left|\vec{h_{1}}\right|_{1}^{2}} \frac{\operatorname{sgn}(h_{2x})}{\left|\vec{h_{2}}\right|_{1}} e^{\gamma^{2}\left[C_{\varepsilon}^{X}\left(\varepsilon\vec{h_{1}}\right) + C_{\varepsilon}^{X}\left(\varepsilon\vec{h_{2}}\right) + C_{\varepsilon}^{X}\left(\varepsilon\vec{h_{12}}\right)\right] - \frac{3}{2}\gamma^{2}\mathbb{E}\left[X_{\varepsilon}^{2}\right]} d^{2}h_{1}d^{2}h_{2}} \sim -6\gamma^{3}F(0,0)L^{\frac{3}{2}\gamma^{2}}\varepsilon^{1-\frac{3}{2}\gamma^{2}} \iint_{\mathbb{R}^{2}} \iint_{\mathbb{R}^{2}} \operatorname{sgn}(h_{2x}) \frac{\left|\vec{h_{1}}\right|^{-\gamma^{2}}}{\left|\vec{h_{2}}\right|_{1}} \left|\vec{h_{2}}\right|^{-\gamma^{2}}} d^{2}h_{1}d^{2}h_{2}, \qquad (E.46)$$

sous condition d'existence de la dernière intégrale. Son intégrande est impaire en h_{2x} , l'intégrale sur \mathbb{R}^4 est donc nulle. Pour $3\gamma^2/2 < 1$, le terme en $\varepsilon^{1-\frac{3}{2}\gamma^2}$ tend aussi vers zéro et on a finalement $\lim_{\varepsilon \to 0} B_{\varepsilon} = 0$.

En conclusion, on a $\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E} \left[\delta_{\ell} u_{\varepsilon}^{3} \right] = 0$, i.e. la skewness de ce processus 2D est nulle dans la limite de viscosité nulle.

Bibliographie

- J. Reneuve, J. Salort and L. Chevillard, Structure, dynamics, and reconnection of vortices in a nonlocal model of superfluids, Phys. Rev. Fluids 3, 114602 (2018), doi:10.1103/PhysRevFluids.3.114602.
- [2] D. R. Tilley and J. Tilley, Superfluidity and superconductivity, IOP Publishing (1990).
- [3] R. J. Donnelly and C. F. Barenghi, The observed properties of liquid helium at the saturated vapor pressure, Journal of Physical and Chemical Reference Data 27(6), 1217 (1998), doi:10.1063/1.556028.
- [4] C. Gorter and J. Mellink, On the irreversible processes in liquid helium ii, Physica 15, 3 (1949).
- [5] H. Hall and W. Vinen, The rotation of liquid helium ii, ii. the theory of mutual friction in uniformly rotated helium ii, Proc. Roy. Soc. A 238, 1213 (1956).
- [6] I. Bekarevitch and I. Khalatnikov, Phenomenological derivation of the equations of vortex motion in helium ii, J. Exptl. Theoret. Phys. (U.S.S.R.) 40, 920 (1961).
- [7] L. Onsager, Statistical hydrodynamics, Nuov. Cim. 6(2), 279 (1949), doi:10.1007/BF02780991.
- [8] R. Feynman, Chapter ii application of quantum mechanics to liquid helium 1, 17 (1955), doi:https://doi.org/10.1016/S0079-6417(08)60077-3.
- [9] E. J. Yarmchuk, M. J. V. Gordon and R. E. Packard, Observation of stationary vortex arrays in rotating superfluid helium, Phys. Rev. Lett. 43, 214 (1979), doi:10.1103/PhysRevLett.43.214.
- [10] G. P. Bewley, D. P. Lathrop and K. R. Sreenivasan, Superfluid helium : Visualization of quantized vortices, Nature 441(7093), 588 (2006).
- [11] E. Fonda, D. P. Meichle, N. T. Ouellette, S. Hormoz and D. P. Lathrop, *Direct observation of kelvin waves excited by quantized vortex reconnection*, Proceedings of the National Academy of Sciences 111(Supplement 1), 4707 (2014), doi:10.1073/pnas.1312536110.
- [12] U. Giuriato and G. Krstulovic, Interaction between active particles and quantum vortices leading to kelvin wave generation, Scientific Reports 9(1) (2019), doi:10.1038/s41598-019-39877-w.
- [13] R. Hänninen and A. W. Baggaley, Vortex filament method as a tool for computational visualization of quantum turbulence, Proc. Natl. Acad. Sci. 111(Supplement 1), 4667 (2014), doi:10.1073/pnas.1312535111.
- [14] A. W. Baggaley and C. F. Barenghi, Acceleration statistics in thermally driven superfluid turbulence, Phys. Rev. E 89, 033006 (2014), doi:10.1103/PhysRevE.89.033006.
- [15] H. Hasimoto, A soliton on a vortex filament, Journal of Fluid Mechanics 51(3), 477 (1972), doi:10.1017/S0022112072002307.
- [16] K. W. Schwarz, Three-dimensional vortex dynamics in superfluid ⁴He : Line-line and lineboundary interactions, Phys. Rev. B 31, 5782 (1985), doi:10.1103/PhysRevB.31.5782.
- [17] K. W. Schwarz, Three-dimensional vortex dynamics in superfluid ⁴He : Homogeneous superfluid turbulence, Phys. Rev. B 38, 2398 (1988), doi:10.1103/PhysRevB.38.2398.

- [18] S. Zuccher, M. Caliari, A. W. Baggaley and C. F. Barenghi, *Quantum vortex re*connections, Physics of Fluids 24(12), 125108 (2012), doi:10.1063/1.4772198, https://doi.org/10.1063/1.4772198.
- [19] L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose–Einstein Condensation*, Oxford University Press (2001).
- [20] J. Koplik and H. Levine, Vortex reconnection in superfluid helium, Phys. Rev. Lett. 71, 1375 (1993), doi:10.1103/PhysRevLett.71.1375.
- [21] K. H. Andersen, W. G. Stirling, R. Scherm, A. Stunault, B. Fak, H. Godfrin and A. J. Dianoux, *Collective excitations in liquid4he : I. experiment and presentation of data*, Journal of Physics : Condensed Matter 6(4), 821 (1994), doi:10.1088/0953-8984/6/4/003.
- [22] B. Fåk, T. Keller, M. E. Zhitomirsky and A. L. Chernyshev, Roton-phonon interactions in superfluid ⁴He, Phys. Rev. Lett. **109**, 155305 (2012), doi:10.1103/PhysRevLett.109.155305.
- [23] Y. Pomeau and S. Rica, Model of superflow with rotons, Phys. Rev. Lett. 71, 247 (1993), doi:10.1103/PhysRevLett.71.247.
- [24] U. Frisch, Turbulence : the legacy of A. N. Kolmogorov, Cambridge University Press (1995).
- [25] M. Abid, M. Brachet, J. Maurer, C. Nore and P. Tabeling, Experimental and numerical investigations of low-temperature superfluid turbulence, European Journal of Mechanics -B/Fluids 17(4), 665 (1998), doi:https://doi.org/10.1016/S0997-7546(98)80019-8, Special Issue Dynamics and Statistics of Concentrated Vortices in Turbulent Flow (Euromech Colloquium 364).
- [26] J. Salort, C. Baudet, B. Castaing, B. Chabaud, F. Daviaud, T. Didelot, P. Diribarne, B. Dubrulle, Y. Gagne, F. Gauthier, A. Girard, B. Hébral *et al.*, *Turbulent velocity spectra in superfluid flows*, Physics of Fluids **22**(12), 125102 (2010), doi:10.1063/1.3504375, https://doi.org/10.1063/1.3504375.
- [27] J. Maurer and P. Tabeling, Local investigation of superfluid turbulence, Europhys. Lett. 43(1), 29 (1998), doi:10.1209/epl/i1998-00314-9.
- [28] E. Varga, J. Gao, W. Guo and L. Skrbek, Intermittency enhancement in quantum turbulence in superfluid ⁴He, Phys. Rev. Fluids 3, 094601 (2018), doi:10.1103/PhysRevFluids.3.094601.
- [29] J. Salort, B. Chabaud, E. Lévêque and P.-E. Roche, Energy cascade and the four-fifths law in superfluid turbulence, Europhys. Lett. 97(3), 34006 (2012), doi:10.1209/0295-5075/97/34006.
- [30] B. Saint-Michel, E. Herbert, J. Salort, C. Baudet, M. Bon Mardion, P. Bonnay, M. Bourgoin, B. Castaing, L. Chevillard, F. Daviaud, P. Diribarne, B. Dubrulle et al., Probing quantum and classical turbulence analogy in von kármán liquid helium, nitrogen, and water experiments, Physics of Fluids 26(12), 125109 (2014), doi:10.1063/1.4904378.
- [31] A. C. White, C. F. Barenghi, N. P. Proukakis, A. J. Youd and D. H. Wacks, Nonclassical velocity statistics in a turbulent atomic bose-einstein condensate, Phys. Rev. Lett. 104, 075301 (2010), doi:10.1103/PhysRevLett.104.075301.
- [32] M. S. Paoletti, M. E. Fisher, K. R. Sreenivasan and D. P. Lathrop, Velocity statistics distinguish quantum turbulence from classical turbulence, Phys. Rev. Lett. 101, 154501 (2008), doi:10.1103/PhysRevLett.101.154501.
- [33] A. W. Baggaley, J. Laurie and C. F. Barenghi, Vortex-density fluctuations, energy spectra, and vortical regions in superfluid turbulence, Phys. Rev. Lett. 109, 205304 (2012), doi:10.1103/PhysRevLett.109.205304.
- [34] S. Serafini, L. Galantucci, E. Iseni, T. Bienaimé, R. N. Bisset, C. F. Barenghi, F. Dalfovo, G. Lamporesi and G. Ferrari, *Vortex reconnections and rebounds in trapped atomic boseeinstein condensates*, Phys. Rev. X 7, 021031 (2017), doi:10.1103/PhysRevX.7.021031.

- [35] H. Adachi, S. Fujiyama and M. Tsubota, Steady-state counterflow quantum turbulence : Simulation of vortex filaments using the full biot-savart law, Phys. Rev. B 81, 104511 (2010), doi:10.1103/PhysRevB.81.104511.
- [36] A. W. Baggaley and C. F. Barenghi, Tree method for quantum vortex dynamics, Journal of Low Temperature Physics 166(1), 3 (2012), doi:10.1007/s10909-011-0405-6.
- [37] C. Nore, M. Abid and M. E. Brachet, Decaying kolmogorov turbulence in a model of superflow, Physics of Fluids 9(9), 2644 (1997), doi:10.1063/1.869473.
- [38] N. G. Berloff and P. H. Roberts, Motions in a bose condensate : VI. vortices in a nonlocal model, Journal of Physics A : Mathematical and General 32(30), 5611 (1999), doi:10.1088/0305-4470/32/30/308.
- [39] N. G. Berloff, Nonlocal nonlinear schrödinger equations as models of superfluidity, Journal of Low Temperature Physics 116(5), 359 (1999), doi:10.1023/A :1021707509219.
- [40] A. Villois, G. Krstulovic, D. Proment and H. Salman, A vortex filament tracking method for the gross-pitaevskii model of a superfluid, Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical 49(41), 415502 (2016), doi:10.1088/1751-8113/49/41/415502.
- [41] S. Villerot, Microscopic structure and Dynamics of Vortices in a dense Superfluid, Theses, Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON (2012).
- [42] S. Villerot, B. Castaing and L. Chevillard, Static spectroscopy of a dense superfluid, Journal of Low Temperature Physics 169(1) (2012), doi:10.1007/s10909-012-0639-y.
- [43] R. M. Kerr and F. Hussain, Simulation of vortex reconnection, Physica D : Nonlinear Phenomena 37(1-3), 474 (1989).
- [44] S. Kida and M. Takaoka, Vortex reconnection, Annual Review of Fluid Mechanics 26(1), 169 (1994), doi:10.1146/annurev.fl.26.010194.001125.
- [45] F. Dalfovo, A. Lastri, L. Pricaupenko, S. Stringari and J. Treiner, Structural and dynamical properties of superfluid helium : A density-functional approach, Phys. Rev. B 52, 1193 (1995), doi:10.1103/PhysRevB.52.1193.
- [46] S. A. Orszag, On the elimination of aliasing in finite-difference schemes by filtering high-wavenumber components, Journal of the Atmospheric Sciences 28(6), 1074 (1971), doi:10.1175/1520-0469(1971)028<1074 :OTEOAI>2.0.CO;2.
- [47] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, Numerical Recipes 3rd Edition : The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press (2007).
- [48] Y. Pomeau and S. Rica, Dynamics of a model of supersolid, Phys. Rev. Lett. 72, 2426 (1994), doi:10.1103/PhysRevLett.72.2426.
- [49] C. Josserand, Y. Pomeau and S. Rica, Coexistence of ordinary elasticity and superfluidity in a model of a defect-free supersolid, Phys. Rev. Lett. 98, 195301 (2007), doi:10.1103/PhysRevLett.98.195301.
- [50] K. E. Wilson, Z. L. Newman, J. D. Lowney and B. P. Anderson, In situ imaging of vortices in bose-einstein condensates, Phys. Rev. A 91, 023621 (2015), doi:10.1103/PhysRevA.91.023621.
- [51] D. Proment, S. Nazarenko and M. Onorato, Sustained turbulence in the three-dimensional gross-pitaevskii model, Physica D : Nonlinear Phenomena" 241(3), 304 (2012), doi:https://doi.org/10.1016/j.physd.2011.06.007, Special Issue on Small Scale Turbulence.
- [52] C. Rorai, J. Skipper, R. M. Kerr and K. R. Sreenivasan, Approach and separation of quantised vortices with balanced cores, Journal of Fluid Mechanics 808, 641–667 (2016), doi:10.1017/jfm.2016.638.

- [53] A. Villois, D. Proment and G. Krstulovic, Universal and nonuniversal aspects of vortex reconnections in superfluids, Phys. Rev. Fluids 2, 044701 (2017), doi:10.1103/PhysRevFluids.2.044701.
- [54] S. Nazarenko and R. West, Analytical solution for nonlinear schrödinger vortex reconnection, Journal of Low Temperature Physics 132(1), 1 (2003), doi:10.1023/A :1023719007403.
- [55] S. Hormoz and M. P. Brenner, Absence of singular stretching of interacting vortex filaments, Journal of Fluid Mechanics 707, 191–204 (2012), doi:10.1017/jfm.2012.270.
- [56] E. Kozik and B. Svistunov, Kelvin-wave cascade and decay of superfluid turbulence, Phys. Rev. Lett. 92, 035301 (2004), doi:10.1103/PhysRevLett.92.035301.
- [57] V. S. L'vov, S. V. Nazarenko and O. Rudenko, Bottleneck crossover between classical and quantum superfluid turbulence, Phys. Rev. B 76, 024520 (2007), doi:10.1103/PhysRevB.76.024520.
- [58] G. Krstulovic, Kelvin-wave cascade and dissipation in low-temperature superfluid vortices, Phys. Rev. E 86, 055301 (2012), doi:10.1103/PhysRevE.86.055301.
- [59] P. Clark di Leoni, P. D. Mininni and M. E. Brachet, Spatiotemporal detection of kelvin waves in quantum turbulence simulations, Phys. Rev. A 92, 063632 (2015), doi:10.1103/PhysRevA.92.063632.
- [60] R. Klein and A. J. Majda, Self-stretching of a perturbed vortex filament i. the asymptotic equation for deviations from a straight line, Physica D : Nonlinear Phenomena 49(3), 323 (1991), doi:10.1016/0167-2789(91)90151-x.
- [61] P. Clark di Leoni, P. D. Mininni and M. E. Brachet, Dual cascade and dissipation mechanisms in helical quantum turbulence, Phys. Rev. A 95, 053636 (2017), doi:10.1103/PhysRevA.95.053636.
- [62] V. Shukla, P. D. Mininni, G. Krstulovic, P. C. di Leoni and M. E. Brachet, Quantitative estimation of effective viscosity in quantum turbulence, Phys. Rev. A 99, 043605 (2019), doi:10.1103/PhysRevA.99.043605.
- [63] H. Tennekes and J. L. Lumley, A first course in turbulence, MIT Press (1972).
- [64] A. S. Monin and A. M. Yaglom, Statistical fluid mechanics : Mechanics of Turbulence, MIT Press (1971).
- [65] A. M. Oboukhov, Some specific features of atmospheric tubulence, Journal of Fluid Mechanics 13(1), 77–81 (1962), doi:10.1017/S0022112062000506.
- [66] J. C. Marvin, Turbulence modeling for computational aerodynamics, AIAA Journal 21(7), 941 (1983), doi:10.2514/3.8182.
- [67] W. Stehbens, *Turbulence of blood flow*, Quarterly journal of experimental physiology and cognate medical sciences **44**(1), 110 (1959).
- [68] G. T. Csanady, Turbulent diffusion of heavy particles in the atmosphere, Journal of the Atmospheric Sciences 20(3), 201 (1963), doi:10.1175/1520-0469(1963)020<0201:tdohpi>2.0.co;2.
- [69] A. N. Kolmogorov, The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers, CR Acad. Sci. URSS **30**, 301 (1941).
- [70] A. N. Kolmogorov, Dissipation of energy in locally isotropic turbulence, CR Acad. Sci. URSS 32, 16 (1941).
- [71] H. Tennekes, Eulerian and lagrangian time microscales in isotropic turbulence, Journal of Fluid Mechanics 67(3), 561–567 (1975), doi:10.1017/S0022112075000468.

- [72] L. Chevillard, S. G. Roux, E. Lévêque, N. Mordant, J.-F. Pinton and A. Arnéodo, Intermittency of velocity time increments in turbulence, Phys. Rev. Lett. 95, 064501 (2005), doi:10.1103/PhysRevLett.95.064501.
- [73] L. Canet, V. Rossetto, N. Wschebor and G. Balarac, *Spatiotemporal velocity-velocity correlation function in fully developed turbulence*, Physical Review E **95**(2), 023107 (2017).
- [74] B. Tao, J. Katz and C. Meneveau, Statistical geometry of subgrid-scale stresses determined from holographic particle image velocimetry measurements, Journal of Fluid Mechanics 457 (2002), doi:10.1017/s0022112001007443.
- [75] B. W. Zeff, D. D. Lanterman, R. McAllister, R. Roy, E. J. Kostelich and D. P. Lathrop, *Measuring intense rotation and dissipation in turbulent flows*, Nature **421**(6919), 146 (2003), doi:10.1038/nature01334.
- [76] G. K. Batchelor, The theory of homogeneous turbulence, Cambridge University Press (1953).
- [77] P. K. Yeung and Y. Zhou, Universality of the kolmogorov constant in numerical simulations of turbulence, Phys. Rev. E 56, 1746 (1997), doi:10.1103/PhysRevE.56.1746.
- [78] K. R. Sreenivasan, An update on the energy dissipation rate in isotropic turbulence, Physics of Fluids 10(2), 528 (1998), doi:10.1063/1.869575.
- [79] Y. Kaneda, T. Ishihara, M. Yokokawa, K. Itakura and A. Uno, Energy dissipation rate and energy spectrum in high resolution direct numerical simulations of turbulence in a periodic box, Physics of Fluids 15(2), L21 (2003), doi:10.1063/1.1539855.
- [80] Y. Gagne, B. Castaing, C. Baudet and Y. Malécot, Reynolds dependence of third-order velocity structure functions, Physics of Fluids 16(2), 482 (2004), doi:10.1063/1.1639013.
- [81] H. Kahalerras, Y. Malécot, Y. Gagne and B. Castaing, *Intermittency and reynolds number*, Physics of Fluids 10(4), 910 (1998), doi:10.1063/1.869613.
- [82] L. Chevillard, B. Castaing, A. Arneodo, E. Lévêque, J.-F. Pinton and S. G. Roux, A phenomenological theory of eulerian and lagrangian velocity fluctuations in turbulent flows, Comptes Rendus Physique 13(9-10), 899 (2012), doi:10.1016/j.crhy.2012.09.002.
- [83] C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, The multifractal nature of turbulent energy dissipation, Journal of Fluid Mechanics 224(-1), 429 (1991), doi:10.1017/s0022112091001830.
- [84] B. Castaing, Y. Gagne and E. Hopfinger, Velocity probability density functions of high reynolds number turbulence, Physica D : Nonlinear Phenomena 46(2), 177 (1990), doi:10.1016/0167-2789(90)90035-n.
- [85] Z.-S. She and E. Leveque, Universal scaling laws in fully developed turbulence, Phys. Rev. Lett. 72, 336 (1994), doi:10.1103/PhysRevLett.72.336.
- [86] B. Dubrulle, Intermittency in fully developed turbulence : Log-poisson statistics and generalized scale covariance, Phys. Rev. Lett. 73, 959 (1994), doi:10.1103/PhysRevLett.73.959.
- [87] Y. Li, E. Perlman, M. Wan, Y. Yang, C. Meneveau, R. Burns, S. Chen, A. Szalay and G. Eyink, A public turbulence database cluster and applications to study lagrangian evolution of velocity increments in turbulence, Journal of Turbulence 9, N31 (2008), doi:10.1080/14685240802376389, https://doi.org/10.1080/14685240802376389.
- [88] J. M. Wallace, Space-time correlations in turbulent flow : A review, Theoretical and Applied Mechanics Letters 4(2), 022003 (2014), doi:https://doi.org/10.1063/2.1402203.
- [89] G.-W. He and J.-B. Zhang, Elliptic model for space-time correlations in turbulent shear flows, Phys. Rev. E 73, 055303 (2006), doi:10.1103/PhysRevE.73.055303.
- [90] X. Zhao and G.-W. He, Space-time correlations of fluctuating velocities in turbulent shear flows, Phys. Rev. E 79, 046316 (2009), doi:10.1103/PhysRevE.79.046316.

- [91] L. Chevillard, B. Castaing, E. Lévêque and A. Arneodo, Unified multifractal description of velocity increments statistics in turbulence : Intermittency and skewness, Physica D : Nonlinear Phenomena 218(1), 77 (2006), doi:10.1016/j.physd.2006.04.011.
- [92] T. S. Lundgren, Kolmogorov two-thirds law by matched asymptotic expansion, Physics of Fluids 14(2), 638 (2002), doi:10.1063/1.1429965.
- [93] W. J. T. Bos, L. Chevillard, J. F. Scott and R. Rubinstein, Reynolds number effect on the velocity increment skewness in isotropic turbulence, Physics of Fluids 24(1), 015108 (2012), doi:10.1063/1.3678338.
- [94] V. Yakhot and K. R. Sreenivasan, Anomalous scaling of structure functions and dynamic constraints on turbulence simulations, Journal of Statistical Physics 121(5-6), 823 (2005), doi:10.1007/s10955-005-8666-6.
- [95] J. Schumacher, K. R. Sreenivasan and V. Yakhot, Asymptotic exponents from low-reynoldsnumber flows, New Journal of Physics 9(4), 89 (2007), doi:10.1088/1367-2630/9/4/089.
- [96] D. A. Donzis, P. K. Yeung and K. R. Sreenivasan, Dissipation and enstrophy in isotropic turbulence : Resolution effects and scaling in direct numerical simulations, Physics of Fluids 20(4), 045108 (2008), doi:10.1063/1.2907227.
- [97] A. Noullez, G. Wallace, W. Lempert, R. B. Miles and U. Frisch, Transverse velocity increments in turbulent flow using the RELIEF technique, Journal of Fluid Mechanics 339, 287 (1997), doi:10.1017/s0022112097005338.
- [98] T. Gotoh, D. Fukayama and T. Nakano, Velocity field statistics in homogeneous steady turbulence obtained using a high-resolution direct numerical simulation, Physics of Fluids 14(3), 1065 (2002), doi:10.1063/1.1448296.
- [99] R. Grauer, H. Homann and J.-F. Pinton, Longitudinal and transverse structure functions in high-reynolds-number turbulence, New Journal of Physics 14(6), 063016 (2012), doi:10.1088/1367-2630/14/6/063016.
- [100] H. Xu, A. Pumir and E. Bodenschatz, Lagrangian view of time irreversibility of fluid turbulence (2015), arXiv:1506.08734.
- [101] M. Bourgoin, The role of pair dispersion in turbulent flow, Science **311**(5762), 835 (2006), doi:10.1126/science.1121726.
- [102] R. Bitane, H. Homann and J. Bec, Geometry and violent events in turbulent pair dispersion, Journal of Turbulence 14(2), 23 (2013), doi:10.1080/14685248.2013.766747.
- [103] R. M. Pereira, C. Garban and L. Chevillard, A dissipative random velocity field for fully developed fluid turbulence, Journal of Fluid Mechanics 794, 369–408 (2016), doi:10.1017/jfm.2016.166.
- [104] A. Juneja, D. P. Lathrop, K. R. Sreenivasan and G. Stolovitzky, Synthetic turbulence, Phys. Rev. E 49, 5179 (1994), doi:10.1103/PhysRevE.49.5179.
- [105] C. Meneveau, Big wind power : seven questions for turbulence research, Journal of Turbulence 20(1), 2 (2019), doi:10.1080/14685248.2019.1584664.
- [106] J. C. H. Fung, J. C. R. Hunt, N. A. Malik and R. J. Perkins, *Kinematic simulation of homogeneous turbulence by unsteady random fourier modes*, Journal of Fluid Mechanics 236(-1), 281 (1992), doi:10.1017/s0022112092001423.
- [107] M. A. I. Khan, A. Pumir and J. C. Vassilicos, *Kinematic simulation of turbulent dispersion of triangles*, Physical Review E 68(2) (2003), doi:10.1103/physreve.68.026313.
- [108] J. C. H. Fung and J. C. Vassilicos, Two-particle dispersion in turbulentlike flows, Phys. Rev. E 57, 1677 (1998), doi:10.1103/PhysRevE.57.1677.

- [109] L. Chevillard, C. Garban, R. Rhodes and V. Vargas, On a skewed and multifractal unidimensional random field, as a probabilistic representation of kolmogorov's views on turbulence (2017), arXiv:1712.00332.
- [110] R. Robert and V. Vargas, Hydrodynamic turbulence and intermittent random fields, Communications in Mathematical Physics 284(3), 649 (2008), doi:10.1007/s00220-008-0642-y.
- [111] A. Bézaguet, J.-P. Dauvergne, S. Knoops, P. Lebrun, M. Pezzetti, O. Pirotte, J.-L. Bret, B. Chabaud, G. Garde, C. Guttin, B. Hébral, S. Pietropinto *et al.*, A cryogenic highreynolds turbulence experiment at cern, AIP Conference Proceedings **613**(1), 1399 (2002), doi:10.1063/1.1472170.
- [112] P. Abry, M. Clausel, S. Jaffard, S. Roux and B. Vedel, *Hyperbolic wavelet transform : an efficient tool for multifractal analysis of anisotropic textures* (2012), arXiv:1210.1944.
- [113] R. Rhodes, V. Vargas et al., Gaussian multiplicative chaos and applications : a review, Probability Surveys 11 (2014).
- [114] L. Chevillard, B. Castaing and E. Lévêque, On the rapid increase of intermittency in the near-dissipation range of fully developed turbulence, The European Physical Journal B 45(4), 561 (2005), doi:10.1140/epjb/e2005-00214-4.

Résumé

Cette thèse est constituée de deux parties, dont l'axe commun est la modélisation de phénomènes de petites échelles pour des écoulements turbulents. Dans une première partie on s'intéresse à l'influence des rotons sur la dynamique d'un modèle d'hélium superfluide. On commence par une calibration d'un modèle non-local d'interaction dans le but de reproduire la relation de dispersion expérimentale de l'hélium, mesurée par diffraction de neutrons. On utilise ensuite ce modèle calibré pour réaliser des simulations numériques directes (DNS) de l'équation de Gross-Pitaevskii, afin de sonder le phénomène de reconnexion des tourbillons quantiques. Ce phénomène est étudié en détail via une analyse géométrique et énergétique des résultats des DNS. On compare alors systématiquement ces résultats à ceux du modèle local afin d'étudier l'influence des rotons sur l'écoulement aux échelles de l'ordre de l'Angstrom. Dans un second temps on cherche à décrire la structure spatio-temporelle de la turbulence homogène et isotrope. Pour cela on commence par une analyse des propriétés statistiques du champ eulérien de vitesse, basée sur l'évaluation de ses incréments spatio-temporels. On utilise les données issues d'une DNS des équations de Navier-Stokes mises à disposition par l'Université Johns Hopkins. On propose ensuite un champ aléatoire spatio-temporel pour la vitesse eulérienne, en caractérisant d'abord la structure de ses corrélations par une approximation gaussienne. On modifie ensuite cette approximation par une mesure multi-fractale afin de reproduire les aspects non-gaussiens observés dans la DNS, tels que les hauts niveaux des coefficients d'asymétrie et d'aplatissement.

Mots-clés : Modélisation, Superfluide, Hélium, Rotons, Turbulence, DNS, Champs Aléatoires

Abstract

This thesis consists of two parts that share a common theme : the modeling of small-scale phenomena in turbulent flows. In a first part we focus on the influence of rotons on the dynamics of a model of superfluid helium. We begin by a calibration of a nonlocal model of the interaction, aiming at reproducing the experimental dispersion relation of helium, as measured by neutron scattering methods. This model is then used to perform Direct Numerical Simulations (DNS) of the Gross-Pitaevskii equation, in order to probe the reconnection of quantum vortices. This phenomenon is studied quantitatively through a geometrical and energetical analysis of the results of the DNS. We then systematically compare these results with those of the local model, so as to study the influence of rotons on flow scales of the order of the Angtstrom. The goal of the second part is to describe the spatio-temporal structure of homogeneous and isotropic turbulence. To achieve it we start by a standard analysis of the statistical properties of the eulerian velocity field, by computing its spatio-temporal increments. We use the data from a DNS of the Navier-Stokes equations, hosted and made available by the Johns Hopkins University. We then propose a random, spatio-temporal eulerian velocity field, by first characterizing the structure of its correlations through a gaussian approximation. This approximation is then modified by a multifractal measure in order to reproduce the non-gaussian features, as they are demanded by the observed high level of skewness and flatness of increments.

Keywords : Modeling, Superfluid, Helium, Rotons, Turbulence, DNS, Random Fields