UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

Numéro d'ordre □□□□

Ecole Doctorale de Mathématiques et Informatique

THESE DE DOCTORAT UNIQUE

Pour obtenir le grade de docteur de l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar

Spécialité

ALGEBRE GEOMETRIE ET APPLICATIONS

Titre :

ALGEBRE DE LORENTZ ET ALGEBRE DE POINCARE

Présentée par

DAOUDA NDOYE

Le 16 Février 2019

Devant le jury composé de :

Président :	M. Cheikh Thiécoumba GUEYE	Professeur UCAD
Rapporteurs :	M. Elamin KAIDI Lhachmi	Professeur d'Université d'Alméria
	M. Mohamed Ben Maaouia	Maître de conférences UGB Saint-Louis
Examinateurs :	M. Oumar DIANKHA	Professeur UCAD
Directeur :	M. Mamadou SANGHARE	Professeur UCAD
	M. Candido Martin GONZALEZ	Professeur d'Université de Malaga

Année universitaire : 2018-2019

Remerciement

En préambule, je tiens à adresser mes remerciements les plus sincères à toutes les personnes qui m'ont apporté aide et soutien, matériel, technique ou moral et qui ont contribué à l'élaboration de ma Thèse, fruit de tant d'années de sacrifice et persévérance et de combat, mais aussi de plaisir, de partage et d'émotion intense.

En tout premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse le professeur Candido Martin Gonzalez de l'université de Malaga, pour sa disponibilité, sa passion communicative, son ouverture d'esprit et sa gentillesse, sans qui rien n'aurait vu le jour. Il m'a transmit la passion de la recherche mathématique et n'a cessé de m'encourager et de me soutenir durant ces années. J'ai pu apprécier non seulement sa dimension mathématique mais aussi sa dimension humaine. J'en profite pour lui exprimer ici ma plus profonde gratitude.

J'exprime aussi ma gratitude aux professeurs Dolores Martin Barquero et au professeur Mercedes Siles Molina, qui m'ont accueilli chaleureusement en me faisant bénéficier d'une bourse me permettant d'effectuer un séjour de deux mois à l'université de Malaga entre Février et Avril 2015 en Espagne. Je reconnais en eux la générosé, l'hospitalité et la gentillesse. Ils ont été trés soucieux et attentionnés à mon égard.

J'adresse mes remerciements au professeur Mamadou Sangharé de l'université Cheikh Anta Diop de Dakar pour son soutien, sa disponibilité. C'est une fierté pour la jeunesse sénégalaise. Un homme modeste et humble.

Chaleureux remerciement à tous les professeurs de l'université Cheikh Anta Diop. Je tiens à remercier particuliérement le professeur Hamidou DATHE, le professeur Cheikh Thié Coumba Gueye, le professur Djibi Sow et le professeur Oumar Diankha. C'est grace à leurs formations que l'on a eu l'amour des mathématiques. Ils nous ont aidè et soutenu moralement durant ces dernières années.

Je remercie aussi mes collégues Serigne Fallou Kane, Mamadou Lamine Sall Serigne Darou Kébé, avec qui j'ai passé pleines d'émotions, d'échanges, de compléxité, de respect, de travail acharné et de combat.

Chaleureux remerciement à Madame Mbaye, secrétaire au département de mathématique pour sa gentillesse et son disponibilité.

Merci enfin à ma famille, pour son soutien et ses encouragements, pour le havre qu'a représenté le domicile familial en ces moments de doute que connait tout doctorant. Merci pour tout !

Table des matières

Introduction générale **7**

1 GROUPE DE LIE ET ALGEBRE DE LIE **11**
1.1 GROUPES ALGEBRIQUES 11
1.1.1 Ensembles algébriques 11
1.1.2 Homomorphismes d'ensembles algébriques 11
1.1.3 Groupe linéaire général 12
1.1.4 Caractère d'un groupe 14
1.2 Groupe de Lie et Algèbre de Lie 16
1.2.1 Définition générale d'un groupe de Lie 16
1.2.2 Groupe linéaire général 16
1.2.3 Exemples de groupes de Lie 17
1.3 Algèbre de Lie 21
1.3.1 Structure des algèbres de Lie 21
1.3.2 Algèbre de Lie " abstraites" 21
1.4 Action des groupes de Lie 22
1.4.1 Sous-groupe à un paramètre 22
1.4.2 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie 24
1.4.3 Exemples classiques 24
1.4.4 Changement de groupe 26

2 Simplicité des algèbres de Lorentz **29**
2.1 Introduction 29
2.2 Notions préliminaires 29

3 Structure algèbrique des algèbres de Lorentz et de Poincaré **37**
3.1 Introduction et définition préliminaires 37
3.1.1 Catégorie 37
3.1.2 Foncteur de Lorentz 37
3.1.3 Quelques résultats simples 40

4 AUTOMORPHISMES ET DERIVATIONS DES ALGEBRES DE LORENTZ ET DE POINCARE **47**
4.1 Automorphisme de $\mathfrak{o}(1,3)$ dans le cas d'un corps de caractéristique deux . . . 52
4.2 Dérivation de l'algèbre de Lorentz sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique deux . . 54
4.3 Structure algèbrique des algèbres de Poincarè 55
4.4 Dérivation de l'algèbre de Poincaré 57

4.5 Automorphisme du groupe de Poincaré 59

5 GRADUATIONS FINES SUR L'ALGEBRE DE POINCARE 61
5.1 Définitons préliminaires : généralisation de l'algèbre de Lorentz et de Poincaré 61
5.2 Groupe d'automorphisme de $\mathfrak{p}$ 62

6 GRADUATION DE GROUPOIDE 67
6.1 Introduction et définitions préliminaires 67
6.2 Graduation de groupoïde de groupe non gradué 68
6.3 Graduation de groupoïde sur une algèbre (non) commuative 71
6.4 Groupoïde et graduation d'ensemble sur des algèbres arbitraires 72
6.5 Graduation orthogonale 76

Bibliographie 81

Introduction

La théorie des groupes et algèbres de Lie commence à la fin du XIX^{e} siècle avec les travaux du mathématicien Norvégien Sophus Lie. Elle a connu de nombreuses ramifications (géométries non-euclidiennes, espaces homogènes, analyse harmonique, théorie des représentations, groupes algébriques, groupes quantiques...) et reste encore très active. Par ailleurs, ces objects interviennent aussi dans les branches a priori plus éloignées des mathématiques : en théorie des nombres, par le truchement des « formes automorphes » et du « programme de Langlands », et en physique théorique, notamment dans la physique des particules ou la relativitè générale. L'étude de notre thèse tourne sur les automorphismes des algèbres de Lorentz et de Poincaré. Ce travail porte sur l'étude de l'algèbre de Lie du groupe Lorentz sur un corps ou un anneau de manière générale. On les appelle algèbre de Lorentz. La principale motivation qui nous pousse à travailler d'arrache-pied sur un anneau vient de l'un de nos objectifs : celui de décrire les automorphismes algébriques de l'algèbre de Lorentz. Puisque nous adhérons à l'idée consernant l'étude des groupes algébriques à partir des affines groupes schemes, cela explique la nécessité de considérer les groupes d'automorphismes $Aut_R(\mathfrak{L}_R)$ oú R est une algèbre associative, commutative sur un corps fixe Φ.

Le point de départ des travaux de cette thèse était d'étudier la simplicitè et les automorphismes des algèbres de Lorentz et de Poincaré. Après quelques notions préliminaires du premier chapitre, cette thèse de doctorat présente les chapitres suivants :

1) Simplicitè basique et libre des algèbres de Lorentz

2) Structure algébrique des algèbres de Lorentz et de Poincaré

3) Automorphismes et dérivations des algèbres de Lorentz et de Poincaré

4) Fine graduation de l'algèbre de Poincaré

5) Graduations de groupoides

Tous ces chapitres traitent l'algèbre de Lorentz et de Poincaré. La pertinence de ces algèbres proviennent des groupes qu'elles représentent. Le groupe de Lorentz est le groupe des transformations linéaires et bijectives $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ qui conserve la forme quadratique $q\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ donné par $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$. Les éléments du groupe de Lorentz sont appelés transformation de Lorentz. Le groupe de Lorentz est le groupe de symétrie de l'espace-temps de Minkowski de la relativité restreinte. De plus, il y a un foncteur de la catégorie des groupes de Lie à celui des algèbres de Lie. D'autre part, le groupe Poincaré est aussi appelé le "le groupe inhomogène de Lorentz". Sa relation avec le groupe de Lorentz est similaire à celle du groupe de galilien et le groupe orthogonal. Puisque, le groupe de Poincaré est aussi une groupe de Lie, on peut aussi considérer son algèbre de Lie, qui s'appelle l'algèbre de Poincaré. En tant que variété, le groupe de Lorentz à la dimension 6 et la dimension du groupe de Poincaré est 10. Comme le groupe de Lorentz est un sous-groupe du groupe de Poincaré, nous pouvons écrire $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{p}$. L'algèbre de Lorentz sur un corps réel notée $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$ ou $\mathfrak{L}$ est une

algèbre de Lie simple, mais l'algèbre de Lorentz sur l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$ n'est pas une algèbre simple. D'autre part, les éléments de l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}$ sont de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 0 & y_1 & y_2 \\ x_2 & -y_1 & 0 & y_3 \\ x_3 & -y_2 & -y_3 & 0 \end{pmatrix},$$

avec $x_i, y_j \in \mathbb{R}, i, j = 1, 2, 3$. Ensuite, en suivant les idées de Chevally, on peut considérer sur tout anneau R associatif, commutatif et unitaire, l'algèbre de Lie comme étant l'ensemble des matrices de la forme ci-dessus avec $x_i, y_j \in R$. Cette algèbre sera notée par $\mathfrak{L}_R$. Maintenant, l'un des problèmes que nous avons traité est d'étudier la simplicité de l'algèbre de Lorentz sur R noté par $\mathfrak{L}_R$. Dans le cas, oú l'algèbre de Lorentz n'est pas simple, nous montrerons que cette algèbre est isomorphe à deux idéaux. Ce résultats est très important pour la suite du document. Ces principaux résultats sont travaillés dans les deux premiers chapitres.

- **Chapitre 2 : Simplicité basique et libre des algèbre de Lorentz**
  Les principaux résultats dans ce chapitre sont développés dans la définition 13. Nous montrons d'abord ce résultat général.
  Théorème 14 : Soit V une Φ-algèbre de Lie qui est considèré comme un Φ-module libre de dimension 6 et satisfaisant à $V = [V, V]$. Soit R une algèbre appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$. Alors V_R n'admet pas d'idéaux libres de dimension 4 ou 5. En particulier, si V est une algèbre de Lie sur un corps K et $V = [V, V]$ avec $\dim(V) = 6$, alors V n'admet pas d'idéaux de dimension 4 ou 5.
  Corollaire 1 : Soit R une algèbre appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$, l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_R$ n'admet pas d'idéaux libres de dimension 4 ou 5. En particulier, pour tout corps $\mathbb{K}$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{L}_K$ n'admet pas d'idéaux de dimensions 4 ou 5.
  Proposition 3 : On suppose que R est une algèbre de $\mathbf{alg}_\Phi$ qui est 2-formellement réel. Alors l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_R$ est à la fois basiquement et librement simple.
  Corollaire 3 : Pour tout corps $\mathbb{K}$, l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_\mathbb{K}$ n'est pas simple si et seulement si $\mathbb{K}$ est 2-formellement réel ou équivalent à dire que $\mathbb{K}$ n'admet pas de racine carrée de -1.
  Proposition 5 : Soit R une algèbre appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$ telle que $\sqrt{-1}, \frac{1}{2} \in R$. Alors, l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_R$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(R) \oplus \mathfrak{sl}_2(R)$.
  Ainsi, $\mathfrak{L}_R$ est la somme directe de deux idéaux qui sont considérés comme $\mathbb{R}$-algèbres qui sont à la fois basique et librement simples. Ces idéaux sont les images isomorphes de $\mathfrak{sl}_2(R) \oplus 0$ et $0 \oplus \mathfrak{sl}_2(R)$. Les résultats du chapitre 2 ont été publíe dans [4].
- **Chapitre 3 : Structure algébrique des algèbres de Lorentz**
  Nous introduisons de nouvelles notions : pour un idéal $\mathfrak{i}$ d'un anneau R, nous disons que R est $\mathfrak{i}-2-$formellement réel si pour tout $x, y \in R$, $x^2+y^2 \in \mathfrak{i}$, ce qui implique que $x, y \in \mathfrak{i}$. Lorsque R est un corps, en prenant $\mathfrak{i} = 0$, on obtient la notion $2-$formellement réel définit dans le chapitre 1. D'autre part, si R est un anneau commutatif, unitaire et V une R-algèbre, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de R, on peut considérer que $K = R/\mathfrak{m}$ et l'algèbre $V_K = V \otimes_R K$ qui est une K-algèbre. L'épimorphisme canonique $p\colon R \to K$ induit un homomorphisme $q\colon V \to V_K$. Un idéal I de V est dit $\mathfrak{m}$-null si $q(I) = 0$ et est dit $\mathfrak{m}$-total si $q(I) = V_K$. L'algèbre V est dit $\mathfrak{m}$-simple si ses idéaux sont $\mathfrak{m}$-null et $\mathfrak{m}$-total. Ce concepte permet de généraliser l'étude de la simplicité des algèbres sur les corps, à une notion appropriée de simplicité des algèbres sur les anneaux. Parmi les résultats de ce chapitre, nous avons la proposition 4 et le théorème 8 dans lesquels nous prouvons que $\mathfrak{L}_R$ est $\mathfrak{m}$-simple si et seulement si R est $\mathfrak{m} - 2-$formellement réel. Nous démontrons aussi le théorème 9, une condition sur R pour assurer que $\mathfrak{L}_R$ est $\mathfrak{m}$-simple pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de R. Spécialement, dans le cas oú

$1/2, \sqrt{-1} \in R$, nous prouverons aussi $\mathfrak{L}_R \cong \mathfrak{sl}_2(R) \oplus \mathfrak{sl}_2(R)$ dans la proposition 5 et on décrit complétement ce qui se passe (dans le cas oú $\sqrt{-1} \notin R$) dans le théorème 11. Les dernières sections du chapitre sont consacrés au cas oú l'anneau R est de carctéristique 2 ou R est un corps fini. Les résultats de ce chapitre ont été acceptées (dans "Tokyo Journal of Mathematics".) Nous avons la version de ce travail dans [5].

Ţ **Chapitre 4 : Automorphismes et dérivations des algèbres de Lorentz et de Poincaré**

Le travail mentionné précédemment dans [5] inclut également une étude du groupe des automorphismes des algèbres de Lorentz et de Poincaré. Nous avons écrit tout au long de cet chapitre. Dans le cas de l'algèbre de Lorentz, nous décrivons le groupe algébrique des automorphismes en utilisant l'approche des affines groupes schemes. C'est la raison principale pour laquelle cette thèse est complète de catégories, de foncteurs et ce genre d'outils. Les principaux résultats sont dans les théorème 12 et le théorème 13. Nous montrons que le groupe affine scheme est lisse (pour un corps de caractéristique différent de 2). Nous décrivons aussi la situation dans le cas de caractéristique 2, ou nous prouvons le groupe affine scheme n'est pas une application lisse. Afin, d'étendre ces résultats sur l'algèbre de Poincaré, nous avons inséré quelques résultats sur la structure idéale de cette algèbre dans cette chapitre (voir section 4.4). Algébriquement, l'algèbre de Poincaaré $\mathfrak{p}$ est une extension de l'algèbre de Lorentz par un idéal abélien de dimension 4 (le radical de $\mathfrak{p}$). Ensuite, nous procédons au groupe de l'automorphisme de $\mathfrak{p}$ et la description des dérivations de son algèbre de Lie (proposition 14 et 15). Finalement, nous devrions dire que nous avons réussi à généraliser certains des résultats de ce chapitre. Dans un cadre plus général, ces résultats apparaîtrons dans la prochaine publication mentionnée dans la chapitre précédente.

Ţ **Chapitre 5 : Fines graduations sur l'algèbre de Poincaré $\mathfrak{p}$**

Afin d'étudier toutes les graduations possibles sur une algèbres donnée (jusqu'à l'équivalence), nous dvons avoir une idée sur le groupe des automorphismes de l'algèbre (comme groupe affine scheme si possible). Ainsi, le chapitre précédent ouvre la porte de la dscription des graduations fines sur $\mathfrak{p}$ (grosso modo, un classement est bon si les composants homogènes ne peuvent pas être décomposés de manière pour donner une autre notation). Nous obtenons cette description dans ce chapitre à la suite de la proposition 16. La classification elle-même est donnée au théorème 16. Cet chapitre a été publié dans [3].

Ţ **Chapitre 6 : Graduations de groupoïdes**

Un des questions ouvertes dans la théorie des graduations sur les algèbres de Lie est l'existence de graduations sur les algèbres de Lie simples qui ont des groupes de Lie non-gradués. Après avoir décrit toutes les graduations sur $\mathfrak{p}$, nous avons tenté de trouver une notation sur $\mathfrak{L}$ qui n'est pas un groupe gradué. Cela motivé notre étude sur les graduations de groupoïdes. En fait, une graduation sur $\mathfrak{L}_{\mathbb{C}}$ est donné à la fin de la section 6.2 de ce chapitre. Cette graduation n'est pas un groupe gradué (mais la grande question n'est pas résolue parce que $\mathfrak{L}_{\mathbb{C}}$ n'est pas simple.) Cependant, notre approche des graduations de groupoïdes, nous pourrions réduire le problème de la proposition 17 et le corollaire 12. Enfin, dans le théorème 18, nous prouvons que toute graduation orthogonale sur l'algèbre matricielle sur le corps complèxe est une graduation de groupoïde. Les résultats de ce chapitre ont été publiés dans [18]. Une étude plus détaillée sur les graduations orthogonales (publiée récemment, voir [19]). En cela, nous étudions aussi la gradutions sur les octonions.

CHAPITRE ONE

GROUPE DE LIE ET ALGEBRE DE LIE

1.1 GROUPES ALGEBRIQUES

Un groupe algébrique sur un corps $\mathbb{K}$ est une structure de variété algébrique G sur un corps $\mathbb{K}$. Notre objectif dans ce chapitre est d'étudier les groupes algébriques linéaires : ceux-ci correspond aux cas oú c'est le lieu des zéros d'une famille de polynômes dans $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$. La plupart des sous-groupes usuels $\mathrm{GL}(\mathbb{K})$ correspondent à des groupes algébriques linéaires. Ces résultats sont référenciés [**?**].

1.1.1 Ensembles algébriques

Définition 1. *Soit $\mathbb{K}$ un corps et $A = \mathbb{K}^n$. On dit qu'un ensemble S est un* ***ensemble algébrique*** *s'il existe une famille $\{P_i(x_1, \cdots, x_n)\}_{i \in I}$ de polynômes sur $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ telle que*

$$S = \{(x_1, \cdots, x_n) \in A / P_i(x_1, \cdots, x_n) = 0 \text{ pour tout } i \in I\}.$$

Autrement dit est l'ensemble des solutions d'un système de polynômes nuls.

Exemple 1.

1. *Le cercle unitaire est un ensemble algébrique. En effet, le cercle unitaire s'exprime sous la forme :*

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | P_1(x, y) = 0\}$$

oú $P_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Alors le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 est un ensemble algébrique.

2. *On considère $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}^2$ et $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | P_1(x, y) = 0 \text{ et } P_2(x, y) = 0\}$ avec $P_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ et $P_2(x, y) = x - y$. L'ensemble S est l'intersection entre le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 et la première bissectrice, on montre que $S = \{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})\}$.*
3. *On considère que $A = \mathbb{R}^3$ et $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | P_1(x, y, z) = 0 \text{ et } P_2(x, y, z) = 0\}$ oú $P_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ et $P_2(x, y, z) = x + y + z$. Dans ce cas, S est l'intersection entre la sphère et le plan qui est un disque.*

1.1.2 Homomorphismes d'ensembles algébriques

Soit S_1 et S_1 deux ensembles algébriques tels que $S_1 \subset \mathbb{K}^n$ et $S_2 \subset \mathbb{K}^m$. On dit que f est un **homormorphisme d'ensembles algébriques** si pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in S_1$, on

a $f(x_1, \cdots, x_n) = (y_1, \cdots, y_m)$ tel que $y_i = P_i(x_1, \cdots, x_n)$ pour tous $i = 1, \cdots, m$. On dira que f est une fonction polynômiale.

Exemple 2. *On considère que* $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\}$ *et* $f : S_1 \to S_2$ *définit par* $f(x, y, z) = (x^2 - 1, -y^2 - z^2)$. *En effet, pour tout* $(x, y, z) \in S_1$, *on a* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, *ce qui implique que* $x^2 - 1 = -y^2 - z^2$. *On pose* $X = x^2 - 1$ *et* $Y = -y^2 - z^2$, *alors on a* $X = Y$, *par la suite on a* $f(x, y, z) = (X, Y) \in S_2$. *Donc* f *est bien définit et est un homorphisme d'ensembles algébriques.*

Exemple 3. *On considère l'ensemble algébrique* $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 | xt - yz = 1\}$ *et l'application* $\Omega : S \to M_2(\mathbb{K})$ *définit par*

$$\Omega(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix},$$

alors $Im(\Omega)$ *est un ensemble algébrique.*

1.1.3 Groupe linéaire général

Soit $\mathbb{K}$ un corps et V un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. On définit par $\mathrm{GL}(V) = \{T : V \to V | T$ linéaire et bijective $\}$. $\mathrm{GL}(V)$ munit de la loi de composition des applications est un groupe. On appelle $(\mathrm{GL}(V), \circ)$ le groupe linéaire général. Si est de dimension finie ($\dim V = n$), on peut définir le groupe comme une représentation matricielle :

$$\underset{n}{\mathrm{GL}}(\mathbb{K}) := \{M \in M_n(\mathbb{K}) | \det(M) \neq 0\},$$

dans ce cas, on peut montrer le thérème suivant :

Théorème 1. *Soit* $\mathbb{K}$ *un corps et* V *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n, *alors on a* $\mathrm{GL}(V)$ *est isomorphe à* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

Définition 2. *Un groupe* G *est dit* ***groupe algébrique*** *si* G *est un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* G *est un ensemble algébrique.*

Exemple 4. *On considère l'ensemble* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ *définit par*

$$\underset{2}{\mathrm{SL}}(\mathbb{K}) = \{M \in M_2(\mathbb{K}) | \det(M) = 1\}$$

En effet, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ *est un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ *et il est aussi un ensemble algébrique car* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) = Im(\Omega)$. *On peut conclure que* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ *est groupe linéare algébrique. En général,* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ *est aussi un groupe linéaire algébrique.*

Remarque 1. *Tout groupe* G *isomorphe à un groupe linéaire algèbrique est aussi linéaire algébrique.*

Exemple 5. *On considère l'ensemble* $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 | xt - yz = 1\}$ *est un groupe linéaire algébrique car* S *est isomorphe à* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ *qui est un groupe linéaire algébrique.*

Exemple 6. $\mathbb{Z}_2$ *est un groupe linéaire algébrique. Pour faire la preuve, on montre que* $\mathbb{Z}_2$ *est isomorphe à un groupe linéaire algébrique. Montrons que* $\mathbb{Z}_2$ *est isomorphe à* $G = \{-1, 1\}$. *On sait que* $(\mathbb{Z}_2, +)$ *et* $(G, .)$ *sont des groupes. Pour prouver que* Z_2 *est isomorphe à* G. *On considère l'application* $\varphi : \mathbb{Z}_2 \to G$ *telle que* $\varphi(\overline{0}) = 1$ *et* $\varphi(\overline{1}) = -1$.

1. φ *est un homomorphisme car* φ *verifie les conditions suivantes :*
   — $\varphi(\overline{0} + \overline{1}) = \varphi(\overline{1} + \overline{0}) = \varphi(\overline{0}).\varphi(\overline{1})$

— $\varphi(\overline{1}+\overline{1}) = \varphi(\overline{1}).\varphi(\overline{1})$
— $\varphi(\overline{0}+\overline{0}) = \varphi(\overline{0}).\varphi(\overline{0})$.

2. *φ est surjective par définition et on a de plus* $\dim \mathbb{Z}_2 = \dim G$, *alors φ est une application bijective.*

On peut conclure que $\mathbb{Z}_2$ est isomorphe à G. Comme G peut être exprimer sous la forme $G = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 1 = 0\} = \{x \in \mathbb{R} | P(x) = 0\}$, alors G est un ensemble algébrique. De plus G est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^* = \mathrm{GL}_1(\mathbb{R})$. On peut dire que G est un groupe linéaire algébrique, ce qui implique que $\mathbb{Z}_2$ est aussi un groupe linéaire algébrique.

Proposition 1. *Soit un sous-ensemble de $M_2(\mathbb{R})$, on définit l'application ϕ par :*

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{C} & \to & A \\ & (a+ib) & \to & \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \end{array}$$

alors ϕ est un isomorphisme

Preuve :
— Pour tous $x, y \in \mathbb{C}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\phi(x+\lambda y) = \phi(x) + \lambda\phi(y)$, donc ϕ est une application linéaire.
— Soit $x \in \ker(\phi)$, alors $\phi(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui implique $a = b = 0$, d'oú $x = 0$. Alors ϕ est injective.
— ϕ est surjective par définition.
— On a aussi pour tous $x, y \in \mathbb{C}$:

$$\begin{array}{rcl} \phi(x.y) & = & \phi((a+ib)(c+id)) \\ & = & \phi(ac - bd + i(bc+ad)) \\ & = & \begin{pmatrix} ac-bd & bc+ad \\ -(bc+ad) & ac-bd \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \\ \phi(x.y) & = & \phi(x).\phi(y), \text{ donc } \phi \text{ est un homorphisme.} \end{array}$$

On peut conclure que ϕ est un isomorphisme.

Exemple 7. *$\mathbb{Z}_3$ est groupe linéaire algébrique. Pour faire la preuve, on montre que $\mathbb{Z}_3$ est iomorphe à groupe linéaire algébrique.*

(1) *Montrons que $\mathbb{Z}_3$ est isomorphe à $G = \{1, \omega, \omega^2\}$ oú $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{3})$. On considère l'application $\phi: \mathbb{Z}_3 \to G$ définit par $\phi(\overline{0}) = 1$, $\phi(\overline{1}) = \omega$ et $\phi(\overline{2}) = \omega^2$.*
— *On a $\phi(\overline{x} + \overline{y}) = \phi(\overline{x}).\phi(\overline{y})$, alors ϕ est un homorphisme.*
— *ϕ est surjective par définition et on a de plus* $\dim(\mathbb{Z}_3) = \dim(G) = 3$, *alors ϕ est bijective.*
On peut conclure que $\mathbb{Z}_3$ est isomorphe à l'ensemble G.

(2) *Écrivons ω et ω^2 sous leurs formes algébriques :*

$$\begin{array}{rcl} \omega & = & \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}) \\ & = & \frac{1}{2} + + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \omega^2 & = & \cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3}) \\ & = & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

En faisant quelques calculs, on obtient $\omega^3 = 1$, alors on peut conclure que G est un groupe. Comme G est un sous-groupe de $\mathbb{C}$, d'sprès la proposition 1, on a G est isomorphe à A' oú

$$A' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right\}.$$

A' est un groupe formé de matrices inversibles, alors A' est sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. De plus A' peut être écrit sous la forme $A' = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} | x - t = 0, x + y = 0, x^2 + y^2 = 1 \right\}$, ce qui implique que A' est un ensemble algébrique. Donc A' est un groupe linéaire algébrique. Comme G est isomorphe à A', alors G est un groupe lin'eaire algébrique.

On peut conclure que $\mathbb{Z}_3$ est un groupe linéaire algébrique.

Théorème 2. *$\mathbb{Z}_n$ est un groupe linéaire algébrique pour tout $n \geq 2$.*

Démonstration. On fait la démonstration de manière analague.

(1) Montrons que $\mathbb{Z}_n$ est isomorphe à $G = \{1, \omega, \cdots, \omega^n\}$ oú $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{n})$. On considère l'application $\psi \colon \mathbb{Z}_n \to G$ définit par $\psi(\overline{k}) = \omega^k$.
— On a $\psi(\overline{k} + \overline{k'}) = \psi(\overline{k}).\psi(\overline{k'})$, alors ψ est un homorphisme de groupes.
— ψ est surjective par définition et $\dim(\mathbb{Z}_n) = \dim(G) = n$, alors ψ est bijective.
On peut conclure que $\mathbb{Z}_n$ est isomorphe à G.

(2) D'après la proposition 1, on a G est isomorphe à G' oú

$$G' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & \sin(2\pi/n) \\ -\sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \cos(2(n-1)\pi/n) & \sin(2(n-1)\pi/n) \\ -\sin(2(n-1)\pi/n) & \cos(2(n-1)\pi/n) \end{pmatrix} \right\}.$$

Ensuite, on sait que G' peut s'exprimer sous la forme :

$$G' = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(F) | x - t = 0, y + z = 0, x^2 + y^2 = 1 \right\}.$$

D'après cette expression de G', on peut dire que G' est un ensemble algébrique et de plus un sous groupe de $\mathrm{GL}_2(F)$ car il est composé des matrices inversibles de $M_2(F)$. Ce qui nous permet de dire que G isomorphe à G' est un sous-groupe algébrique.

On peut conclure que $\mathbb{Z}_n$ est groupe linéaire algébrique. □

Théorème 3. *Tout corps intégre est un groupe linéaire algébrique.*

Démonstration. Soit $\mathbb{K}*$ un corps intégre, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a $\lambda\mu = 1$. On montre facilement que $\mathbb{K}^*$ est isomorphe à G oú $G = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} | \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}^*, \lambda\mu = 1 \right\}$ qui est un groupe linéaire algébrique. Alors $\mathbb{K}^*$ est aussi un groupe linéaire algébrique. □

Théorème 4. *Soient G et H deux groupes linéaire algébriques, alors le produit cartésien $G \times H$ est aussi un groupe linéaire algébrique.*

1.1.4 Caractère d'un groupe

Définition 3. *Soit G un groupe quelconque, $\mathbb{K}$ un corps, tout homorphisme de groupe $\phi \colon G \to \mathbb{K}^*$ est appelé* ***caractère.***

Proposition 2. *Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux caractères, on définit le produit de deux caractères par $\phi_1\phi_2 \colon G \to \mathbb{K}^*$ tel que $\phi_1\phi_2(g) = \phi_(g)\phi_2(g)$. Alors $\phi_1\phi_2$ est un caractère sur G.*

Démonstration. on a :

$$\begin{aligned}\phi_1\phi_2(hg) &= \phi_(hg)\phi_2(hg)\\ &= \phi_1(h)\phi_1(g)\phi_2(h)\phi_2(g)\\ &= \phi_1(h)\phi_2(h)\phi_1(g)\phi_2(g)\\ \phi_1\phi_2(hg) &= \phi_1\phi_2(h)\phi_1\phi_2(g)\end{aligned}$$

Donc $\phi_1\phi_2$ est un caractère. □

Définition 4. *Soit G un groupe et $\mathbb{K}$ un corps. on définit par :*

$$\mathcal{H}(G) := \{\phi\colon G \to \mathbb{K}^* | \phi \text{ soit un caractère } \}$$

Proposition 3. *$\mathcal{H}(G)$ munit de la loi de compositions des applications est un groupe. La loi $\circ$ est définit par*

$$\begin{array}{rccc}\circ & : \mathcal{H}(G)\times\mathcal{H}(G) & \to & \mathcal{H}(G)\\ & (\phi_1,\phi_2) & \to & \phi_1\circ\phi_2\end{array}$$

Démonstration. — On considère $\xi\colon G \to \mathbb{K}^*$ telle que $\xi(g) = 1$ pour tout $g \in G$. On sait que ξ est un caractère sur le groupe G. On a aussi $\xi\circ\phi = \phi\circ\xi$, donc ξ est l'élément neutre de $\mathcal{H}(G)$.

— Pour tout $\phi \in \mathcal{H}(G)$, on consière $\phi'\colon G \to \mathbb{K}^*$ telle que $\phi'(g) = (\phi(g))^{-1}$. En effet, $\phi'(hg) = \phi'(h)\phi'(g)$, pour tous $h, g \in G$, alors ϕ' est un caractère. On a aussi $\phi'\circ\phi = \phi\circ phi' = \xi$. Donc tout élément de $\mathcal{H}(G)$ admet une inverse.

— On a $\phi\circ\varphi = \varphi\circ\phi$, alors $\mathcal{H}(G)$ est commutatif.

— $\mathcal{H}(G)$ est associatif.

On peut conclure que $(\mathcal{H}(G), \circ)$ est un groupe associatif, unitaire et abélien. □

Théorème 5. *Soit $G = \mathbb{Z}_n = \{\overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{n-1}\}$ et soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque. On définit l'ensemble,*

$$\mu_n(\mathbb{K}) = \{x \in \mathbb{K} | x^n = 1\} \text{ l'ensemble des racines nième de l'unité,}$$

alors $\mu_n(\mathbb{K})$ est un groupe linéaire algébrique et $\mu_(\mathbb{K}) \cong \mathcal{H}(G)$.

Démonstration. 1. — L'élément neutre $1 \in \mu_n(\mathbb{K})$, car $1^n = 1$.

— Pour tous $x, y \in \mu_n$, alors $x^n = y^n = 1$, ce qui implique que $(x.y)^n = x^n.y^n = 1$, alors $x.y \in \mu_n$. Pour tout $x \in \mu_n(\mathbb{K})$, on a $x^n = 1$, ce qui implique que $1 = (x^{-1})^n$, alors $x^{-1} \in \mu_n(\mathbb{K})$

Alors $\mu_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $\mathbb{K}^* = \mathrm{GL}_1(\mathbb{K})$ et $\mu_n(\mathbb{K})$ est aussi un ensemble algèbrique. Donc $\mu_n(\mathbb{K})$ est un groupe linéaire algébrique.

2. On considère l'application $\alpha\colon \mu_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{H}(\mathbb{Z}_n)$ telle que $\alpha(x) = \phi_x$ oú ϕ_x est un caractère définit de $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{K}^*$ par $\phi_x(\overline{k}) = x^k$.

— Pour tout x élément de $\mu_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\phi_x(\overline{i}+\overline{j}) = \phi_x(\overline{i+j}) = x^{i+j} = x^i.x^j = \phi_x(\overline{i}).\phi_x(\overline{j}),$$

alors $\phi_x \in \mathcal{H}(\mathbb{Z}_n)$.

— α est un homorphisme de groupe car $\alpha(x.y) = \alpha(x)\alpha(y)$.

— pour tout $x \in \ker(\alpha)$, on a $\alpha(x) = \phi_x = 0$, ce qui implique à dire que $x = 0$. Donc α est injective.

— α est surjective par définition.

Enfin, on peut conclure que α est un isomorphisme.

□

Proposition 4. *Soit G et H deux groupes, alors $\mathcal{H}(G \times H)$ est isomorphe à $\mathcal{H}(G) \times \mathcal{H}(H)$.*

Théorème 6. *Soit G un groupe génératrice fini et abélien. Alors $\mathcal{H}(G)$ est un groupe linéaire algébrique.*

Démonstration. Comme G est un groupe génératrice fini et albélien, alors G est isomorphe à $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_q}$. Par la suite, $\mathcal{H}(G)$ est isomorphe à $\mathcal{H}(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_q})$. D'après la proposition 4, on a $\mathcal{H}(G)$ est isomorphe à $\mathcal{H}(\mathbb{Z})^n \times \mathcal{H}(\mathbb{Z}_{m_1}) \times \cdots \times \mathcal{H}(\mathbb{Z}_{m_q})$ et d'après le théorème 5, $\mathcal{H}(G)$ est isomorphe à $\mathbb{K}^* \times \mu_{m_1} \times \cdots \times \mu_{m_q}$. Donc $\mathcal{H}(G)$ est un groupe linéaire algébrique, car il s'exprime sous forme de produit de groupes linéaires algébriques. □

1.2 Groupe de Lie et Algèbre de Lie

Dans ce section, on étudie de manière générale les groupes de Lie et algèbres de Lie. Plus précisément, nous parlerons des sous-groupes du groupe linéaire général. Dans un premier temps, on donnera la définition générale des groupes de Lie en géométrie différentielle. Mais dans notre étude, nous travaillerons avec une définition plus simple.

1.2.1 Définition générale d'un groupe de Lie

Définition 5. *Un groupe de Lie G est un groupe muni d'une structure de variétè lisse tel que les applications*

$$(g, h) \to g.h \text{ de } G \times G \text{ dans } G,$$

$$g \to g^{-1} \text{ de } G \text{ dans } G,$$

soient lisses

Exemple 8.
- *Le groupe additif $\mathbb{R}^n$ est un groupe de Lie*
- *Le groupe linéaire $GL(n, \mathbb{K})$ des automorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est un groupe de Lie.*
- *Si G et H sont des groupes Lie, alors $G \times H$ muni de la structure de groupe produit et de la structure de variétè, est un groupe de Lie.*
- *Le cercle S^1, vu comme le groupe multiplicatif des complexes de module 1, est un groupe de Lie. $S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1 \cong (S^1)^n$ est un groupe de Lie, on l'appelle tore de dimenjsion n.*
- *Donnons enfi l'exemple du groupe de Lorentz $\mathrm{O}(3, 1)$ des automorphismes de la forme quadratique*

  $$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0,$$

  est un groupe de Lie. Le groupe de Lie affine correspondant à ce construction, et se réalise à l'instar du groupe de Galilée comme sous groupe de $GL(1, 5)$. C'est le groupe de Poincaré de la relativité restreinte.

1.2.2 Groupe linéaire général

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on note par $\mathfrak{L}(V)$ l'ensemble des endomorphismes linéaires tel que $\mathfrak{L}(V) := \{T : V \to V/T \text{ linéaire }\}$. On note par $GL(V)$ l'ensemble des endomorphismes linéaire et bijectives.

Théorème 7. *Soit* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) := \{M \in M_n(\mathbb{K}) : \det(M) \neq 0\}$, *alors les assertions suivantes sont vérifiées :*

1. $\mathfrak{L}(V)$ *est une algèbre et* $\mathrm{GL}(V)$ *est un groupe.*
2. $\mathrm{GL}_n(V)$ *est un groupe.*
3. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \cong \mathrm{GL}(V)$.
4. $\mathfrak{L}(V) \cong M_n(\mathbb{K})$.

Démonstration 1. *1. Trivial*

2. On fixe une base B *de* V *et on considère l'application suivante :*

$$\begin{array}{rcccc} \theta & : & \mathfrak{L}(V) & \to & M_n(\mathbb{K}) \\ & & T & \mapsto & M_B(T) \end{array}$$

oú $M_B(T)$ *est la matrice représentative de* T. *Cette matrice* $M_B(T)$ *est définie de la manière suivante dans la base de* $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ *de* V. *Alors, on a :*

$$\begin{array}{rcl} T(e_1) & = & a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n \\ T(e_2) & = & a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n \\ \vdots & & \vdots \\ T(e_n) & = & a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n \end{array}$$

et la matrice représentative $M_B(T)$ *de* B *est donnée par :*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

On montre les propriétès suivantes :
— $\theta(T_1 + \lambda T_2) = \theta(T_1) + \lambda\theta(T_2)$ *pour toutes applications linéaires* $T_1, T_2 : V \to V$ *et pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$
— $\ker(\theta) = \{0\}$, *donc* θ *est injective et surjective par défintion.*
On peut conclure que θ *est un isomorphisme.*

3. La preuve de (iii) *se fait de la même manière que* (ii).

Dans notre travail nous étudierons seulement les groupes de Lie dans le cas des réels. En outre, tous les groupes de Lie que nous étudierons, sont des sous-groupes du groupe linéaire général. Donc la définition la plus appropriés à notre étude est la suivante.

Définition 6. *Un groupe de Lie est un groupe isomorphe à un sous groupe fermé du groupe linéaire général* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *pour tout* $n \geq 1$.

1.2.3 Exemples de groupes de Lie

1. Le cercle S^1 : Il s'exprime sous la forme

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\} = \{(\cos(t), \sin(t))/t \in \mathbb{R}\}.$$

On considère $SO(2) = \{\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\}$ qui est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. On montre aussi que $SO(2)$ est isomorphe à S^1. Pour montrer que S^1 est un groupe de

Lie, il suffit simplement de montrer que $SO(2)$ est un groupe de Lie. En effet, $SO(2)$ peut s'exprimer de la forme :

$$SO(2) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1, ac + bd = 0, ad - bc = 1\}.$$

Considérons l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{R}^4) & \to & \mathbb{R}^4 \\ & & (a,b,c,d) & \mapsto & (a^2+b^2=1, c^2+d^2=1, ac+bd=0, ad-bc=1) \end{array}.$$

g est une application continue et $\{0_4\}$ est ensemble fermé de $\mathbb{R}^4$ muni de la topologie discrète. Comme $g^{-1}(\{0_4\}) = SO(2)$ est un ensemble fermé de $\mathbb{R}^4$. Donc S^1 est un groupe de Lie.

2. La sphère S^3 : Elle s'exprime sous la forme :

$$S^3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$$

est groupe de Lie. En effet, soit $SU(2) = \{A \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}) : A\overline{A}^t = 1_2, \det(A) = 1\}$. On peut aussi écrire $SU(2)$ sous la forme :

$$SU(2) = \{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} : |\alpha|^2 + |\beta|^2\}.$$

On prend un élément quelconque A de $SU(2)$ tel que $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. D'après les conditions $A\overline{A}^t = 1_2, \det(A) = 1$, les coefficients de A vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{array}{rcl} |\alpha|^2 + |\beta|^2 & = & 1, \\ |\gamma|^2 + |\delta|^2 & = & 1, \\ \alpha\overline{\gamma} + \beta\overline{\delta} & = & 0, \\ \alpha\delta - \beta\gamma & = & 1. \end{array}$$

Cela prouve que $SU(2)$ est un groupe de Lie car le système d'équations est équivalent à un système d'équations polynomiales de coefficients réels. Ensuite, on analyse les différents cas :

(*) $\alpha = 0$, alors $|\beta| = 1$ et $\gamma = 0$. On a aussi $\beta\gamma = -1$, donc $\gamma = -\beta^{-1} = -\overline{\beta}$. On peut conclure que A prend la nouvelle forme.

(**) $\gamma = 0$, alors $|\gamma| = 1$, ce qui implique que $\alpha = 0$ et on peut conclure comme dans le cas précédent.

(***) On suppose que $\alpha, \beta \neq 0$. D'après la troisième équation, on obtient $\gamma = -\frac{\overline{\beta}\delta}{\alpha}$ et remplaçant γ dans la quatrième équation, on obtient :

$$\alpha\gamma + \frac{|\beta|^2\gamma}{\overline{\alpha}} = 1 \text{ ce qui implique que } |\alpha|^2\delta + |\beta|^2\gamma = \overline{\alpha}$$

et ainsi on obtient $\delta = \overline{\alpha}$. Similairement on obtient $\gamma = -\overline{\beta}$. On montre que $SU(2)$ est isomorphe à S^3 , comme $SU(2)$ est un sous-ensembles fermé de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, alors on peut conclure que S^3 est un groupe de Lie.

Lemme 1. *Soient $G_1, G_2, \cdots G_n$ sont des groupes de Lie, alors $\prod_{k=1}^{n} G_k$ est un groupe de Lie.*

Démonstration. On fait la preuve par récurrence : Pour $n = 1$, on a un cas trivial. Si $n = 2$, G_1 est un sous-groupe d'un certain $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et G_2 est un sous-groupe d'un certain $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$. Alors, il existe un monomorphisme canonique $G_1 \times G_2 \to \mathrm{GL}_{n+m}(\mathbb{R})$ défini par

$$(x_1, x_2) \to \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$$

Il est facile de montrer à travers ce monomorphisme que le produit cartésien de $G_1 \times G_2$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{n+m}(\mathbb{R})$. Donc $G_1 \times G_2$ est un groupe de Lie. La vérification pour $n = 2$. On suppose que $\prod_{k=1}^{n-1} G_k$ est un groupe de Lie. On montre de la même manière que $\prod_{k=1}^{n} G_k$ est un groupe de Lie en considérant $G_1 = \prod_{k=1}^{n-1} G_k$ et $G_2 = G_n$. □

Exemple 9. *Le tore T^n de dimension n est un groupe de Lie car le tore est un produit de groupe de Lie. Le tore s'écrit sous la forme $T^n = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$.*

Tout les sous-groupe du groupe linéaire général sont des groupes de Lie.

1. Le groupe linéaire spécial : Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. On a $\mathrm{GL}(V)$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^*$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_1(\mathbb{K})$. Considérons l'application
$$\begin{array}{rccc} \det & : & \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}^* \\ & & M & \mapsto & \det(M) \end{array},$$
c'est une application continue, alors $\ker(\det) = SL_n(\mathbb{K})$ est un ensemble fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, donc $SL_n(\mathbb{K})$ est un groupe de lie. Ce groupe est appelé groupe linéaire spécial.
2. Le groupe orthogonal : Soit $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique nondégénérée. On définit le groupe orthiogonal de la manière suivante :
$$\mathrm{O}(\Phi) = \{g \in \mathrm{GL}(V) : \Phi(gv, gw) = \Phi(v, w), \forall v, w \in V\}$$
Nous allons montrer que ce groupe est un groupe de Lie. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire euclidienne $(x|y) = \sum_i x_i y_i$ et la norme $|| \ x \ || = \sqrt{(x|x)}$. On définit le groupe :
$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \underset{n}{\mathrm{GL}}(\mathbb{R}) : (Ax|Ay) = (x|y) \ x, y \in \mathbb{R} \ \}.$$
Alors, nous avons :
$$\mathrm{O}(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : AA^t = I_n\},$$
oú A^t est la matrice transposée de A. et on a
$$\mathrm{O}(n) = \{(a_{ij} \in \mathbb{R}^{n^2} : \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq n\}.$$
Puis, on considère l'application $f : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$ telle que
$$(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \to (\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} - \delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}.$$
L'application f est continue et $\{0_{\mathbb{R}^{n^2}}\}$ est un ensemble fermé de $\mathbb{R}^{n^2}$. Alors $f^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^{n^2}}\}) = \mathrm{O}(n)$ est un ensemble fermé. Ce qui implique que $\mathrm{O}(n)$ est un groupe de Lie. On peut aussi montrer que le groupe orthogonal n'est connexe. La composante connexe du groupe orthogonal est appelée groupe spécial orthogonal de Lie. On note par $SO(\Phi)$,

c'est un sous-groupe de $\mathrm{O}(\Phi)$ formé par les éléments g de $\mathrm{O}(\Phi)$ tels que $\det(g) = 1$. Le déterminant de tout endomorphisme d'espace vectoriel de dimension finie est bien défini par un scalaire. Similairement, on peut définir la version matricielle du groupe spécial orthogonal par :

$$SO(n) := \{x \in \mathrm{O}(n) : \det(x) = 1\}.$$

3. Le groupe unitaire : On considère que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $\Phi\colon V \times V \to \mathbb{R}$ une forme sesquilinéaire hermitienne nondégénérée. On définit le groupe unitaire de la manière suivante :

$$U(\psi) := \{g \in \mathrm{GL}(V) | \psi(gv, gw) = \psi(v, w) \text{ pour tous } v, w \in V\}.$$

Nous essayerons d'expliciter que ce groupe est un groupe de Lie. Considérons dans $\mathbb{C}^n$ la forme sesquilinéaire $(x|y) := \sum_i x_i \overline{y_i}$ oú $x = (x_i)$ et $y = (y_i)$. Nous avons $U(\psi)$ est isomorphe à $U(n)$ oú $U(n)$ s'écrit de la forme suivante :

$$\begin{aligned} U(n) &:= \{A \in \underset{n}{\mathrm{GL}}(\mathbb{R}) : A\overline{A^t} = I_n\} \\ &= \{A \in \underset{n}{\mathrm{GL}}(\mathbb{C}) : A\overline{A^t} = I_n\} \\ U(n) &= \{a_{ij} \in \mathbb{C}^{n^2} | \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\overline{a_{kj}} = \delta_{ij}\}. \end{aligned}$$

De manière analogue avec (2.), on montre que le groupe unitaire est un groupe de Lie.

4. Groupe symplectique : On considère un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension finie muni d'une forme bilinéaire $\psi\colon V \times V \to \mathbb{C}$ alternée et nondégénérée. L'existence d'une telle forme sur V implique que la dimension de V est paire, $\dim(V) = 2n$. On définit alors le groupe symplectique :

$$Sp(\psi) = \{g \in \mathrm{GL}(V) | \psi(gv, gw) = \psi(v, w), \text{ pour tous } x, y \in V\}.$$

5. Le groupe pseudo-orthogonal $\mathrm{O}(p, q)$: c'est l'ensemble des matrices appartenants à $\mathrm{GL}_{p+q}(V)$ qui préserve la forme quadratique suivante :

$$(x|x')_{p,q} = \sum_{i=1}^{p} x_i x'_i - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i x i_i, x, x' \in \mathbb{R}^{p+q}.$$

On obtient le groupe orthonormal lorsque $p = n$ et $q = 0$.

6. Le groupe pseudo-unitaire : C'est l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}(p+q, \mathbb{C})$ qui préserve la forme hermitienne suivante :

$$-z_1\overline{z_1} - \cdots - \underset{p}{\mathrm{Z}}\overline{z_p} + z_{p+1}\overline{z_{p+1}} + \cdots + z_{p+q}\overline{z_{p+q}},$$

alors on a

$$U(p, q) := \{g \in \mathrm{GL}(p+q, \mathbb{C}) | g^t I_{p,q} \overline{g} = I_{p,q}\}.$$

On obtient le groupe unitaire $U(n)$ lorsque $p = 0$ et $q = n$.

1.3 Algèbre de Lie

1.3.1 Structure des algèbres de Lie

On peut associer une fonction qui transforme un groupe de Lie en une allgèbre de Lie. Cette algèbre de Lie capture localement toutes les transformations sur le groupe de Lie. Si le groupe de Lie que nous étudios est simplement connexe alors l'algèbre de Lie capture globalement toutes les informations sur le groupe de Lie. L'algèbre est objet d'algèbre linéaire à priori plus simple que le groupe lui même. Ceci est une motivation pour étudier ces nouveaux objets, après avoir donné un fondement axiomatique.

1.3.2 Algèbre de Lie " abstraites"

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque.

Définition 7. *Une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ sur un corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une loi de composition interne, appelée crochet de Lie*

$$\begin{array}{rccc} [,] & : & \mathcal{G}\times\mathcal{G} & \to & \mathcal{G} \\ & & (X,Y) & \mapsto & [X,Y] \end{array}$$

telle que :
- *antisymétrie : $[X,Y]=-[Y,X]$,*
- *identité de Jacobi : $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$ pour tous $X,Y,Z\in\mathcal{G}$*

Définition 8. *Un homomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de Lie est une application $\mathbb{K}$-linéaire $\varphi\colon \mathcal{G}\to\mathcal{H}$ telle que*

$$\varphi([X,Y])=[\varphi(X),\varphi(Y)] \text{ pour tous } X,Y\in\mathcal{G}$$

Notation 1. — *Si P et Q sont des parties d'une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie $\mathcal{G}$, on pose alors :*

$$[P,Q]:=lin_{\mathbb{K}}\{[p,q]:p\in P,q\in Q\}$$

- *Si $X,Y\in\mathcal{G}$, on dit que X et Y commutent si $[X,Y]=0$.*
- *On dit que $\mathcal{G}$ est abélienne si $[X,Y]=0$ pour tous $X,Y\in\mathcal{G}$ i.e $[\mathcal{G},\mathcal{G}]=0$.*

Définition 9. *Une $\mathbb{K}$-sous-algèbre $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ est un $\mathbb{K}$- sous-espace vectoriel de $\mathcal{G}$ tel que $[\mathcal{H},\mathcal{H}]\subset\mathcal{H}$*

Définition 10. *Un idéal de Lie de $\mathcal{G}$ est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel $\mathcal{I}$ de $\mathcal{G}$ tel que $[\mathcal{G},\mathcal{I}]\subset\mathcal{I}$.*

Notation 2. *Si $\mathcal{I}$ est un idéal de Lie $\mathcal{G}$, alors le quotient de $\mathcal{G}$ par $\mathcal{I}$ est la $\mathbb{K}$-algèbre de Lie donnée par $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{G}/\mathcal{I}$ muni du crochet de Lie*

$$[X+\mathcal{I},Y+\mathcal{I}]=[X,Y]+\mathcal{I} \text{ oú } X,Y\in\mathcal{G}$$

Définition 11. — *Le centre de $\mathcal{G}$ est le sous ensemble*

$$Z(\mathcal{G}):=\{X\in\mathcal{G}:[X,Y]=0,\forall Y\in\mathcal{G}\},$$

c'est une algèbre de Lie.
- *L'idéal des commuateurs de $\mathcal{G}$ est le sous-ensemble $[\mathcal{G},\mathcal{G}]$ de $\mathcal{G}$; c'est un idéal de $\mathcal{G}$.*

Algèbre de Lie associée à une algèbre associative.

Définition 12. *Soit A une algèbre associative. Munissons A du crochet $[a,b] = ab - ba$. Alors A muni du nouveau produit est une algèbre de Lie que l'on note par A^- et aussi appelée antisymétrisation de l'algèbre de Lie A.*

Exemple 10.
— *$M_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie dont l'espace sous-jacent est $M_n(\mathbb{K})$ et dont le crochet de Lie est $[,]_{asso}$. On note*

$$gl_n(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})^-$$

— *Si E est une $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $gl_n(E) = (End_{\mathbb{K}}(E), [,]_{assoc})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie, i.e*

$$[\varphi, \psi] = \varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi.$$

De façon analogue, si E est un $\mathbb{H}$-espace vectoriel (à gauche ou à droite), on définit $gl_{\mathbb{H}}$ comme une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie.
— *$sl(n, \mathbb{K}) = \{M \in gl_n(\mathbb{K}) : trace(M) = 0\}$ est une sous-algèbre de Lie de $gl_n(\mathbb{K})$.*

1.4 Action des groupes de Lie

1.4.1 Sous-groupe à un paramètre

Par définition un sous-groupe à un d'un groupe topologique G est un morphisme de groupe

$$\rho : (\mathbb{R}, +) \to G \text{ continue.}$$

En particulier, on a $\rho(s+t) = \rho(s) + \rho(t)$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ et $\rho(0) = 1$. On peut montrer que ce sous-groupe à un paramètre vérifiant les conditions précédentes est différentiable. Si $f\colon \mathbb{R} \to S \subset \mathbb{R}^n$ est une application différentiable. La dériv'ee est une fonction $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Ainsi l'image d'un élément $f'(r)$ est dans $\mathbb{R}^n$, mais il n'est pas nécessaire que $f'(r)$ appartient à S. Soit $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ et $\rho\colon \mathbb{R} \to G$ un sous-groupe à un paramètre. Alors, $\rho'\colon \mathbb{R} \to \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ telle que $\rho'(0) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ est une matrice (pas forcément inversible). La dérivée $\rho'(0)$ d'un sous-groupe à un paramètre $\rho\colon \mathbb{R} \to G$ est appelé le générateur infinésimal de ρ. En effet, on a

$$\rho'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\rho(t) - 1}{t}.$$

Pour un sous-groupe à un paramètre ρ, on peut calculer les générateurs infinétisémaux par dérivation. Réciproquement, si nous avons $a \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, on peut déterminer le générateur infinitésimal de ce sous-groupe à un paramètre ρ. Essayons de trouver une autre relation plus directe entre le sous-groupe à un paramètre ρ et le générateur infinitésimal :

$$\rho(s+t) = \rho(s)\rho(t), \text{ pour tous } s, t \in \mathbb{R}.$$

En dérivant, par rapport à s, on obtient :

$$\rho'(s+t) = \rho'(s)\rho(t), \text{ pour tous } s, t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, en prenant $s = 0$ et $\rho'(0) = a$, on a : $\rho'(t) = a\rho(t)$. en utisant la condition initiale $\rho(0) = 1$, on a :

$$\begin{cases} \rho'(t) = & a\rho(t) \\ \rho(0) = & 1. \end{cases}$$

D'après le théorème des équations différentielles du premier ordre, il existe une unique solution de l'équation (E). On a, donc

$$\rho(t) = \exp(ta), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Maintenant, on peut définir l'espace tangent d'un groupe de Lie à l'unité noté $T_1(G)$ comme l'ensemble de tous les générateurs infinitésimaux.

$$T_1(G) = \{\rho'(0) : \rho \text{ est un sous-groupe à un paramètre de } G\}.$$

On montre aussi que si $G \subset GL_n(\mathbb{R})$, alors on a :

$$T_1(G) = \{a \in \underset{n}{\mathfrak{gl}}(\mathbb{R}) : \exp(ta) \in G \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\}.$$

D'après la définition de $T_1(G)$ et en appliquant le théorème d'inversion locale, l'application $\exp\colon T_1(G) \to G$ peut être restreindre à un voisinage $U \subset T_1(G)$ et $V \subset G$ tel que $0 \in T_1(G)$ et $\exp\colon U \to V$ soit un difféomorphisme. Ainsi, $T_1(G)$ et G sont localement isomorphes.

Théorème 8. *$T_1(G)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

Démonstration. Soit $a, b \in T_1(G)$, alors on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \exp(ta) &= 1 + ta + o(t^2) \\ \exp(tb) &= 1 + tb + o(t^2) \end{aligned}$$

oú $o(t^2)$ est une fonction telle que $\lim_{t\to 0} o(t^2)/t = 0$. Ainsi, on peut écrire $\exp(ta)\exp(tb) = 1 + t(a+b) + o(t^2)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et on a aussi :

$$\exp(\frac{ta}{n})\exp(\frac{tb}{n}) = 1 + \frac{t}{n}(a+b) + \frac{1}{n^2}o(t^2).$$

En élevant cette égalité au puissance n, on obtient :

$$(\exp(\frac{ta}{n})\exp(\frac{tb}{n}))^n = (1 + \frac{t}{n}(a+b) + \frac{1}{n^2}o(t^2))^n.$$

En utilisant la formule $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{a_n}{n})^n = \exp(a)$ oú $a = \lim a_n$, nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty}(\exp(\frac{ta}{n})\exp(\frac{tb}{n}))^n &= \lim_{t\to\infty}(1 + \frac{t}{n}(a+b) + \frac{1}{n^2}o(t^2))^n \\ &= \exp(t(a+b)). \end{aligned}$$

Comme $\exp(\frac{ta}{n}\exp(\frac{tb}{n})$ appartient à G et comme G est un ensemble fermé, alors $\lim_{t\to\infty}\exp(\frac{ta}{n}\exp(\frac{tb}{n}) = \exp(t(a+b)) \in G$, ce qui entraine que $a + b \in T_1(G)$. Maintenant, on montre que pour tout $s \in \mathbb{R}^*$, pour tout $a \in T_1(G)$. On a $\exp(ta) = \exp(\frac{t}{s}(sa)) = \exp(t_1(sa)) \in G$, ce qui implique que $sa \in T_1(G)$. Donc $T_1(G)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. □

Théorème 9. *$T_1(G)$ est un sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Comme, on la fait précédemment :

$$\begin{aligned} \exp(ta) &= 1 + ta + \frac{t^2}{2}a^2 + o(t^3) \\ \exp(tb) &= 1 + tb + \frac{t^2}{2}b^2 + o(t^2) \end{aligned}$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \exp(ta)\exp(tb) &= 1 + t(a+b) + \frac{t^2}{2}(a+b)^2 + o(t^3) \\ \exp(-ta)\exp(-tb) &= 1 - t(a+b) + \frac{t^2}{2}(a+b)^2 - o(t^3) \end{aligned}$$

Maintenant, pour tout groupe G, on peut définir pour deux éléments g, h de G, le commutateur multiplicatif $\{g,h\} = ghg^{-1}h^{-1}$ appartient à G. Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\{\exp(ta), \exp(tb)\} &= \exp(ta)\exp(tb)\exp(-ta)\exp(-tb) \\ &= 1 + t^2[a,b] + o(t^3)\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\{\exp(\frac{t}{n}a), \exp(\frac{t}{n}b)\} = 1 + \frac{t^2}{n^2}[a,b] + \frac{1}{n^3}o(t^3).$$

Ainsi, en élevant l'égalité précédente, on obtient :

$$\{\exp(\frac{t}{n}a), \exp(\frac{t}{n}b)\}^{n^2} = (1 + \frac{t^2[a,b] + \frac{1}{n}o(t^3)}{n})^{n^2}.$$

En utilisant la formule $\lim_{t\to\infty}(1 + \frac{a_n}{n})^n = \exp(a)$ oú $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \{\exp(\frac{t}{n}a), \exp(\frac{t}{n}b)\}^{n^2} = \exp(t^2[a,b])$$

et comme $\{\exp(\frac{t}{n}a), \exp(\frac{t}{n}b)\}$ est un élément de G. Puis que G est un groupe fermé, ce qui implique que $\lim_{n\to\infty}\{\exp(\frac{t}{n}a), \exp(\frac{t}{n}b)\}^{n^2}$ est un élément de G. Alors $\exp(t[a,b])$ est un élément de G pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi, on peut dire que $[a,b] \in T_1(G)$, donc $T_1(G)$ est sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$. □

1.4.2 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Soit $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ un groupe de Lie. Comme $T_1(G)$ est une sous-algèbre de Lie. Ce sous-algèbre de Lie de G est notée par $Lie(G)$. Avant d'étudier la notion abstraite d'algèbre de Lie, nous expliciterons les liens qui existent entre G et l'algèbre de Lie $Lie(G)$:

$$Lie(G) = \{a \in gl_n : \exp(ta) \in G, \forall t \in \mathbb{R}\}$$

1.4.3 Exemples classiques

1. $Lie(GL(V)) = \{a \in \mathfrak{gl}(V) : \exp(ta) \in GL(V), \forall t \in \mathbb{R}\}$,
2. $Lie(SL(V)) = \{a \in \mathfrak{gl}(V) : tr(a) = 0\}$,
3. $Lie(\mathrm{O}(n)) = \{a \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) : a + a^t = 0\}$,
4. $su(p,q)$ c'est l'ensemble des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ \overline{Z_2}^t & Z_3 \end{pmatrix},$$

   oú Z_1 et Z_3 sont des matrices carrées antihermitiennes de tailles p et q respectivements telles que $tr(Z_1) + tr(Z_3) = 0$ et Z_2 est une matrice quelconque.

5. $so(p,q)$ c'est l'ensemble des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ \overline{X_2}^t & X_3 \end{pmatrix},$$

   oú X_i sont des matrices à coefficients réels, X_1, X_2 sont antisymétriques d'ordre p et q respectifs et X_2 est une matrice quelconque.

6. $sp(p,q)$ c'est l'ensemble des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} \\ \overline{Z}_{12}^t & Z_{22} & Z_{14}^t & Z_{24} \\ -\overline{Z}_{13} & \overline{Z}_{14} & \overline{Z}_{11} & -\overline{Z}_{12} \\ \overline{Z}_{14}^t & -\overline{Z}_{24} & -\overline{Z}_{12}^t & \overline{Z}_{22} \end{pmatrix},$$

oú les Z_{ij} sont des matrices à coefficients complexes. Z_{11} et Z_{13} sont des matrices carrées d'ordres p et q respectives, Z_{12} et Z_{14} sont des matrices de tailles $p \times q$, Z_{11} et Z_{22} sont antihermitienne et Z_{13} et Z_{24} sont des matrices symétriques. Montrons comment on fait pour obtenir l'algèbre de Lie $sp(p,q)$. On sait que :

$$Lie(Sp(p,q)) = sp(p,q) = \{A \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{C}) : \exp(tA) \in Sp(p,q)\}.$$

Comme $\exp(tA)$ appartient à $Sp(p,q)$; cela équivaut à dire que $\exp(tA)$ appartient à $Sp(p+q,\mathbb{C})$ et vérifie la condition suivante :

$$\exp(tA)K_{p,q}\overline{\exp(tA)} = K_{p,q}.$$

Comme A est un élément de $GL(2n,\mathbb{C})$, on considère que

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} \\ Z_{14} & Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$$

oú $X_{11} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}$, $X_{12} = \begin{pmatrix} Z_{13} & Z_{14} \\ Z_{23} & Z_{24} \end{pmatrix}$, $X_{21} = \begin{pmatrix} Z_{31} & Z_{32} \\ Z_{41} & Z_{42} \end{pmatrix}$ et $X_{22} = \begin{pmatrix} Z_{33} & Z_{34} \\ Z_{43} & Z_{44} \end{pmatrix}$.
Dans un premier, nous avons $\exp(tA)$ est un élément de $Sp(p+q,\mathbb{C})$, ce qui signifie que :

$$\exp(tA)J_n\exp(tA) = J_n.$$

En dérivant par rapport au variable t, on obtient :

$$A^t\exp(tA)J_n\exp(tA) + \exp(tA)J_nA\exp(tA) = 0.$$

En prenant $t = 0$, on obtient $A^tJ_n = -J_nA$, en faisant les calculs on obtient $X_{12} = X_{12}^t$, $X_{21} = X_{21}^t$ et $X_{22} = -X_{11}^t$.

$$X_{12} = X_{12}^t \Rightarrow Z_{23} = Z_{14}^t$$
$$X_{21} = X_{21}^t \Rightarrow Z_{41} = Z_{32}^t$$

$$X_{22} = -X_{11}^t \Rightarrow \begin{cases} Z_{33} = & -Z_{11}^t \\ Z_{34} = & -Z_{21}^t \\ Z_{43} = & -Z_{12}^t \\ Z_{44} = & -Z_{22}^t \end{cases}$$

Ce qui permet d'obtenir :

$$A = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{24}^t & Z_{24} \\ Z_{31} & Z_{32} & -Z_{11}^t & -Z_{12}^t \\ Z_{32}^t & Z_{42} & -Z_{12}^t & -Z_{22}^t \end{pmatrix}$$

On a aussi la relation suivante :

$$\exp(tA)^t K_{pq} \overline{\exp(tA)} = K_{pq}$$

En dérivant par rapport au variable t et en prenant $t = 0$, on obtient :

$$A = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} \\ \overline{Z}_{12}^t & Z_{22} & Z_{24}^t & Z_{24} \\ -\overline{Z}_{13} & \overline{Z}_{14} & \overline{Z}_{11} & -\overline{Z}_{12} \\ \overline{Z}_{14}^t & -\overline{Z}_{24} & -\overline{Z}_{12}^t & \overline{Z}_{22}^t \end{pmatrix}$$

1.4.4 Changement de groupe

Soit $f\colon G \to H$ un homomorphisme de groupe de Lie. Si $\rho\colon \mathbb{R} \to G$ est un sous-groupe à un paramètre de G, alors $f \circ \rho\colon \mathbb{R} \to H$ est un sous-groupe à un paramètre de H. Considérons maintenant l'application $T_1(f)\colon T_1(G) \to T_1(H)$ telle que $\rho'(0) \to T_1(f)(\rho'(0)) = f \circ \rho)'(0)$, qui est appelée la différentielle de f à 1.

Théorème 10. *Le diagramme ci-dessous est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} Lie(G) & \xrightarrow{T_1(f)} & Lie(H) \\ \Big\downarrow \exp & & \Big\downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{f} & H \end{array}$$

Démonstration. Montrons que $\exp \circ T_1(f) = f \circ \exp$. Dans un premier temps, on sait que :

$$T_1(f)(\rho'(0)) = (f \circ \rho)'(0)$$

Si $\rho(t) = \exp(ta)$, alors $\beta(t) = (f \circ \rho)(t)$ est sous-groupe à un paramètre de H. Si $f(\exp(ta)) = \exp(tb)$, alors $f \circ \rho)(t) = \exp(tb)$ oú $b = (f \circ \rho)'(t) = T_1(f)(a)$. Donc, on a $f(\exp(a)) = \exp(tT_1(f)(a))$, pour tout t appartenant à $\mathbb{R}$. En particulier, $f(\exp(a)) = \exp(T_1(f)(a))$, c'est à dire $f \circ \exp = \exp \circ T_1(f)$. Le diagramme ci-dessous est commutatif. □

Lemme 2. *Si V et W sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $T\colon V \to W$ une application satisfaisant à $T(0) = 0$ et $T(x + y) = T(x) + T(y)$ pour tous $x, y \in V$, alors T est une application linéaire.*

Démonstration. Dans un premier temps, on observe que $T(-x) = -T(x)$ pour tout x élément de V. Alors pour tout entier naturel n, on a $T(nx) = nT(x)$ et pour la première observation, on peut conclure que $T(nx) = nT(x)$ pour tout élément x de V et n un élément de $\mathbb{Z}$. D'autre part, pour tout entier n différent de 0, on a $nT(\frac{1}{n}x) = T(x)$, alors on a $T(\frac{1}{n}x) = \frac{1}{n}T(x)$. Ce qui nous permet d'avoir $T(\frac{n}{m}x) = \frac{n}{m}T(x)$, on peut conclure en disant que $T(qx) = qT(x)$ pour tout q élément de $\mathbb{Q}$. Maintenant, on fixe une base $\mathcal{B}$ de V et une base $\mathcal{B}'$ de W , puis on considère une norme sur V définie par $\| x \| = \sum_{i \in I} x_i^2$ oú $(x_i)_{i \in I}$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. Considérons similairement que une norme sur W. Comme V et W sont de dimensions finies et T est une application continue relative á l'espace topologique muni de la norme de V et de W. Si r est un élément de $\mathbb{R}$, alors il existe une suite (q_n) telle que $r = \lim_{n \to +\infty} q_n$, on peut dire que :

$$T(rx) = T(\lim_{n \to +\infty} q_n x) = \lim_{t \to +\infty} T(q_n x) = \lim_{t \to +\infty} q_n T(x) = rT(x),$$

pour tout $x \in V$. Donc on peut conclure que T est une application linéaire. □

Théorème 11. *$T_1(f)$ est une application linéaire.*

Démonstration. Montrons que $T_1(f)(a+b) = T_1(f)(a) + T_1(f)(b)$ pour tous a et b. D'après le théorème.3 pour tout t élément de $\mathbb{R}$, nous avons $\exp(tT_(f)(a+b)) = f(\exp(t(a+b))$ et comme $\exp(t(a+b)) = \lim_{n\to+\infty}(\exp(ta/b)\exp(tb/n))^n$, on a :

$$\begin{aligned}
\exp(tT_1(f)(a+b)) &= f(\exp(t(a+b))) \\
&= f(\lim_{n\to+\infty}(\exp(ta/b)\exp(tb/n))^n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} f(\exp(ta/b)\exp(tb/n)))^n \\
&= \lim_{n\to+\infty}(f(\exp(ta/b))f(\exp(tb/n)))^n \\
&= \lim_{n\to+\infty}[\exp(t/nT_1(f)(a))\exp(t/nT_1(f)(b))]^n \\
\exp(tT_1(f)(a+b)) &= \exp(t(T_1(f)(a) + T_1(f)(b))).
\end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a alors $T_1(f)(a+b) = T_1(f)(a) + T_1(f)(b)$ pour tous a et b éléments de $Lie(G)$. D'autre part, d'après l'égalité $f(\exp(ta)) = \exp(tT_1(f)(a))$, en remplaçant $a = 0$, on obtient $1 = \exp(tT_1(f)(0))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et comme $T_1(f)(0) = 0$. En appliquant le lemme.4, on obtient que $T_1(f)$ est une application linéaire. □

Théorème 12. *$T_1(f)$ est un homomorphisme d'algèbre de Lie.*

Démonstration. Soit a et b deux éléments de $T_1(G)$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp(tT_1(f)([a,b])) = f(\exp(t[a,b])),$$

et comme $\exp(t[a,b]) = \lim_{n\to+\infty}(\exp(ta/n)\exp(tb/n)\exp(-ta/n)\exp(-tb/n))^{n^2}$. En utilisant la formule précédente de l'exponentielle, on obtient :

$$\begin{aligned}
\exp(tT_1(f)[a,b]) &= \lim_{n\to+\infty}(\exp(tT_1(f)(a)/n)\exp(tT_1(f)(b)/n)\exp(-tT_1(f)(a)/n)\exp(-tT_1(f)(b)/n))^{n^2} \\
&= \exp(tT_1(f)(a), T_1(f)(b)])
\end{aligned}$$

pour tout réel t. Alors, nous avons montré que $T_1(f)([a,b]) = [T_1(f)(a), T_1(f)(b)]$, ce prouve que $T_1(f)$ est un homomorphisme d'algèbre de Lie. □

Théorème 13. *Soient G, G_1, G_2, G_3 des groupes de Lie et $f\colon G_1 \to G_2$, $g\colon G_2 \to G_3$ des homomorphismes de groupes de Lie. Alors, nous avons*

1. $Lie(1_G) = 1_{Lie(G)}$
2. $Lie(g \circ f) = Lie(g) \circ Lie(f)$

Démonstration. On sait que $\exp(tLie(1_G)(a)) = 1_G(\exp(ta)) = \exp(ta)$. Comme cette égalité est vraie pour tout réel t, on peut conclure que $Lie(1_G) = 1_{Lie(G)}$. Dans la deuxième assertion , nous avons :

$$\begin{aligned}
\exp(tLie(g \circ f)(a)) &= g(f(\exp(ta))) \\
&= g(\exp(tLie(f)(a))) \\
&= \exp(t(Lie(g) \circ Lie(f))(a)),
\end{aligned}$$

Maintenant, nous pouvons conclure que $Lie(g \circ f) = Lie(g) \circ Lie(f)$. □

Le théoréme 5 et 6, nous permet de voir $Lie(G)$ est une catégorie de groupe et $Lie(f)$ est un functeur invariant.

Chapitre Two

Simplicité des algèbres de Lorentz

2.1 Introduction

L'activité de recherche tourne autour de la simplicité des objets algébriques, leurs structures, leurs classifications sont omniprésents dans la littérature mathématique. L'étude des objets algébriques comme algèbres, système triples, superalgèbres etc... ces sujets attirent à maintes reprises l'attention des algébristes. Deux de ces sujets les plus fréquents sont la question sur la simplicité et l'étude des automorphismes de groupes. Ces deux notions sont liées dans certaines conditions, surtout si l'algèbre n'est pas simple. En outre, dans les variétés algébriques, on utilise la relation de conjugaison sur les automorphismes groupe intérieur et aussi les automorphismes de groupe extérieur. Tant que l'automorphisme intérieur préserve la structure des idéaux, alors le groupe des automorphismes extérieurs agit comme une permutation de groupe sur l'ensemble des idéaux. De cette facon la structure idéale de l'objet algébrique peut laisser une empreinte dans la partie externe des automorphismes de groupes. Par exemple, soit $A = I_1 \oplus I_2$ une algèbre oú I_1 et I_2 sont des idéaux isomorphes de A, alors $\mathbb{Z}_2$ apparait comme la partie externe des automorphisme de Schemes. L'étude des structures algébriques, nous permet de déterminer la partie externe des automorphismes de groupe. L'autre motivation pour l'etude des algèbres de Lorentz sur un anneau vient de quelques cryptosystèmes algébriques récemment développer par des chercheurs. Plusieurs auteurs ont proposé "NTRU-like cryptems" qui sont basés sur les quaternions et les octonions d'algèbres de Dedeking (Voir[2],[7]).

2.2 Notions préliminaires

Dans ce chapitre, on note par Φ l'ensemble des anneaux associatifs , commutatifs et unitaires et on le par $\mathbf{alg}_\Phi$ la catégorie qui a pour objects l'ensemble des Φ-algèbres associatives, commutatives et unitaires. D'autre par, $\mathbf{Lie}_\Phi$ sera noté comme la catégorie des Φ-algèbres de Lie. L'algèbre de Lorentz sur les réels, notée par $\mathfrak{o}(1,3)$ est l'algèbre de Lie du groupe pseudo orthogonal $\mathrm{O}(1,3)$:

$$\mathfrak{o}(1,3) := \mathbf{Lie}(\mathrm{O}(1,3)) = \{M \in \mathfrak{gl}_4(\mathbb{R}) : MI_{13} + I_{13}M^t = 0\},$$

oú M^t est la transposée de M et $I_{13} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$, d'autres auteurs prennent $I_{13} = \mathrm{diag}(1,1,1,-1)$ qui est une equivalence. En faisant directement les calculs, on peut exprimer

les éléments de $\mathfrak{o}(1,3)$ sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 0 & x_4 & x_5 \\ x_2 & -x_4 & 0 & x_6 \\ x_3 & -x_5 & -x_6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, on peut déterminer la base de l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{o}(1,3)$, notée par $\mathcal{B} = \{s_{12}, s_{13}, s_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34}\}$, oú $S_{ij} = e_{ij} + e_{ji}$ et $a_{ij} = e_{ij} - e_{ji}$. Relative à cette base $\mathcal{B}$, la structure de l'alg´ebre est représentée par les constantes $0, \pm 1$. La tableau ci-dessous, nous donne la table mutiplicative de l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{o}(1,3)$.

	s_{12}	s_{13}	s_{14}	a_{23}	a_{24}	a_{34}
s_{12}	0	a_{23}	a_{24}	s_{13}	s_{14}	0
s_{13}	$-a_{23}$	0	a_{34}	$-s_{12}$	0	s_{14}
s_{14}	$-a_{24}$	$-a_{34}$	0	0	$-s_{12}$	$-s_{13}$
a_{23}	$-s_{13}$	s_{12}	0	0	$-a_{34}$	a_{24}
a_{24}	$-s_{14}$	0	s_{12}	a_{34}	0	$-a_{23}$
a_{34}	0	$-s_{14}$	s_{13}	a_{24}	a_{23}	0

Figure 1 : Table de multiplication de l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{o}(1,3)$.

Grâce à ce tableau, on peut construire l'algèbre de Lorentz définie sur $\mathbb{Z}$, comme suit :

$$\mathfrak{L}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}s_{12} \oplus \mathbb{Z}s_{13} \oplus \mathbb{Z}s_{14} \oplus \mathbb{Z}a_{23} \oplus \mathbb{Z}a_{24} \oplus \mathbb{Z}a_{34}.$$

Maintenant, on fixe un anneau associatif, commutatif et unitaire dans Φ et on considère la catégorie $\mathbf{alg}_\Phi$ définie ci-dessus. Pour tout object R de $\mathbf{alg}_\Phi$, on peut définir l'algèbre de Lorentz sur R, notée par $\mathfrak{L}_R = \mathfrak{L}_{\mathbb{Z}} \times R$. C'est un R-module libre ayant la même base que l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_{\mathbb{Z}}$. L'algèbre de Lorentz sur R étant considérée comme un R-module libre, alors sa dimension est à la dimension de l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_{\mathbb{Z}}$; c'est dire $\dim(\mathfrak{L}_R) = \dim(\mathfrak{L}_{\mathbb{Z}}) = 6$. Si $R = \mathbb{R}$, alors l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_R$ est isomorphe à $\mathfrak{o}(1,3)$ et $R = \mathbb{C}$; l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_R$ est isomorphe à $\mathfrak{o}(1,3) \oplus i\,\mathfrak{o}(1,3)$. Si R et S sont deux objects de $\mathbf{alg}_\Phi$ et $f\colon R \to S$ un homomorphisme de Φ-algèbres, on peut définir $\mathfrak{L}_f\colon \mathfrak{L}_R \to \mathfrak{L}_S$ comme un homomorphisme de Φ-algèbres de Lie. Ainsi, on a définit un foncteur convariant $\mathfrak{L}\colon \mathbf{alg}_\Phi \to \mathbf{Lie}_\Phi$. On aimerai étudier dans quelles conditions le foncteur de Lorentz $\mathfrak{L}\colon \mathbf{alg}_\Phi \to \mathbf{Lie}_\Phi$ produit des algèbres de Lie simple. Lorsque $\mathfrak{L}_R$ n'est pas simple, sous une condition appropriée, on peut décomposer $\mathfrak{L}_R$ comme lla somme directe d'idéaux isomorphes. Ces idéaux sont très spécial et nos attentes sur elle, est que son automomorphisme de groupe agit comme une permutation groupe sur l'ensemble des idéaux. Alors, la connaisance sur la structure des idéaux de $\mathfrak{L}_R$, nous donnera des informations précises sur le groupe affine de Scheme $R \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{L}_R)$. (Voir b[6] et [5] pour le travail sur les groupes affines de Schemes.)

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
b_1	0	b_4	b_5	b_2	b_3	0
b_2	$-b_4$	0	b_6	$-b_1$	0	b_3
b_3	$-b_5$	$-b_6$	0	0	$-b_1$	$-b_2$
b_4	$-b_2$	b_1	0	0	$-b_6$	b_5
b_5	$-b_3$	0	b_1	b_6	0	$-b_4$
b_6	0	$-b_3$	b_2	b_5	b_4	0

Tableau 2 : Table de multiplication de $\mathfrak{L}_R$.

Pour, simplifié la notation, on prendra la suivante : $b_1 = s_{12}, b_2 = s_{13}, b_3 = s_{14}, b_4 = a_{23}, b_5 = a_{24}, b_6 = a_{34}$. Maintenant, la base $\mathcal{B}$ de l'algèbre de lorentz devient $\mathcal{B} = \{b_i\}_1^6$ et sa

table de multiplication est donnée par le Tableau 2. Dans cette partie, on étudie la simplicité de l'algèbre de Lorentz sur R oú R appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$.

Définition 13. *Soit R une algèbre de $\mathbf{alg}_\Phi$ et V une R-algèbre. Un idéal I de V est dit :*

1. *"Basic " si pour tout r non-nul appartenant à R et pour tout x appartenant à V, si $rx \in I$, alors $x \in I$.*
2. *"Libre" s'il existe un R-sous-module J tel que $V = I \oplus J$ et I, J sont des sous-modules libres.*

L'algébre V est dit basiquement (resp librement) simple si et seulement si $V^2 \neq 0$ et ne possédant pas d'idéal propre basic (resp libre). La notion d'idéal basic que l'on a utilisé dans la définition, est inspirée par une donnée dans (voir [3]) sur les "Leavitt Path Algebra". Ainsi, elle a été modifié et utilisé par certains auteurs. Puis, on a créer la notion d'idéal libre (Voir [4]). Si R est un corps, alors les notions basic et libre seront équivalentes.

Exemple 11. 1. *Soit V une R-algèbre, alors V et $\{0\}$ sont des idéaux libres de V.*

2. *On considère l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(R)$ sur R, ainsi*

$$\mathfrak{sl}_2(R) := \mathbf{Lie}(SL_2(R)) = \{M \in gl_2(R) | tr(M) = 0\}.$$

Cette algèbre est une R-module libre et on utilisera fréquemment sa base $\{h, e, f\}$ telle que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque 2. *Si on considère l'algèbre de Lie $V = \mathfrak{sl}_2(R) \oplus \mathfrak{sl}_2(R)$, alors $\mathfrak{sl}_2(R) \oplus 0$ et $0 \oplus \mathfrak{sl}_2(R)$ sont des idéaux libres de V. En outre, ces idéaux ne sont pas nécessairement des idéaux basic de V. Pour faire la preuve, on prend $R = \mathbb{Z}_4$ l'anneau des entiers modulo 4. On sait que $(h, \overline{2}e) \in V$, mais $(h, \overline{2}e) \notin \mathfrak{sl}_2(R) \oplus 0$. En effet, $\overline{2}(h, \overline{2}e) = (\overline{2}h, 0) \in \mathfrak{sl}_2(R) \oplus 0$. Donc les idéaux libres de V, ne sont pas nécessairement des idèaux basiques de V.*

Remarque 3. *Plus généralement, si pour toute algèbre R dans $\mathbf{alg}_\Phi$ et V une algèbre sur R qui peut aussi être considéré comme un R-module libre, alors $\mathfrak{i} \lhd R$, avec $\mathfrak{i} \neq 0, R$, l'idéal $I = \mathfrak{i}V$ n'est pas basique : si pour tout $x \in V$, on a $\mathfrak{i}x \subset I$, donc $x \in I$, aussi $\mathfrak{i}V = V$ et c'est une contraduction si V est un R-module libre. On observe dans la remarque 1 que l'idéal que l'idéal $\mathfrak{sl}_2(R) \oplus 0$ est $\mathfrak{i}V$ oú $\mathfrak{i} = R \oplus 0$, après identification $V = \mathfrak{sl}_2(R) \oplus \mathfrak{sl}_2(R)$.*

Lemme 3. *Pour tout R appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$ tel que $\frac{1}{2} \in R$. On considère l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(R)$. Alors tout idéal propre non-nul de $\mathfrak{sl}_2(R)$ est de la forme $\mathfrak{i}\,\mathfrak{sl}_2(R)$ pour tout idéal propre non-nul $\mathfrak{i}$ de R. L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(R)$ est à la fois librement et basiquement simple.*

Démonstration. Soit I un idéal non-nul de $\mathfrak{sl}_(R)$. On considère la base usuelle $\{h, e, f\}$ du R-module libre $\mathfrak{sl}_2(R)$ telle que $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$ et $[e, f] = h$. Montrons que tout x appartient à R, on a $xh \in I$ équivaut à dire que $xe \in I$ et $xf \in I$. Maintenant, on peut définir $\mathfrak{i} = \{x \in R | xh \in I\}$, qui est un idéal de R et $I = \mathfrak{i}\,\mathfrak{sl}_2(R) = \mathfrak{sl}_2(\mathfrak{i})$. Montrons que $\mathfrak{sl}_2(R)$ est librement simple. Si I est un idéal propre non-nul libre, alors sa dimension de I est 1 ou 2. On suppose que $I = Ra$ oú $\{a, b, c\}$ est une base de $\mathfrak{sl}_2(R)$. Alors, $\mathfrak{sl}_2(R) = I \oplus span(b, c)$ et $[span(b, c), span(b, c)] = Rz$ oú $z = [b, c]$. Comme $\mathfrak{sl}_2(R)$ est parfait, équivaut à dire que $\mathfrak{sl}_2(R) = [\mathfrak{sl}_2(R), \mathfrak{sl}_2(R)] = I + Rz$ et encore $\mathfrak{sl}_2(R) = [I + Rz, I + Rz] = I$. Ainsi, comme $\mathfrak{sl}_2(R)$ est considéré comme un R-module libre, on a $R^3 \cong \mathfrak{sl}_2(R) = I \cong R$, ce qui est impossible car R satisfait à propriété IBN (invariant basis number). On suppose que $I = Ra \oplus Rb$ oú $\{a, b, c\}$ est la base de $\mathfrak{sl}_2(R)$. Alors $\mathfrak{sl}_2(R) = I \oplus Rc$ et $\mathfrak{sl}_2(R) = [I + Rc, I + Rc] = I$. On a $R^3 \cong \mathfrak{sl}_2(R) = I \cong R^2$ et encore d'après la propriété IBN de R, on obtient une contradiction. Montrons que $\mathfrak{sl}_2(R)$ est aussi basiquement simple. Supposons

que $I = \mathfrak{i}\,\mathfrak{sl}_2(R)$ est un idéal propre basique et non-nul. Soit x un élément de $\mathfrak{sl}_2(R)$ et r un élément non-nul de $\mathfrak{i}$, alors $rx \in I$ et comme I est basique, alors $x \in I$, ce qui prouve que $I = \mathfrak{sl}_2(R)$. □

Théorème 14. *Soit V une Φ-algèbre de Lie qui est considéré comme un Φ-module libre de dimension 6 et satisfaisant à $V = [V, V]$. Soit R une algèbre appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$. Alors V_R n'admet pas d'idéaux libres de dimension 4 ou 5. En particulier, si V est une algèbre de Lie sur un corps K et $V = [V, V]$ avec $\dim(V) = 6$, alors V n'admet pas d'idéaux de dimension 4 ou 5.*

Démonstration. On note par L l'algèbre sur R définit par $L = V_R$. Comme $[V, V] = V$, alors on a $[L, L] = L$. On suppose que I est un idéal libre de dimension 5 de L, alors L/I est dimension 1, alors il est abélien. Ainsi, $[L, L] \subset I$ et comme $[L, L] = L$, on peut conclure que $L = I$, ce qui est une contraduction car $R^6 \cong L = I \cong R^5$ comme R-modules. Montrons aussi que L n'admet pas un idéal libre de dimension 4. On suppose que J est un idéal libre de dimension 4 de L, alors $J = \oplus_1^4 Ra_i$ oú $\{a_i\}_1^6$ est une base L. Ainsi, on a $L = J \oplus Ra_5 \oplus Ra_6$ et $L = [L, L] = J + Rz$ oú $z = [a_5, a_6]$. On peut aussi écrire encore $L = [J + Rz, J + Rz] = J$ et encore L est de dimension 6 et J est de dimension 4, donc on a une absurdité. □

Corollaire 1. *Soit R une algèbre appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$, l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_R$ n'admet pas d'idéaux libres de dimension 4 ou 5. En particulier, pour tout corps $\mathbb{K}$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{L}_K$ n'admet pas d'idéaux de dimensions 4 ou 5.*

Définition 14. *On rapelle la définition d'une algèbre multiplicative $\mathfrak{M}(V)$ oú V est une algèbre de Lie arbitraire sur un anneau Φ : on considère d'abord l'endomorphisme d'algèbre $End_\Phi(V)$ définit par $End_\Phi(V) := \{T : V \to V$ est une application$\}$ est une Φ-algèbre. On définit par l'algèbre multiplicative $\mathfrak{M}(V)$ comme une sous-algèbre de $End_\Phi(V)$ engendrée par l'opérateur $ad(x)$ pour tout $x \in V$ (voir [1,p.209]). Il y'a une action naturelle de $\mathfrak{M}(V)$ sur V définit par $\mathfrak{M}(V) \times V \to V$ telle que pour tout $(T, v) \in \mathfrak{M}(V) \times V$, l'action de T sur v notée par Tv n'est rien que $Tv = T(v)$. Cette action préserve les idéaux de V : si I est un idéal de V, alors $\mathfrak{M}(V).I \subset I$. Soit V une Φ-algèbre de Lie, on peut définir la relation $\vdash$ donnée par : pour tous $a, b \in V$, on a $a \vdash b$ si et seulement si il existe $T \in \mathfrak{M}(V)$ telle que $b = T(a)$. Cette relation est reflexive et transitive et aussi le fait de dire que $a \vdash b$ signifie que l'idéal engendré par b contient a. On peut directement voir grace à la table de multiplication que l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_R$ est engendré par les b_i, ce qui équivaut à dire que $\mathfrak{L}_R = span(b_i)$ pour tout $i = 1, \cdots, 6$.*

Lemme 4. *Dans l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_R$, les éléments de la base sont deux à deux liés : $b_i \vdash b_j$ pour tous i, j.*

Corollaire 2. *Si $I \triangleleft \mathfrak{L}_R$, pour un certain $\mathfrak{i} \triangleleft R$ et pour un certain $k \in \{1, \cdots, 6\}$, on a $\mathfrak{i}b_k \subset I$, alors $\oplus_{j=1}^6 \mathfrak{i}b_j \subset I$.*

Démonstration. On sait que $\mathfrak{i}b_k \subset I$ et pour tout j, on a $b_k \vdash b_j$, alors il existe $T \in \mathfrak{L}_\mathfrak{R}$ tel que $b_j = T(b_k)$. Comme $\mathfrak{i}b_j \subset T(\mathfrak{i}b_k) \subset I$ pour tout j. Alors, on a $\oplus_{j=1}^6 \mathfrak{i}b_j \subset I$. □

Lemme 5. *Si I est un idéal propre libre de $\mathfrak{L}_R$ et pour un certain $\mathfrak{i} \triangleleft R$ et pour un certain $k \in \{1, \cdots, 6\}$, on a $\mathfrak{i}b_k \subset I$, alors $\mathfrak{i} = 0$.*

Démonstration. D'après le corollaire 2, on a $\sum_{j=1}^6 \mathfrak{i}b_j \subset I$. On considère une base $\{a_i\}_1^6$ de $\mathfrak{L}_R$ telle que le sous-ensemble $\{a_i\}_1^q$ soit la base I (on sait que $1 \leq q \leq 3$ d'aprés le thérème 1). Maintenant pour tout $j = 1, \cdots, 6$, on a $b_j = \sum_i p_{ij} a_i \in I = span(a_1, \cdots, a_q)$. Ce qui implique $\lambda p_{ij} = 0$ pour tout j et pour tout $i \in \{q + 1, \cdots, 6\}$. Ainsi $p_{ij} \in Ann(\mathfrak{i}) = \{r \in R : r\mathfrak{i} = 0\} \triangleleft R$ pour tout j et pour un certain i. Le déterminant de la matrice représentative de $P = p_{ij}$ appartient à l'annulateur de $\mathfrak{i}$. On peut conclure que $Ann(\mathfrak{i}) = R$, alors $\mathfrak{i} = 0$. □

Puis, on rappelle quelques résultats élémentaires sur la théorie des corps tel que $\sqrt{-1} \in \mathbb{K}$. Alors en prenant $x = \sqrt{-1}$ et $y = 1$, on obtient $x^2 + y^2 = 0$ oú $x, y \neq 0$. Réciproquement si $\mathbb{K}$ est un corps tel qu'il existe des élément non-nuls x et $y \in \mathbb{K}$ tels que $x^2 + y^2 = 0$, alors $\frac{y}{x})^2 = -1$ et on a aussi $\sqrt{-1} \in \mathbb{K}$. Ainsi, pour tout corps $\mathbb{K}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\sqrt{-1} \in \mathbb{K}$
2. Ils existent des éléments non-nuls $x, y \in \mathbb{K}$ tels que $x^2 + y^2 = 0$.

Corollaire 3. *Un anneau R est 2-formellement réel si et seulement si pour tous $x, y \in R$, si $x^2 + y^2 = 0$, alors $x = y = 0$. Par exemple, $\mathbb{R}$ est 2-formellement réel tandis que $\mathbb{C}$ ne l'est pas.*

Proposition 5. *On suppose que R est une algèbre de $\mathbf{alg}_\Phi$ qui est 2-formellement réel. Alors l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_R$ est à la fois basiquement et librement simple.*

Démonstration. D'après la table de multiplication de l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_R$, on peut directement voir que $\mathfrak{L}_R = span(b_i)$ pour tout i. Pour montrer que l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_R$ est basiquement simple. On suppose que I est un idéal propre basique de $\mathfrak{L}_R$ et on prend un élément $z = \sum_1^6 x_i b_i$ dans I. Alors, en faisant des calculs, $[b_1, z] = x_2 b_4 + x_3 b_5 + x_4 b_2 + x_5 b_3 \in I$ et aussi $[-b_3, [b_1, z]] = x_3 b_1 + x_4 b_6 \in I$. On a aussi $[b_2, x_3 b_1 + x_4 b_6] = x_4 b_3 + x_3 b_4 \in I$ et $[-b_3, x_3 b_1 + x_4 b_6] = x_3 b_3 + x_4 b_4 \in I$. Comme I est un idéal de $\mathfrak{L}_R$, on a $x_4 b_3 + x_3 b_4 \in I$ et $x_3 b_3 + x_4 b_4 \in I$, alors $-x_3(x_4 b_3 + x_3 b_4) + x_4(x_3 b_3 + x_4 b_4) = (x_3^2 + x_4^2) b_4 \in I$. Alors, on a $x_3^2 + x_4^2 = 0$ ou $b_4 \in I$. Si $b_4 \in I$, dans ce cas on a $I = span(b_4) = \mathfrak{L}_R$, ce qui est une contraduction car I est un idéal propre de $\mathfrak{L}_R$. Alors, le seul cas possible est $x_3^2 + x_4^2 = 0$ et pr hypothèse R est 2-formellement réel, alors $x_3 = x_4 = 0$. Ainsi $z = \sum_1^6 x_i b_i$ et en faisant des calculs, on obtient $[b_2, [b_2, z]] = x_1 b_1 + x_6 b_6 \in I$, $[b_5, [b_2, z]] = -x_1 b_6 + x_6 b_1 \in I$. Comme I est un idéal de $\mathfrak{L}_R$, on a $-x_1 b_6 + x_6 b_1 \in I$ et $x_1 b_1 + x_6 b_6 \in I$, alors $x_1(x_1 b_1 + x_6 b_6) + x_6(-x_1 b_6 + x_6 b_1) = (x_1^2 + x_6^2) b_1 \in I$. Et comme $b_1 \notin I$ (car I est propre), on obtient $x_1^2 + x_6^2 = 0$, ce qui implique que $x_1 = x_6 = 0$. Finallement, on obtient $z = x_2 b_2 + x_5 b_5$ et en faisant des calculs, on obtient $[-b_3, z] = x_2 b_2 + x_5 b_1$ et $[b_4, z] = x_2 b_1 + x_5 b_6 \in I$. Comme démontré précédemment, on a $x_2 = x_5 = 0$. En conclusion, on obtient $I = 0$. Puis, on prouve que $\mathfrak{L}_R$ est librement simple. On prend un idéal propre I de $\mathfrak{L}_R$ et on considère aussi un élément $z = \sum_1^6 x_i b_i \in I$. On avait obtenu en faisant des calculs que $(x_3^2 + x_4^2) b_4 \in I$. Maintenant, on définit $\mathfrak{i}$ comme étant l'idéal engendré par $x_3^2 + x_4^2$, ce qui équivaut à dire que $\mathfrak{i} = span(x_3^2 + x_4^2)$. Alors, on obtient $\mathfrak{i} b_4 \subset I$. D'après le lemme 3, on obtient $\mathfrak{i} = 0 \Rightarrow x_3 = x_4 = 0$. Par analogie, on montre que $x_1 = x_2 = x_5 = x_6$ et on obtient finallement $I = 0$. Ce qui prouve que $\mathfrak{L}_R$ est librement simple. □

La condition sur le fait que R est 2-formellement réel est indispensable à la proposition 1. On a des anneaux R qui ne sont pas 2-formellement réels alors l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_R$ dans ce cas n'est ni basiquement et librement simple.

Proposition 6. *Soit $\mathbb{K}$ un corps qui n'est pas 2-formellement réel, alors il existe $x, y \in \mathbb{K}$ tels que $x^2 + y^2 = 0$, mais $x, y \neq 0$. On définit les éléments*

$$\begin{cases} a_1 := x b_1 + y b_6 \\ a_2 := x b_2 + y b_5 \\ a_3 := x b_3 + y b_5 \end{cases}$$

de $\mathfrak{L}_R$, alors $I = \mathbb{K}a_1 \oplus \mathbb{K}a_2 \oplus \mathbb{K}a_3$ est un idéal propre non-trivial de $\mathfrak{L}_\mathbb{K}$. Par conséquent $\mathfrak{L}_\mathbb{K}$ n'est pas simple.

Démonstration. Comme $x, y \neq 0$, ils sont inversible par rapport à la multiplication. On note par $x' = x^{-1}$ et $y' = y^{-1}$. Puis, on calcule $[a_1, b_i]$:

$[a_1, b_1] = 0$

$[a_1, b_2] = xb_4 - yb_3 = x(b_4 - yx'b_3) = xy'(yb_4 - y^2x'b_3)$ et comme $x^2 = -y^2 \Rightarrow x = -y^2x'$. Finallement, on obtient $[a_1, b_2] = xy'(yb_4 + xb_3) = xy'a_3 \in \mathbb{K}a_3$

$[a_1, b_3] \in \mathbb{K}a_2$

$[a_1, b_4] = a_2$

$[a_1, b_5] = a_3$

$[a_1, b_6] = 0$

Ainsi, on a montré que $[a_1, \mathfrak{L}_\mathbb{K}] \subset I$ et avec les mêmes arguments, on peut montrer aussi que $[a_i, \mathfrak{L}_K] \subset I$ pour tout $i = 2, 3$. En conclusion, on peut dire que l'idéal I est un idéal propre non-nul de $\mathfrak{L}_R$. Maintenant, il est simple de voir que $\{a_i\}_1^3$ est une base de I, donc $\dim(I) = 3$ et I est un idéal propre non-nul. Par conséquent, $\mathfrak{L}_\mathbb{K}$ n'est pas simple. Similairement : □

Corollaire 4. *Pour tout corps $\mathbb{K}$, l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_\mathbb{K}$ n'est pas simple si et seulement si $\mathbb{K}$ est 2-formellement réel ou équivalent à dire que $\mathbb{K}$ n'admet pas de racine carrée de -1.*

Proposition 7. *Soit R une algèbre appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$ telle que $\sqrt{-1}, \frac{1}{2} \in R$. Alors, l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_R$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(R) \oplus \mathfrak{sl}_2(R)$.*

Démonstration. On montre d'abord que $\mathfrak{o}(1, 3, \mathbb{K})$ est isomorphe à $\mathfrak{o}(4, \mathbb{K})$. L'algèbre de Lorentz $\mathfrak{o}(1, 3)_R$ est l'algèbre de Lie du groupe de Lie pseudo orthogonal $\mathrm{O}(1, 3)_R$. Elle est définie par $\mathfrak{o}(1, 3)_R := \{M \in \mathfrak{gl}_4\, R : MI_{13} + I_{13}M^t = 0\}$ et l'algèbre $\mathfrak{o}(4)_R$ est l'algèbre de Lie du groupe orthogonal $\mathrm{O}(4)_R$, elle est définie par $\mathfrak{o}(4)_R := \{M \in \mathfrak{gl}_4(R) : MI_4 + I_4M^t = 0\}$. Comme $i^2 = -1$ admet une solution dans R, cela nous permet d'écrire $I_4 = P^{-1}I_{13}P^{-1}$ oú $P = \mathrm{diag}(i, 1, 1, 1)$. En faisant des calculs simple, on montre que $P^t = P$ et $(P^{-1})^t = P^{-1}$. Pour tout M appartenant à $\mathfrak{o}(1, 3)_R$, on a $MI_{13} + I_{13}M^t = 0$, en multipliant par P à gauche et P^{-1} à droite, on obtient $P(MI_{13} + I_{13}M^t)P^{-1} = 0$, finallement on obtient $\theta(M)I_4 + I_4\theta(M)^t = 0$ oú $\theta(M) = PMP^{-1}$ et montre facilement que $\theta(M)^t = \theta(M^t)$. Maintenant, on considère l'application $\theta\colon \mathfrak{o}(1, 3)_R \to \mathfrak{o}(4)_R$ et montre les assertions suivantes :

— $\theta(\lambda M_1 + M_2) = \lambda\theta(M_1) + \theta(M_2)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tous $M_1, M_2 \in \mathfrak{o}(1, 3)_R$, alors θ est un homomorphisme.

— θ est injective.

— $\dim(\mathfrak{o}(1, 3)_R) = \dim(\mathfrak{o}(4)_R)$

On peut conclure que $\theta\colon \mathfrak{o}(1, 3)_R \to \mathfrak{o}(4)_R$ est un isomorphisme.

Puis, on montre $\mathfrak{o}(4)_R$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(R) \oplus \mathfrak{sl}_2(R)$. Comme $\mathfrak{sl}_2(R)$ est l'algèbre de Lie du groupe linéaire spécial et elle est définie par $\mathfrak{sl}_2(R) := \{A \in \mathfrak{gl}_2(R) : tr(A) = 0\}$. Comme A est un élément de $\mathfrak{gl}_2(R)$, alors A est de la forme $A = \sum_{1 \leq i,j \leq 2} a_{ij}e_{ij}$, ce qui implique que la trace de A est $a_{11} + a_{22} = 0$. Alors le système $\{h = e_{11} - e_{22}, e = e_{12}, f = e_{21}\}$ constitue une base de $\mathfrak{sl}_2(R)$ et satisfait aux conditions suivantes :

— $[h, e] = 2e$

— $[h, f] = -2f$

— $[e, f] = h$

Maintenant, pour tous $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ avec $i \neq j$, on définit dans $\mathfrak{o}(4)_R$ les éléments $a_{ij} = e_{ij} - e_{ji}$ représente la matrice élémentaire avec 1 dans la coefficient (i, j) et 0 dans les autres coefficients. Puis, on définit les éléments :

$$\begin{aligned} h_\alpha &= -i(a_{12} + a_{34}) & h_\beta &= i(a_{12} - a_{34}) \\ v_\alpha &= 1/2(a_{13} - a_{24}) + i/2(a_{14} + a_{23}) & v_\beta &= i/2(-a_{13} - a_{24}) + i/2(-a_{14} + a_{23}) \\ v_{-\alpha} &= 1/2(-a_{13} + a_{12}) + i/2(a_{14} + a_{23}), & v_{-\beta} &= 1/2(a_{13} + a_{24}) + i/2(-a_{14} + a_{23}) \end{aligned}$$

On définit l'application

$$\begin{array}{rccl} \alpha: & \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}) & \to I =< h_\alpha, v_\alpha, v_{-\alpha} > \\ & h & \to h_\alpha \\ & e & \to v_\alpha \\ & f & \to v_{-\alpha} \end{array}$$

En faisant des calculs, on montre que les conditions suivantes :
- $[h_\alpha, v_\alpha] = 2v_\alpha$,
- $[h_\alpha, v_{-\alpha}] = -2v_{-\alpha}$,
- $[v_\alpha, v_{-\alpha}] = h_\alpha$

On raisonne de manière analogue pour montrer que $J =< h_\beta, v_\beta, v_{-\beta} >$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. Ainsi, on a montré que I et J sont des sous-algèbres isomorphes à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ et satisfont à $[M, N] = 0$ pour tout $M \in I$ et pour tout $N \in J$, ce qui nous permet d'écrire que $\mathfrak{o}(4)$ est isomorphe à $I \oplus J$ et comme $I \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}) \cong J$. On peut conclure que $\mathfrak{o}(4)$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. □

Chapitre Three

Structure algèbrique des algèbres de Lorentz et de Poincaré

3.1 Introduction et définition préliminaires

3.1.1 Catégorie

Dans ce chapitre, on notera par Φ l'ensemble des anneaux associatifs, commutaifs et unitaires et on notera par $\mathbf{alg}_\Phi$ la catégorie ayant pour objet l'ensemble des Φ-algèbres associatives, commutatives et unitaires. D'autre part, on notera par $\mathbf{Lie}_\Phi$ comme étant l'ensemble des algèbres de Lie définit sur Φ. On aura l'occasion de voir que $\mathcal{F}$: $\mathbf{alg}_\Phi \to \mathbf{Lie}_\Phi$ est un foncteur convariant. Ces homomorphisme η: $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est dit transformation naturelle de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{G}$, si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. Pour tout R, il existe η_R: $\mathcal{F}(R) \to \mathcal{G}(R)$ un homomorphisme d'algèbres de Lie sur Φ.

2. Pour tous objects R et S appartenants à $\mathbf{alg}_\Phi$ et pour tout homomorphisme α: $R \to S$ d'algèbres sur Φ, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(R) & \xrightarrow{\eta_R} & \mathcal{G}(R) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}(\alpha)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}(\alpha)} \\ \mathcal{F}(S) & \xrightarrow{\eta_S} & \mathcal{G}(S) \end{array}$$

On dira que $\mathcal{F}$ est un isomorphe à $\mathcal{G}$, si η_R est un isomorphisme pour tout $R \in \mathbf{alg}_{Phi}$. On considère une sous-algèbre $\sqrt{-1_\Phi}$ de $\mathbf{alg}_\Phi$ dont ces objects sont des Φ-algèbres et $\sqrt{-1} \in R$. On note $\mathcal{I}$ le foncteur définit par $\mathcal{I}$: $\sqrt{-1_\Phi} \to \mathbf{alg}_\Phi$.

3.1.2 Foncteur de Lorentz

L'algèbre de Lorentz sur $\mathbb{R}$ est notée par $\mathfrak{o}(1,3)$, c'est l'algèbre de Lie du groupe pseudo-orthogonal $\mathrm{O}(1,3)$. Elle définit par :

$$\mathfrak{o}(1,3) := \mathbf{Lie}(\mathrm{O}(1,3)) = \{M \in gl_4(\mathbb{R}) : MI_{13} + I_{13}M^t = 0\},$$

ú M^t représente la matrice transposée de M et $I_{13} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. On voit que les éléments de $\mathfrak{o}(1,3)$ sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 0 & x_4 & x_5 \\ x_2 & -x_4 & 0 & x_6 \\ x_3 & -x_5 & -x_6 & 0 \end{pmatrix}$$

et on note par e_{ij} la matrice de $M_4(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont nuls sauf celui de la i-iéme ligne et j-iéme colonne qui vaut 1. La base de l'algèbre de Lorentz est donnée par $\mathcal{B} = \{s_{12}, s_{13}, s_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34}\}$ oú $s_{ij} := e_{ij} + e_{ji}$ et $a_{ij} = e_{ij} - e_{ji}$. En utilisant les crochets de Lie relative à la base $\mathcal{B}$, on obtient les constantes 0 et ± 1. Ainsi, on peut construire une $\mathbb{Z}$-algèbre,

$$\mathfrak{L}_{\mathbb{Z}} := \mathbb{Z}s_{12} \oplus \mathbb{Z}s_{13} \oplus \mathbb{Z}s_{14} \oplus \mathbb{Z}a_{23} \oplus \mathbb{Z}a_{24}\mathbb{Z}a_{34},$$

dont la table de multiplication est donnée par la figure 1. Maintenant, on fixe un anneaux associatif, commutatif et unitaire appartenant à Φ et on considère la catégorie $\mathbf{alg}_\Phi$ définit ci dessus. Pour tout objet R appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$, on peut définir l'algèbre de Lorentz sur R, notée par :

$$\mathfrak{L}_R = \mathfrak{L}_{\mathbb{Z}} \times R.$$

	s_{12}	s_{13}	s_{14}	a_{23}	a_{24}	a_{34}
s_{12}	0	a_{23}	a_{24}	s_{13}	s_{14}	0
s_{13}	$-a_{23}$	0	a_{34}	$-s_{12}$	0	s_{14}
s_{14}	$-a_{24}$	$-a_{34}$	0	0	$-s_{12}$	$-s_{13}$
a_{23}	$-s_{13}$	s_{12}	0	0	$-a_{34}$	a_{24}
a_{24}	$-s_{14}$	0	s_{12}	a_{34}	0	$-a_{23}$
a_{34}	0	$-s_{14}$	s_{13}	a_{24}	a_{23}	0

Figure 1 : Table de multiplication de l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{o}(1,3)$.

C'est un R-module libre dont la base est $\{s_{12}, s_{13}, s_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34}\}$, qui implique que $\dim(\mathfrak{L}_R) = 6$. Si R et S sont des objects appartenants à $\mathbf{alg}_\Phi$ et $f\colon R \to S$ un homomorphisme de Φ-algèbres, alors on peut définir un homomorphisme d'algèbres de Lie sur Φ, noté par $\mathfrak{L}_f\colon \mathfrak{L}_R \to \mathfrak{L}_S$ dans ce cas. Ainsi, le foncteur obtenu est convariant $\mathfrak{L}\colon \mathbf{alg}_\Phi \to \mathbf{Lie}_\Phi$.
On considère le groupe orthogonal O(4) définit sur les réels :

$$\mathrm{O}(4) := \{M \in \underset{4}{\mathrm{GL}}(\mathbb{R}) : MM^t = I_4\}.$$

Son algèbre de Lie est $\mathfrak{o}(4) = \mathbf{Lie}(O(4)) = \{M \in \mathfrak{gl}_4(\mathbb{R}) : M + M^t = I_4\}$. Elle est engendrée par les matrices de la forme $e_{ij} - e_{ji}$ oú $i < j$ et $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. La structure des constantes relative à la base est donnée par 0 et ± 1. Ainsi, $\mathfrak{o}(4)_{\mathbb{R}}$ peut être considéré comme une $\mathbb{Z}$-algèbre définit comme suit :

$$\mathfrak{o}(4)_{\mathbb{R}} = \oplus_{1 \le i < j \le 4} \mathbb{Z}(e_{ij} - e_{ji}).$$

Si, on fixe R appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$, alors on peut définir l'extension des réels à R par :

$$\mathfrak{o}(4)_R = \mathfrak{o}(4)_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{Z}} R.$$

C'est une algèbre de Lie définit sur R et ayant la même base que $\mathfrak{o}(4)_{\mathbb{R}}$. Ainsi, sa dimension est 6 et on pourra définir le foncteur $\mathfrak{o}(4)\colon \mathbf{alg}_\Phi \to \mathbf{Lie}_\Phi$ tel que pour tout R appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$, on a $\mathfrak{o}(4)_R \in \mathbf{Lie}_\Phi$. De même que tout homomorphisme $f\colon R \to S$ d'algèbres appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$ induit l'existence d'homomorphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{o}(4, f)\colon \mathfrak{o}(4, R) \to \mathfrak{o}(4, S)$, définit par $\mathfrak{o}(4, f) = 1 \otimes f$.

Remarque 4. *Si Φ est un anneau compatible avec la notion de 2-torsion, c'est à dire que $1+1=0$, alors pour tout Φ-algèbre R appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{o}(4,R)$ est compatible avec l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_R$. En particulier, si $\mathbb{K}$ est un corps de charactéristique 2, alors $\mathfrak{L}_\mathbb{K} = \mathfrak{o}(4,\mathbb{K})$. On donne ce résultats général qui suit.*

Lemme 6. *Pour tout Φ, les foncteurs $\mathfrak{L}\circ\mathcal{I}$ et $\mathfrak{o}(4)\circ\mathcal{I}$ sont isomorphes.*

Démonstration. — Pour tout objet R appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$ tel que l'équation $x^2+1=0$ admet une solution dans R. On considère $\eta_R\colon \mathfrak{L}_R \to \mathfrak{o}(4,R)$ un homomorphisme d'algèbre de Lie. On prend $\mathfrak{i}\in R$ tel que $\mathfrak{i}^2=-1$. En commençant par la base initiale de l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_R$. On définit une nouvelle base notée par $\mathcal{B}' = \{a'_{ij} : 1\le i<j\le 4\}$ oú $a'_{12}=\mathfrak{i}s_{12}$,$a'_{13}=\mathfrak{i}s_{13}$, $a'_{14}=\mathfrak{i}s_{14}$, $a'_{23}=a_{23}$, $a'_{24}=a_{24}$ et $a'_{34}=a_{34}$. Alors, l'isomorphisme $\mathfrak{L}_R\to\mathfrak{o}(4,R)$ est induit par $a'_{ij}\to e_{ij}-e_{ji}$ pour tout $i<j$.

— Pour tout homomorphisme de Φ-algèbres $f\colon R\to S$ dans $\sqrt{-1_\Phi}$, montrons que le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{L}_R & \xrightarrow{\eta_R} & \mathfrak{o}(4,R) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{L}_f} & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{o}(4,f)} \\ \mathfrak{L}_S & \xrightarrow{\eta_S} & \mathfrak{o}(4,S) \end{array}$$

□

On considère maintenant R et S appartenants à $\mathbf{alg}_\Phi$ tels que R soit une sous-algèbre de S. On note par $\mathfrak{sl}_2(R)$ l'algèbre de Lie du groupe linéaire spécial. Pour tout automorphisme $\hat{\alpha}\in \mathrm{Aut}_R(\mathfrak{sl}_R(S))$ définit par :

$$M=(a_{ij})_{1\le i,j\le 2}\to \hat{\alpha}(M)=(\alpha(a_{ij}))_{1\le i,j\le 2}.$$

Pour tout $P\in \mathrm{GL}_2(R)$, l'application $M\to PMP^{-1}$ est un automorphisme de $\mathfrak{sl}_2(S)$, notée par $Ad(P)$.

Lemme 7. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, si $\beta\colon \mathfrak{o}(4;\mathbb{K})\to\mathbb{K}^4$ est une application $\mathbb{K}$-linéaire telle que $\beta([M,M'])=\beta(M)M'-\beta(M')M$ pour tous $M,M'\in\mathfrak{o}(4;\mathbb{K})$, alors il existe un unique $v\in\mathbb{K}^4$ tel que $\beta(M)=vM$ pour tout $M\in\mathfrak{o}(4,\mathbb{K})$.*

Démonstration. C'est un résultat cohomologique (c'est la version du lemme de Whitehead). C'est bien connu dans un corps de charactéristique zéro et dans un corps qui a pour charactéristique un nombre premier, peut être considéré comme une conséquence du [3, théoréme 1]. Cependant, nous incluons ici une preuve. Soit S_1 l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires $\beta\colon \mathfrak{o}(4,\mathbb{K})\to\mathbb{K}^4$ telle que $\beta([M,M'])=\beta(M)M'-\beta(M')M$ pour tous $M,M'\in\mathfrak{o}(4,\mathbb{K})$. On note par S_2 l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires $\gamma\colon \mathfrak{o}(4;\mathbb{K})\to\mathbb{K}^4$ telle qu'il existe $v\in\mathbb{K}^4$ vérifiant $\gamma(M)=vM$ pour tout M. On montre facilement que S_1 est un sous-espace vectoriel de S_2 et que la dimnension de S_1 est 4. Ainsi, tout ce que nous devons prouver que $\dim(S_1)=4$. La meilleure façon de procéder est de fixer une base de $\mathfrak{o}(4,\mathbb{K})$ et on considère les coordonnées de l'application $\chi\colon \mathfrak{o}(4;\mathbb{K})\to\mathbb{K}^6$ telle que les composantes de $\chi(M)$ sont des coordonnées de M relative à la base fixée de $\mathfrak{o}(4,\mathbb{K})$. Comme β est une application linéaire, alors il existe une matrice L représentative de β d'ordre 6×4 dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{K}$ tels que $\beta(M)=\chi(v)L$. Maintenant, on peut voir que la condition $\beta([M,M'])=\beta(M)M'-\beta(M')M$ pour tous $M,M'\in\mathfrak{o}(4;\mathbb{K})$, ce qui implique qu'il existe quatre paramètres libres (indépendants) dans L. En effet, L est

de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & 0 & b & 0 \\ g & 0 & 0 & b \\ 0 & c & -a & 0 \\ 0 & g & 0 & -a \\ 0 & 0 & g & -c \end{pmatrix}$$

Finallement, l'élément v dont l'existence a été prouvé est unique car tout élément $w \in \mathbb{K}^4$ tel que $w\,\mathfrak{o}(4;\mathbb{K}) = 0$. □

Lemme 8. *Soit $\mathbb{K}$ un corps de charactéristique deux et on suppose que $\beta\colon \mathbb{K}^3 \to \mathfrak{o}(3;\mathbb{K})$ est une application $\mathbb{K}$-linéaire telle que $v\beta(v') = v'\beta(v)$ pour tous $v, v' \in \mathbb{K}^3$. Alors, nous avons*

$$\beta(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}.$$

L'application satisfait à la condition $\beta([v,M]) = [M,\beta(v)]$, pour tout $v \in \mathbb{K}^3$ et $M \in \mathfrak{o}(3;\mathbb{K})$.

Démonstration. On considère la base canonique $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{K}^3$ et la base $\{s_{12}, s_{13}, s_{23}$ oú $s_{ij} = e_{ij} + e_{ji}$. Comme β est une application linéaire définit de $\mathbb{K}^3$ à $\mathfrak{o}(3;\mathbb{K})$, alors pour tout $v_i \in \mathbb{K}^3$, on a $\beta(v_i) = x_i S_{12} + y_i s_{13} + z_i s_{23}$. En utilisant, la condition $v_i\beta(v_j) = v_j\beta(v_i)$ pour tous $i, j = 1, 2, 3$.

— Pour $v_1\beta(v_2) = v_2\beta(v_1)$, on obtient $x_1 = x_2 = 0$ et $x_3 = y_2$,
— Pour $v_2\beta(v_3) = v_3\beta(v_2)$, on obtient $z_2 = z_3 = 0$ et $z_1 = y_2$,
— Pour $v_1\beta(v_3) = v_3\beta(v_1)$, on obtient $y_1 = y_3 = 0$ et $z_1 = x_3$.

Comme $\mathbb{K}$ est un corps de charactéristique deux, alors $y_1 = z_1 = x_3 = 1$, ce qui implique que :

$$\begin{aligned} \beta(v_1) &= s_{23} \\ \beta(v_2) &= s_{13} \\ \beta(v_3) &= s_{12}. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \beta(x,y,z) &= \beta(xv_1 + yv_2 + zv_3) \\ &= x\beta(v_1) + y\beta(v_2) + z\beta(v_3) \\ &= xs_{23} + ys_{13} + zs_{12} \\ \beta(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

3.1.3 Quelques résultats simples

On étudiera dans quelles conditions le foncteur de Lorentz $\mathfrak{L}\colon \mathbf{alg}_\Phi \to \mathbf{Lie}_\Phi$ donne des algèbres de Lie simples. Notre motivation dans ce travail est de pouvoir décomposer l'algèbre de Lorentz en somme directe de deux idéaux, si l'algèbre n'est pas simple. Cette idée est très spéciale, car après la décomposition de l'algèbre de Lorentz, on pourra déterminer facilement l'automorphisme extérieur de l'algèbre de Lorentz puisqu'il agit comme une permutation de

groupe sur les idéaux. Ainsi, la connaissance de l'automorphisme extérieur de $\mathfrak{L}_R$, donne une information sur le groupe affine Scheme $R \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{L}_R)$. Maintenant, on prend une nouvelle notation pour plus de simplicité $b_1 := s_{12}, b_2 := s_{13}, b_3 := s_{14}, b_4 = a_{23}, b_5 = a_{23}, b_6 := a_{34}$, alors la base de l'algèbre de Lorentz devient $\mathcal{B} = \{b_1\}_1^6$ et sa table de multiplication est donnée dans la figure 2. Pour tout object R appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$, on notera par $\mathrm{Max}(R)$ comme étant l'ensemble des idéaux maximaux de R. Dans cette partie , on étudiera la simplicité de l'algèbre de Lorentz sur R oú R est une algèbre appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$. Tout idéal I de R induit triviallement $I\mathfrak{L}_R$ de $\mathfrak{L}_R$, on ne prendra pas compte ces genres d'idéaux. La meilleure manière de travailler en dehors ce règle est de prendre un idéal maximal $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ et d'étudier l'idéal $\mathfrak{m}\mathfrak{L}_R$ de $\mathfrak{L}_R$. On définira les notions d'idéaux $\mathfrak{m}$-nul et d'idéaux $\mathfrak{m}$-total. On commence en considérant une algèbre R appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$ et une R-module M. Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, on peut considérer l'épimorphisme $\varphi\colon M \to M \otimes_R \mathbb{K} := M_{\mathbb{K}}$ oú $\mathbb{K} := R/\mathfrak{m}$. Alors $M_{\mathbb{K}}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $\ker(\varphi) = \mathfrak{m}M$ et d'après le premier théorème d'isomorphisme, on a $M/\mathfrak{m}M \cong M_{\mathbb{K}}$.

Définition 15. *Une collection d'éléments $\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_n \in M$ est dit $\mathfrak{m}$-libre si pour tous $r_1, ..., r_n \in R$, la somme $\sum_i r_i m_i \in \mathfrak{m}M$ implique que $r_i \in \mathfrak{m}$ pour tout i. Un R-module M possède une partie $\mathfrak{m}$-libre de cardinal n, s'il existe une collection d'éléments $\{\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_n\} \subset M$ qui est $\mathfrak{m}$-libre.*

Si R est un corps, alors $\mathfrak{m} = 0$. Un ensemble est $\mathfrak{m}$-libre si et seulement si cet ensemble linéairement indépendant. En général, un ensemble $\{\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_n\} \subset M$ est $\mathfrak{m}$-libre si et seulement si l'ensemble des classes d'équivalences $\{\overline{\mathfrak{m}_1}, \cdots, \overline{\mathfrak{m}_n}\} \subset M/\mathfrak{m}M$ est linéairement indépendant. On fixe un anneau appartenant à Φ et une Φ-algèbre de Lie V. Pour toute Φ-algèbre associative, commutative et unitaire, on note par l'extension des scalaires par $V_R = V \otimes_\Phi R$. Si S est une Φ-algèbre appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$ telle que S est une R-algèbre, on pourra considérer que l'extension des scalaires $V_S = V \otimes_R S$. Alors, on montre que $V_R \otimes_R S \cong V_S$, en considérant l'homomorphisme $(v \otimes_{Phi} r) \to v \otimes_\Phi rs$. En outre, si $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ est un idéal maximal et I un sous-module de V_R avec une partie $\mathfrak{m}$-libre de cardinal n, alors l'image $\psi(I)$ d'après l'épimorphisme canonique $\psi\colon V_R \to V_R \otimes_R \mathbb{K}$ oú $\mathbb{K} = R/\mathfrak{m}$ contient un ensemble linéairement indépendant de cardinal n, donc $\dim_{\mathbb{K}} \psi(I) \leq n$.

Définition 16. *Un idéal $I \lhd V_R$ est dit $\mathfrak{m}$-total si son image par rapport à l'épimorphisme canonique $\psi\colon V_R \to V_{\mathbb{K}}$ recouvre entièrement $V_{\mathbb{K}}$, c'est à dire $\psi(I) = V_{\mathbb{K}}$. 'Un idéal $I \lhd V_R$ est dit $\mathfrak{m}$-nul si son image par rapport à l'épimorphisme est nul, c'est à dire que $\psi(I) = 0$ (ce qui est équivalent à $I \subset \mathfrak{m}V_R$) L'algèbre V_R est dite $\mathfrak{m}$-simple si ces uniques idéaux sont à fois $\mathfrak{m}$-nul et $\mathfrak{m}$-total.*

Si R est un corps, alors $\mathfrak{m} = 0$, donc $\mathfrak{L}_R$ est $\mathfrak{m}$-simple si et seulement si $\mathfrak{L}_R$ est simple. Ainsi dans notre étude sur la simplicité des algèbres de Lorentz, on remplacera simplicité par $\mathfrak{m}$-simplicité. On considère l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_\mathbb{Z}$ et $\mathfrak{m} = 3\mathbb{Z}$ l'idéal maximal de $\mathbb{Z}$ et on définit $I := \mathbb{Z}(b_1 + b_6) + \mathbb{Z}(b_1 - b_6) + \mathbb{Z}(b_2 + b_5) + \mathbb{Z}(b_2 - b_5) + \mathbb{Z}(b_3 + b_4) + \mathbb{Z}(b_3 - b_4)$, c'est un idéal de $\mathfrak{L}_\mathbb{Z}$. Il est propre car $[b_1, I] \notin I$, mais son son image recouvre entièrement $\mathfrak{L}_\mathbb{K}$, c'est à dire $\psi(I) = \mathfrak{L}_\mathbb{K}$. On peut conclure que I est idéal $\mathfrak{m}$-total. On montre aussi que $2\mathfrak{L}_\mathbb{Z}$ est $\mathfrak{m}$-total et $3\mathfrak{L}_\mathbb{Z}$ est un idéal $\mathfrak{m}$-nul de $\mathfrak{L}_\mathbb{Z}$. Nous allons décrire les conditions pour lesquelles les iddéaux de V_R sont $\mathfrak{m}$-total pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$:

Proposition 8. *On suppose que V est une Φ-algèbre de Lie parfaite et R un objet de $\mathbf{alg}_{Phi}$ qui est artinien. Alors $I \lhd V_R$ est $\mathfrak{m}$-total pour tout $\mathfrak{m} \in Max(R)$ si et seulement si $I = V_R$.*

Démonstration. Pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, montrons que $V_R = I + \mathfrak{m}V_R$. On considère l'épimorphisme canonique

$$\phi\colon V_R \to V_R \otimes \mathbb{K} \text{ oú } \mathbb{K} = R/\mathfrak{m} \ .$$

Comme ϕ est un épimorphisme, par définition on a :

$$\phi(V_R) = V_R \otimes \mathbb{K} = V_{\mathbb{K}}. \tag{3.1}$$

Comme I est aussi $\mathfrak{m}$-total, on a :

$$\phi(I) = V_R \otimes \mathbb{K} = V_{\mathbb{K}}. \tag{3.2}$$

D'après (1) et (2), on obtient que $\phi(I) = \phi(V_R)$, ce qui implique que

$$\phi(I - V_R) = 0 \Rightarrow V_R - I \subset \mathfrak{m}V_R \Rightarrow V_R \subset I + \mathfrak{m}V_R.$$

D'autre part, on a $I + \mathfrak{m}V_R$ est un idéal de V_R, alors on a directement $I + \mathfrak{m}V_R \subset V_R$. On peut conclure que $V_R = I + \mathfrak{m}V_R$ pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$. On considère deux idéaux $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ dans $\mathrm{Max}(R)$. D'après la conclusion précédente, on a $V_R = I + \mathfrak{m}_1 V_R = I + \mathfrak{m}_2 V_R$. Comme V est une Φ-algèbre de Lie parfaite, alors $V = [V, V]$, ce qui implique :

$$\begin{aligned} V_R &= [V_R, V_R] \\ &= [I + \mathfrak{m}_1 V_R, I + \mathfrak{m}_2 V_R] \\ &= I + [\mathfrak{m}_1 V_R, \mathfrak{m}_2 V_R] \\ V_R &= I + \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 V_R \end{aligned}$$

Maintenant, on considère une famille finie $\{\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_n\}$ d'éléments de $\mathrm{Max}(R)$, on a aussi $V_R = I + \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \cdots \mathfrak{m}_n V_R$. Montrons, maintenant que $V_R = I + \mathrm{rad}(R)V_R$ oú $\mathrm{rad}(R)$ est le radical de Jacobson de R.) Pour faire la preuve, on prend un idéal maximal $\mathfrak{m}_1$, dans ce cas on aurra deux cas de possibilités C_1 et C_2 : dans C_1, pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, on a $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}$ et dans C_2, il existe $\mathfrak{m}_2 \in \mathrm{Max}(R)$ tel que $\mathfrak{m}_1 \supseteq \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$. Dans C_1, on a $\mathfrak{m}_1 \subset \mathfrak{m}$ pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, ce qui implique $\mathrm{rad}(R) = \mathfrak{m}_1$. Dans C_2, il existe $\mathfrak{m}_3 \in \mathrm{Max}(R)$ tel que $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \supseteq \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2\mathfrak{m}$ pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, on a $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{m}$. La dernière possibilitè implique que $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \subset \mathfrak{m}$ pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, alors $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}$, d'oú $\mathrm{rad}(R) = \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$. En utilisant, ce même processus, on obtient :

$$\mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \supset \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{m}_3 \supset \cdots$$

est une suite décroissante d'id$^{\acute{}}$eaux de R et comme R est un anneau artinien, la suite sera stationnaire pour un certain rang n. Ainsi, on peut affirmer que $V_R = I + \mathrm{rad}(R)V_R$ et comme V est une algèbre de Lie parfaite, on a $V_R = I + \mathrm{rad}(R)^k V_R$ pour tout entier k positif. Le radical de Jacobson étant nilpotent, on peut trouver un certain entier positif k tel que $\mathrm{rad}(R)^k = 0$, ce qui implique que $V_R = I$. □

Remarque 5. *C'est un résultat standard qui dit que si A est une R-algèbre libre et $\{I_\alpha : \alpha\}$ une collection d'idéaux de R, alors $(\cap_\alpha I_\alpha)A = \cap_\alpha (I_\alpha A)$. On voit que si I est un idéal $\mathfrak{m}$-nul de V_R pour tout $\mathfrak{m} \in Max(R)$, alors $I \subset \cap_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}V_R) = (\cap_{\mathfrak{m}}\mathfrak{m})V_R = rad(R)V_R$. Dans ce cas, le radical de Jacobson de R est vide et l'unique idéal $\mathfrak{m}$-nul pour tout $\mathfrak{m} \in Max(R)$ est l'idéal $\{0\}$. C'est une conséquence de la proposition 1 et du paragraphe précédent.*

Théorème 15. *On suppose que V est une algèbre de Lie parfaite, R une algèbre artinienne appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$ telle que $rad(R) = 0$ et on considère V_R comme une R-module libre. Alors V_R est $\mathfrak{m}$-simple pour tout $\mathfrak{m} \in Max(R)$ si et seulement si tout idéal non nul de V_R est de la forme $I = \mathfrak{i}V_R$ oú $\mathfrak{i}$ est un produit d'idéaux maximaux de R ; $\mathfrak{i} = \mathfrak{m}_{i_1}\mathfrak{m}_{i_2}\cdots\mathfrak{m}_{i_k}$. De plus, V_R s'exprime sous la forme $V_R = I \oplus J$ oú $J = \mathfrak{j}V_R$ et $\mathfrak{j} = \mathfrak{m}_{j_1}\mathfrak{m}_{j_2}\cdots\mathfrak{m}_{j_q}$, chaque $\mathfrak{m}_{j_r} \in Max(R)$ et $Max(R)$ est la réunion disjointe de $\{\mathfrak{m}_{i_1}, \cdots, \mathfrak{m}_{j_q}\}$.*

Démonstration. On suppose que V_R est $\mathfrak{m}$-simple pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$. Soit I un idéal non nul propre de V_R. Nous avons deux cas de possibilitès : dans le premier cas I est $\mathfrak{m}$-total (satisfaisant à la condition proposition 1) et dans le second cas I est $\mathfrak{m}$-nul. Dans le premier cas, $\mathrm{Max}(R)$ est la réunion disjointe de S_1 et S_2 oú $S_1 = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R) : I \text{ est } \mathfrak{m}\text{-nul } \}$ et $S_2 = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R) : I \text{ est } \mathfrak{m}\text{-total}\}$. Par définition $\mathfrak{m} \in S_1$ si et seulement si $I \subset \mathfrak{m}V_R$ et $\mathfrak{m} \in S_2$ si et seulement si $V_R = I + \mathfrak{m}V_R$. On rappelle aussi que $\mathrm{Max}(R)$ est un ensemble fini. Maintenant, pour tous $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}' \in S_2$, avec $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}'$, on a $V_R = I + \mathfrak{m}V_R = I + \mathfrak{m}'V_R$. Comme V est une algèbre parfaite, alors V_R est aussi parfaite, ce qui implique que V_R est aussi parfaite, ce qui implique que $V_R = I + \mathfrak{m}\mathfrak{m}'V_R$. On peut conclure que

$$V_R = I + \prod_{\mathfrak{m} \in S_2} \mathfrak{m}V_R.$$

On pose $\mathfrak{j} = \prod_{\mathfrak{m} \in S_2} \mathfrak{m} = \cap_{\mathfrak{m} \in S_2} \mathfrak{m}$, alors on a $V_R = I + \mathfrak{j}V_R$. D'autre part, $\mathfrak{m} \in S_1$ si et seulement si $I \subset \mathfrak{m}V_R$, ce qui implique que $I \subset \cap_{\mathfrak{m} \in S_1} \mathfrak{m}V_R = \mathfrak{i}V_R$ oú $\mathfrak{i} = \cap_{\mathfrak{m} \in S_1} \mathfrak{m}$. On obtient que $V_R = I + \mathfrak{j}V_R$. Montrons que la somme est directe. En effet, on a $I \cap \mathfrak{j}V_R \subset (\cap_{\mathfrak{m} \in S_1} \mathfrak{m})V_R \cap (\cap_{\mathfrak{m} \in S_2} \mathfrak{m})V_R = \mathrm{rad}(R)V_R = 0$. Ainsi, on a $V_R = I \oplus \mathfrak{j}V_R$. Montrons que $I = \mathfrak{i}V_R$. Par définition, on a $I \subset \mathfrak{i}V_R$. Il nous reste juste à montrer que $\mathfrak{j}V_R \subset V_R = I + \mathfrak{j}V_R$, alors pour tout $z \in V_R$; z peut être écrire de la forme $z = i + w$ oú $i \in I$ et $w \in \mathfrak{j}V_R$. On obtient $w = z - i \in \mathfrak{j}V_R \cap \mathfrak{i}V_R = 0$. Ainsi, on obtient $z = i \in I$. On montre aussi de manière analogue que $J = \mathfrak{j}V_R$. □

Lemme 9. *Pour tout object R de $\mathbf{alg}_\Phi$ tel que $1/2 \in R$, on considère l'algèbre de Lie du groupe linéaire spécial $\mathfrak{sl}_2(R)$. Alors tout idéal non nul de $\mathfrak{sl}_2(R)$ est de la forme $\mathfrak{i}\mathfrak{sl}_2(R)$ oú $\mathfrak{i}$ est un idéal propre non nul de R. En particulier, tout idéal propre non nul de $\mathfrak{sl}_2(R)$ est $\mathfrak{m}$-nul pour tout idéal maximal $m \in Max(R)$.*

Démonstration. Soit I un idéal propre non nul de $\mathfrak{sl}_2(R)$. On considère la base usuelle de $\{h, e, f\}$ de $\mathfrak{sl}_2(R)$, elle est considérée comme un R-module libre. Pour tout $x \in R$, on montre que $xh \in I \iff xe \in I \iff xf \in I$. Maintenant, on définit $\mathfrak{i} := \{x \in R : xh \in I\}$ qui est un idéal propre non nul de R et $I = \mathfrak{i}\mathfrak{sl}_2(R) = \mathfrak{sl}_2(\mathfrak{i})$. Comme I est un idéal propre non nul de $\mathfrak{sl}_2(R)$, alors I est de la forme $\mathfrak{i}\mathfrak{sl}_2(R)$ oú $\mathfrak{i}$ est un idéal propre de R. Pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, on a $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{m}$, ce qui entraine que $\mathfrak{i}\mathfrak{sl}_2(R) = I \subset \mathfrak{m}\,\mathfrak{sl}_2(R)$. On peut conclure que I est $\mathfrak{m}$-nul. □

Théorème 16. *Soit V une Φ-algèbre de Lie de dimension 6 satisfaisant à $[V, V] = V$. On considère une R-algèbre R appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$ et $\mathfrak{m} \in Max(R)$. On note par $\mathbb{K} := R/\mathfrak{m}$ le corps quotient. Soit ϕ: $V_R \to V_\mathbb{K} := V_R \otimes_R \mathbb{K}$ l' 'epimorphisme canonique $x \to x \otimes \overline{1}$ dont le noyau $\ker(\phi) = \mathfrak{m}V_R$. On suppose que I est un R-sous-module avec une partie $\mathfrak{m}$-libre de cardinal 4 ou 5. Alors $\phi(I) = V_\mathbb{K}$ ou I n'est pas un idéal de V_R. En particulier, si V est une algèbre de Lie sur un corps $\mathbb{K}$ et $[V, V] = V$ avec $\dim(V) = 6$, alors V n'admet pas d'idéaux de dimension 4 ou 5.*

Démonstration. On montre d'abord le cas particulier. On prend $R = \mathbb{K}$ un corps et on montre que $L := V_\mathbb{K}$ n'admet pas d'idéaux de dimension 4 ou 5 pour tout corps $\mathbb{K}$. On observe que $[L, L] = L$ (d'après le fait que V est parfaite i.e $[V, V] = V$). On suppose que I est un idéal de dimension 5, alors $\dim(L/I) = 1$, donc L/I est abélien. Ainsi $[L, L] \subset I$ et comme $[L, L] = L$, on peut conclure que $I = L$, ce qui est une contradiction. Puis on montre que L n'admet pas un idéal de dimension 4. Si J est un idéal et M un idéal maximal de L tel que $J \subset M$. On sait que M n'est pas de dimension 5, alors $M = J$. En prenant compte de la maximalitè de M, on peut conclure que L/M est une algèbre de Lie simple de dimension 2. C'est une contradiction puisqu'il n'existe pas d'algèbre de Lie simple de dimension 2. Maintenant, on

montre le résultat pour le cas général R appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$. On suppose que I est un idéal de V_R avec une partie $\mathfrak{m}$-libre de cardinal 4 ou 5. On considère que $\mathbb{K} := R/\mathfrak{m}$ comme un corps. Alors $\phi(I)$ est un sous-espace de $V_\mathbb{K}$ et si $\phi(I) \neq V_\mathbb{K}$, alors $\dim_\mathbb{K} \phi(I) \in \{4, 5\}$. Donc $\phi(I)$ n'est pas un idéal. □

Corollaire 5. *Pour tout corps $\mathbb{K}$, l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_\mathbb{K}$ n'admet pas d'idéaux de dimension 4 ou 5.*

Puis, on rappelle quelques résultats élémentaires sur la théorie des corps : on suppose que $\mathbb{K}$ est un corps tel que $\sqrt{-1} \in \mathbb{K}$. En prenant $x := \sqrt{-1}$ et $y = 1$, on obtient $x^2 + y^2 = 0$ oú $x, y \neq 0$. Réciproquement, si $\mathbb{K}$ est corps tel qu'il existe des éléments $x, y \in \mathbb{K}$ tels que $x^2 + y^2 = 0$, alors $(y/x)^2 = -1$ et on a $\sqrt{-1} \in \mathbb{K}$. Ainsi, pour tout corps $\mathbb{K}$ les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La racine carrée de -1 appartient à $\mathbb{K}$.

2. Il existe des éléments $x, y \in \mathbb{K}$ tels que $x^2 + y^2 = 0$.

Définition 17. *On dit que $\mathbb{K}$ est 2-formellement réel si et seulement si pour tous $x, y \in \mathbb{K}$ tels que $x^2 + y^2 = 0$, implique que $x = y = 0$. Si R est anneau et $\mathfrak{i}$ un idéal de R. On dit que R est $\mathfrak{i} - 2-$formellement réel si pour tous $x, y \in R$, tels que $x^2 + y^2 \in \mathfrak{i}$, on a $x, y \in \mathfrak{i}$.*

Par exemple $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (un nombre premier de la forme $p = 4k + 3$) sont 2-formellement réel. D'autre part, si D est le produit de deux corps 2-formellement réel, alors D est $\mathfrak{m} - 2-$formellement réel pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de D. On verra dans ce cas que l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_D$ est $\mathfrak{m}$-simple pour tout idéal maximal. On considère maintenant la base $\{b_i, i = 1, \cdots, 6\}$ de l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_R$ telle que $b_1 = s_{12}, b_2 = s_{13}, b_3 = s_{14}, b_4 = a_{23}, b_5 = a_{24}, b_6 = a_{34}$. La table de multiplication relative à l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_R$ est donnée par la figure 2 :

$[,]$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
b_1	0	ab_4	b_5	b_2	b_3	0
b_2	$-b_4$	0	b_6	$-b_1$	0	b_3
b_3	$-b_5$	$-b_6$	0	0	$-b_1$	$-b_2$
b_4	$-b_2$	b_1	0	0	$-b_6$	b_5
b_5	$-b_3$	0	b_1	b_6	0	$-b_4$
b_6	0	$-b_3$	b_2	$-b_5$	b_4	0

Figure 2 : Table de multiplication de l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_R$.

Proposition 9. *Soit R une Φ-algèbre commutative et unitaire $\mathfrak{m} \in Max(R)$ tel que R n'est pas $\mathfrak{m} - 2$-formellement réel, c'est à dire, qu'il existe $x, y \in R$ satisfaisant à $x^2 + y^2 \in \mathfrak{m}$, mais $x, y \notin \mathfrak{m}$. On définit les éléments*

$$\begin{cases} a_1 := & xb_1 + yb_6 \\ a_2 := & xb_2 - yb_5 \\ a_3 := & xb_3 + yb_4 \end{cases}$$

de l'algèbre de $\mathfrak{L}_R$, alors $I = Ra_1 \oplus Ra_2 \oplus Ra_3 + \mathfrak{m}\mathfrak{L}_R$ est un idéal non trivial et non total de $\mathfrak{L}_R$ de $\mathfrak{L}_R$ avec une partie $\mathfrak{m}$-libre de cardinal 3. En conséquence, $\mathfrak{L}_R$ n'est pas $\mathfrak{m}$-simple dans ce cas.

Démonstration. Comme $x \notin \mathfrak{m}$ et $R/\mathfrak{m}$ est un corps, il existe $x' \in R$ tel que $xx' \in 1 + \mathfrak{m}$. Puis, on calcule les produits $[a_1, b_i]$ en utilisant le symbole $\equiv$ pour la relation de congruence modulo l'idéal $\mathfrak{m}\mathfrak{L}_R$:

— $[a_1, b_1] = 0$,
— $[a_1, b_2]xb_4 - yb_3 \equiv x(b_4 - x'yb_3)$ et comme $y^2 = -x^2$, alors on a $x'y^2 \equiv -x'x^2 \equiv -x$. Ainsi, nous obtenons : $[a_1, b_2] \equiv x(b_4 - x'yb_3) \equiv xy'(yb_4 - x'y^2b_3) \equiv xy'(yb_4 + xb_3) = xy'a_3$. On peut conclure que $[a_1, b_2] \in Ra_3 + \mathfrak{m}\mathfrak{L}_R$.
— De manière analogue, on montre que $[a_1, b_3] \in Ra_2 + \mathfrak{m}\mathfrak{L}_R, [a_1, b_4] = a_2, [a_1, b_5] = a_3$ et $[a_1, b_6] = 0$.

On a montré que $[a_1, \mathfrak{L}_R] \subset I$ et en utilisant le même procédé, on peut aussi montrer que $[a_i, \mathfrak{L}_R] \subset I$ pour tout $i = 1, 2$. Donc I est un idéal non trivial de $\mathfrak{L}_R$. Pour montrer que I est non total, on considère l'épimorphisme canonique ϕ: $\mathfrak{L}_R \to \mathfrak{L}_R \otimes_R R/\mathfrak{m}$. On a aussi $\phi(I) \subset \mathbb{K}(a_1 \otimes 1) + \mathbb{K}(a_2 \otimes 1) + \mathbb{K}(a_3 \otimes 1)$, ce qui nous permet de dire $\dim_{\mathbb{K}} \phi(I) \leq 3$, d'oú I est non total. Enfin, on montre que $\{a_1, a_2, a_3\}$ est une partie $\mathfrak{m}$-libre : on suppose que $\sum r_i a_i \in \mathfrak{m}$, alors il existe $m_i \in \mathfrak{m}$ tel que $r_1(xb_1 + yb_6) + r_2(xb_2 - yb_5) + r_3(xb_3 + yb_4) = \sum m_i b_i$. Puis, on obtient l'égalitè suivante :

$$(r_1x+m_1)b_1+(r_2x+m_2)b_2+(r_3x+m_3)b_3+(r_3y+m_4)b_4+(-r_2y+m_5)b_5+(r_1y+m_6)b_6 = 0$$

Comme la famille $\{b_i\}_1^6$ est linéairement indépendant, on a :

$$\begin{cases} r_1x + m_1 = 0 \\ r_2x + m_2 = 0 \\ r_3x + m_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1x \in \mathfrak{m} \\ r_2x \in \mathfrak{m} \\ r_3x \in \mathfrak{m} \end{cases}$$

Comme $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal, alors $\mathfrak{m}$ est premier. Le fait que $x \notin \mathfrak{m}$, implique que $r_i \in \mathfrak{m}$. □

Théorème 17. *Soit $\mathfrak{m} \in Max(R)$ un idéal maximal de R. L'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_R$ est $\mathfrak{m}$-simple si et seulement si R est $\mathfrak{m}$-2-formellement réel. En particulier, l'algèbre de lorentz $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$ sur un corps $\mathbb{K}$ est simple si et seulement si $\mathbb{K}$ est 2-formellement réel.*

Démonstration. Si R n'est pas $\mathfrak{m}$-2-formellement réel, d'après la proposition 2, l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_R$ n'est pas $\mathfrak{m}$-simple. On suppose que R est $\mathfrak{m}$-2-formellement réel, et on montre que $\mathfrak{L}_R$ est $\mathfrak{m}$-simple. Pour cela, on commence simplement à prouver que $\mathfrak{L}_R$ est simple dans le cas oú R est un corps $\mathbb{K}$. □

AUTOMORPHISMES ET DERIVATIONS DES ALGEBRES DE LORENTZ ET DE POINCARE

On considère un anneau R tel que $1/2 \in R$, alors l'algèbre $\mathfrak{sl}_2(R)$ est un R-module libre dont la base $\mathcal{B}$ est donnée par $\mathcal{B} = \{h, e, f\}$ oú $h = e_{11} - e_{22}$, $e = e_{12}$ et $f = e_{21}$. Déterminons la matrice représentative d'une dérivation de $\mathfrak{sl}_2(R)$. Pour cela, on prend une dérivation quelconque $d\colon \mathfrak{sl}_2(R) \to \mathfrak{sl}_2(R)$. La base $\{h, e, f\}$ de $\mathfrak{sl}_2(R)$ satisfait aux conditions suivantes :

— $[h, e] = 2e$,
— $[h, f] = -2f$,
— $[e, f] = h$.

Comme d est une dérivation, alors elle vérifie les conditions suivantes :

— $[d(h), e] + [h, d(e)] = 2d(e)$,
— $[d(h), f] + [h, d(f)] = -2d(f)$,
— $[d(e), f] + [e, d(f)] = d(h)$.

On prend maintenant $d(h) = a_{11}h + a_{12}e + a_{13}f$, $d(e) = a_{21}h + a_{22}e + a_{23}f$ et $d(f) = a_{31}h + a_{32}e + a_{33}f$. En appliquant les relations de la dérivation d, on peut trouver les relations qui existent entre les coefficients. Ainsi, on obtient la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ donnée par :

$$\begin{pmatrix} 0 & -2\mu & -2\gamma \\ \gamma & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & -\lambda \end{pmatrix},$$

donc $\mathrm{Der}(\mathfrak{sl}_2(R))$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{sl}_3(R)$ et elle est engendré par les éléments $e_{22} - e_{33}$, $-2e_{12} + e_{31}$ et $-2e_{13} + e_{21}$. On notera par $h' = e_{22} - e_{33}$, $e' = -2e_{12} + e_{31}$ et $f' = -2e_{13} + e_{21}$. On montre que $\mathrm{Der}(\mathfrak{sl}_2(R)) \cong \mathfrak{sl}_2(R)$, ce qui implique que les dérivations sont intérieures dans $\mathfrak{sl}_2(R)$. On considère maintenant un corps K algèbriquement clos de caractéristique différent de deux. Il est facile de montrer aussi que un élément $M \in \mathfrak{sl}_2(R)$ est semi-simple si et seulement si $\mid M \mid \neq 0$. On peut aussi montrer que l'orbitre de $e_1 - e_{22}$ sous l'action de $\mathrm{PGL}_2(K)$ par conjugaison est l'ensemble des matrices inversibles de $\mathfrak{sl}_2(K)$. Rappelons que le groupe des automorphismes intérieures de $\mathfrak{sl}_2(K)$ (noté par $\mathrm{Inn}(\mathfrak{sl}_2(K))$) est juste l'image de l'action adjointe $\mathrm{ad}\colon \mathrm{PGL}_2(K) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_2(K))$.

Lemme 10. *D'après les hypothèses de la paragraphe ci-dessus, on prend $h = e_{11} - e_{22}$. Si θ appartient à $\mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_2(K))$ tel que $\theta(h) \in Kh$, alors θ est un automorphisme intérieur.*

Démonstration. Comme $\theta(h) \in Kh$, alors il existe $\alpha \in K$ tel que $\theta(h) = \alpha h.\theta(e)$ est un vecteur propre de $\mathrm{ad}(h)$ et sa valeur propre est $2\alpha^{-1}$. Comme les valeurs propres de $\mathrm{ad}(h)$ sont ± 2, alors $\alpha = \pm 1$. Dans ce cas, on a deux possibilitès pour les valeurs de α.

— Si $\alpha = 1$, alors $\theta(h) = h$. En résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} [\theta(h), \theta(e)] = 2\theta(e) \\ [\theta(h), \theta(f)] = -2\theta(f) \\ [\theta(e), \theta(f)] = \theta(h) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [h, \theta(e)] = 2\theta(e) \\ [h, \theta(f)] = -2\theta(f) \\ [\theta(e), \theta(f)] = h \end{cases}$$

On obtient, dans ce cas $\theta(e) = \lambda e$ et $\theta(f) = \lambda^{-1} f$. La matrice représentative de θ dans la base $\{h, e, f\}$ est $\mathrm{diag}(1, \lambda, \lambda^{-1})$, ce qui implique $\theta = \mathrm{ad} \begin{pmatrix} \alpha^{1/2} & 0 \\ 0 & \alpha^{-1/2} \end{pmatrix}$, donc $\theta \in \mathrm{Inn}(\mathfrak{sl}_2(K))$.

— Si $\alpha = -1$, dans ce cas, $\theta(h) = -h$. En résolvant ce système d'équations suivant :

$$\begin{cases} [\theta(h), \theta(e)] = 2\theta(e) \\ [\theta(h), \theta(f)] = -2\theta(f) \\ [\theta(e), \theta(f)] = \theta(h) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [h, \theta(e)] = 2\theta(e) \\ [h, \theta(f)] = -2\theta(f) \\ [\theta(e), \theta(f)] = h \end{cases}$$

On obtient $\theta(e) = \lambda f$ et $\theta(f) = \lambda^{-1} e$. Dans ce cas, la matrice représentative de θ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, ce qui implique que $\theta = Ad \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^{-1} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, d'oú $\theta \in \mathrm{Inn}(\mathfrak{sl}_2(K))$.

□

Corollaire 6. *Si K est un corps algèbriquement clos de caractéristique différent de deux, alors $\mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_2(K))$ est isomorphe à $\mathrm{Inn}(\mathfrak{sl}_2(K))$. Plus précisément, l'action adjointe $\mathrm{PGL}_2(K) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_2(K))$ est isomorphisme.*

Démonstration. Soit $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_2(K))$ et on considère $h' := \Phi(h)$ qui est un élément semi-simple. Alors h est dans l'orbitre de h' sous l'action de $\mathrm{PGL}_2(K)$, donc il existe un automorphisme intérieur Γ tel que $\Gamma(h') = h$. On considère $\theta := \Gamma\Phi$, d'après le lemme 11, θ est un automorphisme intérieur, ce qui implique que Φ est aussi un automorphisme intérieur. Ce qui nous permet de dire que l'action adjointe est un épimorphisme. C'est aussi un monomorphisme car les matrices carrées calculées avec tous éléments de $\mathfrak{sl}_2(K)$ sont nécessairement des multiples de la matrice identitè. □

On considère maintenant la catégorie des groupes **Grp** et le groupe affine de Scheme. PGL_2: $\mathbf{alg}_\Phi \to \mathbf{Grp}$, tel que pour toute algèbre R appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$, on a $\mathrm{PGL}_2(R) := \mathrm{GL}_2(R)/\mathbf{G_m}$, oú $\mathbf{G_m}(R) := R^\times$ est le groupe affine de Scheme dont l'algèbre de Hopf associée est $\Phi[x, x^{-1}]$ (polynôme de Laurent) et GL_2 le groupe linéaire général. On considère aussi le groupe affine de Scheme $\mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_2(\Phi))$: $\mathbf{alg}_\Phi \to \mathbf{Grp}$ tel que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_2(\Phi))(R) := \mathrm{Aut}_R(\mathfrak{sl}_2(R))$, et l'action adjointe Ad: $\mathrm{PGL}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_2(\Phi))$ telle que pour tout $R \in \mathbf{alg}_\Phi$, on a Ad_R: $\mathrm{PGL}_2(R) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_2(R))$ dans le sens usuel.

Lemme 11. *Si Φ est un corps de caractéristique différent de deux, l'application adjointe Ad est un isomorphisme de groupes algébriques de Scheme $\mathrm{PGL}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_2(\Phi))$.*

Démonstration. On sait que $\dim(\mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_2(\Phi)) = 3$, ainsi c'est un groupe affine de scheme lisse. On sait aussi que la différentiel $\mathrm{ad}\colon \mathrm{pgl}_2(\Phi) \to \mathrm{Der}(\mathfrak{sl}_2(\Phi))$ de Ad est un isomorphisme (d'après le lemme $\mathrm{pgl}_2(\Phi) \cong \mathfrak{sl}_2(\Phi)$). Si K est algébriquement clos Φ, en appliquant le corollaire 4 et [,proposition (22.5),p.340] nous obtenons ll'isomorphisme. □

Le groupe affine de Scheme $\mu_n\colon \mathbf{alg}_\Phi \to \mathbf{Grp}$ est défini pour toute R appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$, on a $\mu_n(R) := \{x \in R^\times : x^n = 1\}$. C'est un groupe algébrique dont l'algèbre de Hopf associée est $\Phi[x]/(x^n - 1)$.

Lemme 12. *Soit $\mathbb{K}$ un corps tel que $1/2, \sqrt{-1} \in \mathbb{K}$, la dérivation de l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_\mathbb{K}$ est isomorphisme à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})^2$. L'automorphisme de groupe de l'algèbre de Lorentz $\mathrm{Aut}(\mathfrak{L}_\mathbb{K})$ est aussi isomorphe à $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})^2 \bowtie \mu_2(\mathbb{K})$.*

Démonstration. D'après la proposition 3, on a $\mathfrak{L}_\mathbb{K} \cong \mathfrak{o}(4;\mathbb{K}) = I \oplus J$ oú $I, J \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. Comme $[I, I] = I$ (et aussi $[J, J] = J$), les idéaux sont invariants par rapport à la dérivation. Ainsi, $\mathrm{Der}(\mathfrak{L}_\mathbb{K}) = \mathrm{Der}(I) \oplus \mathrm{Der}(J) \cong \mathrm{Der}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}))^2 = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})^2$, en prenant compte du fait que les dérivations sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ sont des automorphismes intérieurs. Maintenant, il y a deux types d'automorphismes de $\mathfrak{L}_\mathbb{K}$: le premier type d'automorphisme fixe les idéaux I et J et le deuxiéme type d'automorphisme échange les idéaux I et J. On considère le premier type d'automorphismes et on note par G_0 l'ensemble des automorphismes qui fixent les idéaux I et J. Dans ce cas, on a $G_0 = \mathrm{Aut}(I) \times \mathrm{Aut}(J) \cong \mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}))^2 = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})^2$ (which is a connected group). Les automorphisme qui échangent I et J sont $G_0\omega$ oú $\omega \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{L}_\mathbb{K})$ est définie comme suit : $\omega(h_\alpha) = h_\beta, \omega(v_{\pm\alpha} = v_{\pm\beta}, \omega(h_\beta) = h_\alpha, \omega(v_{\pm\beta}) = v_{\pm\alpha}$. Nous obtenons, ainsi $\mathrm{Aut}(\mathfrak{L}_K) = G_0 \cup G_0\omega \cong G_0 \rtimes \mu_2(\mathbb{K}) \cong \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K}) \rtimes \mu_2(\mathbb{K})$. □

Corollaire 7. *Les dérivations de $\mathfrak{L}_\mathbb{K}$ sont des automorphismes intérieurs. Les automorphismes de $\mathfrak{L}_\mathbb{K}$ sont intérieurs, plus précisément, si on identifie $\mathfrak{L}_\mathbb{K}$ par $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})^2$, pour tout$\phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{L}_\mathbb{K})$ fixant I et J, alors ϕ est de la forme :*

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} pxp^{-1} & 0 \\ 0 & qyq^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix},$$

et si $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{L}_\mathbb{K})$ échange les idéaux I et J, alors ϕ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} pyp^{-1} & 0 \\ 0 & qxq^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p^{-1} \\ q^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

pour tous $p, q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$.

Dans ce paragraphe, on utilise le groupe fini constant (voir, [?,2.3, p.16]) noté par Z_2. C'est un groupe affine de Scheme dont l'algèbre de Hopf représentative est $\Phi^2 := \Phi \times \Phi$. Ainsi, pour tout $R \in \mathbf{alg}_\Phi$, on a $Z_2(R) := hom_\Phi(\Phi^2, R)$ et $f \in Z_2(R)$ est complétement déterminé par $e_1 := f(1,0)$ et $e_2 := f(0,1)$ qui sont orthogonaux et idempotents dans R. Ce qui nous donne une décomposition de $R = Re_1 \oplus Re_2$ comme somme directe de deux idéaux de R. Réciproquement l'ensemble $\{e_1, e_2\}$ orthogonaux et idempotent de R donne une décomposition de $R = Re_1 \oplus Re_2$, donc un homomorphisme $f\colon \Phi^2 \to R$ tel que $\phi(1,0) = e_1$ et $\phi(0,1) = e_2$. Si R n'admet pas d'idempotents différents de 0 et 1, alors $Z_2(R)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_2$ l'ensemble des entiers modulo 2. The set $Z_2(R)$ is in one-to-one corresponence with the set of decompositions of R as a direct sum of ideals.

Remarque 6. *C'est un résultat standard, si $1/2 \in \Phi$, alors il existe un isomorphisme de groupe affine de scheme $Z_2 \cong \mu_2$.*

Puis, on considère le groupe affine de Scheme $\mathrm{Aut}(\Phi^2)\colon \mathbf{alg}_\Phi \to \mathbf{Grp}$ tel que

$$\mathrm{Aut}(\Phi^2)(R) := \underset{R}{\mathrm{Aut}}(R^2)$$

pour toute algèbre R appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$ (la structure algébrique de R^2 est donné par composante). Il y a quelques éléments remarquables dans $\mathrm{Aut}_R(R^2)$ qui mérite une attention particulière. Si $\theta \in \mathrm{Aut}_R(R^2)$ tel que $\theta(R\times 0) = R\times 0$, $\theta(R\times 0) = 0\times R$, alors $\theta = 1_{R^2}$. Si θ échange les idéaux $R\times 0$ et $0\times R$ de R^2, alors θ est l'automorphisme qui échange les idéaux de R^2. Mais, de manière général $I := \theta(R\times 0)$ et $J = \theta(0\times R)$ donne une décomposition de $R^2 = I\oplus J$ oú $I, J \lhd R^2$. En appliquant le résultat dans le remarque 6, on a $I = \mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$, $J = \mathfrak{b}\times\mathfrak{a}$ oú $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\lhd R$ tels que $R = \mathfrak{a}\oplus\mathfrak{b}$. On a $\theta(r,0) = (\alpha_1(r),\alpha_2(r))$ oú $\alpha_1\colon R\to\mathfrak{a}$ et $\alpha_2\colon R\to\mathfrak{b}$. On a aussi $\theta(0,r) = (\beta_1(r),\beta_2(r))$ oú $\beta\colon R\to\mathfrak{b}$, $\beta_2\colon R\to\mathfrak{a}$. D'autre part, pour toute décomposition $R = \mathfrak{a}\oplus\mathfrak{b}$ oú $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\lhd R$, on peut considérer que l'élément $\sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\in\mathrm{Aut}_R(R^2)$ tel que $\sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(a+b,a'+b') := (a+b',a'+b)$. La composèe $\sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\theta$ est un élément de $\mathrm{Aut}_R(R^2)$, si θ laisse invariant les idéaux de $R\times 0$ et $0\times R$, alors $\sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\theta = 1$, ce qui implique que $\theta = \sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$. Ainsi il existe une correspondance entre $\mathrm{Aut}_R(R^2)$ et l'ensemble de toutes les décompositions possibles de $R = \mathfrak{a}\oplus\mathfrak{b}$ avec $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\lhd R$. En résumant : on a un isomorphisme

$$\mathrm{Aut}(\Phi^2)\cong Z_2.$$

Puis, nous étudierons le groupe $\mathrm{Aut}_R(\mathfrak{sl}_2(R^2))$ pour toute algèbre R appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$. Premèrement, nous constatons le monomorphisme qui existe entre $\mathrm{Aut}_R(R^2)$ et $\mathrm{Aut}_R(\mathfrak{sl}_2(R^2))$. En considérant une autre approche, on peut définir les automorphismes de $\mathfrak{sl}_2(R^2)$ sont donnès par l'ensemble $f\times g$ oú $f,g\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_2(R))$ et en identifiant $\mathfrak{sl}_2(R^2)$ avec $\mathfrak{sl}_2(R)^2$, on a $9f\times g)(x,y) := (f(x),g(y))$ pour tous $x,y\in\mathfrak{sl}_2(R)$. Si Φ est un corps de caractéristique différent de deux, alors $f = \mathrm{Ad}(\overline{p})$ et $g = \mathrm{Ad}(\overline{q})$ pour $\overline{p},\overline{q}\in\mathrm{PGL}_2(R)$. Ainsi, on obtient $f\times g = \mathrm{Ad}(\overline{p},\overline{q})$ et on obtient aussi la formule suivante :

$$\mathrm{Ad}(\overline{p},\overline{q})\hat{\alpha} = \hat{\alpha}\,\mathrm{Ad}(\overline{p^\alpha},\overline{q^\beta}),$$

oú $p^\alpha = (\alpha(p_{ij}))$ si p est la matrice $p = (p_{ij})$. Ainsi, si S_1 est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}_R(\mathfrak{sl}_2(R))$ donnè par $S_1 := \{\hat{\alpha} : \alpha\in\mathrm{Aut}_R(R^2)\}\cong\mathrm{Aut}_R(R^2)$ et $S_2 := \{\mathrm{Ad}(\overline{p},\overline{q}) : \overline{p},\overline{q}\in\mathrm{PGL}_2(R)\}\cong\mathrm{PGL}_2(R)^2$, on a $S_1, S_2\subset\mathrm{Aut}_R(\mathfrak{sl}_2(R^2))$ et $S_1\cap S_2 = \{1\}$ d'apres le lemme 3.

Théorème 18. *Soit Φ un corps tel que $1/2, \sqrt{-1}\in\Phi$ et on considère l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_\Phi$ sur Φ. Alors le groupe algébrique $\mathrm{Aut}(\mathfrak{L}_\Phi)$ est isomorphe à $\mathrm{PGL}_2^2\rtimes Z_2$.*

Démonstration. D'après les hypothèses obtenues ci-dessus, pour tout R appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$, l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{L}_\Phi$ est isomorphe à $\mathfrak{o}_4(R)\cong\mathfrak{sl}_2(R)^2$, d'après le lemme 1 et la proposition 3. Maintenant, pour tout $\alpha\in\mathrm{Aut}(R^2)$, ce qui induit l'application $\hat{\alpha}\colon \mathfrak{sl}_2(R^2)\to\mathfrak{sl}_2(R^2)$, en appliquant les coefficients de la matrice appartenant à $\mathfrak{sl}_2(R^2)$ par α. Ensuite, on identifie $\mathfrak{sl}_2(R^2)$ par $\mathfrak{sl}_2(R)\oplus\mathfrak{sl}_2(R)$, dans ce cas on aura $\hat{\alpha}$ est un automorphisme de $\mathfrak{sl}_2(R)\oplus\mathfrak{sl}_2(R)$. Puis, tout couple $(\overline{p},\overline{q})\in\mathrm{PGL}_2(R)^2$, on peut associer à l'automorphisme $\mathrm{Ad}(\overline{p},\overline{q})\colon \mathfrak{sl}_2(R)\oplus\mathfrak{sl}_2(R)\to\mathfrak{sl}_2(R)\oplus\mathfrak{sl}_2(R)$ tel que $(x,y)\to\mathrm{Ad}(\overline{p},\overline{q})(x,y) = (pxp^{-1},qyq^{-1})$. Ainsi, on peut définir $f_R\colon \mathrm{PGL}_2(R)^2\rtimes\mathrm{Aut}_R(R^2)\to\mathrm{Aut}_R(\mathfrak{o}_4(R))$ tel que pour toute couple de classe d'équivalence $(\overline{p},\overline{q})\in\mathrm{PGL}_2(R)^2$ et pour tout $\alpha\in\mathrm{Aut}(R^2)$, on a $f_R((\overline{p},\overline{q}),\alpha) := \mathrm{Ad}(\overline{p},\overline{q})\hat{\alpha}$. On peut aussi définir un homomorphisme de groupe de Scheme $f\colon \mathrm{PGL}_2^2\rtimes\mathrm{Aut}(\Phi^2)\to\mathrm{Aut}(\mathfrak{L}_\Phi)$ et on montre que c'est un isomorphisme. Pour cela, on considère l'application inverse $g\colon \mathrm{Aut}(\mathfrak{L}_\Phi)\to\mathrm{PGL}_2^2\bowtie\mathrm{Aut}(\Phi^2)$. On prend $\theta\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{L}_R)$, comme $\mathfrak{L}_R\cong\mathfrak{sl}_2(R^2)$, alors $\theta\colon \mathfrak{sl}_2(R^2)\to\mathfrak{sl}_2(R^2)$ est un isomorphisme. On définit les idéaux $I := \theta(\mathfrak{sl}_2(R)\times 0)$ et $J := \theta(0\times\mathfrak{sl}_2(R))$ de $\mathfrak{sl}_2(R^2)$, ces idéaux satisfont aux conditions suivantes :

— $\mathrm{Ann}(I) = \mathrm{Ann}(J) = 0$,
— $\mathfrak{sl}_2(R^2) = I \oplus J$.

D'après le théorème 4, il existe deux idéaux $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \triangleleft R$, tels que $R = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$, dans ce cas $I = \mathfrak{sl}_2(\mathfrak{a}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathfrak{b})$ et $J = \mathfrak{sl}_2(\mathfrak{b}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathfrak{a})$. Ensuite, on définit l'automorphisme d'ordre 2-$\tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ de $\mathfrak{sl}_2(R^2)$ tel que $(a+b, a'+b') \to (a+b', a'+b)$ oú $a, a' \in \mathfrak{sl}_2(\mathfrak{a})$ et $b, b' \in \mathfrak{sl}_2(\mathfrak{b})$. La composition $\tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\theta$ est un automorphisme de $\mathfrak{sl}_2(R^2)$ qui laisse invariant les idéaux $\mathfrak{sl}_2(R) \times 0$ et $0 \times \mathfrak{sl}_2(R)$. En outre, il existe deux automorphismes $f, g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_2(R))$ tels que $\tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\theta = f \times g \colon \mathfrak{sl}_2(R^2) \to \mathfrak{sl}_2(R^2)$ qui a pour tout $(x, y) \in \mathfrak{sl}_2(R^2)$, associe $\tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\theta(x, y) = (f(x), g(y))$, donc on a $\theta = \tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(f \times g)$. On considère maintenat, $\sigma \colon R^2 \to R^2$ telle que $\sigma(a+b, a'+b') = (a+b', a'+b)$ pour $a, a' \in \mathfrak{a}$ et $b, b' \in \mathfrak{b}$. Alors, on a $\tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = \hat{\alpha}$ oú

$$\hat{\alpha}\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & -z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(z_1) & \sigma(z_2) \\ \sigma(z_3) & -\sigma(z_1) \end{pmatrix}, z_i \in R^2, (i = 1, 2, 3).$$

D'après le lemme 12, $f \times g = \mathrm{Ad}(\overline{p_1}, \overline{p_2})$, pour tous $\overline{p_1}, \overline{p_2} \in \mathrm{PGL}_2(R)$. Ainsi, on obtient $\theta = \hat{\alpha}\,\mathrm{Ad}(\overline{p_1}, \overline{p_2}) = \mathrm{Ad}(p, q)\hat{\alpha}$ oú $(p, q) = (p_1, p_2)^\alpha$. Alors, on définit $g_R(\theta) := ((\overline{p}, \overline{q}), \alpha)$ et on obtient $f_R g_R = 1$. Le fait que $g_R f_R = 1$ provient de l'unicitè d'un élément inversible de $\mathrm{Aut}_R(\mathfrak{L}_R)$ comme une composition d'éléments de S_2 avec un élément de S_1 (lemme 3). □

Pour finir cette section, on étudiera le groupe algébrique $\mathrm{Aut}(\mathfrak{L}_\Phi)$ dans le cas oú $1/2 \in \Phi$, mais $\sqrt{-1} \notin \Phi$.

Théorème 19. *Soit Φ un corps tel que $1/2 \in \Phi$ et $\sqrt{-1} \in \Phi$. Alors le groupe affine de Scheme $\mathrm{Aut}(\mathfrak{L}_\Phi)$ est isomorphe à $\mathrm{PGL}_2(\Phi) \rtimes \mathbb{Z}_2$. En particulier, le groupe des automorphismes de l'algèbre de Lorentz sur R est isomorphe à $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \rtimes \mu_2(R)$.*

Démonstration 2. *Soit R appartenant à $\mathbf{alg}_\Phi$ et $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{L}_R)$. On sait que $\mathfrak{L}_R \cong \mathfrak{sl}_2(R)^R$ d'après le théorème 5. On considère la base usuelle $\{h, e, f\}$ $\overline{R}$-module libre $\mathfrak{sl}_2(R)$. Comme θ est un élément de $\mathrm{Aut}_R(\mathfrak{L}_R)$, on définit les éléments suivants $h' = \theta(h), e' = \theta(e)$ et $f' = \theta(f)$. Le système $\{h', e', f'\}$ constitue une base de $\mathfrak{sl}_2(\overline{R})$. On considère $\omega \colon \mathfrak{sl}_2(\overline{R}) \to \mathfrak{sl}_2(\overline{R})$ définit par $h' \to h, e' \to e$ et $f' \to f$ est un automorphisme de $\mathfrak{sl}_2(\overline{R})$ qui laisse la base $\{h, e, f\}$ invariant de $\mathfrak{sl}_2(\overline{R})$. On voit qu'il existe $\sigma \in \mathrm{Aut}_R(\overline{R})$ tel que $\alpha(\lambda e) = \sigma(\lambda)e$ et $\sigma(\lambda f) = \sigma(\lambda)f$ pour tout $\lambda \in \overline{R}$. On a montré que θ est la composée de deux automorphismes $\overline{R}$-linéaires de $\mathfrak{sl}_2(\overline{R})$ qui induit un automorphisme de $\overline{R}$. En d'autre termes, $\mathrm{Aut}_R(\mathfrak{L}_R) \cong \mathrm{Aut}_{\overline{R}}\mathfrak{sl}_2(\overline{R}) \rtimes \mathrm{Aut}_R(\overline{R}) \cong \mathrm{PGL}_2(\overline{R}) \rtimes \mathrm{Aut}_R(\overline{R})$. Ainsi, le groupe affine de Scheme est isomorphe à $\mathrm{PGL}_2(\Phi) \rtimes \mathrm{Aut}(\overline{\Phi})$ et en prenant compte du remarque 8 et 7, nous avons $\mathrm{Aut}(\mathfrak{L}_\Phi) \cong \mathrm{PGL}_2(\overline{\Phi}) \rtimes Z_2$.*

Corollaire 8. *Si Φ est un corps de caractéristique différent de deux, alors le groupe affine de Scheme $\mathrm{Aut}(\mathfrak{L}_\Phi)$ est lisse.*

Démonstration 3. *Si $\sqrt{-1} \in \Phi$, on applique le théorème 6 et on obtient $\mathrm{Aut}(\mathfrak{L}_\Phi) \cong \mathrm{PGL}_2^2 \rtimes Z_2$. Ainsi, on a $\dim \mathrm{Aut}(\mathfrak{L}_\Phi) = \dim \mathrm{PGL}_2^2 = 6$ car $\dim Z_2 = 0$. Si $\sqrt{-1} \notin \Phi$, on applique théorème 7 et on obtient $\mathrm{Aut}(\mathfrak{L}_\Phi) \cong \mathrm{PGL}_2(\overline{\Phi}) \rtimes Z_2$. Donc on obtient $\dim \mathrm{Aut}(\mathfrak{L}_\Phi) = \dim \mathrm{PGL}_2(\overline{\Phi})$. Puis, on calcule $\dim \mathrm{GL}_2(\overline{\Phi})$ oú $\mathrm{GL}_2(\overline{\Phi})(R) := \mathrm{GL}_2(\overline{R})$. Comme $\mathrm{GL}_2(\overline{\Phi})$ est un groupe affine de Scheme représenté par l'algèbre de Hopf*

$$H = \Phi[x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}]/I,$$

oú I est l'idéal engendré par le polynôme $pz_1 - qz_2 - 1$ et $pz_2 + qz_1$, dans ce cas $p = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} - y_{11}y_{22} + y_{12}y_{21}$ et $q = x_{11}y_{22} + x_{22}y_{11} - x_{12}y_{21} + x_{21}y_{12}$.

4.1 Automorphisme de $\mathfrak{o}(1,3)$ dans le cas d'un corps de caractéristique deux

Dans cette partie le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos de caractéristique 2. L'algèbre de Lie $\mathfrak{o}(3;\mathbb{K})$ sera noté par $\mathfrak{o}(3)$ dans cette section. Aussi la notation du groupe orthogonal $\mathrm{O}(3)$ qui est l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$ telles que $M.M^t = 1$. On considère l'idéal $I =< x_1, x_2, x_3 >$ de dimension 3 de $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$ et $f\colon \mathfrak{L}_{\mathbb{K}} \to \mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$ un automorphisme. Alors $f(I) = I$ et on peut considérer l'automorphisme induit par f notèe par $\overline{f}\colon \mathfrak{L}_{\mathbb{K}}/I \to \mathfrak{L}_{\mathbb{K}}/I$. Comme $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}/I$ est un isomorphe à $\mathfrak{o}(3)$, on pourra identifier $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}/I$ par $\mathfrak{o}(3)$. Ainsi, on définit $\overline{f}\colon \mathfrak{o}(3) \to \mathfrak{o}(3)$. On peut aussi montrer que $\overline{f} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{o}(3)) \cong \mathrm{O}(3)$. Ainsi, l'application $\phi\colon \mathrm{Aut}(\mathfrak{L}_K) \to \mathrm{O}(3)$ telle que $\phi(f)$ est l'image de $\overline{f}$ dans $\mathrm{O}(3)$. On voit aussi que ϕ est un épimorphisme de groupe. Dans le théorème précédent, on montrera que ϕ est un épimorphisme.

Proposition 10. *ϕ est un épimorphisme.*

Démonstration 4. *On considère $V := \mathbb{K}^3$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, muni du produit vectoriel. On peut montrer que $(V, \wedge)$ est une algèbre de Lie.*

— $x \wedge x = 0$

— $x \wedge (y \wedge z) + y \wedge (z \wedge x) + z \wedge (x \wedge y) = 0$

On aura l'occasion d'utiliser le produit scalaire, qui est définit comme suit $< x, y >:= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. On munit du produit cartésien $V \times V$ du nouveau produit :

$$[(x,y),(z,t)] := (x \wedge z, x \wedge z + x \wedge t + y \wedge z), \forall x, y, z, t \in V.$$

On peut aussi montrer que $(V \times V, [.])$ est une algèbre de Lie :

— $[(x,y),(x,y)] = (0,0)$

— $[(x,y),[(z,t),(u,v)]] + [(z,t),[(u,v),(x,y)]] + [(u,v),[(x,y),(z,t)]] = (0,0)$.

Ensuite, on montre que $V \times V$ est isomorphe à $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$ oú $0 \times V$ corresponds à l'idéal I dans $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$. Plus précisément, si on note i, j, k les vecteurs de la base canonique de V, alors l'isomorphisme est de la forme :

$$\begin{aligned}
(i,0) &\to b_1 \\
(j,0) &\to b_2 \\
(k,0) &\to b_3 \\
(0,i) &\to x_1 \\
(0,j) &\to x_2 \\
(0,k) &\to x_3
\end{aligned}$$

Puis, on considère, un automorphisme $g\colon \mathfrak{o}(3) \to \mathfrak{o}(3)$. On sait que la base $\{b_1, b_2, b_3\}$ relative à $\mathfrak{o}(3)$ est cyclique, c'est à dire $[b_i, b_j] = b_k$. La matrice représentative de g est orthogonal. Cette matrice est engendrée par trois vecteurs, ce qui implique qu'il existe trois vecteurs $a_i \in V$, $i = 1, 2, 3$ satisfaisant à $a_i \wedge a_j = a_k$ et $< a_i, a_j >= \delta_{ij}$. Maintenant, on définit $f\colon V \times V \to V \times V$ tel que

$$\begin{aligned}
f(i,0) &= (a_1, \alpha_1 a_1), \ \text{oú } \alpha_1 \in \mathbb{K}^* \\
f(j,0) &= (a_2, \alpha_2 a_2), \ \text{oú } \alpha_2 \in \mathbb{K}^* \\
f(k,0) &= (a_3, \alpha_3 a_3), \ \text{oú } \alpha_3 \in \mathbb{K}^*
\end{aligned}$$

et les scalaires satisfont à la condition $\alpha_1 + a_2 + \alpha_3 \neq 1$ (cet choix est possible car $\mathbb{K}$ est un

corps infini). Puis, on prend $\lambda_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 1 \neq 0$ *et on définit :*

$$\begin{aligned} f(0,i) &= (0, \alpha_0 a_1), \\ f(0,j) &= (0, \alpha_0 a_2), \\ f(0,k) &= (0, \alpha_0 a_3). \end{aligned}$$

On a montré que f *induit un automorphisme* $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} \cong V \times V$ *et que* $\phi(f) = \overline{f} = g$. *Ainsi,* ϕ *est un épimorphisme.*

Ainsi, ϕ est un épimorphisme et on définit $G := \ker(\phi)$. On a la suite exacte suivante :

$$1 \to G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}) \to \mathrm{O}(3) \to 1$$

et on aimerai avoir plus d'information sur le groupe G. Les éléments $f \in G$ vérifie que $f(b_i) = b_i + x^{(i)}$ oú chaque $x^{(i)} \in I$ oú $(i = 1, 2, 3.)$ On suppose que $f(x_i) = \sum_j a_{ij} x_j$ et on suppose la condition $[x_i, b_i] = 0$ et $[x_i, b_j] = x_k$ $(i \neq j$ et $k \in \{1,2,3\}/\{i,j\})$, alors on montre que $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et $a_{11} = a_{22} = a_{33}$. Ainsi, la matrice reprśentative f dans la base $\{x_1, x_2, x_3, b_1, b_2, b_3\}$ est de la forme :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & 0 & 0 & & & \\ 0 & a_{11} & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & a_{11} & & & \\ \hline & & & 1 & 0 & 0 \\ & * & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On suppose maintenant que $x^{(i)} = \sum_j \lambda_{ij} x_j$. Ainsi, comme $[b_1, b_2] = b_3$, en appliquant f, on obtient $[b_1 + x^{(1)}, b_2 + x^{(2)}] = b_3 + x^{(3)}$. De même, $[b_1, x^{(2)}] + [b_2, x^{(1)}] = x^{(3)}$ et on obtient le système suivant

$$\begin{cases} \lambda_{31} = \lambda_{13}, \\ \lambda_{32} = \lambda_{23}, \\ \lambda_{33} = \lambda_{11} + \lambda_{22}. \end{cases}$$

De manière analogue, on applique f à $[b_2, b_3] = b_1$, on obtient :

$$\begin{cases} \lambda_{12} = \lambda_{21}, \\ \lambda_{13} = \lambda_{31}, \\ \lambda_{11} = \lambda_{22} + \lambda_{33}. \end{cases}$$

Donc, on peut donner l'expresion finale de la matrice représentative de f est de la forme :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & 0 & 0 & & & \\ 0 & a_{11} & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & a_{11} & & & \\ \hline \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 & 1 & 0 \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{11} + \lambda_{22} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Enfin, on peut écrire G sous la forme $G = \begin{pmatrix} a.1_3 & 0 \\ M & 1_3 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{K}^*, M^t = M, tr(M) = 0$. Ainsi, on obtient

$$\dim(G) = 6, \dim(\mathrm{Aut}(\mathfrak{L}_{\mathbb{K}})) = 9.$$

4.2 Dérivation de l'algèbre de Lorentz sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique deux

Soit d un élément de $\mathrm{Der}(\mathfrak{L}_{\mathbb{K}})$ oú $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique deux. On utilisera la notation suivante :

$$\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} := \begin{pmatrix} 0 & v \\ v^t & M \end{pmatrix} : v \in \mathbb{K}^3, M \in \mathfrak{o}(3,\mathbb{K})$$

La matrice M est symétrique (car le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique deux)avec des coefficients diagonaux. On peut aussi écrire $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$ de la forme suivante :

$$\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{K}^3 \\ (\mathbb{K}^3)^t & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{o}(3,\mathbb{K}) \end{pmatrix}.$$

Alors, nous avons les applications linéaires $\alpha\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ et $\beta\colon \mathbb{K}^3 \to \mathfrak{o}(3;\mathbb{K})$ telles que :

$$d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v^t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(v) \\ \alpha(v)^t & \beta(v) \end{pmatrix}.$$

D'autre part, il existe des applications linéaires $\gamma\colon \mathfrak{o}(3;\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^3$ et $\delta\colon \mathfrak{o}(3;\mathbb{K}) \to \mathfrak{o}(3;\mathbb{K})$ telles que :

$$d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma(M) \\ \gamma(M)^t & \delta(M) \end{pmatrix}.$$

En faisant directement les calculs, on obtient les résultats suivants :

—
$$\left[\begin{pmatrix} 0 & v_1 \\ v_1^t & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & v_2 \\ v_2^t & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

—
$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [M,M'] \end{pmatrix}$$

—
$$\left[\begin{pmatrix} 0 & v \\ v^t & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & vM \\ (vM)^t & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tous $v, v_1, v_2 \in \mathbb{K}^3$ et pour tous $M, M' \in \mathfrak{o}(3;\mathbb{K})$. En appliquant la dérivation à ces différents résultats, en utilisant le fait que la dérivation obéit à cette condition $d([a,b]) = [d(a),b] + [a,d(b)]$. On obtient les conditions suivantes :

1. $v\beta(v') = v'\beta(v)$,
2. $\gamma(M)M' = \gamma(M')M = \gamma([M,M'])$,
3. $[M,\delta(M')] + [\delta(M),M'] = \delta([M,M'])$,
4. $\alpha(vM) = v\delta(M) + \alpha(v)M$,
5. $\beta(vM) = [M,\beta(V)]$,

Maintenant, en appliquant le lemme 6.1.6, on considère le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de toutes les applications linéaires $\mathbb{K} \to \mathfrak{o}(3;\mathbb{K})$ satisfaisant à la condition (1), cet espace vectoriel est de dimension 1. En outre, ces applications satisfont automatiquement à la condition (5). Ainsi, jusqu'à présent, pour le choix de β, nous avons un degré de liberté. Maintenant, nous avons besoin de se soucier des conditions (2) et (4). Comme $\alpha\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ est une application linéaire, alors il existe $P \in \mathfrak{gl}_3(\mathbb{K})$ telle que $\alpha(P) = vP$ pour tout $v \in \mathbb{K}^3$. D'après la condition (4), on a $\alpha(vM) = v\delta(M) + \alpha(v)M$, ce relation devient $vMP = v\delta(M) + vPM$, en simplifiant par v, on obtient $\delta(M) = MP + PM = \mathrm{ad}(P)(M)$. Comme $\delta := \mathrm{ad}(P)\colon \mathfrak{o}(3;\mathbb{K}) \to \mathfrak{o}(3;\mathbb{K})$, dans ce

cas P doit satisfaire certaines conditions. Pour tout $M \in \mathfrak{o}(3;\mathbb{K})$, on a $\mathrm{ad}(P)(M) \in \mathfrak{o}(3;\mathbb{K})$, ce qui entraine que P est une matrice symétrique. Dans ce cas, on a 6 degrès de libertès pour le choix de P. D'autre part, comme $\delta = \mathrm{ad}(P)$, c'est une dérivation et elle vérifie automatiquement la condition (3). Jusqu'à présent, nous avons 7 degrès de libertès pour d, mais il reste juste à analyser la condition (2). Comme $\mathfrak{o}(3;\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension 3, on peut identifier l'espace de toutes les applications linéaires $\gamma\colon \mathfrak{o}(3;\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^3$ satisfaisant à la condition (2) à ce sous-espace composè des matrices d'ordre 3 dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{K}$. On considère $\gamma(a_{12}) = (x_1, x_2, x_3), \gamma(a_{13}) = (x_4, x_5, x_6)$ et $\gamma(a_{23}) = (x_7, x_8, x_9)$. Pour déterminer la matrice représentative, on applique juste la condition (2) aux différents éléments de la base de $\mathfrak{o}(3;\mathbb{K})$:

— $\gamma([a_{12}, a_{13}]) = \gamma(a_{23}) = \gamma(a_{12})a_{13} + \gamma(a_{13})a_{12}$,
— $\gamma([a_{12}, a_{23}]) = \gamma(a_{13}) = \gamma(a_{12})a_{23} + \gamma(a_{23})a_{12}$,
— $\gamma([a_{13}, a_{23}]) = \gamma(a_{13}) = \gamma(a_{13})a_{23} + \gamma(a_{23}a_{13}$.

Finallement, on obtient la matrice représentative :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_3 + x_5 \\ x_2 & x_5 & x_4 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Cet espace matriciel est de dimension 5. Ainsi, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 20. *Pour tout corps de caractéristique deux, nous avons :*

$$\dim(\mathrm{Der}(\mathfrak{L}_{\mathbb{K}})) = 12.$$

4.3 Structure algèbrique des algèbres de Poincarè

The Poincaré is the inhomogeneous Lorentz group, that is, the Lorentz group plus translations. Similarly the Poincaré algebra $\mathfrak{p}$ over the field $\mathbb{K}$ is the inhomogeneous Lorentz algebra. Dans cette partie, on suppose que le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos et de caractéristique zéro. L'algèbre de Poincarè est la somme directe :

$$\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{K}^4 \\ 0 & \mathfrak{o}(4,\mathbb{K}) \end{pmatrix} \oplus \left[\begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & M \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & v' \\ 0 & M' \end{pmatrix} \right],$$

oú $v, v' \in V$, $M, M' \in \mathfrak{o}(4,\mathbb{K})$. On peut aussi écrire de maniére plus simple :

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & M \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & v' \\ 0 & M' \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & vM' - v'M \\ 0 & [M, M'] \end{pmatrix}$$

En outre, $\mathfrak{r} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{K}^4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un idéal abélien (en effet, c'est le radical de $\mathfrak{p}$).

Lemme 13. *L'idéal $\mathfrak{r}$ est minimal.*

Démonstration 5. *On montre que l'idéal $\mathfrak{r}$ est engendré par un élément non nul x appartenant à $\mathfrak{r}$ est lui même équivaut à dire que $< x >= \mathfrak{r}$ pour tout $x \neq 0$. Ainsi, on prend $x \in \mathfrak{r}^*$, alors x est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $< x >$ est un idéal de $\mathfrak{p}$, alors il existe il vérifie la relation $[< x >, \mathfrak{p}] \subset < x >$. En utilisant cette relation, on montre que $< x >$ contient des éléments de la forme :*

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{K} + v\,\mathfrak{o}_4(\mathbb{K}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère la forme quadratique $q\colon \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}$ *définit par* $q(x,y,z,t) = x^2+y^2+z^2+t^2$ *et on note par* b_q *la forme polaire* $b_q\colon \mathbb{K}^4 \times \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}$. *On définit le groupe orthogonal en version d'endomorphisme par :*

$$\mathrm{O}(\mathbb{K},q) := \{P \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}) : \forall x,y, b_q(P(x),P(y)) = b_q(x,y)\}.$$

Rappelons que $P \in \mathrm{O}_4(\mathbb{K})$ *si et seulement si* $PP^t = 1_4$ *oú* $P^t\colon \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ *est l'unique application linéaire telle que :*

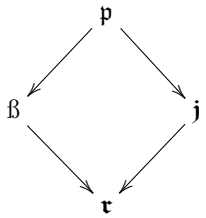
$$b_q(P(x),y) = b_q(x,P^t(y)) \text{ pour tous } x,y \in \mathbb{K}^4.$$

Puis, on définit $\mathrm{O}(V,q) := \{f \in \mathfrak{gl}(\mathbb{K}) : \forall x,y, b_q(f(x),y) + b_q(x,f(y))\}$. *On montre que* $\mathrm{O}(\mathbb{K}^4,q)$ *est isomorphe à* $\mathrm{O}_4(\mathbb{K})$, *ce qui implique que* $\mathfrak{o}(\mathbb{K}^4,q)$ *est isomorphe à* $\mathfrak{o}_4(\mathbb{K})$. *Pour tout élément* $v \in \mathbb{K}^4_*$, *on définit* $s_v = \{\lambda v + f(v) : \lambda v \in \mathbb{K}^4 \text{ et } f \in \mathfrak{o}(\mathbb{K}^4,q)\}$. *Si* v *est un vecteur isotrope, alors* $q(v) = 0$. *Si* v *et* w *sont deux vecteurs isotropes appartenant à la même orbitre, alors il existe* $k \in \mathbb{K}$, *tel que* $v = kw$, *alors* $s_v = s_w$. *Pour tout vecteur* $k \in \mathbb{K}^4$ *isotrope, alors* $s_v = \mathbb{K}^4$. *Il suffit juste de voir que le vecteur identitè* $(1,i,0,0)$ *est isotrope car* $q(1,i,0,0) = 0$. *Dans le cas contraire, si le vecteur* v *est non isotrope, alors on supposera que* $q(v) = 1$. *Comme* $(1,i,0,0) \in \mathbb{K}^4$*est l'identité de* $\mathbb{K}^4$, *alors tous vecteurs non isotropes appartient à l'orbitre de* $(i,1,0,0)$, *ce qui implique que* $s_{(i,1,0,0)} = s_v$, *donc* $s_v = \mathbb{K}^4$ *pour tout* $v \in \mathbb{K}^4$.

On sait que $\mathfrak{p}/\mathfrak{r}$ est isomorphe à $\mathfrak{o}_4(\mathbb{K})$. L'algèbre $\mathfrak{o}_4(\mathbb{K})$ est égal à $I \oplus J$, oú I et J sont deux idéaux isomorphes à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. Ainsi, on a des idéaux ß et $\mathbf{j}$ de dimension 7.

$$ß = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{K}^4 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{K}^4 \\ 0 & J \end{pmatrix}$$

tels que $ß + \mathbf{j} = \mathfrak{p}$ et $ß \cap \mathbf{j} = \mathfrak{r}$. En outre, $\mathfrak{p}/ß$ et $\mathfrak{p}/\mathbf{j}$ sont isomorphes à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ et ß et $\mathbf{j}$ sont deux idéaux maximaux de $\mathfrak{p}$. Donnons la représentation de l'algèbre de Poincaré avec ses idéaux :



Lemme 14. *Si* K *est un idéal de* $\mathfrak{p}$ *tel que* $[K,\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{r}$, *alors* $K = 0$ *ou* $K = \mathfrak{r}$.

Démonstration 6. *Soit* K *un idéal de* $\mathfrak{p}$ *tel que* $\mathbb{K} \in \{0, ß, \mathbf{j}, \mathfrak{p}\}$. *Comme* ß *et* $\mathbf{j}$ *sont des idéaux maximaux, alors on a* $K \subset ß$ *ou* $K + ß = \mathfrak{p}$ *et* $K \subset \mathbf{j}$ *ou* $K + \mathbf{j} = \mathfrak{p}$. *Ainsi, on a quatre possibilitè :*

1. $K \subset ß$ *et* $K \subset \mathbf{j}$
2. $K \subset ß$ *et* $K + \mathbf{j} = \mathfrak{p}$
3. $K + ß = \mathfrak{p}$ *et* $K \subset \mathbf{j}$
4. $K + ß = \mathfrak{p}$ *et* $K + \mathbf{j} = \mathfrak{p}$

Comme $\mathfrak{r}$ *est un idéal minimal, on a* $K \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{r}$ *ou* $K \cap \mathfrak{r} = 0$. *On suppose que* $K \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{r}$, *alors* $\mathfrak{r} \subset K$ *et on a* $\mathfrak{r} \subset K \cap ß \subset ß$, *ce qui implique que* $K \cap ß = ß$. *Similairement, on montre que* $K \cap \mathbf{j} = \mathfrak{r}$ *ou* $K \cap \mathbf{j} = \mathbf{j}$.

(a) *Si* $K \cap ß = ß$, *alors* $ß \subset K$ *et d'après le théorème de maximalitè de* ß, *on a* $K = ß$ *ou* $K = \mathfrak{p}$, *ce qui est une contraduction.*

(b) *Si* $K \cap \mathbf{j} = \mathbf{j}$, *on obtient une contraduction.*

(c) *Si* $K \cap ß = K \cap \mathbf{j} = \mathfrak{r}$, *dans ce cas (1) et (2) sont obtenues, on a* $\mathfrak{r} \subset K \subset \mathbf{j}$, *ce qui implique que* $K = \mathfrak{r}$, *ce qui est aussi une contraduction.*

(d) *Si, on a* $K + ß = K + \mathbf{j} = \mathfrak{p}$ *et* $K \cap ß = K \cap \mathbf{j} = \mathfrak{r}$. *Comme* K *est un idéal, alors on a* $[K, \mathfrak{p}] \subset [K, ß] + [K, \mathbf{j}] \subset (K \cap ß) + (K \cap \mathbf{j}) \subset \mathfrak{r}$ *et áprès le lemme* 5.7.2, *on a* $K = 0$ *ou* $K = \mathfrak{r}$, *ce qui est impossible.*

Maintenant, si $K \cap \mathfrak{r} = 0$ *et comme* $K \neq 0$, *on prend un élément non nul* $x_0 = \begin{pmatrix} 0 & v_0 \\ 0 & M_0 \end{pmatrix} K$. *On considère, maintenant un élément* $v \in \mathbb{K}^4$ *et* $x = \begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & M_0 \end{pmatrix}$. *En calculant, on obtient* $[x, x_0] = \begin{pmatrix} 0 & (v_0 - v)M_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K \cap \mathfrak{r} = 0$, *d'oú* $M_0 = 0$, *ce qui est impossible.*

Corollaire 9. *The Poincare algebra is centerless.*

4.4 Dérivation de l'algèbre de Poincaré

Dans cette partie, on étudiera la dérivation de l'algèbre de Poincaré $\mathrm{Der}(\mathfrak{p})$. On suppose que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique différent de deux. Comme $Z(\mathfrak{p}) = 0$, l'application $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{p} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{p})$ est un monomorphisme et l'idéal des dérivations est de dimension 10. Nous avons un homomorphisme $q\colon \mathrm{Der}(\mathfrak{p}) \to \mathrm{Der}(\mathfrak{o}_4(\mathbb{K}))$ définit par $q(d) = \pi \circ d \circ i$ oú $i\colon \mathfrak{o}_4(\mathbb{K}) \to \mathfrak{p}$ est l'injection naturelle $M \to \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\pi\colon \mathfrak{p} \to \mathfrak{o}_4(\mathbb{K})$ l'application $\begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & M \end{pmatrix} \to M$ qui est un épimorphisme d'algèbres de Lie.

Lemme 15. *L'application linéaire* q *est un épimorphisme de noyau l'algèbre de Lie* $\mathbb{K} \times \mathbb{K}^4$ *munit de ce produit donné par* $[(\lambda, v_0), (\lambda', v_0')] := (0, \lambda v_0' - \lambda' v_0)$. *Ainsi,* $\mathrm{Der}(\mathfrak{p})$, *"fits" dans la suite exacte :*

$$0 \to \mathbb{K} \times \mathbb{K}^4 \to \mathrm{Der}(\mathfrak{p}) \to \mathrm{Der}(\mathfrak{o}_4(\mathbb{K})) \to 0$$

et donc $\dim \mathrm{Der}(\mathfrak{p}) = 11$.

Démonstration 7. *Soit* $\alpha \in \mathrm{Der}(\mathfrak{o}_4(\mathbb{K}))$. *Comme les dérivations de* $\mathfrak{o}_4(\mathbb{K})$ *sont intérieures (voir corollaire 5), alors il existe* $x_0 \in \mathfrak{o}_4(\mathbb{K})$ *tel que* $\alpha = ad(x_0)$. *On définit* $d\colon \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$ *telle que :*

$$d \begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & x \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & -vx_0 \\ 0 & \alpha(v) \end{pmatrix}.$$

Pour montrer que d *est une dérivation de* $\mathfrak{p}$. *Il suffit juste de prouver la relation suivante :*

$$d\left[\begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & v' \\ 0 & x' \end{pmatrix}\right] = \left[d\begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & v' \\ 0 & x' \end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & x \end{pmatrix}, d\begin{pmatrix} 0 & v' \\ 0 & x' \end{pmatrix}\right] \tag{4.1}$$

En faisant directement les calculs, on obtient :

— $d\left[\begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & v' \\ 0 & x' \end{pmatrix}\right] = d\begin{pmatrix} 0 & vx' - v'x \\ 0 & [x, x'] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (vx' - v'x)x_0 \\ 0 & \alpha([x, x']) \end{pmatrix}$

— $\left[d\begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & v' \\ 0 & x' \end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & x \end{pmatrix}, d\begin{pmatrix} 0 & v' \\ 0 & x' \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -vx_0x' - v'\alpha(x) + v\alpha(x') + v'x_0x \\ 0 & [\alpha(x), x'] + [x, \alpha(x')] \end{pmatrix}.$

Comme α est une dérivation, nous avons $\alpha([x,x']) = [\alpha(x),x'] + [x,\alpha(x')]$. En utilisant le fait que $\alpha = ad(x_0)$, nous obtenons $-vx_0x' - v'\alpha(x) + v\alpha(x') + v'x_0x = (vx' - v'x)x_0$. Finallement, on obtient (6.1), ce qui équivaut à dire que $d \in \mathrm{Der}(\mathfrak{p})$. Par définition, nous avons $q(d)(M) = \pi di(M) = \alpha(M)$ pour tout $M \in \mathfrak{o}(4;\mathbb{K})$. Ainsi, on a $q(d) = \alpha$. Déterminons le noyau $\ker(q)$. On prend un élément quelconque $d \in \ker(q)$; équivaut à dire que $q(d) = 0$ pour tout $d \in \mathrm{Der}(\mathfrak{p})$. Alors $d\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&x\end{pmatrix}\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}0&\beta(x)\\0&0\end{pmatrix}$ oú $\beta\colon \mathfrak{o}_4(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^4$ est une application linéaire satisfaisant à la lemme 5.1.5 Dans ce cas, il existe $v_0 \in \mathbb{K}^4$ tel que $\beta(x) = vx_0$ pour tout $x \in \mathfrak{o}_4(\mathbb{K})$. Comme toute dérivation préserve $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{p}$ (voir), on a donc $d\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}0&v\\0&0\end{pmatrix}\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}0&\alpha(x)\\0&0\end{pmatrix}$ oú $\alpha\colon \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ est une application linéaire. Puisque α est une application linéaire, il existe $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ telle que $\alpha(v) = vP$ pour tout $v \in \mathbb{K}^4$. Ainsi, on obtient $d\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}0&v\\0&x\end{pmatrix}\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}0&vP+v_0x\\0&0\end{pmatrix}$. En imposant le fait que d est une dérivation, on a la condition suivante :

$$d\left[\begin{pmatrix}0&v\\0&x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&v'\\0&x'\end{pmatrix}\right] = \left[d\begin{pmatrix}0&v\\0&x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&v'\\0&x'\end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix}0&v\\0&x\end{pmatrix},d\begin{pmatrix}0&v'\\0&x'\end{pmatrix}\right] \tag{4.2}$$

En faisant les calculs, d'après 5.11.2 le résultat suivant :

$$\begin{pmatrix}0&(vx'-v'x)P+v_0[x,x']\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&(vP+v_0x)x'+(v'P+v_0x')x\\0&0\end{pmatrix}.$$

Par identification, on a $(vx'-v'x)P = P(vx'-v'x')$ pour tous $v,v' \in \mathbb{K}^4$ et pour tous $x,x' \in \mathfrak{o}(4;\mathbb{K})$, ce qui nous permet de dire que P est une matrice qui commute avec les éléments de $\mathfrak{o}(4;\mathbb{K})$. En exploitant ce résultat, on obtient $P = \lambda 1_4$ oú $\lambda \in \mathbb{K}$ et 1_4 la matrice identitè d'ordre 4. En résumè $d\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}0&v\\0&x\end{pmatrix}\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}0&\lambda v+v_0x\\0&0\end{pmatrix}$, ce qui nous permet de dire que d est déterminée par l'existence du scalaire λ et l'existence du vecteur $v_0 \in \mathbb{K}^4$ qui sont des éléments uniques. Ainsi, l'application $\ker(q) \to \mathbb{K}\times\mathbb{K}^4$ telle que $d \to (\lambda, v_0)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie oú $\mathbb{K}\times\mathbb{K}^4$ est muni de ce produit $[(\lambda,v_0),(\lambda',v_0')] = (0,\lambda v_0' - \lambda' v_0)$ (pour faire la preuve, il suffit juste de prouver que $[d,d'] \to [(\lambda,v_0),(\lambda',v_0')] := (0,\lambda v_0' - \lambda' v_0)$. Ainsi, on obtient l'existence de la suite exacte

$$0 \to \mathbb{K}\times\mathbb{K}^4 \to \mathrm{Der}(q) \to \mathrm{Der}(\underset{4}{\mathfrak{o}}(\mathbb{K})) \to 0 \tag{4.3}$$

et $\dim(\mathrm{Der}(\mathfrak{p})) = 11$.

Définition 18. *Pour tout $(\lambda,v) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K}^4$, on définit la dérivation $d_{\lambda,v} \in \ker(q)$ par :*

$$d_{\lambda,v}\left[\begin{pmatrix}0&v\\0&x\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0&\lambda v+v_0x\\0&0\end{pmatrix}$$

Lemme 16. *La suite exacte (6.3) is split : il existe un monomorphisme $j\colon \mathrm{Der}(\mathfrak{o}_4(\mathbb{K})) \to \mathrm{Der}(\mathfrak{p})$ tel que pour tout $\alpha\,\mathrm{Der}(\mathfrak{o}_4(\mathbb{K}))$, on a $j(\alpha)\colon \begin{pmatrix}0&v\\0&x\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0&-vx_0\\0&\alpha(x)\end{pmatrix}$ oú $\alpha = ad(x_0)$. Par conséquent, toute dérivation $d \in \mathrm{Der}(\mathfrak{p})$ peut être écrire de façon unique, comme étant la somme $j(\alpha) + d_{\lambda,v}$. En outre*

1. $\mathbb{K}\times\mathbb{K}^4 \cong \{d_{\lambda,v} : (\lambda,v) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K}^4\}$ *est le radical* $\mathfrak{r} := \mathfrak{r}(\mathrm{Der}(\mathfrak{p}))$.

2. $\mathrm{Der}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{r} \oplus j(\mathrm{Der}(\mathfrak{o}_4(\mathbb{K}))) \cong \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})^2$.

Démonstration 8. *Pour tous α, α' appartenant à $\mathrm{Der}(\mathfrak{o}_4(\mathbb{K}))$, montrons que $j([\alpha,\alpha']) = [j(\alpha), j(\alpha')]$. Comme $[\alpha,\alpha'] = \alpha\circ\alpha' - \alpha'\circ\alpha$, en appliquant j, on obtient $j([\alpha,\alpha']) = j(\alpha\circ\alpha') - j(\alpha'\circ\alpha)$. On prend un élément quelconque appartenant à $\mathfrak{p}$. On a :*

$$j([\alpha,\alpha'])\begin{pmatrix}0 & v\\ 0 & x\end{pmatrix} = (j(\alpha\circ\alpha') - j(\alpha'\circ\alpha))\begin{pmatrix}0 & v\\ 0 & x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & [\alpha,\alpha'](x)\end{pmatrix}$$

En conclusion j est un homomorphisme d'algèbres de Lie. Maintenant, pour tout $\alpha \in \ker(j)$ équivaut à dire que $j(\alpha) = 0$. On prend un élément quelconque $\mathfrak{p}$. en appliquant $j(\alpha)$, on obtient :

$$j(\alpha)\begin{pmatrix}0 & v\\ 0 & x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -vx_0\\ 0 & \alpha(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

, ce qui implique que $\alpha = 0$, alors j est un monomorphisme. Par la suite, on a $q\circ j(\alpha) = q(d) = \alpha$, ainsi $q\circ j = 1$, ce qui entraine que $\mathrm{Der}(\mathfrak{p}) = j(\mathrm{Der}(\mathfrak{o}_4(\mathbb{K}))\oplus\ker(q)$. Pour terminer la preuve, il nous reste à montrer que $\ker(q)$ est le radical de $\mathrm{Der}(\mathfrak{p})$. D'après la définition du produit de l'algèbre de Lie $\mathbb{K}\times\mathbb{K}^4$, on voit que $\mathbb{K}\times\mathbb{K}^4$ est solvable. Comme $\ker(q)$ est isomorphisme à $\mathbb{K}\times\mathbb{K}^4$, cela implique que $\ker(q)$ est un idéal solvable. Nous avons aussi $\mathrm{Der}(\mathfrak{p})/\ker(q) \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})^2$ est semi-simple. Donc $\ker(q)$ est le radical de $\mathrm{Der}(\mathfrak{p})$; équivaut à dire que $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\mathrm{Der}(\mathfrak{p})) = \ker(q)$.

4.5 Automorphisme du groupe de Poincaré

On considère le groupe des homomorphismes $Q\colon \mathrm{Aut}(\mathfrak{p}) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{o}_4(\mathbb{K}))$ tel que $Q(f) = \pi f i$ oú π et i sont définis dans la section précédente. On prend $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{o}_4(\mathbb{K}))$, alors il existe $x_0 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{K})$ tel que $\theta = \mathrm{Ad}(x_0)$. Il est facile de prouver l'existence de x_0 tel que $\mathrm{Ad}(x_0)$ est un automorphisme de $\mathfrak{o}_4(\mathbb{K})$ qui ont préciment la forme $x_0 = ky_0$ pour tout $k \in \mathbb{K}^*$ et $y_0 \in \mathrm{O}_4(\mathbb{K})$. Et comme $\mathrm{Ad}(x_0) = \mathrm{Ad}(y_0)$, ainsi on peut dire que pour tout $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{o}_4(\mathbb{K}))$, il existe $x_0 \in \mathrm{O}_4(\mathbb{K})$ tel que $\theta = \mathrm{Ad}(x_0)$. L'application $f\colon \mathfrak{p}to\mathfrak{p}$ telle que $f\colon \begin{pmatrix}0 & v\\ 0 & x\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0 & vx_0^{-1}\\ 0 & \theta(x)\end{pmatrix}$ est un automorphisme de $\mathfrak{p}$ et $Q(f) = \theta$. On peut conclure que Q est un épimorphisme qui décrit le noyau de f.

Lemme 17. *Le noyau $\ker(Q)$ est le sous-groupe des automorphismes f_{λ,v_0}, oú $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $v_0 \in \mathbb{K}^4$ définit par :*

$$f_{\lambda,v_0}\colon \begin{pmatrix}0 & v\\ 0 & x\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0 & \lambda v + v_0 x\\ 0 & x\end{pmatrix}$$

Démonstration 9. *Soit $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{p})$, et comme $\mathfrak{r}$ est f-invariant, nous avons :*

$$f\left[\begin{pmatrix}0 & v\\ 0 & x\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0 & \mu(v) + \alpha(x)\\ 0 & \beta(x)\end{pmatrix}$$

pour outes applications linéaires $\mu\colon \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$, $\alpha\,\mathfrak{o}_4(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^4$, $\beta\colon \mathfrak{o}_4(\mathbb{K}) \to \mathfrak{o}_4(\mathbb{K})$. Si on suppose que $f \in \ker(Q)$, alors $\pi f i = 1$, ce qui implique que $\beta = 1$. Maintenant, on impose la condition qui dit que f est un homomorphisme d'algèbres de Lie, on obtient :

(1) *$\alpha([x,y]) = \alpha(x)y - \alpha(y)x$ pour tous $x, y \in \mathfrak{o}_4(\mathbb{K})$,*

(2) *$\mu(vx) = \mu(v)x$ pour tout $v \in \mathbb{K}^4$ et $x \in \mathfrak{o}_4(\mathbb{K})$.*

En appliquant le lemme (1) à α, il existe $v_0 \in \mathbb{K}^4$ tel que $\alpha(x) = v_0 x$ pour tout x. Comme μ est une application linéaire, on peut déterminer la matrice représentative P de μ telle que $\mu(v) = vP$ pour tout $v \in \mathbb{K}^4$. En imposant la condition (2), on trouve que $P = \lambda 1$, ainsi on

obtient $\mu(v) = \lambda v$ *pour tout* $v \in \mathbb{K}^4$. *Finallement, le fait que* f *est injective implique* $\lambda \neq 0$. *Ainsi* $\ker(Q) \cong \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^*$ *munit de la multiplication* $(\lambda, v_0)(\mu, w_0) := (\lambda\mu, \lambda w_0 + v_0)$. *Par conséquent,* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{p})$ *s'adapte dans la suite exacte :*

$$1 \to \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^4 \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{p}) \to^{Q} \mathrm{Aut}(\underset{4}{\mathfrak{o}}(\mathbb{K})) \to 1$$

Comme corollaire, on peut affirmer que $\dim \mathrm{Aut}(\mathfrak{p}) = 11$, *car la dimension* $\dim \mathrm{Aut}(\mathfrak{o}_4(\mathbb{K})) = 6$.

Proposition 11. *Le groupe des automorphismes* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{p})$ *satisfait aux conditions du groupe*

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{p}) = \{f_{\lambda,v_0,x_0} : \lambda \in \mathbb{K}^*, v_0 \in \mathbb{K}^4, Ad(x_0) \in \mathrm{Aut}(\underset{4}{\mathfrak{o}}(\mathbb{K}))\},$$

oú

$$f_{\lambda,v_0,x_0}\left[\begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & x \end{pmatrix}\right] := \begin{pmatrix} 0 & \lambda v x_0^{-1} + v_0 x_0 x x_0^{-1} \\ 0 & x_0 x x_0^{-1} \end{pmatrix}$$

Certaines relations multiplicatives de ces éléments sont données par :

$$\begin{aligned} f_{\lambda,v_0,x_0} f_{\mu,v_1,x_1} &= f_{\lambda\mu,\lambda v_1 + v_0 x_1, x_0 x_1}, \\ f^{-1}_{\lambda,v_0,x_0} &= f_{\lambda^{-1},-\lambda^{-1} v_0 x_0^{-1}, x_0^{-1}}. \end{aligned}$$

Démonstration 10. *Soit* $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{p})$, *et comme* $\mathfrak{r}$ *est f-invariant, nous avons :*

$$f\left[\begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & x \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & \mu(v) + \alpha(x) \\ 0 & \beta(x) \end{pmatrix}$$

pour outes applications linéaires $\mu\colon \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$, $\alpha\, \mathfrak{o}_4(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^4$, $\beta\colon \mathfrak{o}_4(\mathbb{K}) \to \mathfrak{o}_4(\mathbb{K})$. *Si on suppose que* $f \in \ker(Q)$, *alors* $\pi f i = 1$, *ce qui implique que* $\beta = 1$. *Maintenant, on impose la condition qui dit que* f *est un homomorphisme d'algèbres de Lie, on obtient :*

(1) $\alpha([x, y]) = \alpha(x)\beta(y) - \alpha(y)\beta(x)$ *pour tous* $x, y \in \mathfrak{o}_4(\mathbb{K})$.

(2) $\mu(vx) = \mu(v)\beta(x)$ *pour tout* $v \in \mathbb{K}^4$ *et* $x \in \mathfrak{o}_4(\mathbb{K})$.

(3) $\beta([x, y]) = [\beta(x), \beta(y)]$ *pour* $\beta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{o}_4(\mathbb{K}))$.

Ainsi, pour tout $\beta \in \mathfrak{o}_4(\mathbb{K})$, *il existe* $x_0 \in \mathrm{O}_4(\mathbb{K})$ *tel que* $\beta = Ad(x_0)$. *On définit aussi* $\mu'\colon \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ *par* $\mu'(x) = \mu(x)x_0$, *on obtient pour tout* $v \in \mathbb{K}^4$, $x \in \mathfrak{o}_4(\mathbb{K})$. *De la même manière, on définit* $\alpha'\colon \mathfrak{o}_4(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^4$ *par* $\alpha'(x) = \alpha(x)x_0$, *on peut voir aussi que* $\alpha'([x, y]) = \alpha'(x)y - \alpha'(y)x$ *pour tous* x, y. *En appliquant le lemme* 1 *à* α', *il existe* $v_0 \in \mathbb{K}^4$ *tel que* $\alpha'(x) = v_0 x$ *pour tout* x. *Par conséquent, on a* $\alpha(x) = v_0 x x_0^{-1}$ *pour tout* x. *Comme* μ *est une application linéaire, on peut déterminer la matrice représentative* P *de* μ *telle que* $\mu(v) = vP$ *pour tout* v. *D'après, la condition* (2), *on peut trouver que* $\beta(v) = \lambda v x_0^{-1}$ *pour tout* λ *non nul.*

Chapitre Five

GRADUATIONS FINES SUR L'ALGEBRE DE POINCARE

Nous étudions les graduations fines sur une classe d'algèbres de Lie contenant les algèbres de Poincaré généralisées. Si nous fixons un corps K et (V,Q) un K-espace vectoriel avec Q une forme quadratique non-dégénérée, on note par $\mathrm{O}(V,Q)$ le groupe orthogonal. Maintenant, on considère le groupe matriciel

$$\begin{pmatrix} 1 & {}^{V} \\ 0 & \mathrm{O}(V,Q) \end{pmatrix}.$$

L'algèbre de Lie de ce groupe algébrique est notée par $\mathfrak{p}$. Lorsque $K=\mathbb{R}$ et $(V,Q)=(\mathbb{R}^4,Q)$ est l'espace de Minkowsky, alors $\mathfrak{p}$ est l'algèbre de Poincaré. Il se trouve que sous l'hypothèse appropriée sur K, les graduations fines sur $\mathfrak{p}$ sont liées à certaines décompositions de V comme une somme directe orthogonale directe des droites anisotropes et des plans hyperboliques. Pour $V=K^4$, il n'y a que 3 decompositions de ce type fournissant trois classes d'équivalence de graduations fines sur $\mathfrak{p}$. Nous avons déterminé le groupe d'automorphisme de $\mathfrak{p}$ comme un outil pour notre étude. Nous avons également préféré de garder ce chapitre élémentaire dans le sens de ne pas entrer dans la théorie des affines schemes groupes, ce qui aurait dû permettre probablement l'hypothèse de caractéristique zéro.

5.1 Définitons préliminaires : généralisation de l'algèbre de Lorentz et de Poincaré

Pour le langage des graduations sur les algèbres de Lie que nous utiserons tout au long de ce chapitre, notre référence préférée est la monographie [37]. Quelques résultats sur la simplicité des algèbre de Lorentz sur les anneaux apparaissent[4]. Nous devons également mentionner que certains des résultats de cette section sont présents dans la référence non publiée [5].

Une classification des graduations fines sur $\mathrm{O}(4)$ a été obtenue dans [57], oú il est suggéré qu'une classification serait une tâche intéressante . Des résultats beaucoup plus généraux sur les graduations des algèbres de Lie simples sont obtenus dans [37]. En effet dans [37] est un cadre global de référence pour les algèbres de Lie. En effet, l'algèbre de Poincaré n'est pas semi-simple, elle a un radical de dimension 4. En réalitè, l'existence d'un radical non nul impose à ce groupe un caractère de rigiditè puisque le radical est fixé par des automorphismes. Nous allons fixer un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique 0 et un espace vectoriel de dimension finie V munie d'une forme quadratique non dégénérée Q. Nous utiliserons la forme polaire de Q le désignant aussi par Q (nous distinguerons seulement du nombre d'arguments auquels il est appliqué).

Le groupe orthogonal correspondant sera noté par $\mathrm{O}(V,Q)$. Nous utiliserons $\mathrm{GO}(V,Q)$ (ou $\mathrm{GO}(V)$ s'il n' y a pas de confusion possible sur la forme quadratique). pour désigner tout élément $f \in \mathrm{GL}(V)$ tel qu'il existe $\lambda \in K$ non nul, de sorte que $Q(f(x)) = \lambda Q(x)$ pour tout $x \in V$. Lorsque $K = \mathbb{R}$ et la signature de V est (p,q), les groupes $\mathrm{O}(V,Q)$ sont noté $\mathrm{O}_{p,q}(\mathbb{R})$ et généralise le groupe de Lorentz $\mathrm{O}_{1,3}(\mathbb{R})$. Une partie de la motivation de ce travail est l'étude des graduations sur l'algèbre de Poincaré. Pour relier cela avec les groupes orthogonaux, nous considérons le groupe

$$P = \begin{pmatrix} 1 & V \\ 0 & \mathrm{O}(V,Q) \end{pmatrix},$$

muni de la multiplication $\left(\begin{smallmatrix} 1 & v \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & w \\ 0 & y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & w+vy \\ 0 & xy \end{smallmatrix}\right)$. Lorsque, $K = \mathbb{R}$ et la signature de V est (p,q) on obtient le groupe de Poincaré original, lorsque $V = \mathbb{R}^4$ avec la signature $(1,3)$. Revenant au cas général l'algèbre de Lie du groupe algébrique P est

$$\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} 0 & V \\ 0 & \mathfrak{o}(V,Q) \end{pmatrix},$$

oú $\mathfrak{o}(V,Q)$ est l'algèbre de Lie du groupe orthogonal. Ses éléments sont $f \in \mathfrak{gl}(V)$ tels que $Q(f(x),y) + Q(x,f(y)) = 0$ pour tous $x,y \in V$. Le crochet de Lie sur $\mathfrak{p}$ est défini par $\left[\left(\begin{smallmatrix} 0 & v \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & w \\ 0 & y \end{smallmatrix}\right)\right] = \left(\begin{smallmatrix} 0 & vy - wx \\ 0 & [x,y] \end{smallmatrix}\right)$. Notre tâche principale sera la détermination des graduations fines sur $\mathfrak{p}$ lorsque K est algébriquement clos de caractéristique zéro. Finallement, il sera commode de représenter $\mathfrak{p}$ comme somme directe $\mathfrak{p} = V \oplus \mathfrak{o}(V,Q)$. Il est facile de vérifier que V est le radical de $\mathfrak{p}$ et que $[V,V] = 0$. Dans le cas oú $\dim(V) = 4$, l'algèbre $\mathfrak{o}(V,Q)$ n'est pas simple mais isomorphe au somme directe de deux copies de $\mathfrak{sl}_2(K)$. Sous cette hypothèse, l'algèbre $\mathfrak{p}$ a plusieurs idéaux (son radical V étant minimal). La structure des idéaux de $\mathfrak{p}$ est décrite [5]

5.2 Groupe d'automorphisme de $\mathfrak{p}$

Les résultts de cette section appparaissent dans une version plus générale dans [5]Nous fournissons ici une version particulière pour la commodité du lecteur. Etant donné $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{p})$, on sait que $f(\mathrm{rad}(\mathfrak{p})) = \mathrm{rad}(\mathfrak{p})$ ou de manière équivalente $f(V) = V$. Ainsi, il existe une matrice $m_0 \in M_n(K)$ (avec $n = \dim(V)$) telle que $f(v) = vm_0$ pour tout $v \in V$. D'autre part, tout $x \in \mathfrak{o}(V,Q)$, nous avons $f(x) = \beta(x) + \alpha(x)$, oú $\beta\colon\ \mathfrak{o}(V,Q) \to V$ et $\alpha\colon\ \mathfrak{o}(V,Q) \to \mathfrak{o}(V,Q)$ sont des applictions linéaires. Maintenant, en imposant le fait que f est un homomorphisme, on obtient :

$$\begin{cases} \beta([x,y]) = \beta(x)\alpha(y) - \beta(y)\alpha(x), \\ \alpha([x,y]) = [\alpha(x), \alpha(y)], \end{cases}$$

pour tous $x,y \in \mathfrak{o}(V,Q)$.

Lemme 18. *L'application α est un automorphisme de $\mathfrak{o}(V,Q)$. Alors, $\alpha = Ad(p)$ pour un certain $p \in \mathrm{GO}(V,Q)$. L'application β est de la forme $\beta(x) = v_0 x p^{-1}$ pour un certain $v_0 \in V$.*

Démonstration 11. *On sait que α est un homomorphisme. Il suffit juste de montrer que α est un monomorphisme. On suppose que $\alpha(x) = 0$, pour tout $x \in \mathfrak{o}(V,Q)$, alors on a $f(x) = \beta(x) \in V$. Ce qui implique que , $0 = [f(x),V] = [f(x),f(V)] = f([x,V])$ par la suite $[x,V] = 0$. Comme $[x,V] = Vx = 0$, donc $x = 0$. On peut conclure que α est un automorphisme de $\mathfrak{o}(V,Q)$ et ce qui implique que $\alpha = Ad(p)$ pour un certain $p \in \mathrm{GO}(V)$. On rapelle que $f \in \mathrm{GL}(V)$ est dans $\mathrm{GO}(V)$ si et seulement s'il existe $\lambda_f \in K^*$ tel que*

$Q(f(x), f(y)) = k_f Q(x, y)$ pour tous $x, y \in V$. Dans ce cas, $f = kg$, oú $k \in \mathbb{K}^\times$ et $g \in \mathrm{O}(V, Q)$. D'après la deuxième assertion nous avons

$$\beta([x, y]) = \beta(x)pyp^{-1} - \beta(y)pxp^{-1} \Rightarrow \gamma([x, y]) = \gamma(x)y - \gamma(y)x,$$

oú $\gamma(x) := \beta(x)p$. Ainsi, en appliquant le lemme de Whitehead [?, Lemma 3, p.77], il existe $v_0 \in V$ tel que $\gamma(x) = v_0 x$ pour tout $x \in \mathfrak{o}(V, Q)$. Donc, on a $\beta(x) = v_0 x p^{-1}$.

Remarque 7. Le lemme ci-dessus est obtenue également lorsque la caractéristique de K est un nombre premier. Lorsque la caractéristique de K est un nombre premier, la version du lemme de Whitehead devient [32, Theorem 1].

En rassemblant toutes les pièces du puzzle, on voit que tout automorphisme f de $\mathfrak{p}$ agit de la manière suivante : $f(\left(\begin{smallmatrix} 0 & v \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & v' \\ 0 & x' \end{smallmatrix}\right)$, oú $v' = vm_0 + v_0 x p^{-1}$ et $x' = pxp^{-1}$. D'après l'égalité $f(\left(\begin{smallmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right)) = f(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right))$, on obtient $m_0 = \lambda p^{-1}$ for pout tout $\lambda \in K$ non nul. Ainsi, on obtient $f = f_{\lambda, v_0, p}$, oú

$$f_{\lambda,v_0,p}(\begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & x \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} 0 & \lambda v p^{-1} + v_0 x p^{-1} \\ 0 & pxp^{-1} \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$ {au}

Réciproquement, pour tout $f_{\lambda,v_0,p}$ avec $\lambda \in K^\times$, $v_0 \in V$ et $p \in \mathrm{GO}(V)$ est un automorphisme de $\mathfrak{p}$. Par conséquent, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{p}) = \{f_{\lambda,v_0,p} \colon \lambda \in K^\times, v_0 \in V, p \in \mathrm{GO}(V)\}$. Il n'est pas difficule de vérifier que $f_{\lambda,v_0,p} = f_{\mu,w_0,q}$ si et seulement s'il existe $k \in K$ tel que $\mu = k\lambda$, $w_0 = kv_0$ et $q = kp$. Ainsi, on a

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{p}) = \{f_{1,v_0,p} \colon v_0 \in V, p \in \mathrm{GO}(V)\}$$

et lorsque un automorphisme de $\mathfrak{p}$ est représenté sous la forme $f_{1,v_0,p}$, dans ce cas v_0 et p sont déterminé de manière unique. Nous avons aussi

$$f_{1,v_0,p} f_{1,w_0,q} = f_{1,w_0+v_0 q,pq}, \qquad f_{1,v_0,p}^{-1} = f_{1,-v_0 p^{-1},p^{-1}}.$$

Remarque 8. *En mathématique, un tore maximal d'un groupe de Lie G est sous-groupe de Lie commutatif, connexe et compact de G qui soit maximal pour ces propriétés. Les tores maximaux de G sont unique à conjugaison près. De manère équivalente, c'est un groupe de Lie de G, isomorphe à un tore et maximal pour cette propriété. Le quotient du normalisateur $N(T)$ d'un tore T est le groupe de Weyl associé.*

Lemme 19. *Si T est un tore maximal dans $\mathrm{GO}(V)$, alors $\mathcal{T} := \{f_{1,0,t} \colon t \in T\}$ est un tore maximal dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{p})$. Le normalisateur de $\mathcal{T}$ dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{p})$ est le groupe $N(\mathcal{T}) = \{f_{1,0,n} \colon n \in N_{\mathrm{GO}(V)}(T)\}$. Le groupe de Weyl de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{p})$ est isomorphe au groupe de Weyl $\mathrm{GO}(V)$.*

Démonstration 12. *Les automorphismes $f_{1,0,t}$ sont diagonalisables et centralisés de $\mathcal{T}$ est $\mathcal{T}$ lui-même. En prenant, $f_{1,v_0,p}$ dans le centre de $\mathcal{T}$. D'après l'égalité $f_{1,v_0,p} f_{1,0,t} = f_{1,0,t} f_{1,v_0,p}$, on obtient que $p \in T$ et $v_0 t = v_0$ pour tout $t \in T$. Ainsi, en prenant $t \neq 1_{\mathfrak{p}}$ on a $v_0 = 0$. Donc $\mathcal{T}$ est un tore maximal du groupe algébrique $\mathrm{Aut}(\mathfrak{p})$. Afin de prouver la seconde assertion, prenons $f_{1,v_0,p}$ dans $N(\mathcal{T})$, alors pour tout $f_{1,0,t}$ dans $\mathcal{T}$. Dans ce cas, on obtient $t = ptp^{-1}$, ce qui signifie que $p \in N_{\mathrm{GO}(V)}(T)$ et $v_0 p^{-1} = v_0 t p^{-1}$ pour tout $t \in T$. Comme $v_0 = v_0 t$ et en prenant $t \neq 1_{\mathfrak{p}}$, on peut conclure que $v_0 = 0$. Ainsi les éléments de la normalisateur $f_{1,v_0,p}$ est $f_{1,0,p}$, avec $p \in N_{\mathrm{GO}(V)}(T)$.*

On sait que tout sous-groupe diagonalisable A de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{p})$ est contenu dans le normalisateur d'un tore maximal de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{p})$: c'est un cas particulier du théorème dit de Borel-Serre pour les groupes de Lie, qui a une version pour les groupes algébriques ([58, Theorem 3.15, p. 92]). Par la conjugaison des tores maximaux, on suppose que $A \subset N(\mathcal{T})$. Ainsi, si nous avons un

groupe gradué $\Gamma\colon \mathfrak{p} = \oplus_{g\in G}\mathfrak{p}_g$, sur $\mathfrak{p}$, on peut considérer l'action de jauge correspondante $\rho\colon \chi(G) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{p})$ telle que $\rho(\phi)x_g = \phi(g)x_g$ pour tout $x_g \in \mathfrak{p}_g$ et pour tout $\phi \in \chi(G) := \hom(G, K^\times)$. L'image de ρ est un sous-groupe diagonalisable de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{p})$, ainsi sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\mathrm{Im}(\rho) \subset N(\mathcal{T}) \subset \mathrm{GO}(V)$.

{tintorro}

Proposition 12. *Soit $\rho\colon \chi(G) \to \mathrm{GO}(V)$ un homomorphisme de groupe algébrique avec G un groupe abélien de type fini. Alors, il existe une base $\{v_i\}_{i\in\mathcal{A}} \cup \{e_j\}_{j\in\mathcal{B}} \cup \{f_j\}_{j\in\mathcal{B}}$ (avec $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de dimension finie) de V simultanément diagonalisable $\rho(g)$ et tel que*

{sabin}
$$V = \perp_{i\in\mathcal{A}} \langle v_i\rangle \perp \big(\perp_{j\in\mathcal{B}} \langle e_j, f_j\rangle\big), \tag{5.2}$$

où $Q(v_i) = 1$ pour tout i et chaque $\langle e_j, f_j\rangle$ est un plan hyperbolique.

Démonstration 13. *On raisonne par récurrence sur la dimension de E. Pour $n = 0$ ou 1, c'est évident. Soit $n \geq 2$, on suppose que tout forme quadratique V de dimension inférieure strictement à n admet cette décomposition. On prend (V, Q) un espace quadratique non dégéré de dimension n.*

(i) *Il existe un vecteur anisotrope $v \in V$ qui est ρ-invariant (signifie que $\rho(\phi)$-invariant pour tout $\phi \in \chi(G)$). Alors, on a $V = Kv \perp (Kv)^\perp$ et nous pouvons appliquer l'hypothèse à $(Kv)^\perp$, en prenant la restriction Q sur $(Kv)^\perp$.*

(ii) *Tout ρ-invariant $v \in V$ est isotrope et fixe une base $\mathcal{B}$ diagonalisable de ρ. On prend $e_1 \in B$ (nécessairement isotrope). Alors il existe un certain $f_1 \in B$ tel que $Q(e_1, f_1) \neq 0$. Nécessairement $Q(f_1) = 0$ et nous pouvons supposer $Q(e_1, f_1) = 1$. Ainsi, on a $\langle e_1, f_1\rangle$ est un plan hyperbolique et $V = \langle e_1, f_1\rangle \perp \langle e_1, f_1\rangle^\perp$. Maintenant, nous appliquons l'hypothèse d'induction à $\langle e_1, f_1\rangle^\perp$ muni de la restriction de Q.*

{co}

Corollaire 10. *D'après les conditions de la proposition précédente, dans le cas où $\dim(V) = 4$, nous avons trois possibilités sur la décompositions possibles de V :*

1. *V est la somme directe orthogonale de deux plans hyperboiques $V = \langle e_1, f_1\rangle \perp \langle e_2, f_2\rangle$ et $\{e_1, f_1, e_2, f_2\}$ diagonalise ρ.*
2. *V est la somme orthogonale de deux droites anisotropes et un plan hyperbolique $V = Kv_1 \perp Kv_2 \perp \langle e_1, f_1\rangle$ et $\{v_1, v_2, e_1, f_1\}$ diagonalise ρ.*
3. *V est la somme orthogonale de quatre droites anisotropes $V = \perp_{i=1}^4 Kv_i$ et $\{v_i\}_{i=1}^4$ diagonalise ρ.*

Nous avons vu dans les paragraphes précédents que que toute graduation sur $\mathfrak{p}$ donne une décomposition (5.2) sur V. D'autres graduations sur $\mathfrak{p}$ peuvent fournir la même décomposition. Nous traiterons ce problème plutard. Supposons maintenant que nous avons une décomposition orthogonale (5.2) de V. Alors, nous considérons le sous-groupe Q de $\mathrm{O}(V)$ dont les éléments sont diagonalisables dans la base $\{v_i\} \cup \{e_i\} \cup \{f_j\}$ de V. Ensuite, définissons $\hat{Q} := \{f_{1,0,r}\colon r \in Q\}$. La diagonalisation simultanée de $\mathfrak{p}$ par rapport à $\hat{Q}$ est une graduation de $\mathfrak{p}$ qui est associée à la décomposition sur V. On observe que la meilleure graduation fine est donnée par la décomposition (5.2). Soit G un groupe abélien fini qui est la graduation de l'universel groupe (voir [29, Subsection 2.2, p. 89] et [37, 1.2, p. 15]) de la graduation $\Gamma\colon \mathfrak{p} = \oplus_{g\in G}\mathfrak{p}_g$. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que l'homorphisme associé $\rho\colon \chi(G) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{p})$ a son image dans $\mathrm{GO}(V)$, nous considérons $\rho\colon \chi(G) \to \mathrm{GO}(V)$. D'après la proposition 12 on induit une décompostion de V comme somme orthogonale de plans hyperboliques et des droites anisotropes comme (5.2). Ensuite, nous considérons qu'il existe une correspondance entre l'ensemble des classes d'équivalences des graduations fines sur $\mathfrak{p}$ et les couples de nombres $(|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}|)$.

Ainsi, supposons que $\Gamma\colon \mathfrak{p} = \oplus_{g\in G} X_g$ et $\Gamma'\colon \mathfrak{p} = \oplus_{g\in G} Y_g$ sont des graduations fines équivalentes sur $\mathfrak{p}$ et G le groupe universel gradué dans les deux cas (voir [37, Proposition 1.18, p. 15]). Alors, il y a une automorphisme $q\colon \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$ tel que $q(X_g) = Y_g$ pour tout $g \in G$. Si $\rho, \rho'\colon \chi(G) \to \mathrm{GO}(V)$ sont les homomorphismes associés correspondants, il n'est pas difficule de vérifier que q est de la forme $q = f_{1,0,r}$ pour un certain $r \in \mathrm{GO}(V)$. Ainsi, $r\rho(\phi)r^{-1} = \rho'(\phi)$ pour tout ϕ. L'élément r peut être pris dans $O(V)$ et les nombres : $|\mathcal{A}|$ des anisotropes $\langle v_i\rangle$ et $|\mathcal{B}|$ des plans hyperboliques dans la décomposition orthogonale de V par rapport à ρ, concorde avec les nombres correspondants $|\mathcal{A}'|$ et $|\mathcal{B}'|$ dans la décomposition orthogonale de V par rapport à ρ'. Réciproquement, supposons que nous ayons deux décompositions

$$V = \underset{i\in\mathcal{A}}{\perp}\langle v_i\rangle \perp \big(\underset{j\in\mathcal{B}}{\perp}\langle e_j, f_j\rangle\big) = \underset{i\in\mathcal{A}'}{\perp}\langle v'_i\rangle \perp \big(\underset{j\in\mathcal{B}'}{\perp}\langle e'_j, f'_j\rangle\big),$$

avec v_i et v'_j anisotropes et $\langle e_i, f_j\rangle$ and $\langle e'_j, f'_j\rangle$ des plans hyperboliques. Alors, si $|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}'|$ et $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$, il existe un élément $r \in \mathrm{O}(V)$ tel que $r(v_i) = v'_i$ pour tout $i \in \mathcal{A}$ et $r(e_j) = e'_j$, $r(f_j) = f'_j$ pour tout $j \in \mathcal{B}$. Alors, on a $f := f_{1,0,r} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{p})$ et cet automorphisme fournit une équivalence entre les graduations induites par les deux décompositions de V.

Théorème 21. *Soit K un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Il y a une correspondance bijective entre les classes d'équivalnece des graduations fines sur $\mathfrak{p}$ et le couple $(|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}|)$, oú $V = \perp_{i\in\mathcal{A}}\langle v_i\rangle \perp \big(\perp_{j\in\mathcal{B}}\langle e_j, f_j\rangle\big)$ avec v_i anisotrope et $\langle e_j, f_j\rangle$ un plan hyperbolique pour tout j. Lorsque $\dim(V) = 4$, on fixe $\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} 0 & K^4 \\ 0 & \mathfrak{o}_{4(K)} \end{pmatrix}$, oú $\mathfrak{o}_4(K)$ est l'algèbre de Lie que groupe pseudo-orthogonal d'ordre 4 dont les coefficients matriciels sont dans K. Si on note par $v_1, \ldots, v_4$ la base canonique de V et par $a_{ij} := e_{ij} - e_{ji}$, $(i, j \in \{1, \cdots, 4\}, i < j)$, les classes d'équivalence de la graduation fine de $\mathfrak{p}$ est représentées par :*

1. *La graduation fine qui est $\mathbb{Z}^3$-gradué de type $(8, 1)$ donné par*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p}_{0,0,0} &= \langle a_{12}, a_{34}\rangle, \\
\mathfrak{p}_{1,0,0} &= \langle v_1 + \mathbb{i}v_2\rangle, & \mathfrak{p}_{-1,0,0} &= \langle v_1 - \mathbb{i}v_2\rangle, \\
\mathfrak{p}_{1,0,-1} &= \langle v_3 - \mathbb{i}v_4\rangle, & \mathfrak{p}_{-1,0,1} &= \langle v_3 + \mathbb{i}v_4\rangle, \\
\mathfrak{p}_{0,0,1} &= \langle a_{13} - a_{24} + \mathbb{i}a_{14} + \mathbb{i}a_{23}\rangle, & \mathfrak{p}_{0,0,-1} &= \langle a_{13} - a_{24} - \mathbb{i}a_{14} - \mathbb{i}a_{23}\rangle, \\
\mathfrak{p}_{-2,0,1} &= \langle a_{13} + a_{24} + \mathbb{i}a_{14} - \mathbb{i}a_{23}\rangle, & \mathfrak{p}_{2,0,-1} &= \langle a_{13} + a_{24} - \mathbb{i}a_{14} + \mathbb{i}a_{23}\rangle.
\end{aligned} \tag{5.3}$$ {finetoral}

2. *Une graduation fine de type (10) sur le groupe $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}_2$.*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p}_{21\bar{0}} &= \langle v_1 + \mathbb{i}v_2\rangle, & \mathfrak{p}_{01\bar{0}} &= \langle v_1 - \mathbb{i}v_2\rangle, & \mathfrak{p}_{11\bar{0}} &= \langle v_3\rangle, & \mathfrak{p}_{11\bar{1}} &= \langle v_4\rangle, \\
\mathfrak{p}_{-10\bar{0}} &= \langle a_{13} - \mathbb{i}a_{23}\rangle, & \mathfrak{p}_{-10\bar{1}} &= \langle a_{14} - \mathbb{i}a_{24}\rangle, & \mathfrak{p}_{10\bar{0}} &= \langle a_{13} + \mathbb{i}a_{23}\rangle, & & \\
\mathfrak{p}_{10\bar{1}} &= \langle a_{14} + \mathbb{i}a_{24}\rangle, & \mathfrak{p}_{00\bar{0}} &= \langle a_{12}\rangle, & \mathfrak{p}_{00\bar{1}} &= \langle a_{34}\rangle. & &
\end{aligned} \tag{5.4}$$ {sg}

3. *C'est $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^3$-gradué de type (10) donné par :*

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{p}_{0\bar{1}\bar{0}\bar{0}} = \langle a_{12}\rangle, \quad \mathfrak{p}_{0\bar{0}1\bar{0}} = \langle a_{13}\rangle, \quad \mathfrak{p}_{0\bar{0}\bar{0}1} = \langle a_{14}\rangle, \quad \mathfrak{p}_{0\bar{1}1\bar{0}} = \langle a_{23}\rangle, \\
&\mathfrak{p}_{0\bar{1}\bar{0}1} = \langle a_{24}\rangle, \quad \mathfrak{p}_{0\bar{0}1\bar{1}} = \langle a_{34}\rangle, \quad \mathfrak{p}_{1\bar{0}\bar{0}\bar{0}} = \langle v_1\rangle, \quad \mathfrak{p}_{1\bar{1}\bar{0}\bar{0}} = \langle v_2\rangle, \\
&\mathfrak{p}_{1\bar{0}1\bar{0}} = \langle v_3\rangle, \quad \mathfrak{p}_{1\bar{0}\bar{0}1} = \langle v_4\rangle.
\end{aligned} \tag{5.5}$$ {weird}

Démonstration 14. *La première assertion du théorème a été démontré dans les paragraphes précédents. Pour l'assertion dans le cas oú $\dim(V) = 4$, il suffit d'appliquer le corollaire 10 et de faire la diagonalisation simultanée correspondante donnant les résultats dans la base $\{v_i\}_1^4 \cup \{a_{ij}\}_{i<j}$.*

Chapitre Six

GRADUATION DE GROUPOIDE

La principale motivation de ce chapitre était une graduation fine sur l'algébre de Lorentz $\mathfrak{L}_{\mathbb{C}}$ qui n' est pas un groupe gradué. Cela nous a conduit à une graduation de groupoïde qui est décrite dans ce chapitre. Cependant, d'apres certaines hypothèses que l' on précisera toute graduation de groupoïde est en fait un groupe gradué. Dans ce chapitre nous introduisons la notion de graduation de groupoïde, nous donnons quelques exemples non triviaux et prouvons que la graduation de groupoïde sur des algèbres commutatives ou non commutatives simples sont nécessairements des groupes gradués. Nous profitons également de la structure des groupoïdes pour prouver quelques résultats sur les graduations de groupoides. Nous étudions également des graduations d'ensembles sur des algèbres arbitraires ; en caractérisant leur semi-simplicitè homogéne et leur simplicité homogène à l'aide d'une propriété satisfaisant aux supports des graduations et nous relions également les graduations : des graduations d'ensembles avec des graduations sur $M_n(\mathbb{C})$, puis la graduation orthogonale et nous montrons que toutes celles qui sont fines sont nécessairement des graduations de groupes.

6.1 Introduction et définitions préliminaires

Dans la littérature, les groupes gradués ont été intensivement étudié ces dernières années, motivés en patie par leur application en physique, en geometrie et topologie oú ils apparaissent comme le cadre naturel d'un model algébrique [10, 11, 20, 30, 29, 31, 33, 42, 43, 49, 56]. En particulier, dans le domaine de la physique mathématique, ils jouent un rôle important dans la théorie des cordes, les fonctions de Walsh [22, 24, 39, 50, 53, 67]. Certains avantages de doter une graduation d'algèbre peuvent également être trouvés dans [6, 46, 47]. Enfin, nous notons qu'une revue complète, en ce qui conserne la théorie des algèbres graduées, peut être trouvée dans la monographie récente [37].

Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, on notera les classes d'objets de $\mathcal{C}$ par $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ et la classe de morphismes de $\mathcal{C}$ par $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$. Un groupoïde G est une petite catégorie dans laquelle chaque morphisme a son inverse. Une autre définition peut être trouvée par exemple dans [13], est donnée en terme de multiplication partiellement définie, sur un ensemble G non vide avec une certaine condition d'associativitè et aussi une propriété d' inversion appropriée. Lorsque nous travaillons avec des groupoïdes, la multiplication est comprise comme une composition d'homomorphisme, (possible si $f \in \hom(A, B)$ et $g \in \hom(B, C)$, le produit fg dans le groupoïde est defini par la composition $g \circ f$, c'est à dire $fg := g \circ f$.

Nous notons que tout au long du chapitre, le produit de toutes algèbres considérées sera

désigné par juxtaposion. Si nous prenons un groupoïde G, alors une graduation de groupoide sur une algèbre A par G est une décomposition de A comme somme directe des sous-espaces linéaires

$$\Lambda\colon A = \oplus_{f\in G} A_f$$

tels que, si $A_f A_g \neq 0$ alors fg c'est à dire $f \in \hom(A, B)$, $g \in \hom(B, C)$ pour tous objets, et $A_f A_g \subset A_{fg}$. Le support de la graduation est l' ensemble $\Sigma := \{f \in G : A_f \neq 0\}$. Puisque, tout groupe est un groupoide, tout groupe gradué est une graduation de groupoide.

Si, nous avons deux graduations de groupoides $\Lambda_1\colon A = \oplus_{g\in G} A_g$ et $\Lambda_2\colon A = \oplus_{h\in H} B_h$ sur une K-algèbre A, on dira que Λ_1 est un *raffinement* de Λ_2 lorsque chaque composant homogéne A_g est contenu dans un composant homogène B_h. Nous dirons aussi que Λ_2 est une graduation *grossière* de Λ_1. La graduation Λ sera appelée *fine* si elle n' admet pas de raffinement propre. Enfin,on dit que Λ_1 et Λ_2 sont *équivalents*, s'il existe une bijection entre leurs supports $\sigma : \Sigma_1 \to \Sigma_2$, et un isomorphisme d'algèbres $\phi : A \to A$ tel que $\phi(A_g) = B_{\sigma(g)}$ pour tout $h \in \Sigma_1$.

Dans ce chapitre, nous aurons également l'occasion de traiter le concepte le plus général de la graduation sur une algèbre, qui est celui de la graduation d' ensemble. Si A est une algèbre arbitraire et I un ensemble arbitraire non vide. On dit que A est une *graduation d'ensemble* sur I, si

{yes2}
$$A = \oplus_{i\in I} A_i \tag{6.1}$$

oú tout A_i est un sous-espace linéaire satisfaisant a pour tout $j \in I$ soit $A_i A_j = 0$ ou $0 \neq A_i A_j \subset A_k$ pour un certain $k \in I$. Comme d'habitude, le *support* de la graduation est un ensemble $\Sigma := \{i \in I : A_i \neq 0\}$, et le concepte de *raffinement*, de graduation *grossière* , *graduation fine* et *d'équivalence entre graduations* sont définis pour les ensembles gradués de la même manière que pour les graduations de groupoïde.

Le chapitre est organisé comme suit. La section 2 est consacrée à présenter plusieurs exemples de graduations de groupoïdes sur des algèbres quelconques, qui ne sont pas des graduations de groupoïdes. Dans la section 3, nous étudions les graduations de groupoïdes sur des algèbres commutatives, non commutatives en particulier sur les algèbres de Lie et de Jordan. Nous rappelons que peut être la conjecture la plus célèbre dans le cadre des algèbres graduées que toute graduation d'ensemble sur une algèbre de Lie simple, compléxe et de dimension finie équivaut a un groupe abélien de la même algèbre de Lie [37]. Nous donnons dans la section 3, une démonstration partielle de cette conjecture, en montrant que toute graduation de groupoïde sur une algèbre simple, commutative ou non commutative est nécessairement un groupe gradué. La section 4 est considérée à l'etude de groupoïde, des graduations sur des algèbres arbitraires A. Si A est un espace linéaire doté d'une application bilinéaire appelée le produit de A, par contre l'identitè (associative, alternative, Lie, Jordan, etc.) pour le produit n'est pas supposée. Nous, nous concentrons sur la structure interne de ces graduations en prouvant qu'elles admettent des graduations grossières qui sont aussi des graduations de groupe mais avec tous leurs idéaux homogénes de A. La section 5, est consacrée a l'étude d'un type particulier de graduation d'ensemble sur des algèbres matricielles compléxes et les graduations orthogonales. Ce sont des graduations d'ensembles qui sont compatible avec l' involution standard et le produit interne de l'algèbre matricielle

6.2 Graduation de groupoïde de groupe non gradué

Afin de donner quelques exemples de graduations de groupoïdes qui ne sont pas des groupes gradués, nous devons nous rappeler d'une manière agréable de présenter une catégorie

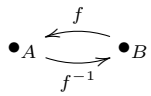
à l'aide d'un graphe. Rappelons que la defintion d'un graphe. Un graphe est quadruplet $E = (E^0, E^1, s, r)$ oú E^0 est l'ensemble des sommets, E^1 est l'ensemble des arêtes et $r, s\colon E^0 \to E^1$ tels que pour $f \in E^1$, on a $s(f)$ est l' origine f et $r(f)$ l'extrémité f. Une notion intéressante d'un graphe E est celle d'un chemin non triviaux, c'est une suite finie $\lambda := f_1 \cdots f_n$ d'arêtes $f_i \in E^1$ telles que $r(f_i) = s(f_{i+1})$. Les sommets sont généralements comme des chemins triviaux. Nous disons que le chemin λ a pour origine f_1 et d'extrémité f_n. L'origine et l'extrémité d' un chemin trivial ($u \in E^0$) est le sommet u lui même. De plus, la multiplication de λ, μ est possible si $r(\lambda) = s(\mu)$, dans ce cas, il y a sens de chemin $\lambda\mu$. Si $u \in E^0$ est un chemin trivial et λ un chemin avec $s(\lambda) = u$, la multiplication de ces chemins est definie par $u\lambda = \lambda$. De maniere similaire si $r(\lambda) = v$ alors $\lambda v = \lambda$. Cette multiplication est associative lorsque les compositions ont un sens.

Quand on a un graphe E, on peut définir une petite catégorie $\mathcal{C}$ dont les objets sont les sommets de E, c'est à dire $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}) = E^0$ et les morphismes de $\mathcal{C}$ sont les chemins de E. Pour deux objets $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, nous definissons $\hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ comme un ensembles de tous les chemins dont l'origine est A et l'extrémité est B. En particulier, il existe $1_A \in \hom(A, A)$, en fait 1_A est un chemin trivial A. La multiplication

$$\hom(A, B) \times \hom(B, C) \to \hom(A, C)$$

dont nous avons besoin pour avoir une catégorie, est donné par juxtaposition de chemins.

Par exemple, on considere le graphe suivant :



Alors la petite catégorie G associée à deux objets A et B et $\hom(A, B) = \{f\}$, $\hom(B, A) = \{f^{-1}\}$, $\hom(A, A) = \{1_A\}$, $\hom(B, B) = \{1_B\}$. Maintenant G est un groupoide et on peut définir un G-gradué sur $M := M_2(K)$, l'algèbre associative de toutes les matrices d'ordre 2 à coefficient dans K, définit par

$$M = M_{1_A} \oplus M_{1_B} \oplus M_f \oplus M_{f^{-1}}$$

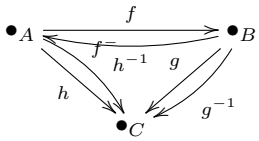
ou $M_{1_A} := Ke_{11}$, $M_{1_B} := Ke_{22}$, $M_f := Ke_{12}$, et $M_{f^{-1}} := Ke_{21}$. Ici, nous notons comme d'habitude e_{ij} la matrice élémentaire de A dont l'unique coefficient non nul est 1 (l'intersection de la $i$éme ligne avec $j$éme colonne). Ce n'est pas un groupe gradué puisque dans un groupe gradué l'unité de l'algèbre (si elle existe) est un élément homogène. On observe également que cette graduation est fine.

Plus généralement, nous pouvons utiliser le groupoïde ci-dessus pour une graduation toute algèbre matricielle $U := M_A(K)$ (ou A est un ensemble fini). Si, nous écrivons $A = P \sqcup Q$ (réunion disjointe) alors

$$U = U_{1_A} \oplus U_{1_B} \oplus U_f \oplus U_{f^{-1}}$$

ou $U_{1_A} := M_P(K)$, $U_{1_B} := M_Q(K)$, $U_f := M_{P,Q}(K)$, $U_{f^{-1}} := M_{Q,P}(K)$.

Pour le groupoïde

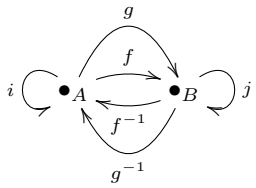


On peut définir une graduation de groupoide sur $V = M_3(K)$ ou, (en identifiant chaque objet X avec l' identité 1_X et en observant que $hf = g^{-1}$, $fg = h^{-1}$ et $gh = f^{-1}$), nous avons

$$V = V_A \oplus V_B \oplus V_C \oplus V_f \oplus V_g \oplus V_h \oplus V_{f^{-1}} \oplus V_{g^{-1}} \oplus V_{h^{-1}}$$
$$V_A = Ke_{11}, V_B = Ke_{22}, V_C = Ke_{33}, V_f = Ke_{12}, V_g = Ke_{23}, V_h = Ke_{31},$$
$$V_{f^{-1}} = Ke_{21}, V_{g^{-1}} = Ke_{32}, V_{h^{-1}} = Ke_{13}.$$

Encore une fois de plus lq graduation fine n'est pas un groupe gradué. Dans ce cas, nous pouvons généraliser ces idéaux de manière à accommoder la décomposition de toute matrice $M_n(K)$.

Considérons maintenant le groupoïde G



On a $\hom_G(A, A) = \{1_A, i\}$ et $\hom_G(B, B) = \{1_B, j\}$ dont on déduit $i^2 = 1_A$ et $j^2 = 1_B$. Puisque, $\hom_G(A, B) = \{f, g\}$, on déduit $if = g$ et $fj = g$. En conséquence, $f = ig = gj$. Maintenant, en identifiant chaque objet X de G avec 1_X, dans $U = M_2(\mathbb{C})$ (R-algèbre), on peut définir un G-gradué

$$\begin{array}{cccccc} U_A = \mathbb{R}e_{11}, & U_i = \mathbb{i}\mathbb{R}e_{11}, & U_B = & \mathbb{R}e_{22}, & U_j = & \mathbb{i}\mathbb{R}e_{22} \\ U_f = \mathbb{R}e_{12}, & U_g = \mathbb{i}\mathbb{R}e_{12}, & U_{f^{-1}} = & \mathbb{R}e_{21}, & U_{g^{-1}} = & \mathbb{i}\mathbb{R}e_{21}. \end{array}$$

Nous pouvons donner d'autres exemples. Considérons le R-algèbre V définie par $V = \mathbb{C}\otimes\mathbb{C}$. C'est une algèbre sur $\mathbb{R}$ de dimension 4 (associative et commutative) qui est isomorphe à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ avec des opérations par composant. Considérons aussi le groupoïde G donné par le graphe :

$$AB$$

On a $\mathrm{Obj}(G) = \{A, B\}$ et $\hom(A, B) = \hom(B, A) = \emptyset$, $\hom(A, A) = \{1_A\}$, $\hom(B, B) = \{1_B\}$. Alors, $V = V_A \oplus V_B$ oú $V_A = \mathbb{R}(\mathbb{C} \times 0)$ et $V_B = \mathbb{R}(0 \times \mathbb{C})$. C'est une graduation de groupoïde G et encore une fois, il n'est pas un groupe gradué puisque $(1, 1)$ n'est pas homogène pour la graduation. C'est une graduation fine.

Considérons maintenant *l'algèbre de Lorentz* sur les réels $\mathfrak{L} := \mathfrak{o}_{\mathbb{R}}(1, 3)$. Les éléments de cette algèbre sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{12} & 0 & x_{23} & x_{24} \\ x_{13} & -x_{23} & 0 & x_{34} \\ x_{14} & -x_{24} & -x_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

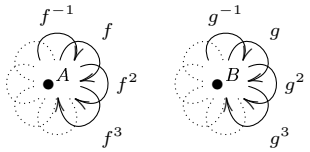
oú $x_{ij} \in \mathbb{R}$. On sait que la dimension de cette algèbre est 6 et elle est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ (comme une algèbre sur les réels). L'algèbre de Lorentz sur les complexes est $\mathfrak{L}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{L} \otimes_R \mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \otimes_R \mathbb{C} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ (oú $\otimes = \otimes_{\mathbb{R}}$). Ainsi,on a $\mathfrak{L}_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \otimes V$ oú $V = \mathbb{C}\otimes\mathbb{C}$ a été défini dans les paragraphes précédents. Ensuite, nous avons une graduation de groupoïde $\mathfrak{L}_{\mathbb{C}} = (\mathfrak{L}_{\mathbb{C}})_A \oplus (\mathfrak{L}_{\mathbb{C}})_B$ oú $(\mathfrak{L}_{\mathbb{C}})_A = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \otimes V_A$ et $(\mathfrak{L}_{\mathbb{C}})_B = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \otimes V_B$. Pour plus de précision, on peut considérer la base canonique de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ donnée par $\{h_\alpha, v_\alpha, v_{-\alpha}\}$ oú $h_\alpha v_\alpha =$

$2v_\alpha$, $h_\alpha v_{-\alpha} = -2v_{-\alpha}$ et $v_\alpha v_{-\alpha} = h_\alpha$. Donc $\mathfrak{L}_\mathbb{C} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \cong \langle h_\alpha, v_\alpha, v_{-\alpha}, h_\beta, v_\beta, v_{-\beta}\rangle$, muni de la table de multiplication

	h_α	v_α	$v_{-\alpha}$	h_β	v_β	$v_{-\beta}$
h_α	0	$2v_\alpha$	$-2v_{-\alpha}$	0	0	0
v_α		0	h_α	0	0	0
$v_{-\alpha}$			0	0	0	0
h_β				0	$2v_\beta$	$-2v_{-\beta}$
v_β					0	h_β
$v_{-\beta}$						0.

Si nous regardons $\mathfrak{L}_\mathbb{C}$ comme somme directe $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, alors la graduation de groupoïde est $(\mathfrak{L}_\mathbb{C})_A = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \times 0 = \langle h_\alpha, v_\alpha, v_{-\alpha}\rangle$ et $(\mathfrak{L}_\mathbb{C})_B = 0 \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \langle h_\beta, v_\beta, v_{-\beta}\rangle$. Cette graduation de groupoïde n'est pas un groupe gradué, si c'était le cas, puisque $(\mathfrak{L}_\mathbb{C})_A(\mathfrak{L}_\mathbb{C})_A = (\mathfrak{L}_\mathbb{C})_A$, nous devrions avoir $A = 1$ l'unité du groupe. De manière similaire, on a $B = 1$ l'unité du groupe. Par conséquent, les deux composants homogénes devraient être ensemble dans un seul composant en accord avec l'algèbre.

Considérons le groupoïde :



On a $\hom(A,B) = \hom(B,A) = \emptyset$, $\hom(A,A) = \{f^n : n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$, $\hom(B,B) = \{g^n : n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$. Alors,

$$\mathfrak{L}_\mathbb{C} = (\mathfrak{L}_\mathbb{C})_A \oplus (\mathfrak{L}_\mathbb{C})_f \oplus (\mathfrak{L}_\mathbb{C})_{f^{-1}} \oplus (\mathfrak{L}_\mathbb{C})_{1_B} \oplus (\mathfrak{L}_\mathbb{C})_g \oplus (\mathfrak{L}_\mathbb{C})_{g^{-1}}$$

où $(\mathfrak{L}_\mathbb{C})_A := Kh_\alpha$, $(\mathfrak{L}_\mathbb{C})_f = Kv_\alpha$, $(\mathfrak{L}_\mathbb{C})_{f^{-1}} = Kv_{-\alpha}$, $(\mathfrak{L}_\mathbb{C})_B := Kh_\beta$, $(\mathfrak{L}_\mathbb{C})_g = Kv_\beta$, $(\mathfrak{L}_\mathbb{C})_{g^{-1}} = Kv_{-\beta}$. C'est une graduation fine qui n'est pas un groupe gradué

6.3 Graduation de groupoïde sur une algèbre (non) commuative

Dans la section 2, nous avons donné des exemples de graduations de groupoïdes qui ne sont pas des groupes gradués, sur une algèbre simple. Dans cette section, nous montrons qu'une graduation de groupoïde sur une algèbre simple commutative ou non commutative est toujours un groupe gradué. En particulier, c'est le cas des algèbres de Jordan, des algèbres de Lie. Enfin, nous rappelons à partir de la section 2, que ce résultat donne une réponse positive partielle à une conjecture classique dans la théorie des graduations sur les algèbres de Lie.

Fixons un groupoïde G et L une algèbre commutative ou non commutative avec son centre vide et muni d'une graduation telle que $L = \oplus_{g\in G} L_g$. Considérons deux objets quelconques $A, B \in \mathrm{Obj}(G)$ et supposons que pour tout $g \in \hom(A,B)$, on a $L_g \neq 0$. Puisque le centre $Z(L)$ est vide, on a $L_g L \neq 0$, c'est à dire qu'il existe L_f tel que $L_g L_f \neq 0$. Par conséquent, gf est défini puisque $f \in \hom(B,C)$ pour un certain objet C. Comme $L_f L_g \neq 0$, nous avons fg est bien défini, ce qui implique que $C = A$. En outre, on a $fg = gf$ implique que $A = B$, ce qui est une contraduction.

{haribo}

Proposition 13. *Si L est une algèbre graduée par G commutative ou no commutative de centre $Z(L)$ vide, alors pour deux objets $A, B \in Obj(G)$ et $f \in \hom(A,B)$, nous avons $L_f = 0$. De plus, la décomposition*

$$L = \bigoplus_{A \in Obj(G)} L^{(A)}$$

oú chaque $L^{(A)} := \oplus_{f \in \hom(A,A)} L_f$ est un idéal de L et pour objets quelconques A et B, on a $L^{(A)}L^{(B)} = 0$.

Démonstration. L'assertion $L_f = 0$ a été prouvé ci-dessus. Comme L est la somme directe $L^{(A)}$ pour tout $A \in \mathrm{Obj}(G)$. Si $A \neq B$ et en prenant $f \in \hom(A,A)$ et $g \in \hom(B,B)$, alors fg n'est pas défini et $L_f L_g = 0$ ce qui implique que $L^{(A)}L^{(B)} = 0$. □

Supposons maintenant que nous avons une graduation par un groupoïde G qui est généré comme un groupoïde par le support de la graduation, c'est à dire que le plus petit sous-groupoïde de G contenant le support est G lui-même.

{mariajose}

Corollaire 11. *Si L est une algèbre commutative ou non commutative simple graduée par le groupoïde G, alors G est un groupe*

Démonstration. Comme L est simple, alors $Z(L) = 0$ et d'après la proposition précédente L est la somme directe des $L^{(A)}$. Puisque L est simple, il existe un unique objet A tel que $L^{(A)} = L$ et pour tout autre objet $B \neq A$, on a $L^{(B)} = 0$. Donc le support de la graduation est $\{A\}$ et le sous- groupoïde de G généré par $\{A\}$ est le groupe $\hom(A,A)$ qui coïcide avec G. □

6.4 Groupoïde et graduation d'ensemble sur des algèbres arbitraires

Dans cette section, nous allons considérer les algèbres A prises de manière arbitraires. Autrement dit, (voir Section 1), A est juste un espace linéaire muni d'une application bilinéaire appelée produit de A. Notre objectif est d'établir plusieurs théorèmes sur la structure des groupoïdes et des ensembles gradués sur A. Nous caractérisons également la semi-simplicité homogéne et la simplicité homogéne d'un ensemble gradué sur A en utilisant certaines propriétés sur le support de la graduation.

Si $(G_i)_{i \in I}$ est une collection de groupoïdes (oú I est un ensemble non vide), nous pouvons construire un nouveau groupoïde $G = \sqcup_i G_i$ appelé *réunion disjointe* de groupoïdes G_i dont l'espace objet est $\mathrm{Obj}(G) := \sqcup_i \mathrm{Obj}(G_i)$ (nous pouvons supposer sans perte de généralié que les classes d'objets G_i sont disjointes). Nous définissons également la classe des morphisme par $\mathrm{Mor}(G) := \sqcup_i \mathrm{Mor}(G_i)$ et pour $X \in \mathrm{Obj}(G_i)$, $Y \in \mathrm{Obj}(G_j)$, nous avons $\hom_G(X,Y) = \emptyset$ si $i \neq j$ et $\hom_G(X,Y) = \hom_{G_i}(X,Y)$ si $i = j$.

Pour un groupoïde G, nous pouvons définir une relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathrm{Obj}(G)$ définie par $X \sim Y$ si et seulement si $\hom_G(X,Y) \neq \emptyset$. L'ensemble des classes d'équivalence dans $\mathrm{Obj}(G)$ est dit être *l'ensemble des composants* de G. Nous dirons que G est *connexe* dans le cas oú il n'y a qu'une seule classe d'équivalence. Si nous considérons que tous les sous-ensembles composés des objets du groupoïde G qui sont isomorphes à un un objet fixe X, nous obtenons un nouveau groupoïde G_X dont l'ensemble des objets $\bar{X}$ (l'isomorphisme

de X dans G), et pour tous $A, B \in \mathrm{Obj}(G_X)$, nous avons $\hom_{G_X}(A,B) := \hom_G(A,B)$. Le nouveau groupoïde G_X est connexe. De plus G est la réunion disjointe des G_X pour tout X.

Rappelons que d'après la section 1, si A est une K-algèbre avec deux graduations de groupoïdes $\Lambda_1 \colon A = \oplus_{g\in G} V_g$ et $\Lambda_2 \colon A = \oplus_{h\in H} W_h$, nosu disons que Λ_2 est une graduation grossière de Λ_1 lorsque chaque composant homogéne V_g est contenu dans un composant homogéne de W_h. Un façon standard de produire des graduations grossières est la suivante : supposons que G_1 et G_2 sont des groupoïdes et $\P \colon G_1 \to G_2$ un foncteur contravariant dont l'application morphisme est surjective, c'est à dire $\P \colon \mathrm{Mor}(G_1) \to \mathrm{Mor}(G_2)$ est surjective. D'après, cette hypothèse, si $\Lambda_1 \colon A = \oplus_{g\in G_1} A_g$ est G_1-gradué, nous pouvons définir un G_2-gradué sur A, en définissant les composants homogénes $B_g := \oplus_{\P(h)=g} A_h$. Ainsi, on a G_2-gradué $\Lambda_2 \colon A = \oplus_{g\in G_2} B_g$ est une graduation grossière de Λ_1.

Nous supposerons dans cette section que toutes graduations considérées, sa graduation de groupoïde correspondante est générée par le support de la graduation. Supposons une catégorie $\mathcal{C}$ et définissons une nouvelle catégorie $\overline{\mathcal{C}}$ dont les objets sont les classes d'isomorphismes $\mathcal{C}$ (nous désignerons par $\bar{X}$ les classes d'isomorphismes X de $\mathcal{C}$). Alors pour tous $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, nous définissons

$$\hom_{\overline{\mathcal{C}}}(\bar{X},\bar{Y}) = \begin{cases} \{1_{\bar{X}}\} & \text{si } \bar{X} = \bar{Y} \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

En d'autres termes, si $X \cong Y$ in $\mathcal{C}$, alors $\hom_{\overline{\mathcal{C}}}(\bar{X},\bar{Y})$ est $\{1_{\bar{X}}\}$. Lorsque, $\mathcal{C}$ est une petite catégorie, si $\overline{\mathcal{C}}$ est un groupoïde.

{deuno}

Définition 19. Pour tout groupoïde G, nous définisons le groupoïde $\bar{G}$ comme dans le paragraphe précédent. Cela induit un foncteur $\P \colon G \to \bar{G}$ tel que $\P(X) = \bar{X}$ pour tout objet X de G et $\P(f) = 1_{\bar{X}}$ pour tout morphisme $f \colon X \to Y$ dans $\mathcal{C}$.

Par conséquent, pour toute algèbre G-graduée A telle que $A = \oplus_{g\in G} A_g$, nous avons une graduation grossière

$$A = \oplus_{\bar{X}\in\bar{G}} B_{\bar{X}}$$

où $B_{\bar{X}} = \oplus\{A_h \colon \P(h) = 1_{\bar{X}}\}$. Ensuite, nous prouvons que chaque composant $B_{\bar{X}}$ est un idéal de A. Si $\bar{X} \neq \bar{Y}$, alors pour tous f, g tels que $\P(f) = 1_{\bar{X}}$ et $\P(g) = 1_{\bar{Y}}$, nous avons $A_f A_g = 0$ car fg n'est pas défini. Nous pouvons conclure que $B_{\bar{X}} B_{\bar{Y}} = 0$ et que chaque $B_{\bar{X}}$ est sous-algèbre de A. Ce sont des idéaux de A. De plus, la décomposition $B_{\bar{X}} = \oplus\{A_h \colon \P(h) = 1_{\bar{X}}\}$ est une graduation de groupoïde de $B_{\bar{X}}$ oú la graduation de groupoïde est G_X (et c'est un groupoïde connexe). En résumant toutes ces informations, nous avons :

{yes1}

Proposition 14. *Si $\Lambda \colon A = \oplus_{g\in G} A_g$ est une graduation de groupoïde avec G généré par le support de la graduation, alors Λ est le raffinement d'une graduation de groupoïde $\Lambda' \colon A = \oplus_{g\in G'} B_g$ avec G' donné dans la définition 19 et chaque B_g est un idéal de A qui est un groupoïde gradué par un certain groupoïde connexe G_g. L'ensemble des composants homogéne de Λ est la réunion de l'ensemble des composants homogénes de B_g. En particulier, si A est une algèbre simple, alors le groupoïde G est connexe.*

Les résultats précédents, nous motivent à étudier les graduations sur un groupoïde connexe. Supposons maintenant que G est un groupoïde connexe et fixons un objet X de G. Nous devons fixer la collection d'isomorphismes $\eta_U \colon X \to U$ oú U l'ensemble des extrémités des objets de G. Nous définissons ensuite G_0 dont l'unique objet est X et tel que $\hom_{G_0}(X,X) := \hom_G(X,X)$. Nous considérons aussi le foncteur $\mathbb{F} \colon G \to G_0$ qui associe à tout objet U de G à X et pour tout morphisme $f \colon U \to V$ de G à $\eta_V^{-1} f \eta_U \colon X \to X$. Puisque, l'application de G à G_0 est surjective, pour toute algèbre A avec un G-gradué Λ admet une graduation grossière à un G_0-gradué, nous avons :

Corollaire 12. *Si $\Lambda: A = \oplus_{g\in G} A_g$ est une graduation non triviale de A et G est connexe, alors il existe un groupe G_0 et une graduation grossière $\Lambda_0: A = \oplus_{g\in G_0} B_g$ de Λ. La graduation Λ_0 est non triviale (dans le sens oú il n'y a pas de composant homogéne non nul unique). En particulier, toute graduation de groupoïde non triviale sur une algèbre simple est un raffinement de groupe non trivial gradué sur cette algèbre.*

Notre objectif est de donner une version de la proposition 14 dans le cadre d'ensemble gradué (arbitraire). par conséquent, considérons une algèbre graduée

$$\Lambda : A = \oplus_{i\in I} A_i$$

, I non vide, voir l'équation (6.1). Nous supposerons que le support de la graduation est l'ensemble I.

Etant donné $i, j \in I$, nous disons que i est *adjacent* à j soit $i = j$, ou il existe un certain $k \in I$ tel que $(A_\alpha A_k + A_k A_\alpha) \cap A_\beta \neq 0$ pour $(\alpha, \beta) \in \{(i, j), (j, i)\}$. Nous définissons aussi la relation $\sim$ dans I. On dit que $i \sim j$ si $i = j$ ou il existe $\{i_1, i_2, ..., i_n\} \subset I$, $n \geq 2$, tel que $i_1 = i$, $i_n = j$ et pour chaque i_p est adjacent à i_{p+1} pour tout $p \in \{1, ..., n-1\}$. Il n'est pas difficule de vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence sur I et on peut considérer l'ensemble quotient $I/\sim = \{[i] : i \in I\}$. Nous dirons que I est *connexe* lorsque $i \sim j$ pour tous $i, j \in I$.

Maintenant, nous construisons le groupoïde G oú l'ensemble des objets est défini par $\mathrm{Obj}(G) = \{[i] : i \in I\}$ et les morphismes par $\hom_G([i], [j]) = \begin{cases} \{1_{[i]}\} & \text{si } [i] = [j] \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$.

Ensuite, si l'on considère l'application surjective $\Omega : I \to \mathrm{Mor}(G)$ définit par $i \mapsto 1_{[i]}$, nous obtenons la graduation de groupoïde $\Lambda' : A = \oplus_{g\in G} A_g$ oú $A_g := \oplus_{\Omega(i)=g} A_i$ est une graduation grossière de Λ. Nous savons aussi que A_g est un idéal de A vérifiant $A_g A_h = 0$ lorsque $g \neq h$. Maintenant, nous pouvons affirmer le résultat suivant :

{tarzen1}

Proposition 15. *Si $\Lambda: A = \oplus_{i\in I} A_i$ est un ensemble gradué (avec un support égal à I), alors Λ est un raffinement de la graduation de groupoïde $\Lambda': A = \oplus_{g\in G} A_g$ oú chaque A_g est un idéal de A. L'ensemble des composants homogénes de Λ est la réunion d'ensembles de tous les composants homogénes de A_g'. En particulier, si A est une algèbre simple, alors le support est connexe.*

Etant donné une algèbre arbitraire graduée

$$\Lambda : A = \oplus_{i\in I} A_i,$$

un *idéal homogéne* de Λ est un idéal $\mathfrak{I}$ de A qui est décomposé comme suit $\mathfrak{I} = \bigoplus_{j\in J} A_j$ pour tout $J \subset I$. Par exemple, tout idéal gradué d'une algèbre graduée de longueur maximal est homogéne (voir [16, 20]). Nous rappelons aussi que Λ est appelée *simple homogène* si $AA \neq 0$ et ses idéaux homogènes sont $\{0\}$ et A, et que Λ est dit *semi-simple homogène* si elle peut s'exprimer comme somme directe d'idéaux simples homogènes (observons que dans le cas oú nous travaillons avec la graduation de longueur maximale, les conceptes ci-dessus concordent avec ceux de semi-simplicité graduée te de la simplicité gradué). Notre objectif final dans cette section, est de caractériser la semi-simplicité homogène et la semi-simplicité homogène d'une algèbre arbitraire graduée à l'aide certaines propriétés sur le support de la graduation.

Nous commençons avec quelques notions. Si Σ est le support de l'ensemble gradué ci-dessus Λ, (on note qu'il n'y a pas de restriction en supposant que $I = \Sigma$), et nous fixons que pour un certain $i \in \Sigma$, nous notons inductivement

$$i\Sigma^0 := \{i\},$$

$$i\Sigma^1 := \{j \in \Sigma : (A_iA_k + A_kA_i) \cap A_j \neq 0 \text{ for some } k \in \Sigma\},$$

$i\Sigma^2 := \{j \in \Sigma : (A_rA_k + A_kA_r) \cap A_j \neq 0$ pour un certain $r \in i\Sigma^1$ et pour un certain $k \in \Sigma\}$

et de manère général pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$i\Sigma^n := \{j \in \Sigma : (A_rA_k + A_kA_r) \cap A_j \neq 0$ pour un certain $r \in i\Sigma^{n-1}$ et pour un certain $k \in \Sigma\}$.

Enfin, nous appelons *le support généré par l'ensemble* i à l'ensemble $\overbrace{i\Sigma} := \cup_{n\in\mathbb{N}}(i\Sigma^n)$.

Nous rappelons que pour toute classe d'algèbre A, un élément $a \in A$ est appelé *élément de division* si pour tout $b \in A$ tel que $0 \neq ba = c$, (ou $0 \neq ab = c$), il existe $d, e \in A$ satisfaisant $b = cd$ et $a = ec$, (respectivement $b = dc$ et $a = ce$). L'algèbre A est une algèbre de division si n'importe quel élément non nul dans A est un élément de division. Etant donné une algèbre arbitraire graduée $\Lambda : A = \oplus_{i\in I}A_i$ dont le support Σ, nous disons que Σ est une *division faible* si pour tous $i, j, k \in \Sigma$ tels que $0 \neq A_iA_j \subset A_k$, nous avons $i, j \in \overbrace{k\Sigma}$.

{tarzen4}

Théorème 22. *Soit $\Lambda : A = \oplus_{i\in I}A_i$ un ensemble gradué d'algèbre arbitraire (dont le support est à I). Alors Λ est semi-simple homogène si et seulement si le support de la graduation est une division faible.*

Démonstration. Supposons Λ est semi-simple homogène, c'est à dire, nous pouvons écrire $A = \oplus_{\alpha\in\Phi}I_\alpha$ comme somme directe d'idéaux simples homogènes. Etant donné $i, j, k \in \Sigma$ tels que $0 \neq A_iA_j \subset A_k$, nous avons $A_i, A_j, A_k \subset I_\alpha$ pour un certain $\alpha \in \Phi$. Maintenant, si nous considérons l'idéal homogène généré par A_k, (l'idéal homogène minimal qui contient A_k), noté par $HI(A_k)$, alors $HI(A_k) = I_\alpha$ et si $A_i, A_j \subset HI(A_k)$. Ici, nous obtenons $i, j \in \overbrace{k\Sigma}$ et donc Σ est une division faible.

Inversement, d'après la proposition 15, nous savons que A est une somme directe $A = \oplus_{\alpha\in\Phi}I_\alpha$ oú I_α est un idéal homogène de A. Nous avons montré que I_α est idéal homogène, nous reste juste à montrer que I_α est simple. Rappelons que I_α est de la forme $I_\alpha = \oplus_{j\in[i]}A_j$, oú $[i]$ désigne l'ensemble d'élément $j \in \Sigma$ tel que $j \sim i$. Fixons un certain idéal homogène non nul J de I_α, alors il existe $j \in [i]$ tel que

$$0 \neq A_j \subset J. \tag{6.2}$$

{tarzen2}

Etant donné $k \in [i]$ avec $k \neq j$, nous pouvons trouver $\{i_1, i_2, ..., i_n\} \subset \Sigma$ tel que $i_1 = j$, $i_n = k$ et chaque i_p est adjacent à i_{p+1} pour tout $p \in \{1, 2, ..., n-1\}$. Puisque j est adjacent à i_2, il existe $p \in \Sigma$ tel que $0 \neq A_jA_p \subset A_{i_2}$ ou $0 \neq A_pA_j \subset A_{i_2}$ ou $0 \neq A_pA_{i_2} \subset A_j$ or $0 \neq A_{i_2}A_p \subset A_j$. Dans les deux premières possibilitès, l'équation (6.2), nous donne $0 \neq A_{i_2} \subset J$, tandis que l'autre cas, le caractère de la division de Σ, nous permet d'affirmer que $i_2 \in \overbrace{j\Sigma}$ et donc $0 \neq A_{i_2} \subset HI(A_j) \subset J$. Nous avons montré que dans tous les cas $0 \neq A_{i_2} \subset J$. De manière analogue avec la suite $i_2, i_3, ..., i_n$, nous obtenons $0 \neq A_{i_n} \subset J$. C'est à dire $0 \neq A_k \subset J$. Par conséquent, $J = I_{[i]}$ and $I_{[i]}$ est homogène simple.

□

Corollaire 13. *Soit $\Lambda : A = \oplus_{i\in I}A_i$ une algèbre d'ensemble gradué (avec le support égal à I). Alors Λ est simple si et seulement si le support de la graduation est une division faible et connexe.*

Démonstration. Supposons Λ est simple homogène. Alors Λ est homogène semi-simple, d'apr´es le théorème 22, le support de la graduation est de division. Enfin, la proposition 15, nous assure que le support de la graduation est connexe.

Réciproquement, le théorème 22 nous permet d'affirmer que Λ est semi-simple homogène. Alors A est la somme directe $A = \oplus_{\alpha\in\Phi} I_\alpha$ avec I_α un idéal simple homogène A. Si $|\Phi| \geq 2$, alors nous pouvons prendre une couple d'éléments i, j appartenant au support tel que $0 \neq A_i \subset I_\alpha$ et $0 \neq A_j \subset I_\beta$ avec $\alpha \neq \beta$. Cel implique, en tenant compte $I_\alpha I_\beta + I_\beta I_\alpha = 0$, le support n'est pas connexe, c'est une contraduction. D'oú $A = I_\alpha$ et donc A est simple homogène.

□

6.5 Graduation orthogonale

Nous terminons cette section en introduisant une classe de graduation d'ensemble sur l'algèbre associative $A = M_n(\mathbb{C})$ d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de coefficients complexe. Dans cette algèbre, nous avons une involution conjuguée linéaire $*\colon A \to A$ telle que $(a_{ij})^* = (\overline{a_{ji}})$ oú $x \mapsto \bar{x}$ donnant l'expression complexe. Nous avons également un produit intérieur définit positif $\langle\ ,\ \rangle\colon A \times A \to A$ donné par $\langle x, y\rangle = \mathrm{tr}(xy^*)$ oú $\mathrm{tr}(x)$ désigne la trace de la matrice x.

Définition 20. *Un ensemble gradué $A = \oplus_{i\in I} A_i$ sur $A = M_n(\mathbb{C})$ est dit être une graduation orthogonale*

(1) *Pour tout $i \in I$, nous avons $A_i^* = A_j$, pour un certain $j \in I$,*

(2) *$\langle A_i, A_j\rangle = 0$, lorsue $i \neq j$.*

La décomposition de Pierce, $A = \oplus_{i,j=1}^n \mathbb{C}e_{ij}$ est une graduation orthogonale qui n'est pas un groupe gradué pour $n > 1$.

Nous aurons besoin d'utiliser le fait que si $x \in A$ satisfaisant à $xx^*x = 0$, alors $x = 0$. En effet, $0 = \langle xx^*xA, xA\rangle = \langle x^*xA, x^*xA\rangle$ impliquant $x^*xA = 0$, alors $0 = \langle x^*xA, A\rangle = \langle xA, xA\rangle$, c'est à dire $xA = 0$ ou $x = 0$.

Considérons alors la graduation orthogonale $\Lambda\colon A = \oplus_{i\in I} A_i$. D'après le paragraphe précédent, on a :

{lunes}
$$A_i A_i^* A_i \neq 0 \tag{6.3}$$

pour chaque $i \in I$. En particulier, on a $A_i A_i^* \neq 0$. Supposons que $A_i A_i^* A_j \neq 0$. Nous montrons que dans ce cas $A_i A_i^* A_j \subset A_j$: on the contrary there is some $k \neq j$ tel que $A_i A_i^* A_j \subset A_k$. Ainsi, on a $0 = \langle A_i A_i^* A_j, A_j\rangle = \langle A_i^* A_j, A_i^* A_j\rangle$, ce ui entraine que $A_i^* A_j = 0$, c'est une contraduction. En résumant, on a :

{yes10}
$$A_i A_i^* A_j \subset A_j \tag{6.4}$$

et en prenant la dualité $A_j A_i A_i^* \subset A_j$. Nous avons les résultats suivants

{big1}
Lemme 20. *Si $0 \neq A_j A_i \subset A_q$ et $0 \neq A_j A_k \subset A_q$, alors $i = k$.*

Démonstration. Comme $0 \neq \langle A_j A_i, A_q\rangle = \langle A_i, A_j^* A_q\rangle$ et aussi $0 \neq \langle A_j A_k, A_q\rangle = \langle A_k, A_j^* A_q\rangle$, nous concluons $i = k$. □

Si nous écrivons

{magic1}
$$1 = \sum_{k\in K} v_k \tag{6.5}$$

avec $0 \neq v_k \in A_k$ et $K \subset I$, alors tout élément homogène non nul x_j peut être écrit comme $x_j = x_j v_p = v_q x_j$ pour certains p, q (unique d'après le lemme 20). Désignons par $\sigma, \tau\colon K \to K$ les applications telles que $v_k = v_k v_{\sigma(k)} = v_{\tau(k)} v_k$ pour tout $k \in K$.

{arr}
Lemme 21. *Pour tout $k \in K$, alors $\sigma(k) = k$.*

Démonstration. en premier lieu, nous devons prendre en compte que le produit intérieur défini en A satisfait $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$. Nous avons $0 \neq v_k = v_k v_{\sigma(k)}$. On suppose que $k \neq \sigma(k)$. Alors, on a :

$$0 = \langle v_k, v_{\sigma(k)}\rangle = \langle v_k v_{\sigma(k)}, v_{\sigma(k)}\rangle = \langle v_k v_{\sigma(k)} v_{\sigma(k)}^*, 1\rangle = \langle v_k v_{\sigma(k)} v_{\sigma(k)}^*, v_k\rangle$$

car $v_k v_{\sigma(k)} v_{\sigma(k)}^* \in A_k$, (voir équation (6.4)). Maintenant, nous pouvons continuer

$$0 = \langle v_k v_{\sigma(k)} v_{\sigma(k)}^*, v_k\rangle = \langle v_k v_{\sigma(k)}, v_k v_{\sigma(k)}\rangle$$

ce qui implique que $v_k = v_k v_{\sigma(k)} = 0$, c'est contraduction. □

Par conséquent, chaque somme dans la décomposition $1 = \sum_{k\in K} v_k$ est un idempotent. Cela implique que pour tous $p, q \in K$ with $p \neq q$, nous avons $v_p v_q = 0$, alors les idempotents sont orthogonaux.

{karma}

Lemme 22. *Pour tout $k \in K$, si $v_k \neq 0$, alors $A_k^* = A_k$. En particulier, $v_k = v_k^*$.*

Démonstration. Pour la premère assertion, supposons que $0 \neq v_k \in A_k$ et $A_k^* = A_j$ avec $j \neq k$. Aors, on a $0 = \langle v_k, v_k^*\rangle = \langle v_k v_k, 1\rangle = \langle v_k, 1\rangle = \langle v_k, v_k\rangle$, impliquant que $v_k = 0$. Le fait que $v_k = v_k^*$ découle de l'unicité de la décomposition de tout élément en tant que somme d'éléments homogènes. □

{lunes2}

Lemme 23. *Si $A_i^* = A_i$, pour un certain $i \in I$, alors $i \in K$.*

Démonstration. On suppose que $i \notin K$ et en prenant $x \in A_i \setminus \{0\}$, et comme $1 = \sum_{k\in K} v_k$, nous avons $x = v_k x$ pour un unique indice $k \neq i$. Cela implique que

$$A_k A_i \subset A_i. \tag{6.6}$$ {grpone}

On a aussi, $0 \neq \langle x, x\rangle = \langle x, v_k x\rangle = \langle x x^*, v_k\rangle$ et comme $A_i \neq 0$, nous avons $A_i A_i = A_i A_i^* \neq 0$, alors $A_i^2 \subset A_k$ et étant donné que $(A_i A_i^*)^* = A_i A_i^*$, nous avons aussi $A_k^* = A_k$. Comme $0 \neq x = v_k x$ implique que $v_k \neq 0$. Alors, on a

$$A_i^2 \subset A_k, \quad A_k^* = A_k, \quad A_k^2 \subset A_k.$$

Puisque A_i et A_k sont autoadjoint, d'après (6.6), nous obtenons $A_i A_k \subset A_i$. En prenant compte que $i \neq k$, la somme de A_i et A_k est directe et de plus $A_i \oplus A_k$ est une $*$-sous algèbre A. Comme l'annihilateur de $A_i \oplus A_k$ est un sous-espace de l'annihilateur de A (qui est nul), nous avons $A_i \oplus A_k$ est semi-simple. En particulier, son unité est une projection e qui peut être écrire comme somme $e = e_i + e_k$ avec $e_r \in A_r$ pour $r \in \{i, k\}$. Ensuite, pour tout $x \in A_k$, nous avons $x = e_i x + e_k x$ oú $e_i x \in A_i$ et $e_k x \in A_k$. Ainsi, on a

$$e_i A_k = 0, \quad x = e_k x, \tag{6.7}$$ {hayhay}

et de manière similaire $x = x e_k$. On a également $x = v_k x = x v_k$ implique que $e_k - v_k$ est dans l'annihilateur gauche de $A_i \oplus A_k$ qui est nul. Donc, on a $e_k = v_k$. Maintenant, si $z \in A_i$ alors $z = ez = e_i z + v_k z$ et $e_i z \in A_k$ alors que $v_k z \in A_i$ donc $z = v_k z$ et $e_i z = 0$ pour tout $z \in A_i$. Puis $e_i A_i = 0$ implique $e_i A_k = 0$ d'après (6.7) e_i est dans l'annihilateur gauche de $A_i \oplus A_k$. Comme $e_i = e - v_k$ est autoadjoint, il est aussi dans l'annihilateur droite donc $e_i = 0$ et $e = v_k$. On a $\dim(A_i \oplus A_k)^2 = \mathrm{tr}(e)^2 = \mathrm{tr}(v_k)^2 = \dim(A_k)^2$ impliquant $A_i \oplus A_k = A_k$ ou $A_i = 0$, ce qui est une contraction. On peut conclure que $i \in K$. □

{lunes3}

Lemme 24. *Pour tout composant homogène A_i, $i \in I$, les assertions suivantes sont vérifées :*

1. *Il existe un unique $p \in K$ tel que $v_p A_i = A_i$.*
2. *Il existe un unique $q \in K$ tel que $A_i v_q = A_i$.*
3. *Il existe un unique couple $(p,q) \in K \times K$ tel que $v_p A_i v_q \neq 0$.*
4. *Etant donné $p, q \in K$, le sous-espace $v_p A v_q$ est la somme directe des composants homogènes non nuls de la graduation.*

Démonstration. Existence : On prend un élément non nul $x \in A_i$, alors $x = \sum_{k\in K} v_k x$ ce qui implique qu'il existe un unique p tel que $v_p x = x$. La seconde assertion est prouvée de manière analogue. Pour le troisième assertion, si $v_p A_i v_q \neq 0$, alors $v_p A_i \neq 0$. Puisu'il existe un unique k tel que $A_i = v_k A_i$ et $0 \neq v_p A_i = v_p v_k A_i$, on a nécessairement $p = k$. Ainsi, on a $v_p A_i v_q = A_i v_q$ et comme v_q est l'unique élément satisfaisant à $A_i v_q = A_i$. Jusqu'à présent, nous avons prouvé que si $v_p A_i v_q$ est non nul, alors on a $v_p A_i v_q = A_i$ et les v_p et v_q sont uniques. Pour la quatrième assertion, il suffit de prouver que $v_p A v_q$ est non nul. Dans le cas contraire $0 = v_p(Av_qA)$, comme Av_qA est un idéal non vide de A, d'après la simplicité on a $Av_qA = A$. Donc, on a $0 = v_pA$ et en prenant les adjoints $0 = Av_p$ alors v_p est dans l'annihilateur A qui est vide. Nous obtenons une contraduction, alors $v_p = 0$. □

Observons que le lemme ci-dessus nous permet de définir une application surjective à partir du support de la graduation orthogonale de A sur l'ensemble $K \times K$ donné par

{phi}
$$\begin{aligned} \phi : \Sigma &\to K \times K \\ i &\mapsto (p,q). \end{aligned} \tag{6.8}$$

A partir de lá, une fois que la décomposition $1 = \sum_{p\in K} v_p$ en une somme de projections orthogonales non nulles, nous obtenons une graduation grossière de la graduation orthogonale initiale de A au moyen d'une graduation de groupoïde G, dont la classe d'objets est K et pour deux objets $p, q \in K$, nous définissons $\hom_G(p,q) = \{(p,q)\}$ muni de la composition $(p,q)(q,r) = (p,r)$. La graduation de G est donnée par $A = \oplus_{(p,q)} A_{(p,q)}$ avec $A_{(p,q)} = \oplus_{i\in\phi^{-1}((p,q))} A_i$.

Cependant, si nous voulons que la graduation orthogonale soit fine, la graduation orthogonale et la graduation de groupoïde construites ci-dessus doivent satisfaire aux résultats suivants :

{clavito}
Théorème 23. *Toute graduation fine orthogonale sur $M_n(\mathbb{C})$ est une graduation de groupoïde.*

Démonstration. Soit $A = \oplus_{i\in I} A_i$ une graduation orthogonale fine sur $A = M_n(\mathbb{C})$ et considérons $1 = \sum_{p\in K} v_p$ donnée dans l'équation (6.5). Nous commençons par observer que $\dim(A_p) = 1$ pour tout $p \in K$. En effet, d'après le lemme 21 et le lemme 22, nous savons que tout A_p est une $*$-sous-algèbre non vide (fermé) de A, étant donné que $\mathrm{Ann}(A_p) = 0$, comme conséquence de l'équation (6.3). Alors, il existe une famille maximale de projections orthogonales $\mathcal{F}_p = \{e_{p,r}\}_{r\in\{1,\ldots,m_p\}}$ de A_p telle que

{des}
$$A_p = \bigoplus_{r,s\in\{1,\ldots,m_p\}} e_{p,r} A_p e_{p,s} \tag{6.9}$$

oú $\dim(e_{p,r}A_pe_{p,r}) = 1$ pour tout $r \in \{1, ..., m_p\}$.

Maintenant, d'après l'équation (6.3) et le lemme 23, nous avons que pour tout $i \in I$ il existe un unique couple $(p,q) \in K \times K$ tel que $0 \neq A_i A_i^* \subset A_p$ et $0 \neq A_i^* A_i \subset A_q$. Ensuite,

nous pouvons écrire $A_i = \bigoplus_{r\in\{1,...,m_p\};s\in\{1,...,m_q\}} e_{p,r}A_ie_{q,s} \oplus C_i$ où C_i désigne le complément orthogonal de

$$\bigoplus_{r\in\{1,...,m_p\};s\in\{1,...,m_q\}} e_{p,r}A_ie_{q,s}$$

dans A_i. But $C_i = 0$. En effet, si $x \in C_i$, alors on a $\langle x, e_{p,r}A_ie_{q,s}\rangle = 0$ et donc $\langle e_{p,r}xe_{q,s}, A_i\rangle = 0$. Puisque, $e_{p,r}xe_{q,s} \in A_i$, alors on a $e_{p,r}xe_{q,s} = 0$ pour tout $r \in \{1, ..., m_p\}$ et $s \in \{1, ..., m_q\}$. D'après l'équation (6.3), nous avons dans le cas oú $x \neq 0$, alors on a $A_pxA_p \neq 0$ et en prenant compte de l'équation (6.9), on a $(e_{p,r}A_pe_{p,s})x(e_{p,t}A_pe_{p,u}) \neq 0$ pour certains $r, s, t, u \in \{1, ..., m_p\}$, mais $e_{p,r}A_p(e_{p,s}xe_{p,t})A_pe_{p,u} = 0$, c'est une contraduction. On peut conclure que $x = 0$.

Nous avons montré que $A_i = \bigoplus_{r\in\{1,...,m_p\};s\in\{1,...,m_q\}} e_{p,r}A_ie_{q,s}$ pour chaque $i \in I$ et ensuite la décomposition

$$A = \bigoplus_{i\in I;r\in\{1,...,m_p\};s\in\{1,...,m_q\}} e_{p,r}A_ie_{q,s}$$

est un raffinement de la graduation initiale A. On a $m_p = m_q = 1$, $A_p = e_{p,1}A_pe_{p,1}$, $A_q = e_{q,1}A_qe_{q,1}$ et

$$\dim(A_p) = \dim(A_q) = 1. \tag{6.10}$$ {isi1}

Maintenant, nous allons montrer dans le cas oú $A_iA_q = A_q$ and $A_qA_j = A_j$, pour tous $i, j \in I$ et $p, q \in K$ (voir lemme 24), alors nous avons nécesserement $A_iA_j \neq 0$. En effet, nous avons $A_qA_i^* = A_i^*$ et $A_j^*A_q = A_j^*$. Alors, on a $0 \neq \langle A_qA_i^*, A_i^*\rangle = \langle A_q, A_i^*A_i\rangle$ et donc $0 \neq A_i^*A_i \subset A_q$. De manière similaire, nous obtenons $0 \neq A_jA_j^* \subset A_q$ et d'après l'équation (6.10), nous donne que $0 \neq A_q = A_i^*A_i = A_jA_j^*$. Ce qui implique que $0 \neq \langle A_i^*A_i, A_jA_j^*\rangle = \langle A_i^*, A_jA_j^*A_i^*\rangle$, et par conséquent $A_j^*A_i^* \neq 0$.

$$A_iA_j \neq 0. \tag{6.11}$$ {theend}

Maintenant, définissons la catégorie G dont la classe d'objet est K et pour deux objets $p, q \in K$, nous définissons $\hom_G(p, q) = \{(p, i, q) : i \in \phi^{-1}((p, q))\}$, oú ϕ est l'application définie par l'équation (6.8), muni de la composition

$$(p, i, q)(q, j, r) = (p, k, r)$$

oú $k \in \phi^{-1}((p, r))$ est le seul élément dans I satisfaisant comme conséquence de la décomposition (6.11), et que $0 \neq A_iA_j \subset A_k$. L'équation (6.3) permet de définir $1_p := (p, p, p)$ pour tout $p \in K$, on a $1_p(p, i, q) = (p, i, q)1_q = (p, i, q)$ pour tout $(p, i, q) \in \hom_G(p, q)$ comme consèquence du lemme 24. L'associativité de la composition découle du fait que pour tout $i \in \phi^{-1}((p, q))$, $j \in \phi^{-1}((q, r))$ et $l \in \phi^{-1}((r, s))$, alors on a $A_iA_jA_l \neq 0$. Ceci est la conséquence du lemme (6.11) qui dit que $A_jA_l \neq 0$. Puis, en prenant $x_j \in A_j$ et $x_l \in A_l$ tels que $x_jx_l \neq 0$, nous avons $0 \neq x_jx_l(x_jx_l)^* \in A_q$. En prenant compte de $\dim A_q = 1$ et du 24, alors on a $x_i(x_jx_l(x_jx_l)^*) \neq 0$ pour tout $0 \neq x_i \in A_i$. Nous obtenons que $A_iA_jA_l \neq 0$.

Nous savons que la catégorie G est un groupoïde. En effet, en écrivant $* : \Sigma \to \Sigma$, $i \mapsto i^*$ oú $A_{i^*} := (A_i)^*$, alors nous définissons $(p, i, q)^{-1} := (q, i^*, p)$ pour tout $(p, i, q) \in \mathrm{Mor}(G)$, il est clair que $(p, i, q)(p, i, q)^{-1} = 1_p$ and $(p, i, q)^{-1}(p, i, q) = 1_q$, d'après le lemme 23 et le lemme 24.

Enfin, puisque nous pouvons aussi définir l'application bijective

$$\Sigma \to \mathrm{Mor}(G)$$

$$A_i \mapsto (p, i, q)$$

alors nous obtenons que la graduation initiale de $M_n(\mathbb{C})$ est une graduation de groupoïde. □

Bibliographie

[1] Aljadeff, E., Haile, D. and Natapov, M. : Graded identities of matrix algebras and the universal graded algebra. Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), no. 6, 3125-3147.

[2] Ambrose, W. : Structure theorems for a special class of Banach Algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 57 (1945), 364–386.

[3] P. Alberca Bjerregaard, D. Martín Barquero, C. Martín González and D. Ndoye. *Fine gradings on the Poincaré algebra.* Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy Vol. 117A, No. 2 (2017), 39-45.

[4] P. Alberca Bjerregaard, D. Martín Barquero, C. Martín González and D. Ndoye. *Basic and Free Simplicity of Lorentz Type algebras.* In Non-Associative and Non-Commutative Algebra and Operator Theory NANCAOT, Dakar, Senegal, May 23-25, 2014 : Workshop in Honor of Professor Amin Kaidi. Editors : Gueye, Cheikh Thiecoumbe, Molina, Mercedes Siles (Eds.) 201-210. 2016.

[5] P. Alberca Bjerregaard, D. Martín Barquero, C. Martín González and D. Ndoye. *Algebraic structure of the Lorentz and of the Poincaré Lie algebras.* Tokyo Journal of Mathemtics. En prensa (véase arXiv :1508.01634 [math.RA]).

[6] J.M. Ancochea Bermúdez, R. Campoamor-Stursberg, and L. García Vergnolle. : Classification of Lie algebras with naturally graded quasi-filiform nilradicals. J. Geom. Phys. 61 (2011), no. 11, 2168–2186.

[7] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1969.

[8] Bahturin, Y. and Brešar, M. : Lie gradings on associative algebras. J. Algebra 321 (2009), no. 1, 264-283.

[9] Bahturin, Y.A., Brešar, M. and Kochetov, M. : Group gradings on finitary simple Lie algebras. Internat. J. Algebra Comput. 22, no. 5, (2012), 1250046, 46 pp.

[10] Y.A. Bahturin, I. P. Shestakov, and M. Zaicev. : Gradings on simple Jordan and Lie algebras, J. Algebra 283 (2005), no. 2, 849-868

[11] Y. A. Bahturin, and M. Tvalavadze. : Group gradings on $\mathfrak{g}_2$. Comm. Algebra 37 (2009), no. 3, 885-893.

[12] Balachandran, V.K. and Swaminathan, N. : Real H^*-algebras. J. Funct. Anal. 65, no. 1, (1986), 64–75.

[13] R. Brown. : From groups to groupoids : a brief survey. Bull. London Math. Soc. 19 (1987), no. 2, 113–134.

[14] Cabrera, M., Martínez a J. and Rodríguez, A. : Nonassociative real H^*–algebras. Publ. Mat. 32, no. 2, (1988), 267–274.

[15] Calderón, A.J. : Lie algebras with a set grading. Linear Algebra Appl. 452 (2014), 7-20.

[16] A.J. Calderón. : On graded associative algebras. Reports on Mathematical physics. 69(1), (2012), 75–86.

[17] A. J. Calderón, A. Díaz, M. Haralampidou and J. M. Sánchez : Graded pseudo-H-rings. Banach J. Math. Anal. 9 , no. 2, (2015), 311–321.

[18] A. J. Calderón Martín, C. Martín González and D. Ndoye. *On groupoid gradings.* Journal of Geometry and Physics Volume 123. 2018, 61-70.

[19] A. J. Calderón, C. Draper, C. Martín González and D. Ndoye. *Orthogonal-gradings on H*-algebras.* Mediterr. J. Math. (2018) 15 : 16. https ://doi.org/10.1007/s00009-017-1059-7.

[20] A.J. Calderón, and J. M. Sánchez. : On the structure of graded Lie supealgebras. Modern Phys. Letters A. 27(25), 1250142, (2012), 18 pp.

[21] H. Chandra. *On the radical of a Lie algebra.* Proceedings of the American Mathematical Society Vol. 1, No. 1, 14-17, (1950).

[22] M. Chaves and D. Singleton. : Phantom energy from graded algebras. Modern Phys. Lett. A 22 (2007), no. 1, 29-40.

[23] Conway, J.H. and Smith, D.A. : On quaternions and octonions : their geometry, arithmetic, and symmetry. A K Peters, Ltd., Natick, MA, 2003. xii+159 pp. ISBN : 1-56881-134-9.

[24] R. Coquereaux, G. Esposito-Farese and F. Scheck. : Noncommutative geometry and graded algebras in electroweak interactions. Internat. J. Modern Phys. A 7 (1992), no. 26, 6555-6593.

[25] Cuenca, J.A., García, A. and Martín, C. : Structure Theory for L^*–algebras. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 107 (1990), no. 2, 361–365.

[26] Cuenca, J.A. and Rodríguez, A. : Isomorphisms of H^*–algebras. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 97 (1985), 93–99.

[27] Cuenca, J.A. and Rodríguez, A. : Structure Theory for noncommutative Jordan H^*–algebras. J. Algebra 106 (1987), 1–14.

[28] Dahl, G : The doubly graded matrix cone and Ferrers matrices. Linear Algebra Appl. 368 (2003), 171-190.

[29] C. Draper and C. Martín, *Gradings on* $\mathfrak{g}_2$. Linear algebra and its applications 418 (1), 85-111, (2006).

[30] C. Draper. : Models on the Lie algebra $\mathfrak{f}_4$. Linear Algebra Appl. 428 (2008), no. 11-12, 2813–2839.

[31] C. Draper and C. Martín. : Gradings on the Albert algebra and on $\mathfrak{f}_4$. Rev. Mat. Iberoam. 25 (2009), no. 3, 841-908.

[32] A. S. DzhumadilŠdaev. *On the cohomology of modular Lie algebras.* Math. USSR Sb. 47, 127-143, (1984).

[33] A. Elduque. : Fine gradings on simple classical Lie algebras. J. Algebra, 324 (2010), no. 12, 3532-3571.

[34] Elduque, A. : Gradings on octonions. J. Algebra, 207 (1998), 342-354.

[35] Elduque, A. : A Lie grading which is not a semigroup grading ; Linear Algebra and Appl. 418 (2006), 312–314.

[36] Elduque, A. : More non semigroup Lie gradings, Linear Algebra Appl. 431 (2009), no. 9, 1603–1606.

[37] A. Elduque and M. Kochetov. *Gradings on Simple Lie Algebras*. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, R.I. American Mathematical Society (AMS), 189. 2013.

[38] K. Erdmann and M. J. Wildon. *Introduction to Lie Algebras*, Springer, 2006.

[39] H. Grosse and G. Reiter. : Graded differential geometry of graded matrix algebras. J. Math. Phys. 40 (1999), no. 12, 6609-6625.

[40] Haralampidou, M. : On locally convex H^*–algebras. Math. Japon 38, (1993), 451–460.

[41] Haralampidou, M. : Structure theorems for Ambrose algebras. Period. Math. Hungar. 31, no. 2, (1995), 139-154.

[42] M. Havlíček, J. Patera and E. Pelantová. : On Lie gradings II. Linear Algebra Appl. 277 (1998), 97–125.

[43] M. Havlíček, J. Patera and E. Pelantová. : On Lie gradings III. Linear Algebra Appl. 314 (2000), 1–47.

[44] Havlŋcek, M., Patera J., Pelatonova E. and Tolar J. : On fine gradings and their symmetries. Czechoslovak J. Phys. 51 (2001), 383–391.

[45] N. Jacobson. *Lie algebras*. Interscience Tracts on Pure and Applied Mathematics, no. 10 . Interscience Publishers, New York, 1962.

[46] B. Jurco. : From simplicial Lie algebras and hypercrossed complexes to differential graded Lie algebras via 1-jets. J. Geom. Phys. 62 (2012), no. 12, 2389–2400.

[47] A. Kh. Khudoyberdiyev and B. A. Omirov. : Infinitesimal deformations of naturally graded filiform Leibniz algebras. J. Geom. Phys. 86 (2014), 149–163.

[48] M-A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost and J-P. Tignol. The Book of Involutions. American Mathematical Society. Colloquium Publications vol. 44 1998.

[49] M. Kochetov. : Gradings on finite-dimensional simple Lie algebras. Acta Appl. Math. 108 (2009), no. 1, 101–127.

[50] A.K. Kwasniewski. : On maximally graded algebras and Walsh functions. Rep. Math. Phys. 26 (1988), no. 1, 137-142.

[51] E. Malekian and A. Zakerolhosseini. *A non-associative lattice-based public key cryptosystem*. Wiley InterScience, John Wiley and Sons(2012), 145-163.

[52] Mallios, A. : Topological algebras. Selected topics, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[53] W. Marcinek. : Graded algebras and geometry based on Yang-Baxter operators. J. Math. Phys. 33 (1992), no. 5, 1631-1635.

[54] J. S. Milne. *Basic Theory of Affine Group Schemes*. http ://www.jmilne.org/math/ CourseNotes/AGS.pdf. 2012.

[55] Nastasescu, C. and Van Oystaeyen, F. : Methods of graded rings. Lecture Notes in Mathematics, 1836. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[56] J. Patera and H. Zassenhaus. : On Lie gradings I. Linear Algebra Appl. 112, (1989), 87–159.

[57] J. Patera, E. Pelantová, M. Svobodová. *Fine gradings of* $o(4, C)$, Journal of Math. Phys. 45 (2004), 2188-2198.

[58] V. P. Platonov. *The theory of algebraic linear groups and periodic groups*. Transl. Amer. Math. Soc. (2) , 69 (1968) pp. 61-110 Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. , 30 : 3 (1966) pp. 573-620

[59] P. de Guzman, I : Structure theorems for alternative H^*-algebras. Proc. Camb. Phil. Soc. 94 (1983), 437–446.

[60] Sandra Mara Alves, J. : On graded central polynomials of the graded algebra $M_2(E)$. Comm. Algebra 38 (2010), no. 6, 2184-2198.

[61] Schafer, R.D. An introduction to Non-associative algebras. Academic Press. 1966.

[62] Schue, J. R. : Hilbert Space methods in the theory of Lie algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 69-80.

[63] Schue, J. R. : Cartan decompositions for L^*-algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 98 (1961), 334-349.

[64] P. Seong-Hun, H. Kil-Chan, K. Jae Heon, C. Seongtaek, P. Choonsik, *New Public Key Cryptosystem Using Finite Non Abelian Groups*, Advances in Cryptology - Crypto 2001, LNCS 2139 175-184.

[65] E. H. Spanier. *Algebraic topology.* Corrected reprint. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981.

[66] M. Tomforde. *Leavitt path algebras with coefficients in a commutative ring.* Journal of Pure and Applied Algebra. Volume 215, Issue 4, (2011), 471484.

[67] A. Verbovetsky. : Lagrangian formalism over graded algebras. J. Geom. Phys. 18 (1996), no. 3, 195-214.

[68] K. Wardati. Private communication. 2014.

[69] W. C. Waterhouse. Introduction to affine group schemes. Springer-Verlag. 1979.