

UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
ECOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Année : 2017

Numéro d'ordre : 105



Thèse de Doctorat Unique
Présentée pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

Mention : Mathématiques et Modélisation

Spécialité : Géométrie et Applications

par

Cheikh LO

Sous la direction de : **El H. Cheikh Mbacké Diop**

Co-directeur : **Masseye Gaye**

**Ensembles minimaux pour le flot horocyclique sur une
surface hyperbolique géométriquement infinie.**

Soutenue le 20 juillet 2017

devant le jury composé de :

Président : Hamidou Dathe, Professeur, Université Cheikh Anta Diop de Dakar

Examineur : - François Ledrappier, Professeur Emérite, UMPC (Paris VI), France

Rapporteurs : - Françoise Dal'Bo, Professeur, IRMAR Rennes I, France

- Marie Salomon Sambou, Professeur, Université Assane Seck de Ziguinchor

- Athoumane Niang, Maître de Conférences, Université Cheikh Anta Diop de Dakar

Directeur de thèse : - El H Cheikh Mbacké Diop, Maître de Conférences, Université Cheikh Anta
Diop de Dakar

Co-directeur de thèse : - Masseye Gaye, Maître Assistant, Université Cheikh Anta Diop de Dakar.

A la mémoire de mes deux parents. Qu'Allah les accueille aux paradis.

Dédicace :

A ma femme Ndèye, à nos enfants (Sokhna Diè et Mamemor) et à leur cousin (Pape Mouhamed). Ndèye tu m'as soutenu, encouragé,..., tu as tenue malgré les obstacles.

Mes remerciements vont évidemment d'abord à mes directeurs de thèse El H Cheikh Mbacké Diop et Masseye Gaye. Ils ont fait preuve d'une patience incroyable pour que j'arrive à écrire correctement des mathématiques correctes : les pages qui vont suivre doivent montrer que leurs efforts n'ont pas été vains. Ils ont su faire preuve de dépassement devant mes incompréhensions et errements. Ils ont joué respectivement des rôles de père et de grand frère envers moi. Qu'Allah les protège ainsi leur famille respective.

Je suis particulièrement heureux que Françoise Dal'Bo qui a guidé mes premiers pas dans le vaste monde de la dynamique hyperbolique ait accepté d'être rapporteur et membre de jury de cette thèse. A défaut d'être officiellement ma directrice de thèse elle a suivi pas à pas mes travaux de recherche. Au cours de mes séjours rennaises j'ai abusé beaucoup de son temps. Les séances de travail que nous avons eu au Café, sans oublier celles dans son bureau à l'IRMAR ou à Notre Dame aux USA ont été déterminantes dans les résultats de cette thèse. Françoise, mille mercis à toi et ta famille, Romance, Alma et ton mari. A travers toi j'adresse mes remerciements à tous les membres et amis du GDR Platon : Frédéric Paulin, Barbara Schapira,...

Je remercie Marie Salomon Sambou et Athoumane Niang d'avoir accepté d'être rapporteurs et membres de jury de cette thèse. Je fus respectivement leur étudiant en Topologie et en Géométrie Riemannienne. Je remercie également Hamidou Dathe d'avoir accepté d'être le président du jury de soutenance de cette thèse. Il s'est toujours intéressé à l'avancement de mes travaux de thèse et il m'a toujours encouragé. J'associe à ces remerciements tous les enseignants du département mathématique et informatique, de Nlaga et de la FASTEF : Mamadou Barry chef du département, Diaraf Seck, Ameth Ndiaye, Assane Diop, Bakary Manga, Mountaga Lam, Emmanuel Faye, Mamadou Dieng,...

J'adresse mes vifs remerciements à François Ledrappier de me faire l'honneur de faire partie de mon jury de thèse. Merci de s'intéresser à mes travaux, de m'avoir invité aux USA et de répondre à mes questions naïves sur les propriétés métriques du flot horocyclique.

Je confonds dans mes remerciements tous ceux qui consciemment ou inconsciemment, à un moment donné, ont contribué à la réalisation de ce travail. Je me permets d'en citer quelques uns sans être exhaustif : mon oncle Cheikh Mb Ndiaye, Massogui, Djily, Ahma, Momar Diop, Cheikh Mb Ndoye, Mouhamadou Ngom, Abdalah Ould Mamine, les secrétaires du département mathématique de Dakar et celles de la Scolarité de la faculté des Sciences et Techniques de Dakar. Une pensée pieuse à l'endroit de mon cousin et défunt ami Abdou Razakh Ndiaye et à mon défunt ami et camarade Cheikh Adama Gueye Thiam.

A travers Mamour Touré et Aziz Diop je remercie respectivement mes collègues de lycée de Ouakam et mes petits frères, camarades doctorants mathématiques. Je remercie mes camarades Mourtalla Sall et Abass de m'avoir assisté pour la réalisation de certaines des figures de cette thèse et Mamadou Alpha Diallo pour les démarches administratives.

Table des figures

1.1	Géodésiques de \mathbb{D}	11
1.2	Quadrilatère et Pentagone hyperboliques	25
1.3	Hexagone hyperbolique à angles droits	26
1.4	Domaine de Dirichlet de $PSL(2, \mathbb{Z})$ centré au point $2i$	35
2.1	Région de Nielsen	41
2.2	Cylindres hyperboliques	42
2.3	Polygone fondamental	42
2.4	Polygone fondamental	43
2.5	Surface hyperbolique correspondante à la figure 2.3	43
2.6	Surface hyperbolique correspondante à la figure 2.4	43
2.7	Polygone fondamental	43
2.8	Surface hyperbolique correspondante à la figure 2.7	43
2.9	Recollement de deux surfaces	44
2.10	Cylindre hyperbolique	46
2.11	Recollement de géodésiques fermées	47
2.12	Polygone fondamental	48
2.13	Pantalon hyperbolique	48
2.14	Construction d'un pantalon en recollant deux hexagones isométriques	48
2.15	Recollement de deux pantalons	53
2.16	Surface cannelée	54
2.17	Relevé d'une surface cannelée	54
2.18	Surface cannelée de paramètres $(n_k; l; l_k)$	55
2.19	Région de Nielsen, bouts finis et infini	57
2.20	Un horocycle centré sur un point fixé par une isométrie parabolique.	58
3.1	Point limite conique	68
5.1	Position de deux disques et d'un horocycle	96
5.2	Temps perdu par une géodésique sur un pantalon	102

5.3	Brique de construction	104
5.4	Colonne vertébrale de S_0 et un relevé sur \mathbb{H}	105
5.5	Surface S_0	105
5.6	Surface avec un nombre infini dénombrable de bouts infinis	109

Table des matières

Dedicace	ii
Remerciement	iii
Liste des figures	iv
Introduction Générale	1
1 Préliminaires de géométrie hyperbolique plane	6
1 Modèles du plan hyperbolique	6
1.1 Le modèle du disque de Poincaré	7
1.2 Le modèle du demi-plan de Poincaré	16
1.3 Cocycle de Busemann et Horocycle	19
2 Polygones hyperboliques	23
2.1 Définitions	23
2.2 Trigonométrie hyperbolique	24
3 Classification des isométries positives du plan hyperbolique	26
3.1 Isométrie hyperbolique	28
3.2 Isométrie parabolique	29
3.3 Isométrie elliptique	30
3.4 Composition d'isométries	30
4 Groupes fuchsien	31
5 Domaines fondamentaux d'un groupe fuchsien	33
5.1 Régions fondamentales	33
5.2 Domaine fondamentaux classiques	34
2 Surfaces hyperboliques	37
1 Définitions	37
2 Sur la géométrie des surfaces hyperboliques	38
3 Constructions d'une surface hyperbolique	39

3.1	Construction par quotient	40
3.2	Construction par recollement	43
4	Pantalon hyperbolique	47
4.1	Définitions	47
4.2	Construction d'un pantalon	48
5	Surfaces hyperboliques géométriquement infinies	49
5.1	Groupes de Schottky	49
5.2	Surfaces cannelées	52
6	Bouts d'une surface hyperbolique	55
6.1	Définitions	56
6.2	Géométrie des bouts	57
3	Points limites d'un groupe fuchsien	61
1	Ensemble limite d'un groupe fuchsien	61
1.1	Définitions	61
1.2	Cardinalité de l'ensemble limite	62
1.3	Propriétés de l'ensemble limite	65
2	Classification des points limites	66
2.1	Points limites horocycliques	66
2.2	Points limites paraboliques	69
2.3	Points limites discrets et points limites irréguliers	69
3	Finitude géométrique	71
4	Orbites horocycliques	72
1	Flot géodésique	73
1.1	Définitions	73
1.2	Le flot géodésique en $PSL(2, \mathbb{R})$ -coordonnées	75
2	Flot horocyclique	75
2.1	Définitions	76
2.2	Le flot horocyclique en $PSL(2, \mathbb{R})$ -coordonnées	79
2.3	Point de vue vectoriel (Action linéaire)	80
3	Liens entre points limites d'un groupe fuchsien et orbites horocycliques . . .	84
3.1	Orbites denses	84
3.2	Orbites périodiques	85
3.3	Orbites fermées non périodiques et orbites irrégulières	86
5	Ensembles $h_{\mathbb{R}}$-minimaux	88
1	Conditions de non-existence d'ensemble $h_{\mathbb{R}}$ -minimal	88

2	Exemples de flots horocycliques sans ensembles minimaux	92
2.1	Groupe de demi-cercles symétriques	92
2.2	Surface cannelée	100
2.3	Exemple de surface hyperbolique avec un nombre infini dénombrable d'orbites irrégulières	108
	Conclusion et perspectives	112
	Bibliographie	115

Introduction

*"Souvenir les propriétés des choses, d'après leur mode d'existence dans l'infini petit"
(Discours de Félix Klein sur Bernhard Riemann et son influence).*

Contexte historique

Dans cette thèse nous nous intéressons particulièrement à l'existence d'ensemble minimal pour le flot horocyclique sur le fibré unitaire tangent d'une surface hyperbolique géométriquement infinie en restriction à son ensemble non-errant. Rappelons qu'une partie Y d'un espace métrique X sur lequel agit un flot Φ est dite Φ -minimale si elle est non vide, fermée, invariante par Φ et si elle ne contient pas de fermé propre, non-vide et invariant par Φ . Le flot Φ est dit minimal si l'espace X est Φ -minimal.

Dans [34], T. Inaba a construit un exemple de flot lisse sans ensemble minimal sur une surface de genre infini. J. C. Beniere et G. Meigniez dans [9] ont généralisé ce résultat, en montrant qu'il existe toujours un flot sans ensemble minimal sur toute variété non-compacte sauf \mathbb{R} et les surfaces de genre fini. D'après le lemme de Zorn tout espace compact admet un ensemble minimal.

Objectifs et principaux résultats

Soit le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$ muni de la métrique riemannienne dite hyperbolique $ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}$. Nous noterons l'espace (\mathbb{D}, ds) simplement \mathbb{D} . Cet espace n'est pas compact. On peut le compactifier en lui ajoutant un bord à l'infini $\partial\mathbb{D} = \mathbb{S}^1$. Le groupe des isométries positives de \mathbb{D} qu'on notera $Isom^+(\mathbb{D})$ est isomorphe au groupe $PSL(2, \mathbb{R})$. On appelle surface hyperbolique le quotient de \mathbb{D} par un sous-groupe discret Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$ dit *groupe fuchsien*. Une surface hyperbolique $S = \Gamma \backslash \mathbb{D}$ est dite *géométriquement finie* si le groupe fuchsien est de type fini sinon elle est dite *géométriquement infinie*.

Le groupe $PSL(2, \mathbb{R})$ agit simplement transitivement sur le fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{D}$. Par suite il est isomorphe au fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{D}$. Soit Γ un sous-groupe discret de $PSL(2, \mathbb{R})$, nous avons $T^1S = \Gamma \backslash T^1\mathbb{D} \simeq \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$. L'action à droite du groupe uni-

potent $N = \left\{ n_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / t \in \mathbb{R}_+^* \right\}$ sur l'espace homogène $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ définit un flot appelé *flot horocyclique*, voir [51]. Nous désignerons le flot horocyclique sur T^1S par $h_{\mathbb{R}}$. Nous notons indifféremment π les projections du disque \mathbb{D} sur la surface S et $T^1\mathbb{D}$ sur T^1S . La dynamique du flot horocyclique est concentrée sur son ensemble non-errant, noté Ω_h . Rappelons qu'un point x d'un flot $\Phi_{\mathbb{R}}$ sur un espace métrique X est dit non-errant si pour tout voisinage V de x il existe une suite non bornée de réels t_n telle que $\Phi_{t_n}(V) \cap V \neq \emptyset$. L'ensemble non-errant est fermé et invariant par le flot.

Considérons un sous-groupe discret de type infini Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$. Cette thèse étudie la dynamique topologique du flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ sur le fibré unitaire tangent de la surface hyperbolique géométriquement infinie $S = \Gamma \backslash \mathbb{D}$ en la reliant à l'action sur le bord à l'infini $\partial\mathbb{D}$ du groupe fuchsien Γ correspondant. On appelle *ensemble limite* du groupe Γ , noté Λ l'ensemble $\Lambda = \overline{\Gamma.z} \cap \partial\mathbb{D}$. Cet ensemble contient des points particuliers qui se définissent suivant le comportement de l'orbite $\Gamma.z$, pour un certain $z \in \mathbb{D}$ par rapport aux horodisques de \mathbb{D} . On appelle *horodisque* tout disque euclidien de \mathbb{D} tangent à \mathbb{S}^1 . Soit $v = (z, \vec{v}) \in T^1\mathbb{D}$, il existe un unique rayon géodésique $\alpha : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{D}$ telle que $\alpha(0) = z$ et $\alpha'(0) = \vec{v}$, voir [35] théorème 1.4.2. Son projeté sur la surface S est encore appelé *rayon géodésique*. On pose $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = v^+ \in \mathbb{S}^1$. Un horodisque tangent à \mathbb{S}^1 au point v^+ est dit horodisque centré en v^+ .

Pour le flot horocyclique la recherche d'ensemble minimal remonte à G. A. Hedlund en 1936 [32]. Son résultat est repris et généralisé dans le cadre d'une courbure négative variable par F. Dal'Bo dans [17]. Nous énonçons ce résultat dans le cas des surfaces hyperboliques sous la forme suivante.

Théorème (voir [17] Proposition B)

Soit $v \in T^1\mathbb{D}$. L'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ est dense dans Ω_h si et seulement si le point v^+ est un point horocyclique, c'est-à-dire v^+ est un point de Λ tel que pour tout $z \in \mathbb{D}$, l'orbite $\Gamma.z$ rencontre tout horodisque basé en ce point.

Lorsqu'une surface hyperbolique est géométriquement finie la dynamique topologique du flot $h_{\mathbb{R}}$ est bien connue.

Théorème (voir [18] Proposition V.4.1)

Si S est une surface géométriquement finie, alors les orbites de $h_{\mathbb{R}}$ sont denses ou périodiques sur Ω_h .

Donc dans le cas géométriquement fini les seuls ensembles $h_{\mathbb{R}}$ -minimaux sont les orbites périodiques sinon le flot est minimal sur son ensemble non-errant.

Lorsque la surface est géométriquement infinie le comportement du flot horocyclique dépend de la surface plus précisément de l'action de son groupe fondamental $\pi_1(S)$ sur le bord à l'infini du plan hyperbolique. Dans ce cadre il y a peu de travaux sur la dynamique

topologique du flot horocyclique. L'ensemble limite d'un groupe fuchsien géométriquement infini admet plusieurs classifications, voir [46] et [53]. Il existe également des correspondances entre ces différentes classes de points de l'ensemble limite et la nature topologiques des orbites horocycliques. Il y a très peu de cas de surfaces hyperboliques géométriquement infinies sur lesquelles le comportement topologique du flot horocyclique est entièrement décrit. Kulikov en 2004 dans [41] a construit une famille de groupes fuchsien géométriquement infinis dont le flot horocyclique n'admet pas d'ensembles $h_{\mathbb{R}}$ -minimaux. Dans son exemple les orbites en restriction à l'ensemble non-errant du flot sont soit denses ou non fermées et non denses dans Ω_h . Nous appellerons ces dernières types d'orbites, *orbites irrégulières*. L'exemple de Kulikov semble être le premier de son genre quant à sa nature algébrique. Auparavant P. Eberlein montrait dans [23] que s'il existe un ensemble $h_{\mathbb{R}}$ -minimal alors il est constitué d'éléments de T^1S *quasi-minimisant*s pour le flot géodésique. Précisons que les orbites irrégulières sont présentes dans d'autres travaux avant le papier de Kulikov, par exemple dans [53] et [19]. Une question naturelle se pose : "*l'adhérence d'une orbite irrégulière peut-elle être $h_{\mathbb{R}}$ -minimal ?*" Nous répondons partiellement à cette question en établissant le théorème ci-dessous qui a fait objet de la publication [27]. Introduisons une relation d'équivalence entre les orbites horocycliques : deux orbites $h_{\mathbb{R}}(\pi(u))$ et $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ sont en relation d'équivalence modulo le flot géodésique $g_{\mathbb{R}}$ s'il existe un réel t_0 tel que $g_{t_0}(h_{\mathbb{R}}(\pi(u))) = h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$, voir la section 1 du chapitre 5 de cette thèse.

Théorème 5.5 (voir [27], Théorème 1.1)

Soit S une surface hyperbolique géométriquement infinie. Si le flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ admet au plus un nombre dénombrable de classes d'équivalence d'orbites irrégulières, alors les seuls éventuels ensembles $h_{\mathbb{R}}$ -minimaux sont ses orbites fermées.

Nous déduisons de ce théorème le corollaire suivant qui garantit l'inexistence d'ensembles $h_{\mathbb{R}}$ -minimaux sur Ω_h .

Corollaire 5.9 (voir [27], Corollaire 1.1)

Soit S une surface hyperbolique géométriquement infinie. Si aucune trajectoire horocyclique n'est fermée dans l'ensemble non-errant et si l'ensemble des classes d'équivalence des orbites irrégulières est au plus dénombrable, alors le flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$, en restriction à Ω_h , n'admet pas d'ensemble minimal.

En utilisant ce corollaire nous avons simplifié les exemples de Kulikov dans [40] en construisant de deux manières différentes des familles de surfaces hyperboliques de première espèce comme de seconde espèce sur lesquelles l'adhérence d'une orbite horocyclique $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ est

soit dense dans Ω_h , soit incluse dans l'image de $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ par le flot géodésique $g_{\mathbb{R}}$. Pour ces familles d'exemples, l'ensemble Ω_h n'admet pas d'ensembles $h_{\mathbb{R}}$ -minimaux, voir la section 2 du chapitre 5. Rappelons qu'un groupe fuchsien est de première espèce (respectivement de seconde espèce) si $\Omega_h = T^1S$ (respectivement $\Omega_h \subset T^1S$). Nous avons ainsi les deux résultats suivants.

Théorème 5.10 (voir [27], Théorème 4.1)

Il existe des groupes fuchsien Γ dont la restriction du flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ sur $\Gamma \backslash T^1\mathbb{D}$ à son ensemble non-errant Ω_h n'admet pas d'ensemble $h_{\mathbb{R}}$ -minimal. De plus, il existe $\pi(u_0) \in \Omega_h$ tel que

1. $h_{\mathbb{R}}(\pi(u_0))$ n'est pas fermé,
2. $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(u_0))} \subset g_{\mathbb{R}}h_{\mathbb{R}}(\pi(u_0))$
3. $\forall \pi(u) \in \Omega_h - g_{\mathbb{R}}h_{\mathbb{R}}(\pi(u_0)), \overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(u))} = \Omega_h$.

Théorème 5.29

Il existe des groupes fuchsien Γ de première espèce dont le flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ sur $T^1S = \Gamma \backslash T^1\mathbb{D}$ n'admet pas d'ensemble $h_{\mathbb{R}}$ -minimal et qui admet une infinité dénombrable de classes d'orbites irrégulières.

Plan de la thèse

Cette thèse comporte cinq chapitres : la plupart des résultats des trois premiers chapitres sont connus. Ils ont été introduits en fonction des besoins des deux derniers chapitres. Le chapitre 1 présente la géométrie d'un groupe fuchsien. Après avoir présenté deux modèles du plan hyperbolique nous avons étudié en détails les isométries qui conservent les angles orientés dans \mathbb{D} par la suite nous nous sommes attelés à décrire les groupes fuchsien.

Le chapitre 2 s'intéresse aux différentes manières de construction d'une surface hyperbolique : construction par quotient et celle par recollement d'objets géométriques tels que les pantalons hyperboliques.

Le chapitre 3 se focalise sur l'action d'un groupe fuchsien géométriquement infini Γ sur le bord à l'infini $\partial\mathbb{D}$. La structure d'un groupe fuchsien (la nature de ses éléments, leurs différents rapports,...) est intimement liée aux propriétés dynamiques de son action sur le cercle à l'infini $\partial\mathbb{D}$ et nombre de groupes fuchsien ont été obtenus par ce point de vue, voir [47]. Nous donnons une classification des points de l'ensemble limite de Γ .

Le chapitre 4 traite la dynamique topologique du flot horocyclique. Dans ce chapitre nous présentons un dictionnaire entre la nature des orbites horocycliques et celle des points de l'ensemble limite Λ . Avant cela nous étudions plusieurs points de vue du flot horocyclique :

géométrique, de groupe de Lie et d'action linéaire.

Le chapitre 5 est consacré à l'étude des ensembles minimaux pour le flot horocyclique. Dans ce chapitre nous énonçons et démontrons nos principaux résultats avec des exemples variés de flots horocycliques sans ensemble $h_{\mathbb{R}}$ -minimal. Les familles d'exemples sont construites explicitement en utilisant deux paramètres avec une description exhaustive des adhérences des orbites du flot horocyclique.

La dernière partie de ce manuscrit est une conclusion générale de cette thèse avec des perspectives liées aux questions soulevées.

Chapitre 1

Préliminaires de géométrie hyperbolique plane

Sommaire

1	Modèles du plan hyperbolique	6
2	Polygones hyperboliques	23
3	Classification des isométries positives du plan hyperbolique . .	26
4	Groupes fuchsien	31
5	Domaines fondamentaux d'un groupe fuchsien	33

1 Modèles du plan hyperbolique

De nombreux mathématiciens ont cherché à construire une géométrie qui contredit le cinquième postulat d'Euclide à savoir "*par un point, on ne peut mener qu'une droite et une seule droite parallèle à une droite donnée ne contenant pas ce point*". C'est grâce aux travaux de Gauss, Lobatchevski, Bolyai, Riemann,... que les géométries non-euclidiennes firent leur apparition. D'abord considérées comme des curiosités mathématiques, elles deviennent rapidement des outils fondamentaux de la physique théorique et plus tard des espaces propices d'étude en lien avec de nombreux domaines des mathématiques tels que les systèmes dynamiques auxquels nous nous intéressons. Cette thèse a pour cadre une de ces géométries non-euclidiennes : la géométrie hyperbolique en dimension deux. Elle admet plusieurs modèles parmi lesquels nous en retenons deux qui ont la particularité de conserver les angles euclidiens : le modèle du *disque de Poincaré* et celui du *demi-plan de Poincaré*.

1.1 Le modèle du disque de Poincaré

1.1.1 Présentation du modèle et de ses isométries

a) La métrique :

Le plus connu des modèles du plan hyperbolique est celui du disque de Poincaré, c'est le disque unité du plan complexe $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$

$$\mathbb{D} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

muni de la métrique riemannienne dite *hyperbolique*, donnée par :

$$ds^2 = \frac{4dzd\bar{z}}{(1 - z\bar{z})^2} = 4 \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}. \quad (1.1)$$

Cette métrique est déduite du produit scalaire sur l'espace tangent à \mathbb{D} en tout point z , $T_z\mathbb{D}$:

$$\langle u, v \rangle_z = \frac{1}{(1 - |z|^2)^2} \langle u, v \rangle$$

où $u, v \in T_z\mathbb{D}$ et $\langle u, v \rangle$ est le produit scalaire usuel. Pour plus de simplicité nous écrirons dans la suite \mathbb{D} au lieu de (\mathbb{D}, ds) . Notons qu'à l'aide de la métrique ds nous pouvons définir l'angle entre deux vecteurs tangents de \mathbb{D} en un même point. Soit $z \in \mathbb{D}$ et soient $u = (z, \vec{u}), v = (z, \vec{v}) \in T_z\mathbb{D}$. Nous définissons l'*angle* entre \vec{u} et \vec{v} comme étant le réel $\theta \in [0, \pi[$ vérifiant

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle_z}{\|u\|_z \cdot \|v\|_z}.$$

De plus l'*angle orienté* entre \vec{u} et \vec{v} , noté $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) \in]-\pi, \pi[$ est défini en posant d'une part

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\langle u, v \rangle_z}{\|u\|_z \cdot \|v\|_z}.$$

et d'autre part en imposant la condition $(\vec{u}, \vec{v}) > 0$ si et seulement si $u_1v_2 - u_2v_1 > 0$ où $\vec{u} = (u_1, u_2)_z$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)_z$.

Soit $ds_0^2 = dzd\bar{z} = dx^2 + dy^2$ la métrique euclidienne de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Comme ds^2 et ds_0^2 sont proportionnels en tout point de \mathbb{D} , alors la métrique ds est conforme puisque ds_0 l'est.

b) Les isométries de \mathbb{D} :

Parmi les transformations de \mathbb{D} il y a une classe particulière à laquelle nous allons nous intéresser : les isométries de \mathbb{D} .

Définition 1.1. Une *isométrie* de \mathbb{D} est une transformation de \mathbb{D} qui laisse la métrique ds^2 invariante. Une isométrie de \mathbb{D} est dite *isométrie positive* si elle conserve les angles orientés. Dans le cas contraire nous dirons que l'isométrie est une *isométrie négative*.

Proposition 1.2. 1. Les isométries positives de \mathbb{D} sont :

- les rotations de centre 0 ($z \mapsto e^{i\theta}z$, $\theta \in \mathbb{R}$),
- les restrictions à \mathbb{D} des transformations de \mathbb{C} du type :

$$\phi(z) = e^{i2\alpha} \frac{\bar{\beta}z + 1}{z + \beta}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{C}$ et $|\beta| > 1$.

2. Les isométries négatives de \mathbb{D} sont :

- les transformations $z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$, $\theta \in \mathbb{R}$,
- les restrictions à \mathbb{D} des transformations de \mathbb{C} du type :

$$\psi(z) = e^{2i\alpha} \frac{\bar{\beta}\bar{z} + 1}{\bar{z} + \beta}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{C}$ et $|\beta| > 1$.

Les isométries négatives de \mathbb{D} sont les composés d'une isométrie positive de \mathbb{D} par la conjugaison complexe $z \mapsto \bar{z}$.

Démonstration :

1. - Une première classe de transformations de \mathbb{C} conservant les angles orientés est celle des similitudes directes ($z \mapsto az + b$). Pour qu'une telle similitude laisse \mathbb{D} globalement invariant, il faut et il suffit que $|a| = 1$ et $b = 0$. Une telle similitude est donc une rotation de centre 0, $z \mapsto e^{i\theta}z$. Cette transformation laisse clairement ds^2 invariant, et est donc une isométrie positive de \mathbb{D} .
- On sait que les transformations holomorphes (conservant donc les angles orientés) de \mathbb{D} qui ne sont pas des similitudes directes sont des homographies $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ où a, b, c, d sont des nombres complexe tels que $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$, voir [56]. Soit donc $z' = \frac{az+b}{cz+d}$. On a $dz' = \frac{ad-bc}{c} \cdot \frac{dz}{(cz+d)^2}$ et :

$$\frac{dz'd\bar{z}'}{(1-|z'|)^2} = \frac{|ad-bc|^2}{|c|^2} \cdot \frac{dzd\bar{z}}{[(|c|^2 - |a|^2)z\bar{z} + (c\bar{d} - a\bar{b})z + (d\bar{c} - b\bar{a})\bar{z} - (|b|^2 - |d|^2)]^2}.$$

Pour que cette homographie soit une isométrie, il faut et il suffit que :

$$c\bar{d} - a\bar{b} = d\bar{c} - b\bar{a} = 0, \quad |c|^2 - |a|^2 = |b|^2 - |d|^2, \quad \frac{ad-bc|^2}{|c|^2(|c|^2 - |a|^2)^2} = 1.$$

La solution de ce système d'équations est $a = \bar{d}$, $b = \bar{c}$, $|c| = 1$.

En posant $c = e^{-i\alpha}$ et $d = \beta c$, on voit que de telles transformations du plan complexe laissant ds^2 invariant sont du type :

$$z \mapsto \phi(z) = e^{2i\alpha} \frac{\bar{\beta}\bar{z} + 1}{z + \beta}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}.$$

Pour que l'application ϕ laisse \mathbb{D} globalement invariant, il faut et il suffit que $|z| < 1$ implique que $|\phi(z)| < 1$, soit $|\bar{\beta}z + 1|^2 < |z + \beta|^2$. On a $|\bar{\beta}z + 1|^2 = |\beta|^2|z|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{\beta}z) + 1$ et $|z + \beta|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{\beta}z) + |\beta|^2$. Les inégalités ci-dessus deviennent alors $(|\beta|^2 - 1)(|z|^2 - 1) < 0$. Elles sont satisfaites si et seulement si $|\beta| > 1$.

2. La même démarche ci-dessus appliquée aux similitudes indirectes ($z \mapsto a\bar{z} + b$) et aux anti-homographies $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ où a, b, c, d sont des nombres complexes tels que $ad - bc \neq 0, c \neq 0$ montre que les isométries négatives de \mathbb{D} sont :

- la composée d'une rotation de centre 0 par une symétrie axiale d'axe passant par 0, $z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$,
- la composée de ϕ par la conjugaison complexe $z \mapsto \bar{z}$:

$$z \mapsto \psi(z) = e^{2i\alpha} \frac{\bar{\beta}\bar{z} + 1}{\bar{z} + \beta} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}.$$

□

La rotation de centre 0 et d'angle 2α s'écrit sous la forme $z \mapsto \frac{az+b}{bz+a}$ avec $a = e^{i\alpha}, b = 0$ et $|a|^2 - |b|^2 = 1$. De même l'isométrie positive $z \mapsto \phi(z) = e^{2i\alpha} \frac{\bar{\beta}z+1}{z+\beta}$ s'écrit également sous la forme $\phi(z) = \frac{az+b}{bz+a}$, avec $a = \frac{e^{i\alpha}\bar{\beta}}{\sqrt{|\beta|^2-1}}, b = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{|\beta|^2-1}}$ et $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Réciproquement, par un calcul, on montre que toute homographie de \mathbb{C} du type $z \mapsto \frac{az+b}{bz+a}$, avec $|a|^2 - |b|^2 = 1$, induit sur \mathbb{D} une isométrie positive. On a donc la proposition suivante :

Proposition 1.3. a) *Les isométries positives de \mathbb{D} sont les restrictions à \mathbb{D} des homographies complexes de \mathbb{C} du type $z \mapsto \frac{az+b}{bz+a}$ avec $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Elles forment un groupe noté $\operatorname{Isom}^+(\mathbb{D})$.*

b) *Les isométries négatives de \mathbb{D} sont les restrictions à \mathbb{D} des anti-homographies complexes de \mathbb{C} du type $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{b\bar{z}+a}$ avec $|a|^2 - |b|^2 = 1$.*

1.1. 2 Distance et Géodésiques

Définition 1.4. *Soient $I = [a; b] \subset \mathbb{R}$ et $c : I \rightarrow \mathbb{D}$ une courbe paramétrée, différentiable par morceaux :*

$$c(I) = \{z(t) = x(t) + iy(t) \in \mathbb{D} / t \in I\},$$

La longueur hyperbolique de c notée $l(c)$ est définie par :

$$l(c) = \int_a^b \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = \int_a^b 2 \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{1 - (x(t))^2 - (y(t))^2} dt. \quad (1.2)$$

Définition 1.5. *La distance hyperbolique, notée ρ , induite par la métrique hyperbolique*

entre deux points z et z' de \mathbb{D} est définie par :

$$\rho(z, z') := \inf_c l(c), \quad (1.3)$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des courbes c différentiables par morceaux incluses dans \mathbb{D} reliant z et z' .

On remarquera que pour tout $g \in \text{Isom}^+(\mathbb{D})$,

$$l(g(c)) = l(c) \text{ et } \rho(g(z), g(z')) = \rho(z, z').$$

Définition 1.6. Une **géodésique** de \mathbb{D} est une courbe différentiable par morceaux $c : I =]a, b[\rightarrow \mathbb{D}$ telle que pour tout couple de points distincts sur $c(I)$, la courbe c réalise la borne inférieure des longueurs des courbes passant par ces deux points. C'est-à-dire,

$$\forall t_1, t_2 \in]a, b[, \rho(c(t_1), c(t_2)) = l[c(t_1), c(t_2)]$$

où $l[c(t_1), c(t_2)]$ désigne la longueur hyperbolique entre les points $c(t_1)$ et $c(t_2)$.

Le théorème suivant nous donne la description géométrique des géodésiques de \mathbb{D} .

Théorème 1.7. Les géodésiques de \mathbb{D} sont les demi-cercles euclidiens de \mathbb{D} orthogonaux à $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{D} : |z| = 1\}$ et les diamètres euclidiens de \mathbb{D} .

Démonstration :

Tout d'abord, montrons que le diamètre euclidien $] -1, 1[= \mathbb{R} \cap \mathbb{D}$ est une géodésique de \mathbb{D} . Soient a et b deux nombres réels tels que $-1 < a < b < 1$. Considérons un arc de courbe c d'équation $z(x) = x + iy(x)$ joignant a à b , donc tel que $y(a) = y(b) = 0$. Nous avons

$$l(c) = \int_a^b \frac{2\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{1 - x^2 - y^2} dx \geq \int_a^b \frac{2}{1 - x^2 - y^2} dx \geq \int_a^b \frac{2}{1 - x^2} dx = \left[\ln \frac{1+x}{1-x} \right]_a^b.$$

puisque $\left[\ln \frac{1+x}{1-x} \right]_a^b$ est la longueur du segment $[a, b]$ ce segment $[a, b]$ minimise la distance entre a et b . Soit maintenant c une géodésique reliant a et b . La première inégalité ci-dessus est donc une égalité et nous en déduisons que la coordonnée $y(x)$ de c est constante et est égale à 0. D'où l'unique géodésique reliant a et b est le diamètre $] -1, 1[$ de \mathbb{D} .

Les rotations de centre O étant des isométries, elles transforment toute géodésique en une géodésique, donc tous les diamètres de \mathbb{D} sont des géodésiques.

Considérons un arc de cercle α orthogonal à \mathbb{S}^1 en ses extrémités. Quitte à effectuer une rotation de centre O , on peut supposer que son centre est sur l'axe réel négatif. Soient I et I' les points d'affixes i et $-i$, A et A' les extrémités de α , voir 1.1. Soit Ω le point

lique. Soient deux courbes différentiables α_1 et α_2 qui se coupent en un point z de \mathbb{D} . En choisissant des paramétrisations appropriées des courbes α_1 et α_2 , on peut supposer que $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = z$.

Définition 1.8. *L'angle orienté entre les courbes α_1 et α_2 qui se coupent au point z est défini comme étant l'angle formé par les vecteurs $\vec{v}_1 = \alpha_1'(0)$ et $\vec{v}_2 = \alpha_2'(0)$ modulo π .*

1.1.3 Actions du groupe $Isom^+(\mathbb{D})$ sur \mathbb{D} et $T^1\mathbb{D}$

Dans cette sous-section nous décrivons l'action de $Isom^+(\mathbb{D})$ sur \mathbb{D} et sur le fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{D}$ de \mathbb{D} puis nous définirons une distance sur $T^1\mathbb{D}$ avant de donner des formules explicites de la distance ρ sur \mathbb{D} .

Proposition 1.9. *L'action de $Isom^+(\mathbb{D})$ sur \mathbb{D} est transitive.*

Démonstration :

Il suffira de montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$, il existe $g \in Isom^+(\mathbb{D})$, avec $g(w) = \frac{aw+b}{bw+a}$, tel que $g(0) = z$. On vérifie que l'élément g tel que $a = \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}$ et $b = \frac{z}{\sqrt{1-|z|^2}}$ convient.

□

Le fibré tangent à \mathbb{D} , $T\mathbb{D} = \cup_{z \in \mathbb{D}} T_z\mathbb{D}$ est la réunion des espaces tangents à \mathbb{D} , $T_z\mathbb{D}$. Le fibré unitaire tangent est défini par $T^1\mathbb{D} = \{u = (z, \vec{u}) \in T\mathbb{D} / \|\vec{u}\| = 1\}$. L'action de $Isom^+(\mathbb{D})$ se prolonge sur $T^1\mathbb{D}$ de la façon suivante.

Définition 1.10. *L'action de $Isom^+(\mathbb{D})$ sur $T^1\mathbb{D}$ est définie par :*

$$g.u = g.(z, \vec{u}) = (g(z), T_z g(\vec{u})) = (g(z), g'(z)\vec{u})$$

où $g \in Isom^+(\mathbb{D})$, $(z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{D}$ et $T_z g$ est la différentielle de g au point z .

Si $\vec{u} \in T_z\mathbb{D}$ est un vecteur tangent au point z son image par $T_z g$ est $g'(z)\vec{u}$, c'est-à-dire le vecteur tangent à $g(z)$ obtenu en tournant \vec{u} d'un angle égal à $\arg(g'(z))$ puis en le multipliant par le réel $|g'(z)|$.

Proposition 1.11. *Le groupe $Isom^+(\mathbb{D})$ agit simplement transitivement sur $T^1\mathbb{D}$.*

Démonstration :

Soient $u, v \in T^1\mathbb{D}$. Supposons $u = (0, \vec{u})$ et $v = (z, \vec{v})$. D'après la proposition 1.9 il existe un élément γ de $Isom^+(\mathbb{D})$ tel que $\gamma(0) = z$. Notons 2θ la mesure de l'angle $(T_0\gamma(u), v)$. Soit r la rotation de centre 0 et d'angle θ . Nous avons : $\gamma \circ r(u) = v$, donc $Isom^+(\mathbb{D})$ agit transitivement sur $T\mathbb{D}$. Par ailleurs si $g(u) = u$ alors $g(z) = e^{i\alpha}z$. La différentielle de g

en 0 est la rotation vectorielle d'angle -2α et $T_0g(u) = u$ donc $g = Id$. Ceci montre que $Isom^+(\mathbb{D})$ agit simplement transitivement sur $T^1\mathbb{D}$.

□

Lemme 1.12. *Soient α et β deux géodésiques de \mathbb{D} . Il existe une isométrie positive g de \mathbb{D} envoyant α sur β .*

Démonstration :

Soit $L =] -i, i[$ le diamètre des imaginaires de \mathbb{D} . Il suffit de montrer qu'il existe une isométrie positive de \mathbb{D} envoyant L sur β . Si β est un diamètre alors la rotation de centre 0 et d'angle l'angle orienté (L, β) formé par les diamètres L et β est une isométrie positive g de \mathbb{D} qui envoie L sur β .

Supposons maintenant que β est un demi-cercle orthogonal à \mathbb{S}^1 . Nous avons vu au cours de la démonstration du théorème 1.7 qu'il existe une inversion ψ envoyant L sur β , ce qui termine la preuve.

□

Proposition 1.13. *Soit un élément $u = (z, \vec{u})$ de $T^1\mathbb{D}$. Il existe une et une seule géodésique de \mathbb{D} passant par z et tangent au vecteur \vec{u} .*

Démonstration :

Si le vecteur \vec{u} est porté par un diamètre de \mathbb{D} alors le diamètre passant par z est une géodésique tangente à \vec{u} et il n'y a pas d'autre tel diamètre ni de demi-cercle orthogonal à \mathbb{S}^1 et tangent à \vec{u} .

Si \vec{u} n'est pas porté par un diamètre de \mathbb{D} , puisque l'action de $Isom^+(\mathbb{D})$ sur \mathbb{D} est transitive il existe une isométrie positive h telle que $h(z) = 0$. Soit r la rotation de centre 0 qui amène le vecteur \vec{u} sur un vecteur \vec{v} d'un diamètre α de \mathbb{D} . Nous avons $r \circ h(z, \vec{u}) = (0, \vec{v})$. D'après la première partie de cette démonstration le diamètre α est l'unique géodésique de \mathbb{D} passant par 0 et tangent au vecteur \vec{v} . L'isométrie positive $h^{-1} \circ r^{-1}$ envoie le diamètre α sur un unique demi-cercle de \mathbb{D} perpendiculaire à \mathbb{S}^1 . Cette géodésique passe par z et est tangent au vecteur \vec{u} . D'où le résultat.

□

Remarque 1.14. *Puisqu'un élément de $T^1\mathbb{D}$ définit une unique géodésique alors d'après la proposition 1.11 l'action de $Isom^+(\mathbb{D})$ sur l'ensemble des géodésiques de \mathbb{D} est transitive.*

On déduit de l'action transitive de $Isom^+(\mathbb{D})$ sur l'ensemble des géodésiques de \mathbb{D} la proposition suivante, capitale entre autre dans la sous-section 4.2 du chapitre 2.

Proposition 1.15. (voir [14] th.1.1.5 et th.1.1.6)

1. Si $\tilde{\alpha}$ est une géodésique et z est un point de \mathbb{D} n'appartenant pas à $\tilde{\alpha}$ alors il existe une unique géodésique passant par z et perpendiculaire à $\tilde{\alpha}$.
2. Si $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ sont deux géodésiques disjointes, alors il existe une unique géodésique perpendiculaire à $\tilde{\alpha}$ et à $\tilde{\beta}$.

Définissons maintenant une distance sur $T^1\mathbb{D}$. Pour tout $u \in T^1\mathbb{D}$ on note $(u(t))_{t \in \mathbb{R}}$ le paramétrage par longueur d'arc de la géodésique définie par u .

Proposition 1.16. L'application $D : T^1\mathbb{D} \times T^1\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$D(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \rho(u(t), v(t)) dt \quad (1.4)$$

où ρ est la distance hyperbolique sur \mathbb{D} , est une distance sur $T^1\mathbb{D}$ invariante par $Isom^+(\mathbb{D})$.

Démonstration :

En posant $f(t) = e^{-|t|} \rho(u(t), v(t))$ nous avons d'un côté $0 \leq f(t) \leq (2|t| + \rho(u(0), v(0)))e^{-|t|}$. Donc la fonction f est intégrable sur \mathbb{R} . Et de l'autre côté en utilisant le fait que ρ est une distance invariante par $Isom^+(\mathbb{D})$ nous avons pour tous u, v et w appartenant à $T^1\mathbb{D}$ et $g \in Isom^+(\mathbb{D})$:

- $D(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$,
- $D(u, v) \leq D(u, w) + D(w, v)$,
- $D(u, v) = D(v, u)$ et
- $D(gu, gv) = D(u, v)$.

D'où l'application D est une distance sur $T^1\mathbb{D}$, invariante par $Isom^+(\mathbb{D})$.

□

Pour terminer cette sous-section donnons deux formules explicites de la distance ρ sur \mathbb{D} .

Proposition 1.17. Sur \mathbb{D} nous avons pour tous w_1 et w_2 :

1. $\rho(w_1, w_2) = \ln \left(\frac{|1 - w_2 \bar{w}_1| + |w_2 - w_1|}{|1 - w_2 \bar{w}_1| - |w_2 - w_1|} \right)$,
2. $\sinh^2 \left[\frac{1}{2} \rho(w_1, w_2) \right] = \frac{|w_1 - w_2|^2}{(1 - |w_1|^2)(1 - |w_2|^2)}$.

Démonstration :

1. Posons d'abord $w_1 = 0$ et $w_2 = w$. Soient α le segment géodésique $[0, w]$ et les coordonnées polaires (r, θ) dans \mathbb{D} . Nous avons $dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$.

$$l(\alpha) = \int_0^{|w|} \frac{2}{1 - r^2} \sqrt{\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2} dt \geq \int_0^{|w|} \frac{2}{1 - r^2} dr = \ln \left(\frac{1 + |w|}{1 - |w|} \right)$$

Puisque α est un segment géodésique, il minimise la distance entre deux de ses points et alors nous avons $\rho(0, w) = \ln \left(\frac{1+|w|}{1-|w|} \right)$.

Considérons maintenant l'application $g(w) = \frac{w-w_1}{1-w\bar{w}_1}$, $w \in \mathbb{D}$. L'application g est une isométrie positive de \mathbb{D} envoyant w_1 sur 0. Nous avons

$$\rho(w_1, w_2) = \rho(g(w_1), g(w_2)) = \rho(0, g(w_2)) = \ln \left(\frac{1 + |g(w_2)|}{1 - |g(w_2)|} \right).$$

En remplaçant $g(w_2)$ par son expression nous obtenons

$$\rho(w_1, w_2) = \ln \left(\frac{|1 - w_2\bar{w}_1| + |w_2 - w_1|}{|1 - w_2\bar{w}_1| - |w_2 - w_1|} \right).$$

2. La deuxième égalité découle de la première et de la définition de $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

□

1.1. 4 Compactification du disque de Poincaré

La topologie induite par la métrique hyperbolique ds est la même que celle induite par la métrique euclidienne ds_0 . En effet le cercle hyperbolique $\mathcal{C}(w, r) = \{z / \rho(w, z) = r\}$ est le cercle euclidien de diamètre $\left[a + ib \exp(r), a + ib \exp(-r) \right]$ avec $w = a + ib$. Pour cette topologie le disque de Poincaré \mathbb{D} n'est pas compact. On peut le compactifier en lui ajoutant un bord à l'infini $\partial\mathbb{D} = \mathbb{S}^1$ et on pose $\bar{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$. Un ouvert V de $\mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$ est défini comme étant la trace d'un ouvert euclidien U de \mathbb{R}^2 dans $\mathbb{D} \cup \mathbb{S}^1$: $V = U \cap (\mathbb{D} \cup \mathbb{S}^1)$.

Définition 1.18. Soit A un ensemble inclus dans $\bar{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$. La frontière de A dans $\bar{\mathbb{D}}$ est $\partial A = \bar{A} \setminus \text{Int}(A)$. On appelle **bord à l'infini** de A l'ensemble défini par $\partial A \cap \partial\mathbb{D}$.

Le bord à l'infini d'une géodésique complète $\tilde{\alpha} = (\xi, \eta)$ est un ensemble à deux éléments : les extrémités de la géodésique ξ et η . La définition suivante permet de distinguer ces deux extrémités.

Définition 1.19. Soit $(\tilde{\alpha}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ un paramétrage par longueur d'arc de la géodésique $\tilde{\alpha}$. Posons $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\alpha}(t) = \tilde{\alpha}(+\infty)$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{\alpha}(t) = \tilde{\alpha}(-\infty)$ alors les points $\tilde{\alpha}(+\infty)$ et $\tilde{\alpha}(-\infty)$ sont respectivement appelés **extrémité positive** et **extrémité négative** de $\tilde{\alpha}$ paramétrée par $(\tilde{\alpha}(t))$ et $(\tilde{\alpha}(-\infty), \tilde{\alpha}(+\infty))$ est dite **géodésique orientée** de $\tilde{\alpha}(-\infty)$ vers $\tilde{\alpha}(+\infty)$.

Soient $v = (z, \vec{v}) \in T^1\mathbb{D}$ et $(\tilde{\alpha}(t))$ le paramétrage par unité de longueur d'arc de l'unique géodésique passant par z dont la tangente en ce point a pour direction celle de \vec{v} tel que

$$\tilde{\alpha}(0) = z \text{ et } \frac{d\tilde{\alpha}}{dt}(0) = \vec{v}$$

Posons $v^+ = \tilde{\alpha}(+\infty)$ et $v^- = \tilde{\alpha}(-\infty)$ et (v^-, v^+) est la géodésique orientée de v^- vers v^+ .

Action de $Isom^+(\mathbb{D})$ sur $\partial\mathbb{D}$

L'action du groupe $Isom^+(\mathbb{D})$ sur \mathbb{D} se prolonge en une action par homeomorphisme sur $\partial\mathbb{D}$ définie par $h(w) = \frac{aw+b}{bw+a}$ pour $w \in \partial\mathbb{D}$. Puisque deux points de $\partial\mathbb{D}$ définissent une géodésique de \mathbb{D} et $Isom^+(\mathbb{D})$ agit transitivement sur l'ensemble des géodésiques de \mathbb{D} alors le groupe $Isom^+(\mathbb{D})$ agit doublement transitivement sur $\partial\mathbb{D}$.

1.2 Le modèle du demi-plan de Poincaré

1.2.1 Présentation du modèle et de ses isométries

Soit \mathbb{H} le demi-plan complexe $\{z \in \mathbb{C} / Imz > 0\}$. Si l'on applique à \mathbb{H} l'inversion de pôle $-i$ et de puissance 2, puis la symétrie par rapport à l'axe réel, on obtient une transformation conforme (positive) de \mathbb{H} sur \mathbb{D} . L'image de $z \in \mathbb{H}$ par cette transformation Φ est :

$$\Phi(z) = \frac{iz + 1}{z + i}.$$

on en déduit une expression de $z \in \mathbb{H}$ en fonction de $w = \Phi(z) \in \mathbb{D}$. La métrique sur \mathbb{H} déduite de celle de \mathbb{D} par Φ est :

$$ds^2 = \frac{4dw d\bar{w}}{(1 - w\bar{w})^2} = \frac{dzd\bar{z}}{(Imz)^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Par construction, le demi-plan \mathbb{H} muni de la métrique $ds^2 = \frac{dzd\bar{z}}{(Imz)^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ est une surface riemannienne isométrique à \mathbb{D} . C'est le modèle du *demi-plan de Poincaré*.

Les isométries de \mathbb{H} s'obtiennent à partir de celle de \mathbb{D} par conjugaison par Φ . Les isométries positives (resp. négatives) de \mathbb{H} sont donc les $\Phi^{-1} \circ \phi \circ \Phi$ (resp $\Phi^{-1} \circ \psi \circ \Phi$) où ϕ (resp ψ) est une isométrie positive (resp. négative) de \mathbb{D} .

Théorème 1.20. *Les isométries positives de \mathbb{H} (qui perservent l'orientation) sont les homographies réelles ϕ de la forme*

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

où a, b, c, d sont des réels tels que $ad - bc = 1$.

Les isométries négatives de \mathbb{H} (qui renversent l'orientation) sont les anti-homographies ψ de la forme

$$\psi(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d},$$

où a, b, c, d sont des réels tels que $ad - bc = -1$.

1.2.2 Distance et géodésiques

De la même manière que sur \mathbb{D} , si $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ une courbe paramétrée différentiable par morceaux, on définit la *longueur hyperbolique* de c notée $l(c)$ par :

$$l(c) = \int_a^b \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt = \int_a^b \frac{|dz|}{\operatorname{Im}z(t)} dt \text{ où } c(t) = x(t) + iy(t).$$

La *distance hyperbolique* ρ induite par la métrique hyperbolique entre deux points z et z' de \mathbb{H} est définie par :

$$\rho(z, z') := \inf_c l(c),$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des courbes c différentiables par morceaux incluses dans \mathbb{H} reliant z et z' .

Dans le modèle du demi-plan de plan Poincaré \mathbb{H} les *géodésiques* sont les *demi-cercles orthogonaux à l'axe réel \mathbb{R}* et les *demi-droites verticales*.

1.2.3 Actions du groupe $\operatorname{Isom}^+(\mathbb{H})$

Proposition 1.21. *L'action du groupe $\operatorname{Isom}^+(\mathbb{H})$ sur \mathbb{H} et sur $T^1\mathbb{H}$ est simplement transitive.*

L'action de $\operatorname{Isom}^+(\mathbb{H})$ est également transitive sur l'ensemble des géodésiques de \mathbb{H} .

La proposition suivante est l'analogie de celle de 1.17 dans le modèle \mathbb{H} .

Proposition 1.22. *Pour tous $z, z' \in \mathbb{H}$*

$$\rho(z, z') = \ln \left[\frac{|z - \bar{z}'| + |z - z'|}{|z - \bar{z}'| - |z - z'|} \right] \quad (1.5)$$

$$\sinh\left[\frac{1}{2}d(z, z')\right] = \frac{|z - z'|}{2(\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z'))^{\frac{1}{2}}} \quad (1.6)$$

1.2.4 Compactification du plan hyperbolique

a) Compactification :

On compactifie \mathbb{H} en lui ajoutant un bord à l'infini $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et on pose $\bar{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$. Un ouvert $V(z)$ de $z \in \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ est défini comme étant ou bien la trace d'un ouvert U de \mathbb{R}^2 dans $\mathbb{H} \cup \mathbb{R} : V = U \cap (\mathbb{H} \cup \mathbb{R})$ ou bien la réunion du point ∞ et du complémentaire d'un compact K de $\mathbb{H} \cup \mathbb{R} : V = (\mathbb{H} \cup \mathbb{R} \setminus K) \cup \{\infty\}$.

L'action du groupe $\operatorname{Isom}^+(\mathbb{H})$ sur \mathbb{H} se prolonge en une action par homeomorphisme sur $\partial\mathbb{H}$ définie, pour $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ et $x \in \partial\mathbb{H}$, par :

Si $c = 0$, alors $h(\infty) = \infty$ et $h(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$

Si $c \neq 0$, alors $h(\infty) = \frac{a}{c}$, $h(\frac{-d}{c}) = \infty$, si $x \neq \frac{-d}{c}$, alors $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

b) Action projective :

La droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{R}^2 . Plus précisément $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} / \sim$ avec $(a,b) \sim (a',b') \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0, (a,b) = \lambda(a',b')$. Ainsi un élément de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est défini par une classe de couple de réels $\mathbb{R}^*(a,b) \neq \{(0,0)\}$.

On identifie $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ à $\partial\mathbb{H}$ à l'aide de l'application suivante :

$$\psi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \partial\mathbb{H}$$

$$\begin{cases} \mathbb{R}^*(a,b) \mapsto x = \frac{a}{b} \text{ si } b \neq 0, \\ \mathbb{R}^*(a,0) \mapsto x = \infty. \end{cases}$$

L'action projective de $Isom^+(\mathbb{H})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est définie par

$$Isom^+(\mathbb{H}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

$$(g, (x, 1)) \mapsto \left(\frac{ax+b}{cx+d}, 1 \right)$$

où $g \in Isom^+(\mathbb{H})$ et $(x, 1) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ avec les conventions usuelles

- si $c = 0$, $g(\infty) = \infty$;
- si $c \neq 0$, $g(\infty) = \frac{a}{c}$ et $g(\frac{-d}{c}) = \infty$.

On vérifie que l'action projective de $Isom^+(\mathbb{H})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est conjuguée par ψ à l'action par homographie de $Isom^+(\mathbb{H})$ sur $\partial\mathbb{H}$.

La proposition suivante décrit l'action de $Isom^+(\mathbb{H})$ sur le bord à l'infini de \mathbb{H} .

Proposition 1.23. *Soient deux triplets de points distincts (x_1, x_2, x_3) et (x'_1, x'_2, x'_3) de $\partial\mathbb{H}$ il existe un unique élément h de $Isom^+(\mathbb{H})$ différent de l'identité tel que $h(x_1) = x'_1$, $h(x_2) = x'_2$ et $h(x_3) = x'_3$.*

Démonstration :

Posons $(x'_1, x'_2, x'_3) = (0, 1, \infty)$. Dans ce cas l'application $x \mapsto \frac{x-x_1}{x-x_3} \cdot \frac{x_2-x_3}{x_2-x_1}$ convient.

Montrons que si un élément de $Isom^+(\mathbb{H})$ fixe trois points distincts de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ alors c'est l'identité. En effet de $g(x_i) = \frac{ax_i+b}{cx_i+d} = x_i$ avec $ad - bc = 1$ et $i = 1, 2, 3$ nous avons :

$$cx_i^2 + (d - c)x_i - b = 0.$$

En résolvant ce système nous obtenons $c = 0$, $a = d$ puis $b = 0$. Donc $g(x) = x$ pour tout x de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ie $g = Id$.

Par suite s'il existe deux éléments de $Isom^+(\mathbb{H})$ tels que :

- $g(x_1) = h(x_1)$
- $g(x_2) = h(x_2)$
- $g(x_3) = h(x_3)$

alors $h^{-1} \circ g = Id$. D'où $h = g$.

□

1.3 Cocycle de Busemann et Horocycle

1.3.1 Cocycle de Busemann

Soient $z_0 \in \mathbb{H}$, $\xi \in \partial\mathbb{H}$ et $(r(t))_{t \geq 0}$ une paramétration par longueur d'arc du rayon géodésique $[z_0, \xi)$. Pour tout point z de \mathbb{H} posons

$$f(t) = \rho(z_0, r(t)) - \rho(z, r(t)) = t - \rho(z, r(t)). \quad (1.7)$$

La fonction f est majorée car $|f(t)| = |\rho(z_0, r(t)) - \rho(z, r(t))| \leq \rho(z_0, z)$. Nous avons aussi pour tous réels s et t tels que $t \geq s$, $\rho(z, r(t)) \leq \rho(r(t), r(s)) + \rho(r(s), z) \leq t - s + \rho(r(s), z)$, ce qui implique que $s - \rho(r(s), z) \leq t - \rho(r(t), z)$ c'est-à-dire $f(t) \geq f(s)$. Ainsi la fonction f est croissante et majorée donc elle admet une limite finie en $+\infty$.

Définition 1.24. On appelle *cocycle de Busemann* centré en ξ , calculé en z_0 et z , notée $\beta_\xi(z_0; z)$ la quantité :

$$\beta_\xi(z_0; z) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [t - \rho(z, r(t))].$$

Notons que le cocycle de Busemann se définit de la manière sur \mathbb{D} . Le cocycle de Busemann vérifie les propriétés suivantes :

Propriétés 1.25. Soient $z, z' \in \mathbb{H}$ et $\xi \in \partial\mathbb{H}$. On a :

- (a) $\beta_\xi(z; z') = \beta_\xi(z; z'') + \beta_\xi(z''; z')$ pour tous z, z' et z'' éléments de \mathbb{H} (cocyclicité),
- (b) $\beta_\xi(z, z') = -\beta_\xi(z', z)$ (antisymétrie),
- (c) $\beta_\xi(z, z') \leq \rho(z, z')$ (lipschitzienne),
- (d) $\beta_{g\xi}(g.z; g.z') = \beta_\xi(z; z')$ pour tout $g \in G = \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ et pour tous z et z' éléments de \mathbb{H} (invariance par isométries).

Démonstration :

Soit $(r(t))$ le paramétrage par unité de longueur d'arc d'un rayon géodésique $[z, \xi)$.

- (a) La première propriété résulte de la définition car $\beta_\xi(z, z') = \lim_{t \rightarrow +\infty} [\rho(z, r(t)) - \rho(z'', r(t)) + \rho(z'', r(t)) - \rho(z', r(t))] = \beta_\xi(z, z'') + \beta_\xi(z'', z')$.

(b) Cette propriété résulte de la première ci-dessus. On a $\beta_\xi(z, z') + \beta_\xi(z', z) = \beta_\xi(z, z) = 0$.

(c) Cette propriété résulte de l'inégalité triangulaire, $\rho(z, r(t)) \leq \rho(z, z') + \rho(z', r(t))$.

(d) Cette dernière propriété résulte de l'invariance de la distance ρ par $Isom^+(\mathbb{H})$.

□

Etablissons des formules du cocycle de Busemann, commode pour les calculs dans la suite. Pour cela nous allons donner d'abord des expressions du rayon euclidien d'un cercle de \mathbb{D} (ou de \mathbb{H}) tangent au bord à l'infini $\partial\mathbb{D}$ (ou $\partial\mathbb{H}$).

Plaçons-nous sur \mathbb{D} , soient $w \in \mathbb{D}$ et $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$. Le cercle passant par w tangent à $\partial\mathbb{D}$ en $e^{i\theta}$ est le cercle $\mathcal{C}(w_0, R)$ de centre euclidien w_0 et de rayon euclidien R tel que : $w_0 = (1-R)e^{i\theta}$ et $|w - w_0|^2 = R^2$. Nous avons donc

$$R = \frac{|w - e^{i\theta}|^2}{2(1 - Re(e^{-i\theta}w))}. \quad (1.8)$$

Sur \mathbb{H} le rayon euclidien R d'un cercle passant par un point $z \in \mathbb{H}$ et tangent au point $x \in \mathbb{R}$ est égal à

$$R = \frac{|z - x|^2}{2Im(z)}. \quad (1.9)$$

La proposition suivante donne des formules du cocycle de Busemann en fonction de rayons euclidiens des cercles du plan hyperbolique.

Proposition 1.26. – Pour tous points z et z_0 de \mathbb{H} et $x \in \mathbb{R}$ nous avons :

$$\beta_x(z_0, z) = \ln \left(\frac{|z_0 - x|^2}{|z - x|^2} \times \frac{Im(z)}{Im(z_0)} \right) = \ln \left(\frac{R_0}{R} \right) \quad (1.10)$$

où R_0 et R sont les rayons euclidiens respectifs des cercles de \mathbb{H} tangents à la droite des réels en x et passant respectivement à z_0 et z .

Si $x = \infty$ nous avons

$$\beta_\infty(z_0, z) = \ln \left(\frac{Im(z)}{Im(z_0)} \right). \quad (1.11)$$

– Pour tous points w et w_0 appartenant à \mathbb{D} et $e^{i\theta_0} \in \partial\mathbb{D}$ nous avons :

$$\beta_{e^{i\theta_0}}(w_0, w) = \ln \left[\frac{|w_0 - e^{i\theta_0}|^2}{1 - |w_0|^2} \times \frac{1 - |w|^2}{|w - e^{i\theta_0}|^2} \right]. \quad (1.12)$$

Et si $w_0 = 0$ nous avons

$$\beta_{e^{i\theta_0}}(0, w) = \ln \left(\frac{1 - |w|^2}{|w - e^{i\theta_0}|^2} \right) = \ln \left(\frac{1 - R}{R} \right). \quad (1.13)$$

Démonstration :

Soit $(r(t))$ le paramétrage par unité de longueur d'arc du rayon géodésique $[z_0, x)$ de \mathbb{H} .

Si $x = \infty$ et $z_0 = i$ alors $r(t) = ie^t$ et

$$f(t) = \rho(i, r(t)) - \rho(z, r(t)) = t - \rho(z, ie^t) = t - 2 \arg \sinh \frac{|ie^t - z|}{2[Im(z)e^t]^{\frac{1}{2}}}.$$

Si $x \neq \infty$ alors il existe une isométrie $g \in Isom^+(\mathbb{H})$ telle que $g(x) = \infty$ et $g(i) = z_0 = x_0 + iy_0$. Nous avons

$$r(t) = \frac{iy_0xe^t + xx_0 - |z_0|^2}{iy_0e^t + x - x_0}.$$

Pour tout $z \in \mathbb{H}$,

$$f(t) = \rho(z_0, r(t)) - \rho(z, r(t)) = t - \rho(z, r(t)) = t - 2 \arg \sinh \frac{|r(t) - z|}{2[Im(z)Im(r(t))]^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\text{Or } \arg \sinh \frac{|r(t) - z|}{2[Im(z)Im(r(t))]^{\frac{1}{2}}} = \ln \left[\frac{|z - r(t)|}{2[Im(z)Im(r(t))]^{\frac{1}{2}}} + \sqrt{\frac{|r(t) - z|^2}{4[Im(z)Im(r(t))]^2} + 1} \right].$$

Après calcul, simplification, majoration et équivalence à l'infini on obtient

$$\beta_x(z_0, z) = \ln \left(\frac{|z_0 - x|^2}{|z - x|^2} \times \frac{Im(z)}{Im(z_0)} \right).$$

Dans cette égalité lorsqu'on fait tendre x vers l'infini ($\pm\infty$) nous obtenons

$$\beta_\infty(z_0, z) = \ln \left(\frac{Im(z)}{Im(z_0)} \right).$$

D'après l'égalité 1.9 si $x \neq \infty$ nous avons

$$\beta_x(z_0, z) = \ln \left(\frac{R_0}{R} \right).$$

Sur le disque de Poincaré \mathbb{D} en posant $\Phi(z_0) = w_0$ et $\Phi(z) = w$ où Φ est l'application définie de \mathbb{H} dans \mathbb{D} qui à z associe $w = \frac{iz+1}{z+i}$, on obtient :

$$\beta_{e^{i\theta_0}}(w_0, w) = \ln \left[\frac{|w_0 - e^{i\theta_0}|^2}{1 - |w_0|^2} \times \frac{1 - |w|^2}{|w - e^{i\theta_0}|^2} \right].$$

Et si $w_0 = 0$, on obtient :

$$\beta_{e^{i\theta_0}}(0, w) = \ln \left(\frac{1 - |w|^2}{|w - e^{i\theta_0}|^2} \right) = \ln \left(\frac{1 - R}{R} \right).$$

□

1.3.2 Horocycle

Dans cette sous-section on définit à l'aide du cocycle de Busemann des lignes de niveau du plan hyperbolique au coeur de cette thèse.

Définition 1.27. Soient $\xi \in \partial\mathbb{H}$ et $z \in \mathbb{H}$. On appelle **horocycle** centré en ξ passant par z , noté $\mathcal{O}_\xi(z)$ la ligne de niveau défini par

$$\mathcal{O}_\xi(z) = \{z' \in \mathbb{H} / \beta_\xi(z; z') = 0\}$$

On appelle **horodisque** associé à l'horocycle $\mathcal{O}_\xi(z)$, noté $\mathcal{O}_\xi^+(z)$ l'ensemble défini par

$$\mathcal{O}_\xi^+(z) = \{z' \in \mathbb{H} / \beta_\xi(z; z') \geq 0\}.$$

Notons qu'un horocycle et un horodisque se définissent de la manière sur \mathbb{D} .

Lemme 1.28. L'image par un élément g de $Isom(\mathbb{H})$ d'un cercle tangent à \mathbb{R} ou d'une droite horizontale de \mathbb{H} est un cercle tangent à \mathbb{R} ou une droite horizontale de \mathbb{H} .

Démonstration :

Ce lemme résulte du fait qu'un élément $g \in Isom(\mathbb{H})$ s'écrit sous la forme de composées d'homothéties, de translations et d'inversions et que ces transformations préservent la famille des cercles tangents à \mathbb{R} et des droites horizontales de \mathbb{H} . En effet si $c = 0$, alors $g(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, donc g est la composée d'une translation et d'une homothétie. Et si $c \neq 0$, nous avons : $g(z) = \frac{a}{c} - \frac{\lambda}{cz+d}$ avec $\lambda = \frac{ad-bc}{c}$. Donc g est la composée de deux translations, d'une inversion et d'une homothétie.

□

Proposition 1.29. Dans \mathbb{D} les horocycles sont les cercles tangents à $\partial\mathbb{D}$ et dans \mathbb{H} les horocycles sont les cercles tangents à \mathbb{R} et les droites horizontales.

Démonstration :

Etablissons cette proposition dans le cas du demi-plan de Poincaré \mathbb{H} . Le cas du disque de Poincaré s'en déduit à l'aide de l'application Φ .

Puisque d'après le lemme 1.28 l'image de la droite horizontale $Im(z) = 1$ par un élément $g \in Isom(\mathbb{H})$ est une droite horizontale ou un cercle tangent à \mathbb{R} en $x = g(\infty)$ il suffit de montrer que l'horocycle $\mathcal{O}_\infty(i)$ est la droite horizontale $Im(z) = 1$. D'après la formule 1.10, nous avons

$$\mathcal{O}_\infty(i) = \left\{ z \in \mathbb{H} / \beta_\xi(i; z) = \ln \left(\frac{Im(z)}{Im(i)} \right) = 0 \right\}.$$

Ce qui implique que $\mathcal{O}_\infty(i) = \{z \in \mathbb{H} / \text{Im}(z) = 1\}$. Donc l'horocycle $\mathcal{O}_\infty(i)$ est la droite horizontale d'équation $\text{Im}(z) = 1$.

□

Remarque 1.30. *Comme dans le cas des géodésiques, à un élément $v = (z, \vec{v})$ du fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{H}$ il correspond un unique horocycle $\mathcal{O}_\xi(z)$. L'élément $v = (z, \vec{v})$ définit le rayon géodésique $[z, \xi)$ et le vecteur \vec{v} est orthogonal à $\mathcal{O}_\xi(z)$ et est dirigé vers $\xi = v^+$. Ainsi le groupe $\text{Isom}^+(\mathbb{H})$ agit transitivement sur l'ensemble des horocycles de \mathbb{H} .*

2 Polygones hyperboliques

Dans cette section nous abordons l'étude des polygones hyperboliques notamment celle des hexagones à partir desquelles ont été construites la plupart des exemples de surfaces hyperboliques de cette thèse. Commençons par définir un polygone hyperbolique, ses éléments constitutifs et son aire hyperbolique avant d'aborder la trigonométrie hyperbolique.

2.1 Définitions

Définition 1.31. *Un **polygone hyperbolique** \mathcal{P} de \mathbb{D} (ou de \mathbb{H}) est un domaine convexe fermé de $\overline{\mathbb{D}}$ (ou de $\overline{\mathbb{H}}$) de frontière $\partial\mathcal{P}$ constituée d'arcs de géodésiques $\{\alpha_i\}$ et éventuellement d'intervalles $\{I_j\}$ de $\partial\mathbb{D}$ (ou de $\partial\mathbb{H}$).*

Dans cette définition nous autorisons que le polygone \mathcal{P} soit non-compact dans \mathbb{D} (ou dans \mathbb{H}) et nous empruntons dans toutes ces définitions la terminologie de [43].

Définition 1.32. *Soit un polygone \mathcal{P} de frontière $\partial\mathcal{P} = (\cup_i^n \alpha_i) \cup (\cup_j^m I_j)$. Le point d'intersection dans \mathbb{D} de deux arcs de géodésiques α_i et α_j , $i \neq j$, s'il existe, est appelé **sommet** du polygone, sinon chaque extrémité d'un arc α est appelée **sommet à l'infini**. Chaque arc géodésique α_i qui borde le polygone est appelée **côté** du polygone et chaque intervalle I_j non réduit à un point **côté libre** du polygone.*

*Un **triangle hyperbolique** est un polygone hyperbolique ayant trois sommets et trois côtés qui ne sont pas libres.*

Exemple 1.33. Sur \mathbb{H} , le triangle ayant pour sommets à l'infini -1 , 1 et ∞ a pour côtés les géodésiques complètes $(-1, 1)$, $(-1, \infty)$ et $(1, \infty)$.

Définition 1.34. *Un polygone \mathcal{P} est appelé **polygone hyperbolique généralisé** si sa frontière $\partial\mathcal{P}$ admet une infinité de côtés.*

Remarque 1.35. *Dans le cas d'un polygone généralisé, $\partial\mathcal{P}$ est constituée d'un nombre dénombrable d'arcs géodésiques α_i , d'intervalles de $\partial\mathbb{D}$ (ou de $\partial\mathbb{H}$) et de points d'accu-*

mulation de ces arcs. Les points d'accumulation peuvent appartenir ou non à $\{\alpha_i\}$, voir [43].

Passons à la définition de l'aire d'un polygone hyperbolique.

Définition 1.36. Soit B un domaine de \mathbb{H} , l'aire hyperbolique de B , notée $\mathcal{A}(B)$ est définie par :

$$\mathcal{A}(B) = \int_B \frac{dx dy}{y^2} \quad (1.14)$$

lorsque cette intégrale existe.

Théorème 1.37. (voir le théorème 2.5.24 de [56])

L'aire hyperbolique est invariante par $Isom^+(\mathbb{H})$ c'est-à-dire pour tout $g \in Isom^+(\mathbb{H})$ et $B \subseteq \mathbb{H}$ si $\mathcal{A}(B)$ existe alors $\mathcal{A}(gB) = \mathcal{A}(B)$

L'aire d'un triangle ABC de \mathbb{H} d'angles intérieurs θ_1 , θ_2 et θ_3 est la quantité

$$\mathcal{A}(ABC) = \pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3).$$

On en déduit que pour un polygone \mathcal{P} compact dans \mathbb{H} à n cotés, d'angles intérieurs θ_k , $1 \leq k \leq n$, on a (voir [7] p.153) :

$$\mathcal{A}(P) = (n - 2)\pi - \sum_{k=1}^n \theta_k$$

2.2 Trigonométrie hyperbolique

Commençons par définir un polygone fondamental dans les constructions de surfaces hyperboliques.

Définition 1.38. Un *hexagone hyperbolique* \mathcal{H} est un polygone hyperbolique compact dans \mathbb{D} à six côtés.

Considérons dans \mathbb{D} deux segments géodésiques a et b perpendiculaires à l'origine 0 , voir figure 1.2. Soient α et β les géodésiques perpendiculaires respectivement à a et b en leur extrémité. Si les longueurs des segments a et b sont petites alors les géodésiques α et β se coupent en un angle aigu φ . On obtient ainsi un *quadrilatère hyperbolique à trois angles droits*, voir la figure 1.2. Ces quadrilatères ont joué un rôle décisif dans la découverte des géométries non-euclidiennes (voir la première approche de Saccheri [39] et [1]). Dans le cas où les longueurs de a et b sont assez grandes les géodésiques α et β ne se coupent pas. L'angle φ disparaît et il est remplacé par un segment c , la perpendiculaire commune à α et à β . On obtient dans ce cas un *pentagone hyperbolique à angles droits*, voir figure 1.2. Si on met côte à côte, voir figure 1.3 deux pentagones à angles droits le long de leur côté

commune r , on obtient un **hexagone hyperbolique à angles droits**. En notant les côtés consécutifs d'un hexagone à angles droits par $a_1, b_3, a_2, b_1, a_3, b_2$ nous avons les théorèmes suivants.

Théorème 1.39. ([14], Th 2.3.1)

Pour tout quadrilatère hyperbolique à trois angles droits de côtés consécutifs a, β, α, b et d'angle aigu φ nous avons :

- (i) $\cos \varphi = \sinh a \sinh b$,
- (ii) $\cosh a = \cosh \alpha \sin \varphi$,
- (iii) $\cosh a = \tanh \beta \coth b$,
- (iv) $\sinh \alpha = \coth b \cosh \beta$.

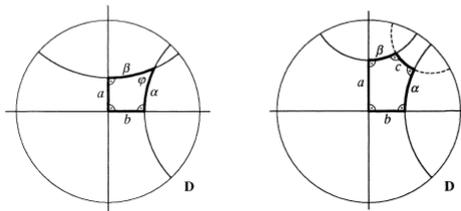


FIGURE 1.2 – Quadrilatère et Pentagone hyperboliques

Théorème 1.40. ([14], Th 2.4.1)

Pour tout hexagone convexe à angles droits de côtés consécutifs $a_1, b_3, a_2, b_1, a_3, b_2$ nous avons :

- (i) $\cosh a_3 = \sinh a_1 \sinh a_2 \cosh b_3 - \cosh a_1 \cosh a_2$,
- (ii) $\sinh a_1 : \sinh b_1 = \sinh a_2 : \sinh b_2 = \sinh a_3 : \sinh b_3$,
- (iii) $\coth b_1 \sinh b_3 = \cosh b_3 \cosh a_2 - \coth a_1 \sinh a_2$.

Théorème 1.41. ([14] Th 2.4.2)

Soient trois nombres réels positifs a, b et c . A isométrie près il existe un unique hexagone à angles droits de côtés non-consécutifs de longueurs a, b et c .

Dans la section qui suit nous analysons en détails les isométries positives du plan hyperbolique.

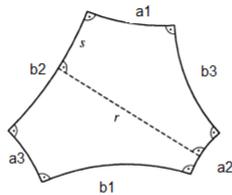


FIGURE 1.3 – Hexagone hyperbolique à angles droits

3 Classification des isométries positives du plan hyperbolique

Notons pour commencer qu'il est parfois plus commode de considérer la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à la place de l'application $g : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. L'application

$$PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow Isom^+(\mathbb{H})$$

$$\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto g,$$

avec $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ est un isomorphisme de groupes. Chaque transformation est représentée par une paire de matrices $\pm M$ de $SL(2, \mathbb{R})$. Ainsi nous assimilons $Isom^+(\mathbb{H})$ à $PSL(2, \mathbb{R})$. Et nous noterons indifféremment par G l'un de ces groupes. Par ailleurs si $v = (i, \vec{v})$ avec $v^+ = \infty$, l'application :

$$PSL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow T^1\mathbb{H}$$

$$g \mapsto g(v) = (g(i), T_i g(\vec{v}))$$

est un difféomorphisme équivariant par la multiplication à gauche par $PSL(2, \mathbb{R})$. Pour décrire géométriquement les éléments de G (différents de l'identité) nous les classifions en trois catégories, selon le nombre de leurs points fixes dans $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$:

- Définition 1.42.**
1. Un élément de $G - \{Id\}$ est dit **elliptique** s'il a exactement un seul point fixe dans $\overline{\mathbb{H}}$, situé dans \mathbb{H} . Les isométries elliptiques qui fixent i forment avec l'identité un sous-groupe de G noté K ,
 2. Un élément de $G - \{Id\}$ est dit **parabolique** s'il a un unique point fixe dans $\overline{\mathbb{H}}$, situé dans $\partial\mathbb{H}$. Les isométries paraboliques qui fixent ∞ forment avec l'identité un

sous-groupe de G noté N ,

3. Un élément de $G - \{Id\}$ est dit **hyperbolique** s'il a deux points fixes dans $\overline{\mathbb{H}}$, situés dans $\partial\mathbb{H}$. Les isométries hyperboliques qui fixent 0 et ∞ forment avec l'identité un sous-groupe de G noté A .

Les sous-groupes de $PSL(2, \mathbb{R})$ correspondant à cette classification sont :

$$K = \left\{ \pm \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\} \text{ groupe rotationnel isomorphe à } \mathbb{S}^1.$$

$$A = \left\{ \pm \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}_+^* \right\} \text{ groupe diagonal isomorphe à } \mathbb{R}^*.$$

$$N = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} \text{ groupe unipotent isomorphe à } \mathbb{R}.$$

Et on déduit de ces sous-groupes de $PSL(2, \mathbb{R})$ l'importante proposition suivante, appelée *décomposition d'Iwasawa*.

Proposition 1.43. *Pour tout $g \in PSL(2, \mathbb{R})$, il existe un unique triplet $(n, a, k) \in N \times A \times K$ tel que $g = nak$.*

Démonstration :

Soient $u = (i, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ fixé et $g \in PSL(2, \mathbb{R})$. Posons $g(u) = (x + iy, \vec{v})$ et considérons les transformations $a(z) = yz$, $n(z) = z + x$ et $k(z) = \frac{z \cos \theta - \sin \theta}{z \sin \theta + \cos \theta}$ où -2θ est la mesure de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) . Par construction $nak(i, \vec{u}) = (x + iy, \vec{v})$ et donc $g = nak$ puisque l'action de $PSL(2, \mathbb{R})$ sur $T^1\mathbb{H}$ est simplement transitive.

Soit $g \in PSL(2, \mathbb{R})$. Supposons qu'il existe deux triplets (n_1, a_1, k_1) et (n_2, a_2, k_2) de $N \times A \times K$ tels que $n_1 a_1 k_1 = g = n_2 a_2 k_2$. Cela implique que $a_2^{-1} n_2^{-1} n_1 a_1 = k_2 k_1^{-1}$ et donc $k_1 = k_2$ puisque $k_2 k_1^{-1}(\infty) = \infty$. Alors on a $n_2^{-1} n_1 = a_2 a_1^{-1}$. Et en utilisant le fait que $N \cap A = \{Id\}$ on obtient $a_1 = a_2$ et $n_1 = n_2$.

□

Passons maintenant à la description des types d'isométries de $PSL(2, \mathbb{R})$ en utilisant les définitions suivantes.

Définition 1.44. *Soit $g \in PSL(2, \mathbb{R})$, défini par $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $ad - bc = 1$.*

1. On appelle **trace** de g le nombre réel, noté $tr(g)$ et défini par l'égalité

$$tr(g) = \pm(a + d).$$

2. On appelle **longueur de translation** de g la quantité

$$l(g) = \inf_{z \in \mathbb{H}} \rho(z, g(z)).$$

3. Si l'isométrie g est telle que $g(z_0) \neq z_0$. On appelle **médiatrice** du segment $[z_0, g(z_0)]$ l'ensemble

$$I_g = \{z \in \mathbb{H} / \rho(z, z_0) = \rho(z, g(z_0))\}.$$

et on pose

$$D_g(z_0) = \{z \in \mathbb{H} / d(z, z_0) \geq d(g(z), z_0)\}.$$

Les trois invariants de la définition ci-dessus permettent de déterminer la nature d'une isométrie positive. Pour les démonstrations des propositions ci-dessous nous renvoyons à [56], [38] et [16].

3.1 Isométrie hyperbolique

Commençons par décrire les isométries hyperboliques de $PSL(2, \mathbb{R})$ et nous avons d'abord

Proposition 1.45. (voir [18] Propriété I.2.5)

Une isométrie positive est hyperbolique si et seulement si sa trace en valeur absolue est strictement supérieure à 2. Elle est conjuguée, dans $PSL(2, \mathbb{R})$, à une homothétie $g(z) = \lambda z$ avec $\lambda > 0$.

Soit g une isométrie hyperbolique de \mathbb{H} . Notons par x_1 et x_2 les points fixes de g , appartenant à $\partial\mathbb{H}$. Appelons $\tilde{\alpha}$ la géodésique complète joignant x_1 et x_2 . L'image de la géodésique $\tilde{\alpha}$ par g est une géodésique ayant pour extrémités x_1 et x_2 , c'est-à-dire la géodésique $\tilde{\alpha}$ elle-même. Ainsi une isométrie hyperbolique g laisse globalement invariante la géodésique dont les extrémités sont les points fixes de g et elle agit par translation sur cette géodésique.

Définition 1.46. On appelle **axe de translation** d'une isométrie hyperbolique g la géodésique dont les extrémités sont les points fixes de g . Soit $z \in \tilde{\alpha}$, posons $g^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(z)$ et $g^- = \lim_{n \rightarrow -\infty} g^n(z)$. Les points g^+ et g^- sont appelés respectivement **point fixe attractif** et **point fixe répulsif** de g .

Remarquons que si $x_1 = 0$ et $x_2 = \infty$ alors $g(z) = \lambda z$ avec $\lambda > 0$. Il apparaît que g est l'homothétie de centre 0 et de rapport λ . C'est la plus simple des isométries hyperboliques et toute autre isométrie hyperbolique est conjuguée à elle, voir [56] section 2.4. L'action de g sur son axe de translation est décrite par la proposition suivante.

Proposition 1.47. (voir [18] Propriété I.2.8)

Si $\tilde{\alpha}$ est l'axe de translation de l'isométrie hyperbolique g alors pour tout $z \in \tilde{\alpha}$

$$l(g) = \rho(z, g(z)).$$

Pour terminer, la proposition ci-dessous décrit géométriquement l'image d'un point quelconque de \mathbb{H} par une isométrie hyperbolique g .

Proposition 1.48. (voir [18] Propriété I.2.7)

Pour tout $z \in \mathbb{H}$, nous avons $\overline{D_g(z)} \cap \overline{D_{g^{-1}}(z)} = \emptyset$ si et seulement si g est une isométrie hyperbolique.

Donnons maintenant des énoncés similaires pour les isométries paraboliques et elliptiques.

3.2 Isométrie parabolique

Proposition 1.49. (voir [18] Propriété I.2.5)

Une isométrie positive différente de l'identité est parabolique si et seulement si sa trace en valeur absolue est égale à 2. Elle est conjuguée, dans $PSL(2, \mathbb{R})$, à la translation $t(z) = z + 1$.

La forme la plus simple des isométries parabolique est $t : z \mapsto z + b$, $b \in \mathbb{R}$. Cette isométrie a pour point fixe $x = \infty$, c'est une translation horizontale euclidienne de vecteur $(0, b)$. Elle laisse globalement invariante les droites horizontales c'est-à-dire les horocycles \mathcal{O}_∞ . Puisqu'une isométrie parabolique g de point fixe $x \in \partial\mathbb{H}$ est conjuguée à l'isométrie t et qu'elle transforme les horocycles \mathcal{O}_∞ aux horocycles \mathcal{O}_x alors l'isométrie parabolique g laisse globalement invariant les horocycles \mathcal{O}_x , voir [56] section 2.4.

Proposition 1.50. (voir [18] Propriété I.2.7)

Soit $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{H}$ tel que $g(z) \neq z$. Les médiatrices $I_g(z)$ et $I_{g^{-1}}(z)$ ont une unique extrémité en commun si et seulement si g est une isométrie parabolique.

Proposition 1.51. (voir [18] Propriété I.2.8)

Soit g une isométrie parabolique. Nous avons

$$l(g) = \inf_{z \in \mathbb{H}} d(z, g(z)) = 0$$

et elle n'est pas atteinte.

3.3 Isométrie elliptique

Proposition 1.52. (voir [18] Propriété I.2.5)

Une isométrie positive est elliptique si et seulement si sa trace en valeur absolue est strictement inférieure à 2. Elle est conjuguée, dans $PSL(2, \mathbb{R})$, à un unique élément dont les représentants sont $g(z) = \frac{z \cos \theta + \sin \theta}{-z \sin \theta + \cos \theta}$ avec $\theta \in]0, \pi[$.

Proposition 1.53. (voir [18] Propriété I.2.7)

Les médiatrices $I_g(z)$ et $I_{g^{-1}}(z)$ se coupent en un seul point dans \mathbb{H} si et seulement si g est une isométrie elliptique.

Proposition 1.54. (voir [18] Propriété I.2.7)

Soit g une isométrie elliptique, nous avons

$$l(g) = \inf_{z \in \mathbb{H}} d(z, g(z)) = \min_{z \in \mathbb{H}} d(z, g(z)) = 0.$$

Terminons la description des isométries positives de $PSL(2, \mathbb{R})$ en termes de composition d'isométries positives ou négatives de \mathbb{H} .

3.4 Composition d'isométries

Commençons par définir la notion de *réflexion par rapport à une géodésique*.

Définition 1.55. Deux points z et z' sont dits inverses par rapport à une géodésique $\tilde{\alpha}$ s'ils se trouvent de part et d'autre de $\tilde{\alpha}$ telles que $d(z, \tilde{\alpha}) = d(z', \tilde{\alpha})$ et la géodésique passant par z et z' est orthogonale à $\tilde{\alpha}$.

Notons que si deux points z et z' sont inverses par rapport à une géodésique $\tilde{\alpha}$ alors pour tout $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ les points $g(z)$ et $g(z')$ sont inverses par rapport à $\tilde{\alpha}$. L'application $R : z \mapsto z'$ est également involutive et se prolonge naturellement sur $\tilde{\alpha} : z \in \tilde{\alpha}, R(z) = z$.

Définition 1.56. L'application R est appelée **réflexion** (ou *inversion*) par rapport à $\tilde{\alpha}$.

Exemple 1.57. Si $\tilde{\alpha} = \{z \in \mathbb{H} / |z| = r\}$ alors $R(z) = \frac{r^2}{\bar{z}}$ et la réflexion par rapport à l'axe $(0, \infty)$ est $R : z \mapsto -\bar{z}$.

Nous pouvons à présent énoncer la proposition suivante.

Proposition 1.58. (voir [56] et [38])

1. Si $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ sont deux géodésiques disjointes dans $\overline{\mathbb{H}}$ alors la réflexion par rapport à l'une des géodésiques suivi de l'autre est une isométrie hyperbolique d'axe la géodésique perpendiculaire à $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$. Et

$$\rho(R_{\tilde{\alpha}} \circ R_{\tilde{\beta}}(z), z) = 2\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}).$$

Inversement si g est une isométrie hyperbolique d'axe $\tilde{\alpha}$ de longueur de translation l alors il existe deux géodésiques $\tilde{\beta}_1$ et $\tilde{\beta}_2$ orthogonales à $\tilde{\alpha}$ telles que $\rho(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = \frac{1}{2}l$. Et le pair $\{g, g^{-1}\}$ est exactement le pair $\{R_{\tilde{\beta}_1} \circ R_{\tilde{\beta}_2}, R_{\tilde{\beta}_2} \circ R_{\tilde{\beta}_1}\}$.

2. Si deux géodésiques $\tilde{\beta}_1$ et $\tilde{\beta}_2$ ont une extrémité commune $x \in \partial\mathbb{H}$ alors la composée de la réflexion par rapport à $\tilde{\beta}_2$ suivi de celle par rapport à $\tilde{\beta}_1$ est une isométrie parabolique de point fixe x .

Réciproquement si g est une isométrie parabolique de point fixe $x \in \partial\mathbb{H}$ alors il existe deux géodésiques $\tilde{\beta}_1$ et $\tilde{\beta}_2$ ayant une extrémité commune x telles que

$$g = R_{\tilde{\beta}_1} \circ R_{\tilde{\beta}_2}.$$

3. Si deux géodésiques $\tilde{\beta}_1$ et $\tilde{\beta}_2$ se coupent en un point $z \in \mathbb{H}$ alors la composée de la réflexion par rapport $\tilde{\beta}_2$ suivi de celle par rapport à $\tilde{\beta}_1$ est une isométrie elliptique de point fixe z .

Réciproquement si g est une isométrie elliptique de point fixe $z \in \mathbb{H}$ alors il existe deux géodésiques $\tilde{\beta}_1$ et $\tilde{\beta}_2$ qui se coupent en z telles que

$$g = R_{\tilde{\beta}_1} \circ R_{\tilde{\beta}_2}.$$

4 Groupes fuchsien

Munissons $PSL(2, \mathbb{R})$ de la topologie quotient de celle induite par la topologie naturelle de \mathbb{R}^4 sur $SL(2, \mathbb{R})$, vu comme sous-ensemble de \mathbb{R}^4 .

Définition 1.59. On appelle **groupe fuchsien** tout sous-groupe discret de $PSL(2, \mathbb{R})$ c'est-à-dire un sous-groupe discret d'isométries de \mathbb{H} .

Définition 1.60. Nous disons qu'un groupe topologique Γ agit proprement discontinûment sur un espace topologique localement compact X si pour tout compact $K \subset X$, l'ensemble $\{g \in \Gamma/g(K) \cap K \neq \emptyset\}$ est fini.

Proposition 1.61. (voir [37]) Soit Γ un sous-groupe de $PSL(2, \mathbb{R})$. Alors Γ est un groupe fuchsien si et seulement si Γ agit proprement discontinûment sur \mathbb{H} .

Remarque 1.62. Nous avons également les caractérisations suivantes des groupes fuchsien :

1. un sous-groupe Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$ est fuchsien si et seulement si les orbites de \mathbb{H} sous l'action de Γ sont discrètes.
2. un sous-groupe Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$ est discret si et seulement si il agit discontinûment sur \mathbb{H} c'est-à-dire pour tout point $z \in \mathbb{H}$ il n'existe pas de suite (γ_n) d'éléments

distincts de Γ telle que $\gamma_n(w)$ converge vers z avec $w \in \mathbb{H}$.

Définition 1.63. *Un groupe fuchsien est dit **sans torsion** si tous ses éléments non triviaux sont des isométries non-elliptiques et il est dit **purement hyperbolique** si tous ses éléments non triviaux sont des isométries hyperboliques.*

Puisque qu'un groupe fuchsien Γ est discret, pour tout point $z \in \mathbb{H}$, les points de l'orbite $\Gamma.z$ ne peuvent s'accumuler que sur le bord à l'infini $\partial\mathbb{H}$. Et les points d'accumulation de l'orbite $\Gamma.z$ sont appelés *points limites*. Plus précisément

Définition 1.64. *Un point $\xi \in \partial\mathbb{H}$ est dit **point ordinaire** d'un groupe fuchsien Γ s'il existe un voisinage U de ξ dans $\overline{\mathbb{H}}$ tel que le cardinal de l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma / \gamma(U) \cap U \neq \emptyset\}$ est fini. On notera l'ensemble des points ordinaire par O_Γ .*

*On appelle **ensemble limite**, noté $\Lambda(\Gamma)$ d'un groupe fuchsien Γ le complémentaire dans $\partial\mathbb{H}$ de l'ensemble O_Γ . Un **point limite** est un élément d'un ensemble limite.*

*Un groupe fuchsien est dit de **première espèce** si $\Lambda(\Gamma) = \partial\mathbb{H}$ sinon il est dit de **seconde espèce**.*

La notion de point limite est centrale dans cette thèse. Nous reviendrons largement sur l'étude de l'ensemble limite d'un groupe fuchsien au chapitre trois. En attendant, cette notion nous permet de donner une première classification des groupes fuchsien qui repose sur le cardinal de leur ensemble limite.

Définition 1.65. *Un groupe fuchsien est dit **élémentaire** si le cardinal de son ensemble limite est fini. Et dans le cas contraire il est dit **non-élémentaire**.*

Les groupes fuchsien élémentaire ont une structure simple et leur analyse est facile. La proposition suivante les classifie.

Proposition 1.66. *(voir [33], prop3.1.2)*

Si Γ est un groupe fuchsien élémentaire alors il est l'une des formes suivantes.

1. *Si Γ est de cardinal fini alors c'est un groupe cyclique engendré par une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ radian, $n \in \mathbb{N}^*$.*
2. *Si Γ est de cardinal infini mais constitué entièrement d'isométries elliptiques ou paraboliques alors c'est un groupe cyclique infini engendré par une unique isométrie parabolique.*
3. *Si Γ contient une isométrie hyperbolique γ qui engendre un sous-groupe d'indice fini de Γ , alors il y a deux possibilités : soit le groupe Γ est cyclique infini, engendré par une isométrie hyperbolique soit il admet un sous-groupe d'indice 2, engendré par une isométrie hyperbolique.*

5 Domaines fondamentaux d'un groupe fuchsien

Dans cette dernière section qui suit nous étudions des polygones hyperboliques associés aux groupes fuchiens, appelés *domaines fondamentaux* des groupes fuchiens.

5.1 Régions fondamentales

Définition 1.67. Soit un groupe fuchsien Γ . Un **domaine fondamental** \mathcal{D} de Γ est une partie fermée, convexe d'intérieur non vide de \mathbb{H} telle que

1. $\mathbb{H} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\mathcal{D})$ et
2. $\gamma(\text{Int}(\mathcal{D})) \cap \text{Int}(\mathcal{D}) = \emptyset, \forall \gamma \in \Gamma \setminus \text{Id}$ où $\text{Int}(\mathcal{D})$ l'intérieur de \mathcal{D} .

Il résulte de la définition que si \mathcal{D} est un domaine fondamental alors

(a) pour tous points z_1 et z_2 distincts de $\text{Int}(\mathcal{D})$ il n'existe aucun $\gamma \in \Gamma$ tel que $z_2 = \gamma(z_1)$ et

(b) pour tout point $z \in \mathbb{H}$ ils existent $\gamma \in \Gamma$ et $z_0 \in \mathcal{D}$ tels que $z_0 = \gamma(z)$.

Retenons que tout groupe fuchsien Γ admet un domaine fondamental \mathcal{D} . Un cas particulier de domaine fondamental est un *polygone fondamental*.

Définition 1.68. (voir [49])

Soit Γ un groupe fuchsien. Un **polygone fondamental** \mathcal{P} de Γ est un polygone (ou polygone généralisé) fermé dans $\overline{\mathbb{H}}$ tel que les conditions suivantes sont satisfaites :

1. Pour tout élément γ non trivial de Γ , $\gamma.\text{Int}(\mathcal{P}) \cap \text{Int}(\mathcal{P}) = \emptyset$.
2. Pour tout z de \mathbb{H} , il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma.z \in \overline{\mathcal{P}}$.

Si \mathcal{P} est un polygone fondamental de Γ alors :

1. Les côtés de \mathcal{P} sont **appariés** (accouplés) par les éléments de Γ : pour tout côté s de \mathcal{P} , il existe un côté s' de \mathcal{P} et un élément γ_s de Γ tel que $\gamma_s.s = s'$. De plus, $\gamma_{s'} = \gamma_s^{-1}$ et $(s')' = s$. L'élément γ_s est appelé **application appariante** (side-pairing).
2. Tout compact de \mathbb{H} rencontre seulement un nombre fini de translaté de \mathcal{P} par le groupe Γ .

Remarque 1.69. La frontière d'un polygone fondamental dans $\overline{\mathbb{H}}$ est formée d'un ensemble dénombrable de géodésiques de \mathbb{H} et éventuellement de segments de la droite réelle.

Pour terminer cette sous-section introduisons une certaine terminologie des groupes fuchiens.

Définition 1.70. Un groupe fuchsien est dit **géométriquement fini** s'il admet un polygone fondamental ayant un nombre fini de côtés. Sinon il est dit **géométriquement**

infini.

Un groupe fuchsien géométriquement fini est dit **convexe-cocompact** s'il est purement hyperbolique.

5.2 Domaine fondamentaux classiques

Il existe des moyens classiques de construire un polygone fondamental d'un groupe fuchsien. Parmi ces moyens nous en exposons deux. Notre premier domaine fondamental classique est dit *domaine de Dirichlet*. Ce domaine sera largement utilisé dans le reste des chapitres entre autre pour analyser la nature des points du bord à l'infini $\partial\mathbb{H}$.

5.2.1 Domaine fondamental de Dirichlet

Pour tout groupe fuchsien Γ , il existe $z \in \mathbb{H}$ avec $g.z \neq z$ pour tout $g \in \Gamma \setminus \{Id\}$ car tout élément de $\Gamma \setminus \{Id\}$ a au plus deux points fixes et Γ est dénombrable car discret. Rappelons la définition suivante.

Définition 1.71. Soit un point z_0 qui n'est pas fixé par une isométrie positive g . On appelle **médiatrice** du segment $[z_0, g(z_0)]$ l'ensemble

$$I_g = \{z \in \mathbb{H} / \rho(z, z_0) = \rho(z, g(z_0))\}.$$

Nous noterons $\mathcal{H}(g)$ le demi-plan de frontière I_g contenant le point z_0 .

$$\mathcal{H}(g) = \{z \in \mathbb{H} / \rho(z, z_0) \leq \rho(z, g(z_0))\}.$$

Définition 1.72. Soit un point $z_0 \in \mathbb{H}$, qui n'est fixé par aucun élément de Γ différent de l'identité. On appelle **domaine de Dirichlet** de point base z_0 associée à Γ l'ensemble :

$$\mathcal{D}_{z_0}(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H} / \forall g \in \Gamma, d(z, g.z_0) \geq d(z, z_0)\} = \bigcap_{g \in \Gamma \setminus Id} \mathcal{H}(g).$$

Exemple 1.73. (voir [11])

Le domaine $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{H} / |z| \geq 1 \text{ et } |\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}\}$ est un domaine de Dirichlet centré au point $z_0 = 2i$ pour l'action de $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ sur \mathbb{H} .

Proposition 1.74. (voir [37]) Un domaine de Dirichlet $\mathcal{D}_{z_0}(\Gamma)$ est un domaine fondamental convexe et localement fini pour l'action de Γ sur \mathbb{H} .

Définition 1.75. Nous appelons un groupe fuchsien **réseau** si l'aire d'un de ses domaines de Dirichlet est finie. Si le domaine de Dirichlet est compact, le réseau est dit **uniforme**.

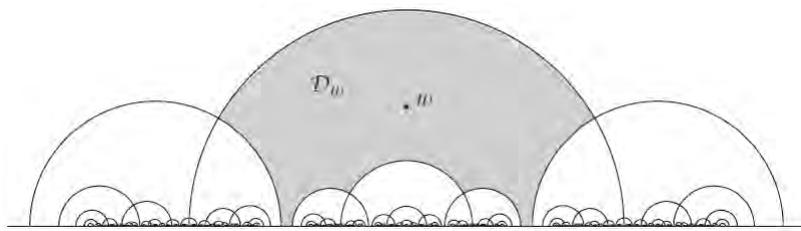


FIGURE 1.4 – Domaine de Dirichlet de $PSL(2, \mathbb{Z})$ centré au point $2i$

Le deuxième domaine fondamental classique d'un groupe fuchsien que nous présentons est dit *domaine de Ford*. Nous ferons appel à lui, dans le chapitre suivant notamment à la sous-section 5.1, pour montrer que certains domaines du plan hyperbolique sont des polygones fondamentaux de groupes fuchiens.

5.2.2 Domaine fondamental de Ford

Définition 1.76. *Plaçons nous sur \mathbb{D} . Soit un élément g de $G = Isom^+(\mathbb{D})$ qui ne fixe pas le point 0 défini par $g(z) = \frac{az+b}{bz+\bar{a}}$ (*c'est-à-dire* $b \neq 0$). On appelle **cercle isométrique** de g , noté $S(g)$, l'ensemble*

$$S(g) = \{z \in \mathbb{D} / |\bar{b}z + \bar{a}| = 1\}.$$

La définition ci-dessus reste valide lorsqu'on se place sur \mathbb{H} et dans ce cas un cercle isométrique est défini pour un élément g de $G = Isom^+(\mathbb{H})$ qui ne fixe pas le point ∞ :

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad c \neq 0 \text{ et } S(g) = \{z \in \mathbb{H} / |cz + d| = 1\}.$$

Revenons sur \mathbb{D} , puisque $g'(z) = \frac{|a|^2 - |b|^2}{(\bar{b}z + \bar{a})^2} = (\bar{b}z + \bar{a})^{-2}$ et $|g(z) - g(z')| = |g'(z)|^{1/2} |g'(z')|^{1/2} |z - z'|$, nous remarquons que $S(g)$ est le lieu géométrique des points tels que pour tous z et z' appartenant à $S(g)$, $|g(z) - g(z')| = |z - z'|$.

Soit $g(z) = \frac{az+b}{bz+\bar{a}}$ avec $b \neq 0$. Notons par D_g et E_g respectivement l'intérieur et l'extérieur du cercle isométrique $S(g)$: $D_g = \{z \in \mathbb{H} : |\bar{b}z + \bar{a}| < 1\}$ et $E_g = \{z \in \mathbb{H} : |\bar{b}z + \bar{a}| \geq 1\}$. Pour la définition qui suit on note Γ_0 le sous-groupe stabilisateur de 0 d'un groupe fuchsien Γ .

Définition 1.77. *Le **domaine de Ford** d'un groupe fuchsien Γ noté $\mathcal{D}(\Gamma)$ est l'ensemble*

$$\mathcal{D}(\Gamma) = \bigcap_{g \in \Gamma \setminus \Gamma_0} E_g.$$

Proposition 1.78. *(voir [3] Lemme 2.31 p.68)*

Le domaine de Ford $\mathcal{D}(\Gamma)$ est un domaine fondamental pour l'action de Γ sur \mathbb{D} .

Pour clore ce chapitre énonçons la proposition suivante qui relie les domaines de Dirichlet et de Ford sur \mathbb{D} .

Proposition 1.79. (*[45], page 72, Proposition IV.G.6*)

Soient un groupe fuchsien purement hyperbolique Γ . Le domaine de Ford $\mathcal{D}(\Gamma)$ coïncide avec le domaine de Dirichlet $\mathcal{D}_0(\Gamma)$ centré à l'origine.

Démonstration :

Considérons le disque de Poincaré \mathbb{D} . Il suffit de montrer que pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{Id\}$ la médiatrice $I_{\gamma^{-1}}$ du segment géodésique $[0, \gamma^{-1}(0)]$ coïncide avec le cercle isométrique $S(\gamma^{-1})$ de γ^{-1} . Posons $h^{-1} = r_1 \circ r_2$ où r_1 est la réflexion par rapport à l'orthogonal L au segment $[0, \gamma(0)]$ au point 0 et r_2 est la réflexion par rapport à la médiatrice I_γ du segment $[0, \gamma(0)]$. Puisque les géodésiques L et I_γ sont orthogonales au segment $[0, \gamma(0)]$ alors elles ne s'intersectent pas dans \mathbb{D} et donc d'après le premier point de la proposition 1.58 h est une isométrie hyperbolique. Posons $r = h^{-1} \circ \gamma$ c'est-à-dire $\gamma^{-1} = r^{-1} \circ h^{-1}$. Notons que r est une isométrie elliptique qui fixe le point 0. Nous avons $|(\gamma^{-1})'(z)| = |(h^{-1})'(z)| = 1$ exactement sur $I_{\gamma^{-1}}$. Autrement dit le cercle isométrique $S(\gamma^{-1})$ coïncide avec la médiatrice $I_{\gamma^{-1}}$.

□

Chapitre 2

Surfaces hyperboliques

Sommaire

1	Définitions	37
2	Sur la géométrie des surfaces hyperboliques	38
3	Constructions d'une surface hyperbolique	39
4	Pantalon hyperbolique	47
5	Surfaces hyperboliques géométriquement infinies	49
6	Bouts d'une surface hyperbolique	55

Ce chapitre réunit les outils et concepts qui nous permettrons entre autre d'étudier les différents exemples de la section 2 du chapitre 5. Après avoir rappelé des notions de base de la topologie des surfaces nous présenterons deux manières de construire les surfaces riemanniennes hyperboliques : construction *par quotient* et *par recollement*. La base commune de ces deux constructions ce sont les *polygones hyperboliques*, qui dans le premier temps représentent les domaines fondamentaux des groupes fuchsien et dans le second temps "le matériau brut" de construction, en recollant les côtés des polygones. Dans ce chapitre nous prêterons une attention particulière aux surfaces hyperboliques géométriquement infinies et nous terminerons par l'étude des bouts des surfaces hyperboliques.

1 Définitions

Commençons par donner des définitions de base et pour plus de détails nous renvoyons à [56].

Définition 2.1. Une **surface hyperbolique** S est un espace topologique (séparé) connexe muni d'un atlas lisse maximal $\mathcal{A} = \{(U_i, \Phi_i)\}$ de S vers \mathbb{H} tel que les changements de cartes $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : \Phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \Phi_i(U_i \cap U_j)$ sont des isométries positives de \mathbb{H} .

Lorsqu'on remplace \mathbb{H} par $\mathbb{H}^+ = \{z = x+iy \in \mathbb{C} / x \geq 0 \text{ et } y > 0\}$ on dira qu'on a une sur-

face hyperbolique à bord ∂S . Les points du bord ∂S étant envoyé sur l'axe des imaginaires. Et on parle dans ce cas de surface hyperbolique S à **bord totalement géodésique**.

Dans toute la suite de cette thèse nous ne considérons que des surfaces hyperboliques complètes à bord totalement géodésique. Enonçons quelques notions de topologie algébrique.

Définition 2.2. Soit S une surface hyperbolique. Une courbe paramétrée $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ est dite **simple** si α est une application injective. Elle est dite **fermée** si $\alpha(a) = \alpha(b)$.

Définition 2.3. Soient deux parties fermées et connexes A et B d'une surface hyperbolique S . Supposons que $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow S$ sont deux courbes continues d'origines $\alpha(a), \beta(a) \in A$ et d'extrémités $\alpha(b), \beta(b) \in B$. On dira que α et β sont **homotopes** par rapport à leurs extrémités appartenant à A et à B s'il existe une application continue $\phi : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow S$ telle que

$$\begin{aligned} \phi(0, t) &= \alpha(t) & \phi(s, a) &\in A \\ a \leq t \leq b, & & 0 \leq s \leq 1 & \\ \phi(1, t) &= \beta(t), & \phi(s, b) &\in B. \end{aligned}$$

2 Sur la géométrie des surfaces hyperboliques

Sur une surface hyperbolique les notions de distance, géodésique, aire, angle, etc sont induites par celles du plan hyperbolique. Nous commençons par définir une notion de longueur des courbes sur une surface hyperbolique S puis une distance sur S , pour plus de détails sur la métrique des surfaces riemanniennes voir [42] chap.2 et [56] chp.4.

Définition 2.4. Soient une surface hyperbolique S et une courbe $\alpha : [a, b] \rightarrow S$. On considère $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ de telle sorte que $\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$ avec (U_i, φ_i) une carte locale de la structure hyperbolique de S . On définit la longueur hyperbolique de α (éventuellement infinie), comme

$$L(\alpha) := \sum_{i=0}^{n-1} l(\varphi_i \circ \alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}) .$$

où l est la longueur d'une courbe sur \mathbb{H} .

La définition 2.4 est indépendante de la carte (U, φ) choisie. En effet si (V, ψ) est une autre carte telle que $\alpha([a, b]) \subset V$, il existe un élément g de $PSL(2, \mathbb{R})$ tel que $\psi = g \circ \varphi$, et donc $L(\alpha) := l(\psi \circ \alpha) = l(g \circ \varphi \circ \alpha) = l(\psi \circ \alpha)$.

Notation : Dans toute la suite nous noterons indifféremment les longueurs sur le plan

hyperbolique et sur une surface hyperboliques par l . Comme dans le cas du plan hyperbolique \mathbb{H} la notion de longueur permet de définir la distance riemannienne sur une surface hyperbolique S .

Théorème 2.5. (voir [56])

Soit S une surface hyperbolique. Alors la fonction $d_S : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$d_S(p, q) : = \inf_{\alpha} l(\alpha) \tag{2.1}$$

où α est une courbe d'extrémités p et q , est une distance sur S .

Définition 2.6. Une **géodésique** sur une surface hyperbolique S est une courbe sur S qui minimise localement la distance d_S . Plus précisément, une courbe C^1 par morceaux $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow S$ paramétrisée par unité de longueur d'arc est une géodésique si pour tous t_1 et $t_2 \in \mathbb{R}$ très proches

$$d_S(\alpha(t_1), \alpha(t_2)) = |t_1 - t_2|.$$

Un **rayon géodésique** de la surface S est une courbe définie sur $[0; +\infty[$ qui minimise localement la distance d_S .

Définition 2.7. On appelle **composante à bord** d'une surface hyperbolique à bord géodésique une géodésique fermée simple de cette surface.

Sur le plan hyperbolique il existe toujours une unique perpendiculaire à une géodésique passant par un point et une unique perpendiculaire commune à deux géodésiques de distance strictement positive, voir le théorème 1.15. Le résultat suivant est l'analogie du théorème 1.15 pour les surface hyperbolique.

Théorème 2.8. (thm.1.5.2 [14])

Soient S une surface hyperbolique et $c : [a, b] \rightarrow S$ une courbe telle que $c(a) \in A$ et $c(b) \in B$, où A et B sont deux géodésiques fermées et disjointes de ∂S . Dans la classe d'homotopie de c par rapport aux extrémités appartenant à A et à B il existe une unique géodésique α d'extrémités $c(a)$ et $c(b)$. De plus α rencontre A et B perpendiculairement en $c(a)$ et $c(b)$ et tous les autres points de α appartiennent à l'intérieur de S .

3 Constructions d'une surface hyperbolique

Comme indiqué à l'introduction de ce chapitre nous présentons dans cette section deux manières de construction d'une surface hyperbolique.

3.1 Construction par quotient

Dans cette partie nous présentons d'abord le procédé par construction à partir d'un domaine fondamental d'un groupe fuchsien puis nous donnerons quelques exemples de base de surfaces hyperboliques.

3.1.1 Présentation

La construction d'une surface hyperbolique par quotient se réalise grâce à ce théorème d'uniformisation.

Théorème 2.9. (voir [54])

Pour toute surface hyperbolique S il existe un groupe fuchsien sans torsion Γ et un revêtement riemannien Γ -invariant $\pi : \mathbb{D} \rightarrow S$ qui induit une isométrie entre S et $\Gamma \backslash \mathbb{D}$.

Notons que si Γ est un groupe fuchsien sans torsion et \mathcal{D} est un domaine fondamental pour son action sur \mathbb{D} alors la restriction $\pi|_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{D}$ est surjective. Toute orbite Γz , $z \in \mathbb{D}$, rencontre \mathcal{D} au moins en un point. Une surface hyperbolique est définie ainsi par l'action d'un groupe fuchsien sur le plan hyperbolique. Nous avons alors la définition suivante.

Définition 2.10. *Une surface hyperbolique $S = \Gamma \backslash \mathbb{D}$ est dite **géométriquement finie** si le groupe Γ est géométriquement fini. Sinon la surface est dite **géométriquement infinie**.*

Sur la surface $S = \Gamma \backslash \mathbb{D}$ on définit une distance d_Γ de la manière suivante : pour tous points $\pi(z)$ et $\pi(z')$ de S

$$d_\Gamma(\pi(z), \pi(z')) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \rho(z, \gamma(z')). \quad (2.2)$$

Le théorème 2.9 indique que le revêtement π induit une isométrie, qu'on notera également π , entre (S, d) et $(\Gamma \backslash \mathbb{D}, d_\Gamma)$. Donc $d(x, y) = d_\Gamma(\pi(x), \pi(y))$, voir [35] ou [48]. Les arcs géodésiques de $S = \Gamma \backslash \mathbb{D}$ sont les projetés de ceux de \mathbb{D} sur S : un arc géodésique α de S est de la forme $\pi \circ \tilde{\alpha}$ où $\tilde{\alpha}$ est un arc géodésique de \mathbb{D} .

Soit γ une isométrie hyperbolique de Γ et $\tilde{\alpha}$ son axe de translation de longueur de translation l , voir définition 1.46. Sur $\Gamma \backslash \mathbb{D}$, l'axe $\tilde{\alpha}$ se projette à une géodésique fermée α de longueur l .

Définition 2.11. *Deux géodésiques $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}_2$ de \mathbb{H} sont dites **asymptotiques** si elles ont une même extrémité.*

*Soit S une surface hyperbolique. Deux rayons géodésiques α et β de S sont dits **asymptotiques** s'ils ont des relevés $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ dans \mathbb{H} qui sont **asymptotiques**.*

Pour terminer cette partie nous introduisons la notion de plus petite partie (au sens de l'inclusion) convexe d'une surface hyperbolique $S = \Gamma \backslash \mathbb{D}$ lorsque le groupe fuchsien Γ est non-élémentaire.

On sait que si l'ensemble limite Λ de Γ est un Cantor alors il s'écrit comme une intersection dénombrable de parties fermées, disjointes de \mathbb{S}^1 , voir [50]. Et dans ce cas l'ensemble des points ordinaires $O_\Gamma = \partial\mathbb{D} \setminus \Lambda$ est non vide et il s'écrit comme une réunion dénombrable d'intervalles ouverts I_j de \mathbb{S}^1 . Soit $\tilde{\alpha}_j$ la géodésique dont les extrémités sont celles de I_j et H_j est le demi-plan délimité par $\tilde{\alpha}_j$ et I_j , voir figure 2.1.

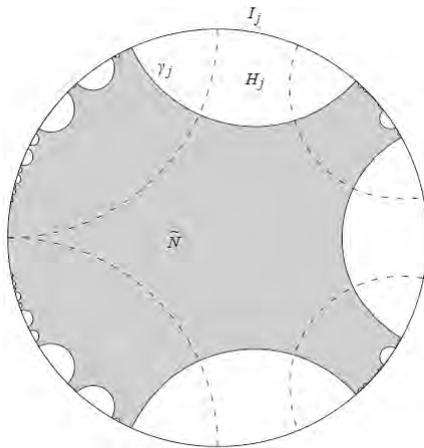


FIGURE 2.1 – Région de Nielsen

Définition 2.12. *La région de Nielsen d'un groupe fuchsien non-élémentaire Γ est l'ensemble*

$$\tilde{N} := \overline{\mathbb{D}} - \bigcup_{j \in J \subset \mathbb{N}} H_j.$$

Son quotient par Γ défini par $N := \Gamma \backslash \tilde{N}$ est appelé **coeur convexe** de la surface $\Gamma \backslash \mathbb{D}$.

Sur la figure 2.1 les pointillés marquent la frontière du domaine fondamental. Notons que si $\partial\mathbb{D} = \Lambda$ alors $N = \Gamma \backslash \mathbb{D}$.

3.1. 2 Exemples de construction par quotient

Enonçons la proposition suivante qui permet de visualiser les surfaces hyperboliques $\Gamma \backslash \mathbb{D}$ par le biais d'un domaine de Dirichlet \mathcal{D}_{z_0} centré en un point z d'un groupe fuchsien Γ .

Proposition 2.13. ([7], Théorème 9.2.4)

L'application $\theta : \Gamma \backslash \mathcal{D}_z \rightarrow S = \Gamma \backslash \mathbb{D}$ définie par

$$\theta(\Gamma z' \cap \mathcal{D}_{z_0}) = \Gamma z'$$

est un homéomorphisme.

Exemple 2.14. (voir [18])

Le groupe cyclique hyperbolique H engendré par l'isométrie hyperbolique $z \mapsto 2z$ donne la surface $S = H \backslash \mathbb{H}$, voir la surface à droite sur la figure 2.2.

Exemple 2.15. (voir [18])

Le groupe cyclique parabolique P engendré par l'isométrie parabolique $z \mapsto z + 1$ donne la surface $S = P \backslash \mathbb{H}$, voir la surface à gauche sur la figure 2.2.

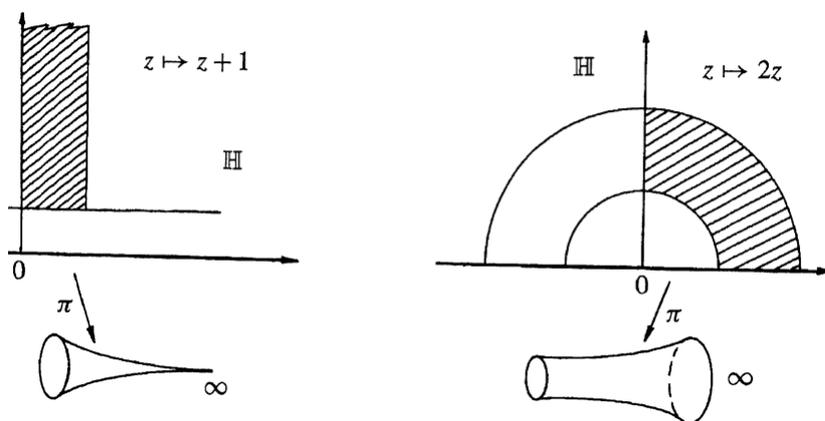


FIGURE 2.2 – Cylindres hyperboliques

Exemple 2.16. (voir [18])

Soient deux isométries hyperboliques g_1 et g_2 de \mathbb{D} . Posons $D(g) = \{z \in \mathbb{D} / \rho(0, z) > \rho(g(0), z)\}$ et supposons que $\overline{(D(g_1) \cup D(g_1^{-1}))} \cap \overline{(D(g_2) \cup D(g_2^{-1}))} = \emptyset$. La région $\mathcal{D} = \bigcap_{i=1,2} Ext(D(g_i^\pm))$ est un polygone fondamental du groupe $\Gamma = \langle g_1, g_2 \rangle$, voir figures 2.3 et 2.4. Ce polygone correspond aux surfaces des figures 2.5 et 2.6.

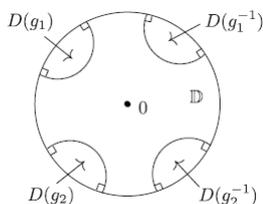


FIGURE 2.3 – Polygone fondamental

Exemple 2.17. (voir [18])

Soient une isométrie hyperbolique g_1 et une isométrie parabolique g_2 de \mathbb{D} . Posons $D(g) = \{z \in \mathbb{D} / \rho(0, z) > \rho(g(0), z)\}$ et supposons que $\overline{(D(g_1) \cup D(g_1^{-1}))} \cap \overline{(D(g_2) \cup D(g_2^{-1}))} = \emptyset$. La région $\mathcal{D} = \bigcap_{i=1,2} Ext(D(g_i^\pm))$ est un polygone fondamental du groupe $\Gamma = \langle g_1, g_2 \rangle$, voir figure 2.7. Ce polygone correspond à la surface de la figure 2.8.

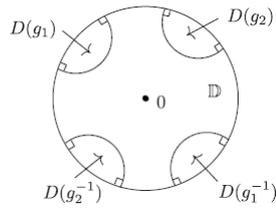


FIGURE 2.4 – Polygone fondamental

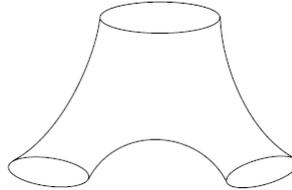


FIGURE 2.5 – Surface hyperbolique correspondante à la figure 2.3

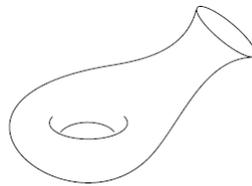


FIGURE 2.6 – Surface hyperbolique correspondante à la figure 2.4

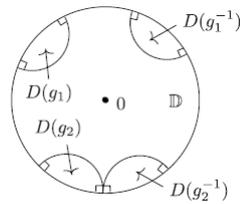


FIGURE 2.7 – Polygone fondamental

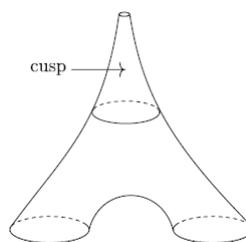


FIGURE 2.8 – Surface hyperbolique correspondante à la figure 2.7

3.2 Construction par recollement

Passons à l'exposé de notre deuxième type de construction d'une surface hyperbolique.

3.2.1 Procédé de recollement de surfaces

Pour plus de détails dans cette partie nous renvoyons à [42] et à [56].

Considérons deux surfaces hyperboliques à bord géodésique S_1 et S_2 . Soient les compo-

santes à bord difféomorphes α_1 et α_2 respectivement de ∂S_1 et ∂S_2 . Intuitivement la figure 2.9 dépeint le recollement de deux surfaces le long de leurs composantes à bord.

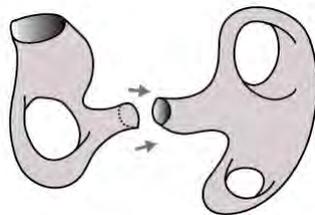


FIGURE 2.9 – Recollement de deux surfaces

Formellement le procédé de construction par recollement se fait de la manière qui suit. On considère un difféomorphisme $\varphi : \alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ et on définit sur l'union disjointe $S_1 \cup S_2$ la relation d'équivalence, appelée la *condition de recollement*

$$x \sim y \Leftrightarrow y = \varphi(x) \text{ pour } x \in \alpha_1, y \in \alpha_2. \quad (2.3)$$

La surface quotient $S = S_1 \cup_\varphi S_2 = (S_1 \cup S_2) / \sim$ que l'on obtient par la relation d'équivalence \sim est métrisable. Munissons cette surface $S = S_1 \cup_\varphi S_2$ d'un atlas lisse. On considère d'abord un atlas lisse $\{(U_i, \varphi_i) / i \in I\}$ de $S_1 \setminus \alpha_1$ et un atlas lisse $\{(U_j, \varphi_j) / j \in J\}$ de $S_2 \setminus \alpha_2$ où φ_i et φ_j sont à valeurs dans $\mathbb{H}^+ = \{z = x + iy \in \mathbb{C} / x \geq 0 \text{ et } y > 0\}$. Notons par $i_1 : S_1 \hookrightarrow S_1 \cup_\varphi S_2$ et $i_2 : S_2 \hookrightarrow S_1 \cup_\varphi S_2$ ces inclusions canoniques. Alors

$$\{(i_1(U_i), \varphi_i \circ i_1^{-1}) / i \in I\} \cup \{(i_2(U_j), \varphi_j \circ i_2^{-1}) / j \in J\}$$

est un atlas du complémentaire dans $S = S_1 \cup_\varphi S_2$ des courbes α_1 et α_2 recollées. Puis on construit une carte autour des courbes recollées. Cette carte doit être compatible aux cartes ci-dessus. Pour se faire on utilise le *lemme du collier*.

Lemme 2.18. (*lemme du collier voir [14] chp4*)

Soit M une surface à bord ∂M et α une composante à bord connexe. Ils existent un voisinage U de α dans M et un difféomorphisme $\psi : U \rightarrow V \subset \overline{\mathbb{H}}$ où $V \cong \alpha \times [0, 1)$ qui envoie α sur $\alpha \times \{0\}$.

Le voisinage U est appelé *voisinage tubulaire* de α . Soient U_1 et U_2 les voisinages tubulaires respectifs de α_1 et α_2 , ϕ_1 un difféomorphisme de U_1 sur $\alpha_1 \times [0, 1)$ (envoyant α_1 sur $\alpha_1 \times \{0\}$) et ϕ_2 un difféomorphisme de U_2 sur $\alpha_2 \times [0, 1)$ (envoyant α_2 sur $\alpha_2 \times \{0\}$). On considère un ouvert $O := U_1 \cup_\varphi U_2$ de $S_1 \cup_\varphi S_2$ et on fixe une immersion $\iota : \alpha_2 \times (-1, 1) \rightarrow \overline{\mathbb{H}}$. Ce qui est toujours possible car α_2 est soit un intervalle ou un cercle. Et on définit des

coordonnées de O par

$$\phi : O \rightarrow \overline{\mathbb{H}}, \quad x \mapsto \begin{cases} \iota \circ (\varphi, id) \circ \phi_1(x), & \text{si } x \in U_1 \\ \iota \circ \phi_2(x), & \text{si } x \in U_2. \end{cases}$$

Finalement on montre que la surface quotient $S = S_1 \cup_{\varphi} S_2 = (S_1 \cup S_2) / \sim$ est une surface hyperbolique à bord munie de l'atlas lisse défini par

$$\{(i_1(U_i), \varphi_i \circ i_1^{-1}) / i \in I\} \cup \{(i_2(U_j), \varphi_j \circ i_2^{-1}) / j \in J\} \cup \{O, \phi\}.$$

La surface quotient $S = S_1 \cup_{\varphi} S_2 = (S_1 \cup S_2) / \sim$ appelé le *recollement de S_1 et S_2 à travers φ* . Et on recolle par le même procédé plusieurs surfaces hyperboliques $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ pour obtenir une surface hyperbolique avec un atlas lisse sur \mathbb{H} . La métrique sur la nouvelle surface construite est déduite de celle de \mathbb{H} . Et une distance sur la nouvelle surface est donnée par la relation 2.1 et 2.2.

Comme dans la sous-section précédente donnons des exemples de base qui illustrent la construction par recollement. Le premier exemple que nous donnons revient sur les cylindres hyperboliques.

3.2.2 Exemples de recollement de surfaces

Exemple 2.19. (*Cylindre hyperbolique*)

Plaçons nous sur le plan hyperbolique \mathbb{H} et considérons la géodésique $t \mapsto \beta(t) = ie^t \in \mathbb{H}$, $t \in \mathbb{R}$. Soient α_1 et α_2 deux géodésiques qui coupent β perpendiculairement respectivement en ia et ib avec $a < b$. La bande fermée S entre α_1 et α_2 est une surface hyperbolique muni de l'atlas $\mathcal{A} = \{(S, Id)\}$, voir la figure 2.10. Paramétrisons α_1 et α_2 par unité de longueur d'arcs avec une orientation du bords telle que $\alpha_1(0) = ia$ et $\alpha_2(0) = ib$. L'isométrie γ définie par $\varphi(z) = \frac{bz}{a}$, $z \in \mathbb{H}$, laisse β invariante et vérifie $\varphi(\alpha_1(t)) = \alpha_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Posons $S_1 = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{H} : a \leq b, 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ et $S_2 = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{H} : a \leq b, \frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi\}$. La condition de recollement

$$\varphi(\alpha_1(t)) = \alpha_2(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

produit la surface hyperbolique

$$C = S_1 \cup_{\varphi} S_2 \quad (\text{modulo la relation 2.4}).$$

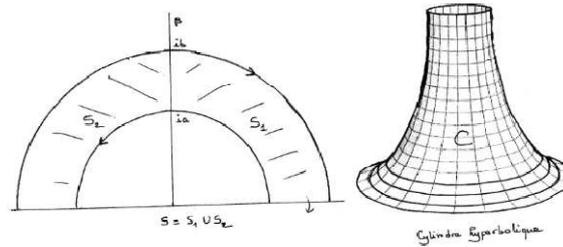


FIGURE 2.10 – Cylindre hyperbolique

L'arc géodésique β restreint à $[\ln a, \ln b]$ se projette en une géodésique fermée β_1 sur C de longueur

$$l = l(\beta_1) = \ln \left(\frac{b}{a} \right). \quad (2.5)$$

Soit le sous-groupe cyclique $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ de $PSL(2, \mathbb{R})$. L'espace quotient $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ induit une structure hyperbolique naturelle telle que le revêtement $\mathbb{H} \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}$ est une isométrie locale, voir le théorème 2.9. On identifie donc $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ à C . La surface C est appelée **cylindre hyperbolique**.

Exemple 2.20. (*recollement de géodésiques fermées*)

Soient S_1 et S_2 deux surfaces hyperboliques à bord (non nécessairement distinctes). Supposons que α_1 et α_2 sont deux composantes à bord respectivement de S_1 et S_2 de même

longueur l . On paramétrise α_1 et α_2 périodiquement sur \mathbb{R} de période 1. Si S_1 et S_2 coïncident on suppose que α_1 et α_2 sont distinctes et ont la même orientation au bord c'est-à-dire S_1 et S_2 sont toutes les deux du côté droite ou gauche de α_1 et α_2 . Soit

$$S = S_1 \cup S_2 \text{ mod}(\alpha_1(t) = \alpha_2(-t), t \in \mathbb{R}). \quad (2.6)$$

Les deux géodésiques α_1 et α_2 se projette en une géodésique simple fermée α de longueur l sur S . Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit les deux voisinages $\{p \in S/d(p, \alpha) < \varepsilon\}$ et $\{p \in C/d(p, \beta_1) < \varepsilon\}$ sont isométriques. Rappelons que C est le cylindre hyperbolique défini dans l'exemple précédent.

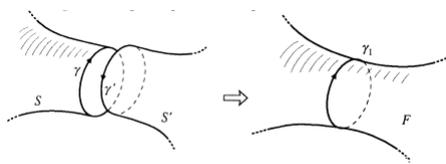


Figure 1.3.3

FIGURE 2.11 – Recollement de géodésiques fermées

4 Pantalon hyperbolique

Nous abordons dans cette section une surface hyperbolique fondamentale dans la construction de toutes les surfaces hyperboliques : elle représente la *brique de construction* des surfaces.

4.1 Définitions

Définition 2.21. On appelle **pantalon hyperbolique** P une surface hyperbolique compacte à bords géodésiques difféomorphe à une sphère privée de trois disques (trous) disjoints. Les composantes à bord du pantalon sont difféomorphes au trois cercles qui bordent les disques enlevés.

Exemple 2.22. Reprenons l'exemple 2.16. On considère deux isométries hyperboliques g_1 et g_2 de \mathbb{D} . Posons $D(g) = \{z \in \mathbb{D} / \rho(0, z) > \rho(g(0), z)\}$ et supposons que $\overline{(D(g_1) \cup D(g_1^{-1}))} \cap \overline{(D(g_2) \cup D(g_2^{-1}))} = \emptyset$. La figure 2.12 indique les identifications sur les disques. La surface que l'on obtient $P = \langle g_1, g_2 \rangle \setminus \mathbb{H}$, figure 2.13 est un pantalon hyperbolique.

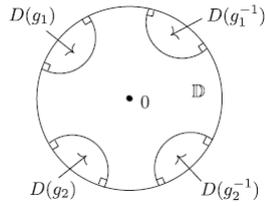


FIGURE 2.12 – Polygone fondamental

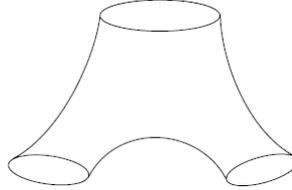


FIGURE 2.13 – Pantalon hyperbolique

4.2 Construction d'un pantalon

On obtient un pantalon en recollant deux hexagones à angles droits isométriques \mathcal{H}^+ et \mathcal{H}^- de côtés non consécutifs $\beta^\pm, \beta'^\pm, \beta''^\pm$ et côtés opposés $c'^\pm, \alpha^\pm, c^\pm$. Soit P le pantalon hyperbolique obtenu en recollant ces deux hexagones le long de $\beta^\pm, \beta'^\pm, \beta''^\pm$, voir figure 2.14. Les côtés identifiés β, β', β'' sont appelés *coutures* de P , et les bords qui en résultent $c' = c'^+ \cup c'^-$, $\alpha = \alpha^+ \cup \alpha^-$, $c = c^+ \cup c^-$ sont des géodésiques fermées appelées *poignets* de P . Les coutures sont les plus courts segments géodésiques joignant les poignets de P , et réciproquement les poignets sont les plus courts segments géodésiques joignant les coutures, voir la proposition 1.15.

Il existe une *symétrie naturelle* h qui à chaque point d'un des hexagones \mathcal{H}^\pm du pantalon

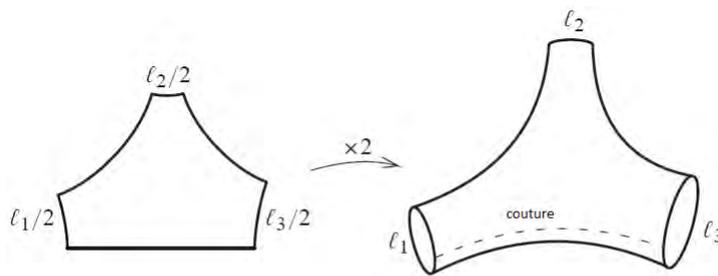


FIGURE 2.14 – Construction d'un pantalon en recollant deux hexagones isométriques

P associe le point correspondant sur l'autre hexagone opposé. Nous avons $Fix(h) = \beta \cup \beta' \cup \beta''$. La symétrie h échange les deux composantes connexes de $P \setminus Fix(h)$.

Définition 2.23. – On appelle **faces** du pantalon P les fermetures des composantes connexes de $P - \text{Fix}(h)$ échangées par h .

– On dira qu’une géodésique σ **tourne sur** P si elle change de face sur P .

Enonçons une proposition qui permet de définir un pantalon hyperbolique en termes de paramètres réels.

Proposition 2.24. (voir [33] Théorème 3.5.8)

Pour tout triplet (l_1, l_2, l_3) de réels strictement positifs il existe à isométrie près un unique pantalon dont les longueurs des composantes à bords sont l_1, l_2 et l_3 .

Il résulte de cette proposition qu’un pantalon hyperbolique est le quotient de \mathbb{H} par le groupe fuchsien Γ engendré par des isométries hyperboliques γ_1 et γ_2 de longueur de translation respective l_1 et l_2 tels que $\overline{(D(\gamma_1) \cup D(\gamma_1^{-1}))} \cap \overline{(D(\gamma_2) \cup D(\gamma_2^{-1}))} = \emptyset$. La longueur l_3 est la longueur de translation de l’isométrie $(\gamma_1 \circ \gamma_2)^{-1}$. Les isométries γ_1, γ_2 et γ_3 sont *primitives*. Une isométrie d’un groupe fuchsien Γ est dite primitive si elle n’est la puissance d’aucune autre isométrie de Γ .

Notons également que deux pantalons qui ont le même triplet de longueurs sont isométriques. Ce qui nous permet d’énoncer la définition suivante.

Définition 2.25. Un pantalon est dit **régulier** si pour tout $1 \leq i \leq 3$, l_i est égal à une constante l . Sinon il est dit **irrégulier**.

5 Surfaces hyperboliques géométriquement infinies

Dans cette section, grâce à la section 3 nous présentons deux façons de construction de groupes fuchiens géométriquement infinis.

5.1 Groupes de Schottky

5.1.1 Présentation

Soient $\{(C_k, C_{-k})\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ des paires de géodésiques complètes (fini ou infini) de \mathbb{D} deux à deux disjoints ou tangents extérieurement. Pour tout $k \in I$, où $I \subseteq \mathbb{N}^*$, notons par D_k et E_k respectivement le demi-disque euclidien ouvert de \mathbb{D} de frontière C_k et son complémentaire dans \mathbb{D} . Supposons que ces géodésiques sont identifiées deux à deux par les isométries h_k telles que $h_k(C_k) = C_{-k}$, $k \in J \subseteq \mathbb{Z}^*$. Nous avons $h_k(E_k) \subset D_{-k}$. Posons

$$\Gamma = \langle h_k \rangle_{k \in I \subseteq \mathbb{N}^*} \text{ et } \mathcal{P} = \bigcap_{k \in J \subseteq \mathbb{Z}^*} E_k.$$

Définition 2.26. Le groupe Γ est appelé **groupe de Schottky** et le polygone convexe \mathcal{P} est appelé **polygone de Schottky** de Γ .

Signalons que les groupes de Schottky de type fini sont largement étudiés, voir [15] et [18]. Dans cette sous-section nous traitons en particulier les groupes de Schottky de type infini, voir [49]. Avant d'aller plus loin énonçons les lemmes de Ping-Pong suivants. Notons d'abord que tout élément $\gamma \in \Gamma \setminus \{Id\}$ s'écrit sous la forme $\gamma = h_{l_1} \dots h_{l_m}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, $l_j \in \mathbb{Z}^*$ et $l_{j+1} \neq l_j$, appelée *mot réduit* de γ . Posons $D(h_{l_1} \dots h_{l_m}) = h_{l_1} \dots h_{l_{m-1}}(D_{l_m})$.

Propriétés 2.27. 1. Soit $\gamma_p = h_{l_1} \dots h_{l_p}$ un mot réduit de $\gamma \in \Gamma \setminus \{Id\}$. La propriété suivante est vérifiée : $\gamma_p(E_{-l_p}) \subset D_{l_1}$, en particulier $\gamma_p(\mathcal{P}) \subset D_{l_1}$.

2. La suite $(D(h_{l_1} \dots h_{l_p}))$ des demi-disques euclidiens est emboîtée.

3. Soient deux mots réduits distincts $h_{l_1} \dots h_{l_m}$ et $h'_{l_1} \dots h'_{l'_m}$ les demi-disques $D(h_{l_1} \dots h_{l_m})$ et $D(h'_{l_1} \dots h'_{l'_m})$ sont tangents ou disjoints.

Démonstration :

1. Montrons la propriété en faisant une récurrence sur p . Pour $p = 1$ nous avons $\gamma_1 = h_{l_1}$ et comme h_{l_1} envoie E_{-l_1} sur D_{l_1} alors $\gamma_1(E_{-l_1}) \subset D_{l_1}$.

Supposons la propriété vraie jusqu'à l'ordre p c'est-à-dire $h_{l_1} \dots h_{l_p}(E_{-l_p}) \subset D_{l_1}$.

Nous avons :

$$\gamma_{p+1}(E_{-l_{p+1}}) = h_{l_1} \dots h_{l_p} h_{l_{p+1}}(E_{-l_{p+1}}) = h_{l_1}(h_{l_2} \dots h_{l_{p+1}}(E_{-l_{p+1}})).$$

Par hypothèse de récurrence nous avons

$$h_{l_2} \dots h_{l_{p+1}}(E_{-l_{p+1}}) \subset D_{l_2}.$$

Il en résulte que $\gamma_{p+1}(E_{-l_{p+1}}) \subset h_{l_1}(D_{l_2})$

Puisque $h_{l_2} \neq h_{-l_1}$, alors $D_{l_2} \subset E_{-l_1}$ et par conséquent $h_{l_1}(D_{l_2}) \subset h_{l_1}(E_{-l_1}) \subset D_{l_1}$.

D'où $\gamma_{p+1}(E_{-l_{p+1}}) \subset D_{l_1}$.

Finalement, $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $\gamma_p(E_{-l_p}) \subset D_{l_1}$ et en particulier puisque $\mathcal{P} \subset E_{-l_p}$, $\gamma_p(\mathcal{P}) \subset D_{l_1}$.

2. Puisque $h_{l_{j+1}} \neq h_{-l_j}$ alors $D(h_{l_{j+1}}) \subset E(h_{-l_j})$. Par suite $h_{l_j}(D(h_{l_{j+1}})) \subset D(h_{l_j})$. D'où $D(h_{l_1} \dots h_{l_{p-1}}) \subset D(h_{l_1} \dots h_{l_p})$.

3. Soit k le plus petit entier tel que $h_{l_k} \neq h'_{l'_k}$. La démonstration de cette propriété revient à montrer que les demi-disques euclidiens $D(h_{l_k} \dots h_{l_m})$ et $D(h'_{l'_k} \dots h'_{l'_m})$ sont disjoints ou tangents. Les propriétés 1 et 2 impliquent que les demi-disques $D(h_{l_k} \dots h_{l_m}) = h_{l_k}(D(h_{l_{k+1}} \dots h_{l_m}))$ et $D(h'_{l'_k} \dots h'_{l'_m}) = h'_{l'_k}(D(h'_{l'_{k+1}} \dots h'_{l'_m}))$ appartiennent respective-

ment aux disques $D(h_{l_k})$ et $D(h'_{l_k})$ or ces disques sont tangents ou disjoints. D'où le résultat.

□

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition suivante sur la discrétitude du groupe de Schottky Γ .

Proposition 2.28. *Le groupe de Schottky Γ est un groupe discret libre.*

Démonstration :

Par construction \mathcal{P} est un polygone convexe de \mathbb{D} , c'est une intersection de demi-plans de \mathbb{D} . Soit $\gamma \in \Gamma \setminus \{Id\}$ de forme réduite $\gamma = h_{l_1} \dots h_{l_m}$. D'après le premier point de la propriété 2.27 pour tout $z \in Int(\mathcal{P})$,

$$\gamma(z) = h_{l_1} \dots h_{l_m}(z) \in D_{l_1}.$$

Cette relation montre que $h_{l_1} \dots h_{l_m} \neq Id$, et donc il n'existe aucune relation entre les h_k , c'est-à-dire Γ est libre. Elle montre également que $Int(\mathcal{P}) \cap \gamma(Int(\mathcal{P})) = \emptyset$, pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{Id\}$. Ce qui implique $\{z\}$ est un ouvert de $\Gamma.z$. L'application $f : \Gamma \rightarrow \Gamma.z$ est continue donc $f^{-1}(\{z\}) = \{Id\}$ est un ouvert de Γ et alors Γ est discret.

□

Exemple 2.29. Plaçons nous dans le demi-plan de Poincaré, \mathbb{H} et considérons une famille de demi-cercles euclidiens, $(S_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ deux à deux tangents ou disjoints extérieurement, de centres $c_k \in \mathbb{R}_+^*$ et de rayons r_k tels que $c_k \rightarrow +\infty$ $c_1 - r_1 \geq 0$. Posons $S_{-k} = \sigma(S_k)$ où σ est la réflexion par rapport à l'axe imaginaire. Pour tout entier relatif non nul k notons D_k le demi-disque euclidien ouvert délimité par S_k , et E_k son complémentaire dans $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$. Notons par h_k l'isométrie telle que $h_k(D_k) = E_{-k}$ et remarquons que $h_k^{-1} = h_{-k}$. Nous posons comme ci-dessus

$$\Gamma = \langle h_k \rangle_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ et } \mathcal{P} = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}^*} E_k.$$

Définition 2.30. *Ce groupe de Schottky Γ est appelé **groupe de paires de demi-cercles égaux**.*

*Si $c_{-k} = -c_k$ ce groupe est appelé **groupe de demi-cercles symétriques** et nous parlerons de groupe de demi-cercles de **paramètres** $(c_k, r_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.*

5.1.2 Codage de l'ensemble limite d'un groupe de Schottky

Soient Γ un groupe de Schottky (fini ou infini), sans torsion de système générateurs $\{h_k\}$, Λ son ensemble limite. Posons $\mathcal{A} = \{h_k, h_{-k}\}$ l'ensemble des générateurs de Γ et leur

inverse et supposons que le polygone de Schottky \mathcal{P} correspondant à \mathcal{A} est un polygone fondamental de Γ . Considérons l'alphabet $A = \{\mathcal{A}, \mathcal{P}\}$, voir [41], dont les lettres sont :

1. les générateurs h_k et leurs inverses h_{-k} ,
2. les points d'accumulation de l'ensemble des extrémités des demi-cercles C_k et C_{-k} .

On appelle ces lettres, *lettres terminales*, voir [41]. Notons que chaque lettre terminale est un point limite de Γ .

Définition 2.31. *On appelle **mot réduit** écrit à partir de l'alphabet A toute suite finie ou infinie $x = (x_j)$ d'éléments de A telle que :*

1. $x_{j+1} \neq x_{-j}$ et
2. si la suite x est finie, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, alors $x_n \in \Lambda$ et $x_k \in \mathcal{A}$.

Les suites $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ et $(x_j)_{j \geq 1}$ sont appelées respectivement **suites finies réduites** et **suites infinies réduites**.

Notons Σ l'ensemble des suites finies ou infinies réduites et définissons l'application $f : \Sigma \rightarrow \Lambda$ comme suit :

1. à une suite infinie réduite $x = (x_j)_{j \geq 1}$ on associe $\xi \in \Lambda$ tel que $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_1 \dots x_n(z)$,
 $z \in \mathbb{H}$,
2. à une suite finie réduite $x = (x_j)_{1 \leq j \leq n}$ on associe $f(x) = x_1 \dots x_{n-1}(x_n)$.

Nous avons la proposition suivante.

Proposition 2.32. *L'application f est surjective.*

On peut munir l'alphabet A d'une topologie et en déduire que l'application f de Σ dans Λ est continue, voir [41].

5.2 Surfaces cannelées

Construisons maintenant un groupe fuchsien géométriquement infini par recollement de pantalons hyperboliques.

5.2.1 Présentation

Les surfaces que nous présentons ici sont fondamentales dans le sens où elles servent à construire des surfaces hyperboliques géométriquement infinies de première espèce quelconque en recollant une infinité de pantalons hyperboliques. Cette technique de construction nous permettra de simplifier les constructions de Kulikov dans [41].

Considérons une infinité de pantalons hyperboliques $\{P_n\}_{n \geq 1}$. Notons par α_n , α'_n et α_{n+1} les poignets des pantalons P_n , voir la sous-section 4.2. On suppose que pour tout $n \geq 1$ les

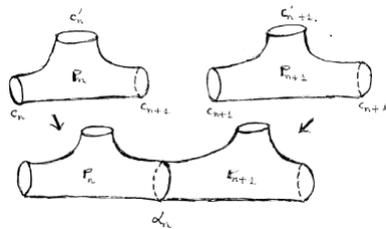


FIGURE 2.15 – Recollement de deux pantalons

bords de P_n et P_{n+1} notés de la même manière α_{n+1} sont isométriques, voir figure 2.15. En utilisant le même procédé décrit dans la sous-section 2.9 on recolle les pantalons P_n et P_{n+1} suivant leur bord α_{n+1} , voir figure 2.15. On notera par α_{n+1} la géodésique obtenue en recollant les pantalons P_n et P_{n+1} . Posons

$$S := \left(\bigcup_{n \geq 1} P_n \right) / \sim \quad (2.7)$$

où \sim est la condition de recollement définie dans la sous-section 2.9.

Définition 2.33. On appelle *surface cannelée* S (flûte dans la littérature) la surface S définie par l'égalité 2.7.

Les surfaces cannelées sont introduites en premier par Basmajian, voir [6]. Ils constituent les prototypes de surfaces géométriquement infinies les plus simples. Les pantalons $\{P_n\}$ donne une décomposition en pantalons de la surface cannelée S et la décomposition en pantalons $\{P_n\}$ donne naturellement une suite emboîtée de géodésiques simples, fermées (α_n) avec $\alpha_{n+1} = P_n \cap P_{n+1}$, voir la figure 2.16.

Relions les constructions par recollement et par quotient. On sait qu'un pantalon hyperbolique P_n est le quotient de \mathbb{H} par un groupe fuchsien purement hyperbolique Γ_n , voir la sous-section 4.2. Soient α_n , α'_n et α_{n+1} les composantes à bord, qui sont des géodésiques simples et fermées du pantalon hyperbolique P_n . Le groupe fuchsien Γ_n est engendré par les isométries hyperboliques g_n et g_{n+1} telles que g_k , $k = n, n + 1$ a pour axe un relevé $\tilde{\alpha}_k$ de α_k et $g'_n = (g_{n+1} \circ g_n)^{-1}$ a pour axe un relevé $\tilde{\alpha}'_n$ de α'_n , voir la sous-section 4.2.

On dira que $\{g_n, g_{n+1}\}$ est un *système générateur* du pantalon P_n . Une surface cannelée S peut être vue comme une surface hyperbolique définie par un groupe fuchsien $\Gamma = \langle \Gamma_n \rangle_{n \in \mathbb{N}^*}$ où les Γ_n sont les groupes fuchiens qui définissent les pantalons hyperboliques P_n tels que pour tout entier naturel non nul n ,

$$N(\Gamma_n) \cap N(\Gamma_{n+1}) = \tilde{\alpha}(g_{n+1})$$

où $N(\Gamma_n)$ est le coeur convexe de Nielsen de Γ_n et $\tilde{\alpha}(g_{n+1})$ est un relevé de α_{n+1} . On peut énoncer la définition suivante.

Définition 2.34. Un *système standard des générateurs* $\{g_n\}$ d'un groupe fuchsien Γ associé à la décomposition $\{P_n\}$ d'une surface cannelée $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ est un système générateurs de Γ vérifiant les conditions suivantes :

- pour tout n , la projection de l'axe de g_n sur S est librement homotope à α_n ;
- tout pair $\{g_n; g_{n+1}\}$ est un système générateurs du pantalon P_n .

Les axes du système standard des générateurs $\{g_n\}$ donne une suite emboîtée $(\tilde{\alpha}_n)$ sur \mathbb{H} .

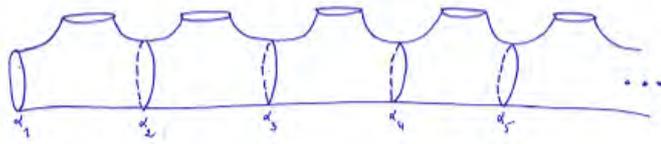


FIGURE 2.16 – Surface cannelée

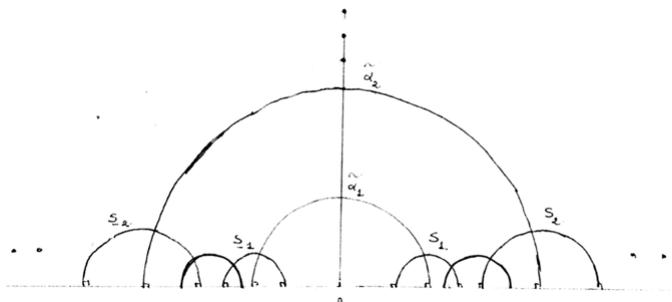
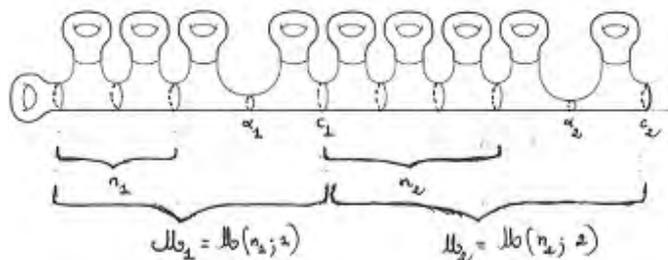


FIGURE 2.17 – Relevé d'une surface cannelée

5.2. 2 Exemples de surfaces cannelées

Exemple 2.35. Soient les entiers naturels $n_k > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$. Construisons une surface cannelée S en commençant par la construction d'une surface hyperbolique géométriquement finies $\mathcal{M}_k = \mathcal{M}(k; n_k)$ en suivant les étapes suivantes :

- 1^{er} étape : on recolle à partir de la gauche un nombre n_k de pantalons réguliers isométriques, bordés par trois géodésiques de longueur l ,
- 2^e étape : on recolle deux pantalons étroits, bordés par deux géodésiques de longueur l et une de longueur $l_k < 1$. Puis l'ensemble collé à la face latérale droite des

FIGURE 2.18 – Surface cannelée de paramètres $(n_k; l; l_k)$

pantalons réguliers. Nous notons α_k la géodésique fermée sur la surface de longueur l_k et c_k la géodésique fermée de longueur l qui borde le dernier pantalon irrégulier à droite,

- 3^e étape : on recolle sur les bouts circulaires supérieurs des pantalons un nombre $n_k + 2$ de surfaces compactes à courbure -1 difféomorphes au tore privé d'un disque.

On aligne de la gauche vers la droite un nombre infini de $\mathcal{M}(n_k; k)$ et on recolle sur le bout circulaire du premier pantalon à gauche une surface compacte à bord de courbure -1 difféomorphe au tore privé d'un disque. La surface S de paramètres $(n_k; l; l_k)$ obtenue possède un unique bout infini, se prolonge indéfiniment vers la droite et est géométriquement infinie, voir figure 2.18.

Exemple 2.36. (\mathbb{Z} -revêtement)

Soient Γ_0 un groupe fuchsien purement hyperbolique cocompact et un sous groupe normal Γ non-trivial de Γ_0 d'indice infini tel que $\Gamma \backslash \Gamma_0 \simeq \mathbb{Z}$. La surface $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ est appelée \mathbb{Z} -revêtement d'une surface hyperbolique compacte $S_0 = \Gamma_0 \backslash \mathbb{H}$.

Topologiquement, la surface S est construite à partir de \mathbb{Z} copies de S_0 . Un \mathbb{Z} -revêtement admet une décomposition en pantalons réguliers dont la longueur des composantes à bord est une constante l .

6 Bouts d'une surface hyperbolique

Introduisons à présent la notion de *bout* d'une surface hyperbolique que nous classifions en trois types. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à [25], [8] et [29].

6.1 Définitions

Définition 2.37. Soit S une surface hyperbolique. Considérons une suite $(K_i)_{i \geq 1}$ de compacts de S avec $K_1 \subset K_2 \dots \subset S$ telle que $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = S$. Soit une suite de composantes connexes (\mathcal{E}_i) telles que $\mathcal{E}_i \subset S - K_i$ et $\mathcal{E}_{i+1} \subset \mathcal{E}_i$. Deux telles suites (\mathcal{E}_i) et (\mathcal{E}'_i) sont dites **équivalentes** si pour tout $i \in \mathbb{N}$ ils existent $j, k \in \mathbb{N}$ tels que $\mathcal{E}_i \supseteq \mathcal{E}'_j$ et $\mathcal{E}'_i \supseteq \mathcal{E}_k$. La classe d'équivalence e correspondante est appelée un **bout topologique** de la surface S et on le matérialise par un de ses représentants, $e = (\mathcal{E}_i)_{i \geq 1}$.

Exemple 2.38. Soit une surface cannelée S et $\{P_n\}$ son décomposition en pantalons. Posons $K_n = \bigcup_{k=1}^n P_k$. La suite $(\mathcal{E}_n)_{n \geq 1}$ où $\mathcal{E}_n = \bigcup_{k > n} P_k$ définit un bout de la surface cannelée S .

Dans la suite nous allons nous intéresser à des bouts hyperboliques c'est-à-dire des bouts topologiques d'une surface hyperbolique munis d'une structure hyperbolique.

Théorème et Définition 2.39. ([8] thm D.3.13) Un bout $e = (\mathcal{E}_i)$ d'une surface hyperbolique S est l'une des trois formes suivantes.

1. Un sous-ensemble D à bord de S conformément équivalent à un disque perforé $\{z \in \mathbb{C} / 0 < |z| < 1\}$ muni de la métrique induite par celle du plan hyperbolique \mathbb{D} et pour i assez grand $\mathcal{E}_i \subset D$. Dans ce cas le bout est dit **cuspidal** (ou **cusp** tout court) et son bord est un horocycle.
2. Un sous-ensemble D à bord de S conformément équivalent à un anneau $\{z \in \mathbb{C} / 1 < |z| < r\}$ pour un certain $r > 1$ muni de la métrique induite par celle du plan hyperbolique \mathbb{D} et pour i assez grand $\mathcal{E}_i \subset D$. Dans ce cas le bout est dit un **entonnoir** et son bord est une géodésique simple fermée.
3. Un sous-ensemble D à bord de S conformément équivalent à l'ensemble $\{z \in \mathbb{D} : \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$ muni de la métrique induite par celle du plan hyperbolique \mathbb{D} et pour i assez grand $\mathcal{E}_i \subset D$. Dans ce cas le bout est dit **cylindre infini** et son bord est une géodésique simple non-fermée.

Un cusp et un entonnoir sont dits *bout finis* et un cylindre infini est dit *bout infini*. Notons par $\mathcal{E}(S)$ l'espace des bouts d'une surface S . On peut munir cet espace d'une topologie définie de la manière suivante. Soit U une composante connexe de $S - K_i$. On définit $U^* = \{e \in \mathcal{E}(S) : e = \{\mathcal{E}_k\} \text{ et } \mathcal{E}_k \subset U, \text{ pour } k \text{ assez grand}\}$. L'ensemble des U^* forme une base de la topologie de $\mathcal{E}(S)$. La topologie de $\mathcal{E}(S)$ ne dépend pas du choix de la suite des compacts (K_i) , voir [8].

Définition 2.40. Soit $e = (\mathcal{E}_i)$ un bout d'une surface hyperbolique S .

On dira qu'une suite de compacts (K_i) **s'échappe à travers** e si la suite (K_i) converge

vers e dans l'espace $S \cup \mathcal{E}(S)$. Par abus de langage on dira qu'un chemin $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow S$ s'échappe à travers le bout $e = (\mathcal{E}_i)$ si $\alpha(t)$ converge vers e lorsque t tend vers l'infini. Autrement dit pour tout i , il existe un réel T_i tel que pour tout $t > T_i$, $\sigma(t) \in \mathcal{E}_i$. Un rayon géodésique qui traverse un bout infini est dit **rayon infini**.

Remarque 2.41. Dans la suite les compacts K_i des définitions ci-dessus sont soit des pantalons hyperboliques ou des géodésiques simples fermées.

6.2 Géométrie des bouts

Dans ce paragraphe on se place sur le disque de Poincaré \mathbb{D} et on considère un groupe de Schottky Γ d'ensemble limite Λ et de domaine de Dirichlet centré en 0, $\mathcal{D}_0(\Gamma)$. On note par $\{C_j, C'_j\}$ les couples de côtés identifiés du domaine $\mathcal{D}_0(\Gamma)$ et on suppose qu'ils se trouvent de part et d'autre d'un diamètre euclidien de \mathbb{D} , noté $\tilde{\beta}$, voir la figure 2.19. Chaque couple de côtés $\{C_j, C'_j\}$ est identifié par une isométrie non-elliptique h_j et $\Gamma = \langle h_j \rangle$. Si l'isométrie h_j est hyperbolique on note par $\tilde{\alpha}_j$ son axe de translation. Soient L_j l'orthogonale commune à deux côtés consécutifs disjoints C_j et C_{j+1} et L'_j celle commune aux côtés consécutifs disjoints C'_j et C'_{j+1} . Chaque orthogonale commune L_j ou L'_j définit un intervalle I_j ou I'_j de $\partial\mathbb{D}$ de même extrémités que L_j ou L'_j , voir la figure 2.19.

Si l'ensemble des points ordinaires $O_\Gamma = \partial\mathbb{D} \setminus \Lambda$ est non vide alors il est la réunion

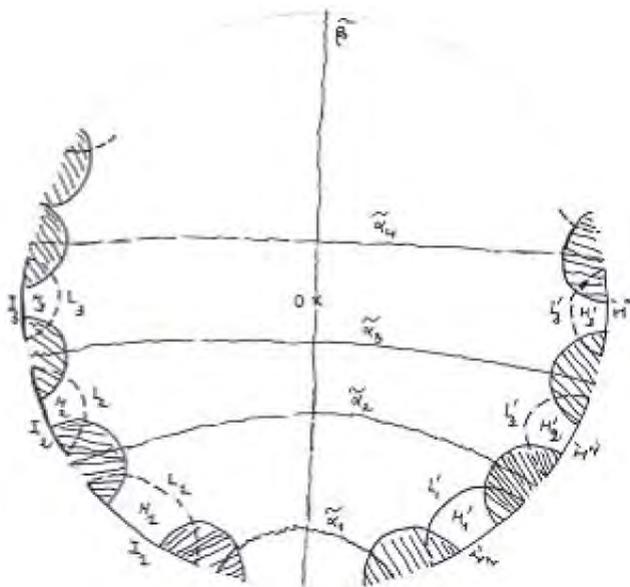


FIGURE 2.19 – Région de Nielsen, bouts finis et infini

dénombrable des intervalles I_j et I'_j de $\partial\mathbb{D}$. Soit H_j et H'_j respectivement les demi-plans délimités respectivement d'un côté par L_j et I_j et de l'autre côté par L'_j et I'_j , voir figure 2.19. Si ξ est fixé par une isométrie parabolique alors il existe \mathcal{O}_ξ qui ne rencontre aucun demi-plan H_j , voir la figure 2.20.

La région de Nielsen du groupe de Schottky Γ est l'ensemble

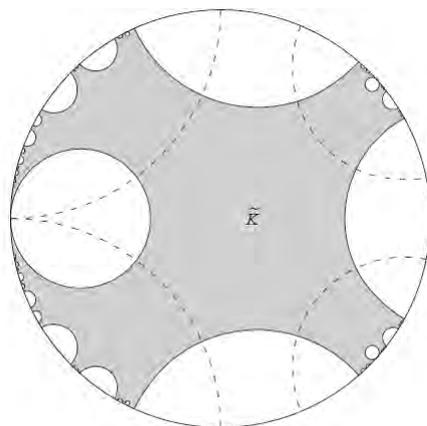


FIGURE 2.20 – Un horocycle centré sur un point fixé par une isométrie parabolique.

$$\tilde{N}(\Gamma) := \mathbb{D} - \bigcup_{j \in J \subset \mathbb{N}} (H_j \cup H'_j).$$

Le groupe Γ agit sur $\tilde{N}(\Gamma)$ et le coeur convexe de la surface $\Gamma \backslash \mathbb{D}$ est le quotient $\Gamma \backslash \tilde{N}$. On le note par $N(\Gamma)$ ou $N(S)$, voir [3].

Définition 2.42. On appelle la **région de Nielsen tronquée** du groupe de Schottky Γ la partie de \mathbb{D} définie par

$$\tilde{K}(\Gamma) := \left(\tilde{N} \cap \mathcal{D}_0(\Gamma) \right) - \cup \mathcal{O}_\xi^+,$$

où l'union est prise sur l'ensemble des points fixés par une isométrie parabolique de Γ . Son quotient

$$K(\Gamma) := \Gamma \backslash \tilde{K}(\Gamma),$$

noté également $K(S)$, est appelé **coeur convexe tronqué** de la surface S .

Puisque Γ est sans torsion, la région de Nielsen tronquée $\tilde{K}(\Gamma)$ est un polygone convexe de \mathbb{D} . La géodésique $\tilde{\beta}$ partage $\tilde{K}(\Gamma)$ en deux polygones généralisés convexes. Lorsque Γ est géométriquement fini alors $\tilde{K}(\Gamma)$ est un polygone compact de \mathbb{D} . Le théorème suivant donne une classification des bouts de la surface S .

Théorème 2.43. (voir [2] thm.1.2)

Toute surface hyperbolique complète à bords géodésiques non homéomorphe à un disque perforé est la réunion de son coeur convexe tronqué, d'entonnoirs recollés le long de géodésiques simples fermées et de cylindres infinis recollés le long de géodésiques simples

non-fermées.

Lorsque la surface hyperbolique est géométriquement finie nous avons.

Théorème 2.44. *(voir [11], theo2.13)*

Soit une surface hyperbolique non-élémentaire géométriquement finie S . Le coeur convexe tronqué $K(S)$ et son complémentaire $S - K(S)$ est la réunion disjointe de cusps et d'entonnoirs.

Les composantes de $S - K(S)$ sont en correspondance biunivoque avec les bouts de S en tant qu'espace topologique où chaque composante est un voisinage d'un bout. La structure des bouts est classifiée selon la manière dont ils intersectent le coeur convexe $N(S)$. Ainsi sur le plan hyperbolique \mathbb{D}

- a-** un cusp de la surface $S = \Gamma \backslash \mathbb{D}$ correspond à l'extrémité commune de deux côtés tangents C_j et C_{j+1} ou C'_j et C'_{j+1} du polygone $\mathcal{D}_0(\Gamma)$.
- b-** un entonnoir de la surface $S = \Gamma \backslash \mathbb{D}$ correspond à un intervalle I_j ou I'_j du bord à l'infini $\partial\mathbb{D}$. Cet intervalle est défini par deux côtés consécutifs et disjoints C_j et C_{j+1} ou C'_j et C'_{j+1} du polygone $\mathcal{D}_0(\Gamma)$.
- c-** un cylindre infini (bout infini) de la surface $S = \Gamma \backslash \mathbb{D}$ correspond à l'existence d'une suite infinie d'intervalles distincts (I_j) ou à la suite des axes $(\tilde{\alpha}_j)$ associés dans la construction.

La décomposition en pantalons $\{P_k\}$ d'une surface cannelée S induit une exhaustion de surfaces hyperboliques géométriquement finies $\{S_k\}$. Il existe un groupe fuchsien sans torsion Γ_k tel que $S_k = \Gamma_k \backslash \mathbb{H}$. Soit $\tilde{N}_k(\Gamma_k)$ la région de Nielsen de Γ_k . Puisque $\Gamma_k \leq \Gamma_{k+1}$, on a $\tilde{N}_k(\Gamma_k) \subseteq \tilde{N}_{k+1}(\Gamma_{k+1})$. Et puisque les $\tilde{N}_k(\Gamma_k)$ forment une suite croissante (au sens de l'inclusion) de domaines à bords géodésiques, lorsque $n \rightarrow \infty$ soit les géodésiques $\tilde{\alpha}_k$ du bord $\partial\tilde{N}_k(\Gamma_k)$ partent vers un point $\eta \in \partial\mathbb{D}$ ou convergent vers une géodésique $\tilde{\alpha}$. On dira qu'une suite de géodésiques orientées $(\tilde{\alpha}_i)$ de \mathbb{D} converge vers une géodésique orientée $\tilde{\alpha}$ si les extrémités des $\tilde{\alpha}_i$ convergent vers les extrémités de $\tilde{\alpha}$. La géodésique $\tilde{\alpha}$ définit un intervalle I du bord $\partial\mathbb{D}$ ayant même extrémités que $\tilde{\alpha}$. On appellera **intervalle maximal** le point η ou l'intervalle I .

Terminons par le théorème suivant qui montre que des bouts infinis distincts sur une surface définissent des classes de rayons géodésiques distinctes.

Théorème 2.45. *Soient α et α' deux rayons géodésiques qui traversent respectivement les bouts infinis distincts e et e' d'une même surface hyperbolique S . Alors α et α' ne sont pas asymptotiques.*

Démonstration :

Soient (\mathcal{E}_i) et (\mathcal{E}'_i) des représentants respectifs des bouts e et e' . Puisque ces bouts sont

distincts alors il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $i \geq i_0$, $\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}'_i = \emptyset$. Les rayons α et α' traversent les bouts e et e' alors il existe des réels T_i et T'_i tels que pour tout $t > T_i$, $\alpha(t) \in \mathcal{E}_i$ et pour tout $t > T'_i$, $\alpha'(t) \in \mathcal{E}'_i$. Posons $T = \max(T, T')$. Nous avons pour tout $t > T$, $\alpha(t) \in \mathcal{E}_i$, $\alpha'(t) \in \mathcal{E}'_i$ et $\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}'_i = \emptyset$. Puisque les adhérences $\overline{\mathcal{E}}_i$ et $\overline{\mathcal{E}'_i}$ sont simplement connexes à bord donc elles sont isomorphes respectivement à deux polygones généralisés \mathcal{P} et \mathcal{P}' convexes distincts et non-adjacents dans \mathbb{H} . Deux relevés $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\alpha}'$ respectifs de α et α' appartiennent respectivement à \mathcal{P} et \mathcal{P}' . Donc les relevés $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\alpha}'$ ne peuvent pas être asymptotiques.

□

Chapitre 3

Points limites d'un groupe fuchsien

Sommaire

1	Ensemble limite d'un groupe fuchsien	61
2	Classification des points limites	66
3	Finitude géométrique	71

La méthode centrale de cette thèse est de relier la nature des points du bord à l'infini $\partial\mathbb{D}$ sous l'action d'un groupe fuchsien géométriquement infini Γ aux propriétés topologiques du flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ sur $\Gamma\backslash T^1\mathbb{D}$. Ce chapitre est consacré à l'étude de la nature des points de $\partial\mathbb{D}$ sous l'action de Γ en particulier celle de l'ensemble limite du groupe Γ . Nous commencerons par définir les points limites d'un groupe fuchsien quelconque et nous donnerons des propriétés de l'ensemble limite de ce groupe. Ensuite nous classifions ceux d'un groupe fuchsien non-élémentaire. Enfin nous tirerons des critères de finitude d'un groupe fuchsien en utilisant les chapitres 1 et 2.

1 Ensemble limite d'un groupe fuchsien

1.1 Définitions

Définition 3.1. Soit $z \in \mathbb{D}$ et Γ un groupe fuchsien.

- On appelle **ensemble limite** de Γ , noté $\Lambda(\Gamma)$, l'ensemble $\overline{\Gamma.z} \cap \partial\mathbb{D}$.
- Un **point limite** de Γ est un point de l'ensemble limite $\Lambda(\Gamma)$.
- On appelle $O_{\Gamma} = \partial\mathbb{D} \setminus \Lambda(\Gamma)$ l'ensemble des **points ordinaires** de Γ .

S'il n'y a pas d'ambiguïté nous noterons l'ensemble limite de Γ par Λ au lieu de $\Lambda(\Gamma)$. Il résulte de la définition que l'ensemble limite $\Lambda \subset \partial\mathbb{D}$ de Γ est l'ensemble des points w de $\partial\mathbb{D}$ tel qu'il existe une suite (γ_n) de Γ avec $|\gamma_n(z) - w| \rightarrow 0$, pour un certain $z \in \mathbb{D}$.

Remarque 3.2. (i) La définition de l'ensemble limite Λ est indépendant du choix de $z \in \mathbb{D}$. On a $|\gamma_n(z') - w| \leq |\gamma_n(z) - \gamma_n(z')| + |\gamma_n(z) - w|$. Et puisque le diamètre euclidien du disque $B_r(z) = \{z' \in \mathbb{D} : \rho(z, z') \leq r\}$ tends vers 0 lorsque $|z| \rightarrow 1$, alors $|\gamma_n(z) - \gamma_n(z')| \rightarrow 0$ si $|\gamma_n(z)| \rightarrow 1$. Et par suite $|\gamma_n(z') - w| \rightarrow 0$.

(ii) La définition 3.1 est équivalente à celle de 1.64 à savoir $\xi \in \Lambda(\Gamma)$ si pour tout voisinage U de ξ dans $\overline{\mathbb{D}}$ il existe une infinité d'éléments γ de Γ tels que $\gamma(U) \cap U \neq \emptyset$.

(iii) Le complémentaire O_Γ de Λ dans $\partial\mathbb{D}$ est invariant par Γ et l'action de Γ sur $O_\Gamma = \partial\mathbb{D} \setminus \Lambda$ est discontinue.

Exemple 3.3. Un point fixe ξ d'une isométrie non-elliptique γ d'un groupe fuchsien est un point limite. Si γ est une isométrie hyperbolique quitte à remplacer γ par γ^{-1} on peut supposer que ξ est le point attractif de γ . Alors $\gamma^n(z) \rightarrow \xi$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, pour tout z de l'axe de translation de γ , donc $\xi \in \Lambda$. Si ξ est un point fixe d'une isométrie parabolique γ alors pour tout point z de l'horocycle \mathcal{O}_ξ la suite $(\gamma^n(z))$ converge vers ξ .

Pour finir cette sous-section énonçons la proposition suivante qui relie les ensembles limites de deux groupes fuchiens conjugués. Rappelons que deux isométries positives γ_1 et γ_2 (respectivement deux groupes fuchiens Γ_1 et Γ_2) sont dites *conjugués* s'il existe une isométrie positive g telle que $\gamma_2 = g^{-1}\gamma_1g$ (respectivement $\Gamma_2 = g^{-1}\Gamma_1g$).

Proposition 3.4. Si deux groupes fuchiens Γ_1 et Γ_2 sont conjugués (avec $\Gamma_2 = g^{-1}\Gamma_1g$) alors $\Lambda(\Gamma_1) = g^{-1}\Lambda_2(\Gamma_2)$.

Démonstration :

Soit $\xi \in \Lambda(\Gamma_1)$. Alors il existe $z \in \mathbb{D}$ et une suite (γ_n^1) de Γ_1 tels que $\gamma_n^1(z) \rightarrow \xi$. Posons $\gamma_n^2 = g^{-1}\gamma_n^1g \in \Gamma_2$. On a $\gamma_n^2(g^{-1}z) = g^{-1}\gamma_n^1g(g^{-1}z) \rightarrow g^{-1}(\xi)$. Alors $g^{-1}(\Lambda(\Gamma_1)) \subset \Lambda(\Gamma_2)$. On montre de la même manière que $g\Lambda(\Gamma_2) \subset \Lambda(\Gamma_1)$ d'où l'égalité recherchée.

□

1.2 Cardinalité de l'ensemble limite

Dans ce paragraphe on montre que l'ensemble limite d'un groupe fuchsien peut contenir 0, 1, 2 ou une infinité de points.

Proposition 3.5. Soit Γ est un groupe fuchsien. Si tous les éléments de $\Gamma \setminus \{Id\}$ sont elliptique alors l'ensemble limite Λ de Γ est vide.

Démonstration :

Pour établir cette proposition nous montrons que toutes les isométries elliptiques ont un point fixe en commun $z \in \mathbb{D}$. Ce qui entraîne que l'orbite $\Gamma.z = \{z\}$ et donc $\Lambda = \emptyset$.

Soit $\gamma \in \Gamma \setminus \{Id\}$ tel que son point fixe soit 0, quitte à conjuguer Γ . Alors γ correspond à la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}$ avec $|a| = 1$. Soit $g \in \Gamma \setminus \{Id\}$ et $g \neq \gamma$. Montrons que 0 est le point fixe de g . Soit $\begin{pmatrix} a' & b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix}$ avec $a', b' \in \mathbb{C}$, $|a'|^2 - |b'|^2 = 1$. Considérons le commutateur $[\gamma, g] = \gamma g \gamma^{-1} g^{-1} \in \Gamma \setminus \{Id\}$. Un calcul direct montre que la trace de $[\gamma, g]$ est égale à $(2 + 4|b'|^2(Im(a))^2)^2$. Puisque tous les éléments de $\Gamma \setminus \{Id\}$ sont elliptique alors $(2 + 4|b'|^2(Im(a))^2)^2 < 4$. Et donc $b' = 0$ car $Im(a) = 0$ ne peut s'annuler sinon γ serait l'identité, ce qui est impossible. Par suite g a pour point fixe 0. D'où tous les éléments de $\Gamma \setminus \{Id\}$ ont le même point fixe.

□

Proposition 3.6. *Soit Γ est un groupe fuchsien. Si l'ensemble limite Λ de Γ est un singleton alors Γ est infini cyclique engendré par une isométrie parabolique.*

Démonstration :

Remarquons d'abord puisque Λ se réduit en un singleton $\{\xi\}$ alors aucun élément de Γ n'est hyperbolique car une isométrie hyperbolique possède deux points fixes distincts qui appartiennent à Λ . Par ailleurs puisque Λ est Γ -invariant alors pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma(\xi) = \xi$. Ce qui implique que Γ ne contient aucun élément elliptique. Finalement tous les éléments de Γ différents de l'identité sont paraboliques et ont le même point fixe ξ .

□

Proposition 3.7. *Soit Γ un groupe fuchsien. Supposons que son ensemble limite Λ est une paire de points. Alors soit*

- (i) Γ est un groupe infini cyclique engendré par une isométrie hyperbolique ou
- (ii) Γ est conjugué à un groupe fuchsien engendré par $z \mapsto kz$ et $z \mapsto -\frac{1}{z}$ avec $k > 1$.

Démonstration :

Posons $\Lambda = \{\xi_1, \xi_2\}$. Nous avons deux cas.

Cas 1 Supposons que pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma(\xi_1) = \xi_1$. Alors $\gamma(\xi_2) = \xi_2$, pour tout $\gamma \in \Gamma$. Par suite γ fixe les points ξ_1 et ξ_2 donc tout élément de Γ est hyperbolique. Quitte à conjuguer Γ par une isométrie positive on peut supposer que $\xi_1 = 0$ et $\xi_2 = \infty$. Une isométrie hyperbolique qui fixe 0 et ∞ est de la forme $z \mapsto kz$ avec $k \in \mathbb{R}$. Alors Γ est conjugué à un sous-groupe de la forme $\{z \mapsto kz / k \in \mathbb{R}\}$ isomorphe à \mathbb{R} . Donc Γ est un groupe infini cyclique engendré par une isométrie hyperbolique.

Case 2 Supposons maintenant qu'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma(\xi_1) = \xi_2$. Dans ce cas soit chaque élément de Γ fixe ξ_1 et ξ_2 ou les échange. Si $\gamma \in \Gamma$ fixe ξ_1 et ξ_2 alors il est hyperbolique.

Supposons que $\gamma \in \Gamma$ échange ξ_1 et ξ_2 . Si γ était hyperbolique ou parabolique il fixerait au moins un point η distinct de ξ_1 et ξ_2 . Puisque η est fixé par une isométrie non-elliptique il appartiendrait à Λ . Ce qui est impossible car $\Lambda = \{\xi_1, \xi_2\}$. Par suite γ ne peut être qu'elliptique.

En considérant le demi-plan de Poincaré et quitte à conjuguer Γ on peut supposer $\xi_1 = \infty$ et $\xi_2 = 0$. Alors toute isométrie hyperbolique $\gamma \in \Gamma$ est de la forme $z \mapsto kz$ avec $k > 1$ et toute isométrie elliptique est de la forme $z \mapsto -\frac{1}{z}$. \square

Proposition 3.8. *Si Γ contient au moins deux isométries hyperboliques dont les points fixes sont distincts, alors Λ est infini.*

Démonstration :

Soient h_1 et h_2 deux isométries hyperboliques du groupe Γ dont les points fixes sont distincts. Pour $n \geq 1$, on pose $g_n = h_1^n h_2 h_1^{-n}$. Chaque g_n est une isométrie positive hyperbolique. En plus les points fixes de g_n sont les images par h_1^n de ceux de h_2 . Puisque les points fixes des isométries h_1 et h_2 sont distincts alors toutes les g_n sont distinctes. Et leurs points fixes appartiennent à Λ .

\square

Il résulte des propositions ci-dessus la définition suivante.

Définition 3.9. *Un groupe fuchsien Γ est dit **élémentaire** si le cardinal de Λ est fini. Sinon le groupe Γ est dit **non-élémentaire**.*

Notons que si un groupe fuchsien est non-élémentaire alors il contient une infinité d'isométries hyperboliques. Le théorème suivant établit qu'il y'a deux possibilités lorsque le groupe Γ est non-élémentaire.

Théorème 3.10. *(Poincaré, Fricke-Klein, voir [11], th.2.9)*

Les possibilités pour un ensemble limite Λ d'un groupe fuchsien non-élémentaire Γ sont :

1. Λ est un ensemble de Cantor de $\partial\mathbb{D}$, c'est-à-dire $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ où les K_n sont des intervalles fermés, disjoints de $\partial\mathbb{D}$.
2. $\Lambda = \partial\mathbb{D}$.

Le théorème 3.10 nous permet d'introduire une certaine terminologie pour les groupes fuchiens.

Définition 3.11. *Un groupe fuchsien non-élémentaire Γ est dit*

1. de **seconde espèce** si Λ est un Cantor.
2. de **première espèce** si $\Lambda = \partial\mathbb{D}$.

Exemple 3.12. a) Considérons le plan de Poincaré \mathbb{H} . L'ensemble limite du groupe modulaire $PSL(2, \mathbb{Z})$ est égal à $\partial\mathbb{H}$.

b) L'ensemble limite du groupe de Schottky Γ engendré par deux isométries hyperboliques γ_1 et γ_2 est un Cantor.

1.3 Propriétés de l'ensemble limite

Énonçons à travers les résultats suivants quelques propriétés de l'ensemble limite d'un groupe fuchsien.

Théorème 3.13. *Soit Γ un groupe fuchsien et Λ son ensemble limite. L'ensemble limite Λ est invariant par Γ .*

Démonstration :

Soit $\xi \in \Lambda$. Il existe une suite (γ_n) d'éléments de Γ telle que pour un certain $z \in \mathbb{D}$ $\gamma_n(z) \rightarrow \xi$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma\gamma_n(z) \rightarrow \gamma(\xi)$ avec $\gamma\gamma_n \in \Gamma$. Et donc $\gamma(\xi) \in \Lambda$. Ce qui implique que $\Lambda \subset \gamma(\Lambda)$. En remplaçant γ par γ^{-1} dans l'argumentation qui précède on montre que $\gamma(\Lambda) \subset \Lambda$. Autrement dit pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\Lambda = \gamma(\Lambda)$. \square

Proposition 3.14. *L'action d'un groupe fuchsien non-élémentaire Γ sur son ensemble limite Λ est minimal. Autrement Λ est le plus petit sous-ensemble de $\partial\mathbb{D}$ (au sens de l'inclusion) non vide, fermé et invariant par Γ .*

Démonstration :

On montre que tout fermé de $\partial\mathbb{D}$ Γ -invariant contient l'ensemble limite Λ . Soient F un sous-ensemble non-vidé de $\partial\mathbb{D}$ fermé et Γ -invariant et $C(F)$ son enveloppe convexe dans $\overline{\mathbb{D}}$ au sens hyperbolique. Alors $C(F)$ est fermé et Γ -invariant. Comme F est un sous-ensemble fermé de $\partial\mathbb{D}$, $C(F) \cap \partial\mathbb{D} = F$. Si $z \in C(F) \cap \mathbb{D}$, alors $\Gamma.z \subset C(F)$ et donc $\Lambda = \overline{\Gamma.z} \cap \partial\mathbb{D} \subset C(F) \cap \partial\mathbb{D} = F$.

\square

Avant d'énoncer la dernière proposition de ce paragraphe retenons qu'une partie d'un espace topologique est dit *parfait* si et seulement si il est fermé et sans point isolé. Il est bien connu qu'un ensemble parfait est non-dénombrable, [50].

Proposition 3.15. *Si Γ est un groupe fuchsien non-élémentaire alors son ensemble limite Λ est parfait et par conséquent non-dénombrable.*

Démonstration :

Supposons que l'ensemble Λ a un point isolé ξ et notons par F l'ensemble des points fixes des isométries hyperboliques de Γ . Puisque Γ est non-élémentaire alors F est non vide. Donc \overline{F} est un fermé, non vide, Γ -invariant de Λ et alors $\overline{F} = \Lambda$ car Λ est Γ -minimal. Par

suite le point ξ est un point isolé de F . Soit $\gamma \in \Gamma$ l'isométrie hyperbolique qui fixe ξ . Comme F est infini il existe $x \in F$ tel que $\gamma(x) \neq x$ mais l'ensemble $\{\gamma^n(x), n \in \mathbb{Z}\}$ a ξ comme point limite. D'où la contradiction. Par suite Λ est parfait et par conséquent il est non-dénombrable.

□

2 Classification des points limites

Dans cette sous-section sauf indication contraire nous nous plaçons dans le modèle \mathbb{H} . Suivant le comportement d'une orbite Γz , $z \in \mathbb{H}$ et des horocycles centrés sur ces points il existe différents types de points limites. Nous donnons dans cette partie une partition de l'ensemble limite Λ d'un groupe fuchsien non-élémentaire Γ en quatre classes Γ -invariantes.

2.1 Points limites horocycliques

Définition 3.16. *Un point limite $\xi \in \Lambda$ est dit **horocyclique** s'il existe un point $z \in \mathbb{H}$ tel que l'intérieur de tout horodisque basé en ξ contient au moins un point (et donc une infinité de points) de l'orbite Γz . L'ensemble des points horocycliques est noté Λ_h .*

Puisque deux horocycles centrés sur $\xi \in \partial\mathbb{H}$ sont parallèles dans la géométrie hyperbolique (les deux horocycles sont des cercles tangents intérieurement en ξ ou sont des droites horizontales) la définition est indépendante du choix de z .

Exemple 3.17. Les points fixes γ^+ et γ^- d'une isométrie hyperbolique γ d'un groupe fuchsien Γ sont des points limites horocycliques.

Enonçons maintenant deux propositions qui caractérisent les points limites horocycliques.

Proposition 3.18. *Un point $\xi \in \Lambda_h$ si et seulement si pour tout $z \in \mathbb{H}$,*

$$\sup_{\gamma \in \Gamma} \beta_\xi(z, \gamma(z)) = +\infty$$

.

Démonstration :

Soit $\xi \in \Lambda_h$, quitte à conjuguer le groupe Γ on peut supposer que $\xi = \infty$. Par définition ∞ est un point limite horocyclique si pour tout horodisque $\mathcal{O}_\infty^+ = \{z' \in \mathbb{H} / \beta_\infty(i; z') \geq \ln(\text{Im}(z))\}$ il existe une isométrie $\gamma \in \Gamma$ telle que $\gamma(i) \in \mathcal{O}_\infty^+$. Ce qui équivaut à pour tout $n \geq 1$ il existe $\gamma_n \in \Gamma$ telle que $\text{Im}\gamma_n(i) \geq n$. Puisque $\beta_\infty(i; z) = \ln(\text{Im}(z))$

on obtient ∞ est horocyclique si et seulement si il existe une suite (γ_n) de Γ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_\infty(i; \gamma_n(i)) = +\infty$. Pour compléter la démonstration remarquons que

$$\beta_\infty(z; \gamma_n(z)) = \beta_\infty(z; i) + \beta_\infty(i; \gamma_n(i)) + \beta_\infty(\gamma_n(i); \gamma_n(z))$$

et $\beta_\infty(\gamma_n(i); \gamma_n(z)) \leq \rho(i, z)$.

□

Remarque 3.19. 1. D'après la proposition 1.26 la proposition ci-dessus est équivalente à dire qu'un point $\xi \neq \infty$ est horocyclique si et seulement si

$$\inf\{R_\xi(\gamma(z)) : \gamma \in \Gamma\} = 0.$$

où $R_\xi(\gamma(z))$ est le rayon euclidien de l'horocycle $\mathcal{O}_\xi(\gamma(z))$.

2. Notons également que si un point $\xi \in \partial\mathbb{H} \setminus \Lambda_h$ alors pour tout $z \in \mathbb{H}$ il existe un horodisque maximal, appelé horodisque critique

$$\mathcal{O}_\xi^{+,max}(\pi(z)) = \{w \in \mathbb{H} / \beta_\xi(z, w) \geq \sup_{\gamma \in \Gamma} \beta_\xi(z, \gamma(z))\}.$$

qui dépend uniquement de ξ et de la projection $\pi(z)$ de z dans $\Gamma \setminus \mathbb{H}$, dont l'intérieur ne contient aucun point de Γz .

La deuxième proposition permettant de caractériser les points limites horocycliques est la suivante.

Proposition 3.20. Un point limite $\xi \neq \infty$ est horocyclique si et seulement s'ils existent une suite (γ_n) d'éléments de Γ et une suite (w_n) de points de la géodésique verticale $(\xi; \infty)$ telles que $w_n \rightarrow \xi$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et $\gamma_n(w_n) \notin \mathcal{O}_{\gamma_n(\xi)}^+(i)$.

Démonstration :

Un point $\xi \in \Lambda_h$ si et seulement s'il existe une suite $(g_n) \subset \Gamma$ telle que le rayon euclidien de l'horocycle $\mathcal{O}_\xi(g_n(i))$, $R_\xi(g_n(i)) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Or l'hypothèse du lemme équivaut à $w_n \notin \mathcal{O}_\xi^+(\gamma_n^{-1}(i))$, et donc $R_\xi(\gamma_n^{-1}(i)) \leq \frac{Im(w_n)}{2} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Il suffira donc de poser $\gamma_n^{-1} = g_n$.

□

Exhibons une sous-classes des points limites horocycliques. Beaucoup de propriétés topologiques et ergodiques sont liées à ces points limites horocycliques particuliers, voir [55].

Définition 3.21. Un point ξ de Λ est dit **conique** s'ils existent un réel $R > 0$, un point $z \in \mathbb{H}$, une géodésique L d'extrémité ξ et une suite (γ_n) de Γ tels que $\gamma_n(z) \rightarrow \xi$ et $\rho(\gamma_n(z), L) \leq R$, pour tout entier n . Nous noterons Λ_c l'ensemble des points coniques.

Remarque 3.22. (i) La définition est indépendante du choix de z et de L .

(ii) Plaçons-nous sur le disque \mathbb{D} , si $w \in \Lambda_c$ alors l'ensemble des points $z' \in \mathbb{D}$ tel que $\rho(z', L) < R$ et $|z' - w| < r$ pour un réel $r > 0$ c'est l'intérieur d'un cône de sommet w de frontière deux courbes à distance hyperbolique R de L et un arc du cercle euclidien de diamètre r tangent à $\partial\mathbb{D}$ en w , voir la figure 3.1. Donc puisque $\gamma_n(z) \rightarrow w$ et $\rho(\gamma_n(z), L) < R$ ce cône contient à son intérieur une infinité de points de l'orbite Γz . Par suite tout horodisque \mathcal{O}_w^+ de diamètre euclidien r contient à son tour une infinité de points de l'orbite Γz . D'où $\Lambda_c \subset \Lambda_h$.

(iii) Les points fixes des isométries hyperboliques appartiennent à Λ_c . En effet si z appartient à l'axe d'une isométrie hyperbolique γ alors la suite $(\gamma^n(z))$ reste sur cet axe.

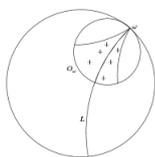


FIGURE 3.1 – Point limite conique

Pour clore l'analyse des points limites horocycliques d'un groupe fuchsien Γ faisons remarquer que de tels points ne peuvent pas appartenir à la frontière d'un domaine de Dirichlet $\partial\mathcal{D}_z(\Gamma)$ de Γ .

Proposition 3.23. Soient $\xi \in \partial\mathbb{H}$ et $\mathcal{D}_z(\Gamma)$ le domaine de Dirichlet d'un groupe fuchsien Γ centré au point z de frontière $\partial\mathcal{D}_z(\Gamma)$. Le point $\xi \in \partial\mathcal{D}_z(\Gamma)$ si et seulement si $\sup_{\gamma \in \Gamma} \beta_\xi(z, \gamma(z)) = 0$.

Démonstration :

Soit $(r(t))$ la paramétrisation par unité de longueur d'arc du rayon géodésique $[z, \xi)$. Si $\xi \in \partial\mathcal{D}_z(\Gamma)$, le domaine $\mathcal{D}_z(\Gamma)$ étant étoilé en z , le rayon $[z, \xi)$ est inclus dans $\mathcal{D}_z(\Gamma)$. Ainsi $\rho(z, r(t)) \leq \rho(\gamma(z), r(t))$ pour tous $t > 0$ et $\gamma \in \Gamma$. Ceci montre que $\beta_\xi(z, \gamma(z)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [\rho(z, r(t)) - \rho(\gamma(z), r(t))] \leq 0$ quel que soit $\gamma \in \Gamma$ et donc $\sup_{\gamma \in \Gamma} \beta_\xi(z, \gamma(z)) = 0$. Supposons à présent que $\sup_{\gamma \in \Gamma} \beta_\xi(z, \gamma(z)) = 0$ et montrons que $\xi \in \partial\mathcal{D}_z(\Gamma)$. Soit $\gamma \in \Gamma$, posons $f(t) = t - \rho(\gamma(z), r(t))$. Cette fonction est croissante et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \leq 0$. Ainsi $f(t) \leq 0$ pour tout $t > 0$. Par suite $[z, \xi)$ est inclus dans $\mathcal{D}_z(\Gamma)$ et donc $\xi \in \partial\mathcal{D}_z(\Gamma)$.

□

Géométriquement la proposition 3.23 veut dire qu'un point $\xi \in \partial\mathcal{D}_z(\Gamma)$ est caractérisé par

le fait que l'orbite $\Gamma.z$ ne rencontre pas l'intérieur de l'horodisque $\mathcal{O}_\xi^+(\pi(z))$. D'où nous avons

Corollaire 3.24. *Soit $\xi \in \partial\mathbb{H}$. Si $\xi \in \Lambda_h$ alors $\xi \notin \partial\mathcal{D}_z(\Gamma)$.*

2.2 Points limites paraboliques

Définition 3.25. *Un point limite $\xi \in \Lambda$ est dit **parabolique** s'il existe une isométrie parabolique $\gamma \neq Id$ de Γ telle que $\gamma(\xi) = \xi$. L'ensemble des points paraboliques est noté Λ_p .*

Exemple 3.26. Le point ∞ est un point limite parabolique du groupe modulaire $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$. L'isométrie parabolique $z \mapsto z + 1$ fixe ∞ .

Remarque 3.27. *Si $\xi \in \partial\mathbb{H}$ est fixé par une isométrie parabolique γ de Γ alors la suite $(\gamma^n(z))_{n \geq 1}$ converge vers ξ en restant sur l'horocycle centré en ξ et passant par z .*

Enonçons la proposition suivante qui nous permet de faire remarquer que les ensembles Λ_h et Λ_p sont disjoints. Et pour sa démonstration nous renvoyons au théorème I.3.12 de [18].

Proposition 3.28. *Soit ξ un point limite parabolique. Il existe un horodisque \mathcal{O}_ξ^+ tel que*

$$\gamma\mathcal{O}_\xi^+ \cap \mathcal{O}_\xi^+ = \emptyset$$

pour tout γ dans Γ ne fixant pas ξ .

Remarque 3.29. *Il résulte de la proposition ci-dessus que les ensembles Λ_h et Λ_p sont disjoints. En effet si $\xi \in \Lambda_p$, tout horodisque strictement intérieur à un horodisque \mathcal{O}_ξ^+ , donné par la proposition ci-dessus, ne rencontre pas l'orbite Γz , pour un certain $z \in \mathcal{O}_\xi^+$. D'où par définition $\xi \notin \Lambda_h$.*

2.3 Points limites discrets et points limites irréguliers

Passons au troisième et quatrième types de points limites de l'ensemble limite Λ .

Définition 3.30. *Soit un point ξ de l'ensemble limite Λ d'un groupe fuchsien Γ .*

1. *Le point ξ de Λ est dit **discret** si pour tout horodisque \mathcal{O}_ξ^+ et pour tout $z \in \mathbb{H}$, l'ensemble $\Gamma.z \cap \mathcal{O}_\xi^+$ est fini. On note Λ_d l'ensemble de ces points.*
2. *Le point ξ est dit **irrégulier** s'il est ni horocyclique, ni discret et ni parabolique. On note Λ_{irr} l'ensemble de ces points.*

Il résulte des définitions ci-dessus la classification suivante des points de l'ensemble limite Λ d'un groupe fuchsien Γ .

Classification :

Soit Γ un groupe fuchsien non-élémentaire et Λ son ensemble limite. Il résulte de leur définition que les ensembles Λ_h , Λ_p , Λ_d et Λ_{irr} sont deux à deux disjoints, Γ -invariants et ils vérifient :

$$\Lambda = \Lambda_h \cup \Lambda_p \cup \Lambda_d \cup \Lambda_{irr}. \quad (3.1)$$

Terminons cette section en donnant une famille de groupes de demi-cercles symétriques due à Starkov dans [53]. L'exemple suivant permet de montrer suivant les paramètres que le point ∞ peut être un point limite discret ou irrégulier.

Exemple 3.31. Plaçons nous sur le demi-plan de Poincaré \mathbb{H} et construisons un exemple de groupe fuchsien de pairs de demi-cercles symétriques, voir section 5.1. Soit (r_n) une suite de nombre réels positifs et $x_n = 2 \sum_{k=1}^{n-1} r_k + r_n$. Notons $C_n = (x_n, r_n)$ le demi-cercle orthogonal à l'axe réel de centre et rayon euclidien x_n et r_n . On obtient un système de demi-cercles tangents sur le demi-plan droit de \mathbb{H} . Soit C'_n l'image de C_n par la réflexion $z \mapsto -\bar{z}$ et h_n la composition de l'inversion par rapport à C_n et de la réflexion $z \mapsto -\bar{z}$. En termes explicite $h_n(z) = \frac{x_n z + r_n^2 - x_n^2}{-z + x_n}$ et C_n est le cercle isométrique de h_n .

L'isométrie h_1 est parabolique de point fixe $\xi = 0$ et pour tout $n > 1$, h_n est hyperbolique. Notons que tous les extrémités des demi-cercles sont des points limites paraboliques car h_1 et $h_n h_{n+1}^{-1}$ sont paraboliques. Si la série $\sum r_k$ converge alors Γ est de seconde espèce et si cette série diverge alors Γ est de première espèce. Suivant les paramètres r_n et x_n le point ∞ est un point limite discret ou irrégulier. Remarquons que :

a- $\infty \in \Lambda_h \Leftrightarrow Im\gamma_n(i) \rightarrow +\infty$, pour toute suite (γ_n) de Γ . Celà résulte de la proposition 3.18.

b- $\infty \in \Lambda_d \Leftrightarrow Im\gamma_n(i) \rightarrow 0$, pour toute suite (γ_n) de Γ . Celà résulte du premier point de la définition 3.30. Soit $\mathcal{O}_\infty^+ = \{z \in \mathbb{H} / Imz \geq t \text{ et } t \in \mathbb{R}_+\}$ un horodisque quelconque centré en ∞ . Si $(Im\gamma_n(i)) \rightarrow 0$ alors pour n assez grand $\gamma_n(i) \notin \mathcal{O}_\infty^+$. Et inversement.

c- Si Γ ne contient pas d'élément de translation et si $(Im\gamma_n(i)) \rightarrow q > 0$ pour toute suite (γ_n) de Γ alors $\infty \in \Lambda_{irr}$.

Si $r_n = \frac{1}{n}$. La série $\sum r_k$ diverge. Ce qui équivaut à $c_n \rightarrow +\infty$. Par suite $\infty \in \Lambda$. Soit $\gamma = h_{k_1} \dots h_{k_J}$ un mot réduit de $\gamma \in \Gamma$. On a $\gamma(i) \in Int(C_{k_1})$. Ce qui implique que $Im(\gamma(i)) < \min\{r_{k_i}\}$. Et puisque $r_n \rightarrow 0$ alors $\infty \in \Lambda_d$.

Changeons les paramètres (x_n, r_n) en posant $r_1 = 1$, $x_1 = 2$, et en définissant par récurrence $r_{n+1} = 3r_n + 1$, $x_{n+1} = 5r_{n+1}$. Puisque $x_n \rightarrow +\infty$ alors $\infty \in \Lambda$. En plus $Im(h_n(i)) = \frac{r_n^2}{1+25r_n^2} \rightarrow \frac{1}{25}$ et donc $\infty \in \Lambda_{irr}$.

3 Finitude géométrique

Revenons maintenant à la question de la finitude des groupes fuchsien. Rappelons qu'un groupe fuchsien Γ est géométriquement fini si l'un de ses domaine de Dirichlet $\mathcal{D}_z(\Gamma)$ admet un nombre fini de côtés. Le théorème suivant donne des propriétés équivalentes sur la finitude d'un groupe fuchsien.

Théorème 3.32. (voir [18], [37] et [3] Théorème 4.16)

Les assertions suivantes sont équivalentes

1. Γ est géométriquement fini.
2. Γ est de type fini c'est-à-dire admet un ensemble de ses générateurs est fini.
3. $\Lambda = \Lambda_h \cup \Lambda_p$.
4. La surface $S = \Gamma \backslash \mathbb{D}$ n'admet pas de bout infini.

Corollaire 3.33. *Le groupe Γ est convexe co-compact si et seulement si $\Lambda = \Lambda_h$.*

Il résulte du théorème 3.32 un résultat permettant de caractériser les groupes fuchsien géométriquement infinis sur lesquels portent cette thèse.

Théorème 3.34. *Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. Γ est géométriquement infini.
2. Γ est de type infini.
3. $\Lambda_d \cup \Lambda_{irr} \neq \emptyset$.
4. La surface $S = \Gamma \backslash \mathbb{D}$ admet au moins un bout infini.

Chapitre 4

Orbites horocycliques

Sommaire

1	Flot géodésique	73
2	Flot horocyclique	75
3	Liens entre points limites d'un groupe fuchsien et orbites horocycliques	84

Les flots géodésique et horocyclique sur les surfaces à courbure constante strictement négative sont les exemples de base de flots sur les espaces homogènes. Soit Γ un groupe fuchsien. L'objet principal de ce chapitre est l'étude de la nature topologique des orbites horocycliques sur le fibré unitaire tangent de la surface hyperbolique géométriquement infinie $T^1S = \Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$ en établissant une correspondance entre l'action du flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ sur son ensemble non-errant Ω_h et celle du groupe fuchsien Γ correspondant sur son ensemble limite Λ . Rappelons que si $\Phi_{\mathbb{R}}$ est un flot complet défini sur un espace métrique X , un point $x \in X$ est dit *non-errant* si pour tout voisinage U de x il existe une suite non bornée (t_n) de nombres réels telle que $\Phi_{t_n}(U) \cap U \neq \emptyset$. L'ensemble des points non-errants par $\Phi_{\mathbb{R}}$ est appelé *ensemble non-errant* du flot $\Phi_{\mathbb{R}}$ et est noté Ω_{Φ} . C'est un ensemble fermé, invariant par $\Phi_{\mathbb{R}}$. Un élément x de X est *divergent* (respectivement négativement ou positivement) par $\Phi_{\mathbb{R}}$ s'il existe une suite non bornée (t_n) de \mathbb{R} (respectivement de \mathbb{R}^- ou \mathbb{R}^+), telle que $\Phi_{t_n}(x)$ diverge. Après avoir défini les flots géodésique et horocyclique de manière géométrique nous évoquerons deux autres points de vue de ces flots : notamment la dualité entre l'action de $h_{\mathbb{R}}$ sur $\Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$ et l'action linéaire $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ sur l'espace $(\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)) / \{\pm Id\}$. Ce point de vue nous servira à établir les principaux résultats du chapitre 5.

1 Flot géodésique

Dans cette section nous donnons deux points de vue du flot géodésique. Nous définissons ce flot sans entrer dans l'étude de la nature topologique de ses orbites. Pour cette étude nous renvoyons par exemple à [18] et [20].

Soit Γ un groupe fuchsien et $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$. Notons indifféremment par π les projections de \mathbb{H} sur $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ et $T^1\mathbb{H}$ sur $T^1S = \Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$ et définissons deux distances sur S et T^1S .

Pour tous points $\pi(z)$ et $\pi(z')$ de S on définit la distance d_Γ :

$$d_\Gamma(\pi(z), \pi(z')) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \rho(z, \gamma(z')).$$

Cette distance d_Γ a été déjà définie dans la sous-section 2 du chapitre 2.

Pour tous points $\pi(u)$ et $\pi(v)$ de T^1S on définit la distance D_Γ :

$$D_\Gamma(\pi(u), \pi(v)) = \inf_{\gamma \in \Gamma} D(u, \gamma(v)).$$

Rappelons que ρ et D sont les distances définies respectivement sur \mathbb{H} et $T^1\mathbb{H}$ à la section 1 du chapitre 1. La topologie induite par d_Γ et D_Γ sur S et sur T^1S est la même que celle induite par π . Pour plus de commodité dans la suite nous noterons indifféremment par d les distances ρ , D , d_Γ et D_Γ . Les convergences d'une suite sur les espaces $T^1\mathbb{H}$, S et T^1S sont définies de la manière suivante.

1. La convergence d'une suite $(v_n = (z_n, \vec{v}_n))_{n \geq 1}$ de $T^1\mathbb{H}$ vers un élément $v = (z, \vec{v})$ est caractérisée par :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(v_n, v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n^+ = v^+ & , \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z & . \end{cases} \quad (4.1)$$

2. La convergence d'une suite $(\pi(z_n))_{n \geq 1}$ d'éléments de S vers $\pi(z)$ est définie par :

$$\left(((\pi(z_n)))_{n \geq 1} \rightarrow \pi(z) \right) \Leftrightarrow \left(\exists (\gamma_n) \in \Gamma / (\gamma_n(z_n)) \rightarrow z \right). \quad (4.2)$$

3. La convergence d'une suite $(\pi(u_n))$ d'éléments de T^1S est définie par :

$$\left(((\pi(u_n)))_{n \geq 1} \rightarrow \pi(u) \right) \Leftrightarrow \left(\exists (\gamma_n) \in \Gamma / (\gamma_n(u_n)) \rightarrow u \right). \quad (4.3)$$

1.1 Définitions

Commençons par définir géométriquement le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent du demi-plan de Poincaré.

1.1.1 Le flot géodésique sur $T^1\mathbb{H}$

Soient un élément $v = (z, \vec{v})$ de $T^1\mathbb{H}$ et $(v(t))_{t \in \mathbb{R}}$ le paramétrage par unité de longueur d'arc défini par l'élément v tel que $v(0) = z$ et $\frac{dv}{dt}(0) = \vec{v}$.

Définition 4.1. On appelle **flot géodésique**, $\tilde{g}_{\mathbb{R}}$ sur $T^1\mathbb{H}$ l'application

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times T^1\mathbb{H} &\longrightarrow T^1\mathbb{H} \\ (t, v) &\longmapsto \tilde{g}_t(v) = \left(v(t), \frac{dv}{dt}(t) \right). \end{aligned}$$

Puisque les géodésiques sont complètes tous les points de $T^1\mathbb{H}$ sont divergents. L'ensemble non-errant de ce flot $\tilde{\Omega}_g = \emptyset$.

1.1.2 Le flot géodésique sur T^1S

Le flot $\tilde{g}_{\mathbb{R}}$ induit un flot sur T^1S . En effet soient γ dans Γ et $v = (z, \vec{v})$ dans $T^1\mathbb{H}$. Puisque γ est une isométrie positive, l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{H} qui à t associe $\gamma(v(t))$ est le paramétrage par longueur d'arc de la géodésique orientée $(\gamma(v^-), \gamma(v^+))$ vérifiant

$$\gamma(v(0)) = \gamma(z) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\gamma \circ v(0) = T_z\gamma(\vec{v}).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a donc $(\gamma(v))(t) = \gamma(v(t))$. Par conséquent $\tilde{g}_t(\gamma(v)) = \gamma(\tilde{g}_t(v))$.

Définition 4.2. On appelle **flot géodésique**, $g_{\mathbb{R}}$ sur T^1S l'application

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times T^1S &\longrightarrow T^1S \\ (t, \pi(v)) &\longmapsto g_t(\pi(v)) = \pi(\tilde{g}_t(v)). \end{aligned}$$

Le critère de convergence suivant relie l'action de $g_{\mathbb{R}}$ sur $T^1S = \Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$ à celle, duale, de Γ sur l'ensemble des géodésiques orientées $T^1\mathbb{H}/\tilde{g}_{\mathbb{R}}$.

Lemme 4.3. Soient $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de $T^1\mathbb{H}$ et u un élément de $T^1\mathbb{H}$. Les assertions suivantes son équivalentes :

(i) Il existe une suite de réels $(s_n)_{n \geq 1}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_{s_n}(\pi(u_n)) = \pi(u)$$

(ii) Il existe une suite (γ_n) de Γ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\gamma_n(u_n^-), \gamma_n(u_n^+)) = (u^-, u^+).$$

Démonstration :

$$(g_{s_n}(\pi(u_n))) \rightarrow \pi(u) \Leftrightarrow (\pi(\tilde{g}_{s_n}(u_n)) \rightarrow \pi(u)) \Leftrightarrow (\exists (\gamma_n) / \gamma_n(\tilde{g}_{s_n}(u_n)) \rightarrow u)$$

D'après la convergence 4.1

$$\gamma_n(\tilde{g}_{s_n}(u_n)) \rightarrow u \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_n(\tilde{g}_{s_n}(u_n^+)) \rightarrow u^+, \\ \gamma_n(\tilde{g}_{s_n}(u_n^-)) \rightarrow u^-. \end{cases}$$

□

1.2 Le flot géodésique en $PSL(2, \mathbb{R})$ -coordonnées

Pour finir cette section donnons un point de vue algébrique de l'action de $g_{\mathbb{R}}$ sur T^1S . Commençons par définir l'axe des imaginaires définie par l'élément $u = (i, \vec{u})$ de $T^1\mathbb{H}$ où \vec{u} est porté par l'axe des imaginaires. Cette géodésique est paramétrisée par unité de longueur d'arc par $\alpha(t) = e^t i$, $t \in \mathbb{R}$. Nous avons $\tilde{g}_t(u) = \left(\alpha(t), \frac{d\alpha}{ds}(t) \right) = (e^t i, e^t \vec{u})$.

L'isométrie $\begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$ de $PSL(2, \mathbb{R})$ envoie u sur $\tilde{g}_t(u)$.

Soit maintenant $v \in T^1\mathbb{H}$ arbitraire puisque l'action $PSL(2, \mathbb{R})$ sur $T^1\mathbb{H}$ est simplement transitive, il existe une isométrie $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ qui envoie $\tilde{g}_t(u)$ sur $\tilde{g}_t(v)$. Par composition, l'élément de $PSL(2, \mathbb{R})$ qui envoie $u = (i, \vec{u})$ sur $\tilde{g}_t(v)$ est le produit $g \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$. Ainsi l'action de $\tilde{g}_{\mathbb{R}}$ sur $T^1\mathbb{H}$ correspond à la multiplication à droite sur $PSL(2, \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \tilde{g}_t : T^1\mathbb{H} \simeq PSL(2, \mathbb{R}) &\longrightarrow PSL(2, \mathbb{R}) \\ g &\longmapsto g \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \end{aligned} .$$

Puisque $T^1S = \Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$ et $g_{\mathbb{R}}$ est la projection de $\tilde{g}_{\mathbb{R}}$ sur T^1S par rapport l'application quotient $T^1\mathbb{H} \rightarrow \Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$ le flot $g_{\mathbb{R}}$ peut être représenté dans les $PSL(2, \mathbb{R})$ -coordonnées comme la mutiplication à droite

$$\begin{aligned} g_t : \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) &\longrightarrow \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \\ \Gamma g &\longmapsto \Gamma g \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

2 Flot horocyclique

Abordons maintenant le flot horocyclique. Nous donnons trois points de vue de ce flot. Comme dans le cas du flot géodésique nous commençons par un point de vue géométrique.

2.1 Définitions

2.1.1 Le flot horocyclique sur $T^1\mathbb{H}$

A un élément $u = (z, \vec{u})$ de $T^1\mathbb{H}$ on associe l'unique horocycle $\mathcal{O}_{u^+}(z)$ passant par z et centré en u^+ . Soit $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$, la paramétrisation par unité de longueur d'arc de l'horocycle $\mathcal{O}_{u^+}(z)$ tel que $\alpha(0) = z$ et que le couple $\left(\frac{d\alpha}{dt}(0), \vec{u}\right)$ forme une base orthonormé directe de $T_z\mathbb{H}$. L'image de α est appelé **horocycle orienté** associé à u .

Exemple 4.4. L'application $t \mapsto \alpha(t) = i + t$, $t \in \mathbb{R}$ est une paramétrisation par longueur de l'horocycle $\mathcal{O}_\infty(i)$ et l'application $w \mapsto yw + x$ envoie $\mathcal{O}_\infty(i)$ sur l'horocycle $\mathcal{O}_\infty(z)$ avec $z = x + iy$. Donc si $u^+ = \infty$ et $z = x + iy$ on obtient $\alpha(t) = x + t + iy$.

Considérons l'application

$$\tilde{h}_\mathbb{R} : \mathbb{R} \times T^1\mathbb{H} \longrightarrow T^1\mathbb{H}$$

$$(t, v) \longmapsto \tilde{h}_t(v) = (\alpha(t), \vec{v}(t))$$

où $\vec{v}(t)$ est l'élément de $T_{\alpha(t)}^1\mathbb{H}$ tel que $(\frac{d\alpha}{dt}(t), \vec{v}(t))$ est une base orthonormale directe de $T_{\alpha(t)}^1\mathbb{H}$. L'action de l'application $\tilde{h}_\mathbb{R}$ commute avec celle de $PSL(2, \mathbb{R})$ sur $T^1\mathbb{H}$.

Lemme 4.5. *Pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $g \in PSL(2, \mathbb{R})$*

$$g \circ \tilde{h}_t = \tilde{h}_t \circ g.$$

Démonstration :

Soient $u = (z, \vec{u})$ un élément de $T^1\mathbb{H}$ et $(\alpha(t))$ la paramétrisation par longueur d'arc de l'horocycle $\mathcal{O}_{u^+}(z)$ tels que $\alpha(0) = z$ et $\left(\frac{d\alpha}{dt}(0), \vec{u}\right)$ forme une base orthonormé directe de $T_z\mathbb{H}$. Nous avons d'un côté

$$g \circ \tilde{h}_t(u) = g[\alpha(t), \vec{u}(t)] = (g(\alpha(t)), T_{\alpha(t)}g(\vec{u}(t)))$$

où $\vec{u}(t)$ est l'élément de $T_{\alpha(t)}^1\mathbb{H}$ tel que $(\frac{d\alpha}{dt}(t), \vec{u}(t))$ est une base orthonormale directe de $T_{\alpha(t)}^1\mathbb{H}$. Et de l'autre côté en posant $v = g(u)$ et en remarquant que $(g\alpha(t))$ est la paramétrisation par longueur d'arc de l'horocycle $\mathcal{O}_{v^+}(gz)$ tels que $\alpha(0) = gz$ et $\left(\frac{dg\alpha}{dt}(0), \vec{v}\right)$ forme une base orthonormée directe de $T_{gz}\mathbb{H}$ nous avons

$$\tilde{h}_t \circ g(u) = \tilde{h}_t(v) = (g\alpha(t), \vec{v}(t))$$

où $\vec{v}(t)$ est l'élément de $T_{g\alpha(t)}^1\mathbb{H}$ tel que $(\frac{dg\alpha}{dt}(t), \vec{v}(t))$ est une base orthonormale directe de

$T_{g\alpha(t)}^1 \mathbb{H}$. Puisque tout élément de $PSL(2, \mathbb{R})$ préserve les distances et les orientations alors $T_{\alpha(t)}g(\vec{u}(t)) = \vec{v}(t)$. Par suite

$$(g(\alpha(t)), T_{\alpha(t)}g(\vec{u}(t))) = (g\alpha(t), \vec{v}(t)).$$

D'où pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ et $u \in T^1\mathbb{H}$ nous avons $g \circ \tilde{h}_t(u) = \tilde{h}_t \circ g(u)$.

□

Proposition 4.6. *L'application $\tilde{h}_{\mathbb{R}}$ est un flot sur $T^1\mathbb{H}$.*

Démonstration :

Soit une suite $(v_n = (z_n, \vec{v}_n))$ d'éléments de l'espace métrique $(T^1\mathbb{H}, d)$ convergeant vers un élément $v = (z, \vec{v})$. Pour tout réel t nous avons $d(v_n, v) = d(\tilde{h}_t(v_n), \tilde{h}_t(v))$ donc la suite $(\tilde{h}_t(v_n))$ converge vers $\tilde{h}_t(v)$. Par suite pour tout réel t , \tilde{h}_t est un homéomorphisme de $(T^1\mathbb{H}, d)$.

Nous avons également par définition

$$\tilde{h}_t \circ \tilde{h}_{t'}(v) = \tilde{h}_t[\alpha(t'), \vec{v}(t')] = [\alpha(t' + t), \vec{v}(t' + t)] = \tilde{h}_{t+t'}(v),$$

pour tous réels t, t' et $v \in T^1\mathbb{H}$, c'est-à-dire $\tilde{h}_t \circ \tilde{h}_{t'} = \tilde{h}_{t+t'}$.

□

Notons que l'application

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}, +) &\rightarrow \mathbf{H} \\ t &\mapsto \tilde{h}_t \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes où \mathbf{H} est le groupe des homéomorphismes de $T^1\mathbb{H}$.

Définition 4.7. *On appelle **flot horocyclique** sur $T^1\mathbb{H}$, noté $\tilde{h}_{\mathbb{R}}$, l'application*

$$\tilde{h}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times T^1\mathbb{H} \longrightarrow T^1\mathbb{H}$$

$$(t, v) \longmapsto \tilde{h}_t(v) = (\alpha(t), \vec{v}(t)).$$

La dynamique du flot horocyclique sur $T^1\mathbb{H}$ est simple comme dans le cas du flot géodésique :

- (i) l'ensemble non-errant $\tilde{\Omega}_h$ est vide et
- (ii) pour tout $v \in T^1\mathbb{H}$ et pour tout réel t , l'application de \mathbb{R} dans $T^1\mathbb{H}$ qui à t associe $\tilde{h}_t(v)$ est un plongement.

2.1. 2 Le flot horocyclique sur T^1S

Passons maintenant à la définition du flot horocyclique sur le fibré unitaire tangent d'une surface hyperbolique. Soit Γ un groupe fuchsien. La commutation des actions de $\tilde{h}_{\mathbb{R}}$ et ceux de Γ (voir le lemme 4.5) permet de définir un flot sur $T^1S = \Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$.

Définition 4.8. On appelle **flot horocyclique** sur T^1S , noté $h_{\mathbb{R}}$ l'application définie par

$$\forall u \in T^1\mathbb{H} \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}, \quad h_t(\pi(u)) = \pi(\tilde{h}_t(u)).$$

Par définition de la topologie sur T^1S , une suite $(\pi(v_n)) = (h_{t_n}(\pi(v)))$ converge vers un élément $\pi(u)$ si et seulement s'il existe une suite (γ_n) de Γ telle que

$$\begin{cases} \gamma_n(v_n(0)) = \gamma_n \tilde{h}_{t_n}(v(0)) \longrightarrow u(0), \\ \gamma_n(v^+) \longrightarrow u^+. \end{cases}$$

La proposition suivante relie l'ensemble non-errant Ω_h du flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$, noté Ω_h , à l'ensemble limite Λ du groupe fuchsien Γ qui définit la surface hyperbolique.

Proposition 4.9. Soit $u = (z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes

- (i) L'élément $\pi(u) \in \Omega_h$.
- (ii) Le point limite $u^+ \in \Lambda$.

Pour démontrer cette proposition nous utilisons le lemme suivant qui découle de la minimalité de l'action du groupe fuchsien Γ sur son ensemble limite Λ .

Lemme 4.10. (voir [22] proposition 1.9 ou [18] lemme III.2.2).

Soit Γ un groupe fuchsien non-élémentaire et Λ son ensemble limite. Pour tout ξ et $\eta \in \Lambda$ (distincts ou non) il existe une suite $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de Γ telle que $\gamma_n(z) \rightarrow \xi$ et $\gamma_n^{-1}(z) \rightarrow \eta$ pour tout $z \in \mathbb{H}$.

Démonstration :

Fixons ξ dans Λ et notons A , l'ensemble des $x \in \Lambda$ pour lesquels il existe une suite (g_n) de Γ vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(z) = \xi$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n^{-1}(z) = x$. Cet ensemble est non vide et est invariant par Γ , montrons qu'il est fermé.

Soit $(x_p)_{p \geq 1}$ une suite d'éléments de A convergeant vers un point $x \in \partial\mathbb{H}$. Considérons une suite décroissante (V_n) de voisinages ouverts de x dans $\bar{\mathbb{H}}$ telle que $\bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n = \{x\}$. Pour tout entier n , il existe $x_{p_n} \in V_n$ et une suite (g_n^k) de Γ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n^k(z) = \xi$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (g_n^k)^{-1}(z) = x_{p_n}$. Par conséquent il existe une suite (g_{n,k_n}) telle que $(g_{n,k_n})^{-1}(z)$ appartienne à V_n et $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_{n,k_n}(z) = x$. Ceci entraîne que $x \in A$ et donc A est fermé. Par ailleurs A est inclus dans Λ et Λ est Γ -invariant, donc $A = \Lambda$.

□

Démonstration de la proposition 4.9 :

$i \Rightarrow ii$) Considérons $u = (z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ tel que $\pi(u) \in \Omega_h$. Soit $(V_n)_{n \geq 1}$ une suite de voisinages de $\pi(u)$ telle que $\bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n = \pi(u)$. Puisque $\pi(u) \in \Omega_h$ alors il existe une suite de nombre réels (t_n) telle que $h_{t_n}(V_n) \cap V_n \neq \emptyset$. Alors il s'en suit qu'ils existent une suite $(\pi(u_n))_{n \geq 1}$ d'éléments du fibré unitaire tangent de la surface $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ et une suite de nombres réels (t_n) qui tend vers $+\infty$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi(u_n) = \pi(u) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} h_{t_n} \pi(u_n) = \pi(u).$$

Il existe donc une suite $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ de Γ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(u_n) = u \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \tilde{h}_{t_n} u_n = u.$$

Posons $u_n = (z_n, \vec{u}_n)$ et soit $(\alpha_n(t))$ une paramétrisation par unité de longueur d'arc de l'horocycle $\mathcal{O}_{u_n^+}(z_n)$ telle que $\alpha_n(0) = z_n$ et $(\frac{d\alpha_n}{dt}(0), \vec{u}_n)$ forme une base orthonormée directe de $T_{z_n}\mathbb{H}$. Puisque $t_n \rightarrow +\infty$ alors on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n(t_n) = u^+$. En plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(\alpha_n(t_n), \gamma_n^{-1}z) = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^{-1}(z) = u^+$. D'où $u^+ \in \Lambda$.

$ii \Rightarrow i$) Si $u = (z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ tel que $u^+ \in \Lambda$ alors d'après le lemme 4.10 il existe une suite $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de Γ telle que $\gamma_n(z) \rightarrow u^+$ et $\gamma_n^{-1}(z) \rightarrow u^+$. Soit $u_n^+ \in \partial\mathbb{H}$ le point base de l'horocycle passant par les points z et $z_n = \gamma_n^{-1}(z)$. On considère l'élément $u_n = (z, \vec{u}_n)$. La suite $(u_n^+)_{n \geq 1}$ converge vers u^+ . Soit α_n la paramétrisation par unité de longueur d'arc de l'horocycle $\mathcal{O}_{u_n^+}(z)$ tel que $\alpha_n(0) = z$. Soit $t_n \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_n(t_n) = z_n$. La suite $(t_n)_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$. Puisque $u_n^+ \rightarrow u^+$ alors $\pi(u_n) \rightarrow \pi(u)$. Pour montrer que $\pi(u) \in \Omega_h$, il reste de montrer que $h_{t_n}(\pi(u_n)) \rightarrow \pi(u)$. Nous avons $\gamma_n(\alpha_n(t_n)) = \gamma_n(z_n) = z$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(u_n^+) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(z) = u^+$. Et donc $\gamma_n \tilde{h}_{t_n}(u_n) \rightarrow u$. D'où $\pi(u) \in \Omega_h$.

□

Dans les deux sous-sections suivantes nous donnons deux autres points de vue du flot horocyclique avant d'étudier la nature des orbites horocycliques.

2.2 Le flot horocyclique en $PSL(2, \mathbb{R})$ -coordonnées

On procède comme dans le cas du flot géodésique pour obtenir la description algébrique du flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$. Fixons encore l'élément $u = (i, \vec{u})$ de $T_i^1\mathbb{H}$, où \vec{u} est porté par l'axe vertical, et l'horocycle $\mathcal{O}_{\infty}(i)$. L'application $\alpha(t) = t + i$, $t \in \mathbb{R}$, paramétrise $\mathcal{O}_{\infty}(i)$ par unité de longueur d'arc, et $\tilde{h}_t(u) = (i + t, \vec{u}) \in T_{i+t}^1\mathbb{H}$. L'homographie de $PSL(2, \mathbb{R})$ qui envoie u à $\tilde{h}_t(u)$ est la translation $n_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui envoie i à $\alpha(t)$. Par conséquent,

si $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ est une surface hyperbolique quelconque, dans les $PSL(2, \mathbb{R})$ -coordonnées $h_{\mathbb{R}}$ correspond à une multiplication à droite

$$h_t : \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$$

$$\Gamma g \longmapsto \Gamma g \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

En termes algébriques, le flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ sur $\Gamma \backslash T^1 \mathbb{H}$ est conjugué à l'action par translation à droite du sous-groupe fermé $N = \left\{ n_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / t \in \mathbb{R} \right\}$ sur $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$. C'est l'action d'un groupe unipotent sur un espace homogène, voir [51]. L'action de Γ sur $PSL(2, \mathbb{R})/N$ est duale à celle de N sur $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$: la double classe $\Gamma g N$ désigne selon l'action considérée, l'orbite du point gN de $PSL(2, \mathbb{R})/N$ par le groupe Γ ou l'orbite du point Γg de $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ par le groupe N .

Avec les $PSL(2, \mathbb{R})$ -coordonnées on obtient la relation fondamentale suivante qui montre que le flot horocyclique est lié au flot géodésique.

Théorème 4.11. *Pour tous réels t et s on a*

$$\tilde{g}_t \circ \tilde{h}_s = \tilde{h}_{s'} \circ \tilde{g}_t \quad \text{avec} \quad s' = se^{-t}. \quad (4.4)$$

Démonstration :

Nous avons

$$\begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & se^{-t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

c'est-à-dire $\tilde{g}_t \circ \tilde{h}_s \circ \tilde{g}_{-t} = \tilde{h}_{s'}$ avec $s' = se^{-t}$. Et donc $\tilde{g}_t \circ \tilde{h}_s = \tilde{h}_{s'} \circ \tilde{g}_t$.

□

2.3 Point de vue vectoriel (Action linéaire)

Dans cette partie nous abordons un point de vue qui nous permettra de lire la dynamique topologique du flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ sur $\Gamma \backslash T^1 \mathbb{H}$ sous la forme de l'action linéaire d'un sous-groupe de $PSL(2, \mathbb{R})$, associée au groupe Γ sur l'espace $(\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)) / \{\pm Id\}$. Les groupes fuchsien et leurs sous-groupes associés de $PSL(2, \mathbb{R})$ sont notés indifféremment par Γ .

Munissons \mathbb{R}^2 de sa base canonique. Le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ agit (continûment, à gauche) sur \mathbb{R}^2 par l'application qui à un couple $(M, \vec{V}) \in SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ associe le point de \mathbb{R}^2 dont le vecteur colonne est le produit de la matrice M par le vecteur colonne \vec{V} . Cette action

possède deux orbites, $\{(0, 0)\}$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Soit $v = (z, \vec{v}) \in T^1\mathbb{H}$. A la trajectoire horocyclique $\tilde{h}_{\mathbb{R}}(v)$ elle correspond un unique horocycle $\mathcal{O}_{v^+}(z)$ défini par la ligne de niveau $\mathcal{O}_{v^+}(z) = \{w \in \mathbb{H} / \beta_{v^+}(i, w) = \beta_{v^+}(i, z)\}$. Posons $\mathbb{E} = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) / \{\pm Id\}$ et soit l'application :

$$\psi : T^1\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{E}$$

$$v = (z, \vec{v}) \mapsto \psi(v) = \vec{V} = \begin{cases} \pm e^{\frac{\beta_{v^+}(i, z)}{2}} / \sqrt{(v^+)^2 + 1} \begin{pmatrix} v^+ \\ 1 \end{pmatrix} & \text{si } v^+ \neq \infty, \\ \pm e^{\frac{\beta_{v^+}(i, z)}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } v^+ = \infty. \end{cases}$$

Cette application est surjective et constante sur les orbites de $\tilde{h}_{\mathbb{R}}$. Elle vérifie :

$$\forall u \text{ et } v \in T^1\mathbb{H}, \psi(u) = \psi(v) \Leftrightarrow \tilde{h}_{\mathbb{R}}(u) = \tilde{h}_{\mathbb{R}}(v).$$

Elle induit donc une bijection de l'espace des orbites horocycliques $T^1\mathbb{H}/\tilde{h}_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{E} = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) / \{\pm Id\}$. L'application ψ induit une action de $PSL(2, \mathbb{R})$ sur \mathbb{E} définie par la proposition suivante.

Proposition 4.12. *Pour tout $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ et $v \in T^1\mathbb{H}$, nous avons*

$$\psi(g(v)) = g(\psi(v)).$$

Démonstration :

Puisque l'action de $PSL(2, \mathbb{R})$ sur $T^1\mathbb{H}$ est simplement transitive alors il suffit de montrer la proposition pour $v = (i, \vec{v}) \in T^1\mathbb{H}$ où \vec{v} est porté par l'axe des imaginaires c'est-à-dire $v^+ = \infty$.

D'après la proposition 1.43 toute isométrie $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $g = kan$ où $k(z) = \frac{z \cos \theta - \sin \theta}{z \sin \theta + \cos \theta}$, $a(z) = \lambda^2 z$ et $n(z) = z + t$. Nous avons d'un côté $\psi(v) = \pm e_1$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ce qui entraîne que

$$g(\psi(v)) = g(\pm e_1) = \pm kan(e_1) = \lambda^2 k(e_1) = \pm \begin{pmatrix} \lambda \cos \theta \\ \lambda \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Et de l'autre côté $\psi(g(v)) = \frac{\pm e^{\frac{1}{2}\beta_{g(\infty)}(i, g(i))}}{\sqrt{(g(\infty))^2 + 1}} \begin{pmatrix} g(\infty) \\ 1 \end{pmatrix}$. Puisque

$$\beta_{g(\infty)}(i, g(i)) = -\beta_{\infty}(i, g^{-1}(i)) = -\beta_{\infty}(i, a^{-1}(i)) = -\beta_{\infty}(i, \lambda^{-2}(i)) = \ln \lambda^2$$

alors $\psi(g(v)) = \frac{\pm\lambda}{\sqrt{(g(\infty))^2+1}} \begin{pmatrix} k(\infty) \\ 1 \end{pmatrix}$. L'isométrie k tourne la direction ∞ d'un angle θ .
 Donc les vecteurs $g(\psi(v))$ et $\psi(g(v))$ définissent la même direction. Par ailleurs nous avons $\|\psi(g(v))\| = \|g(\psi(v))\| = \lambda$ donc $\psi(g(v)) = g(\psi(v))$.

□

Corollaire 4.13. *L'application ψ est continue.*

Démonstration :

Soit une suite (u_n) de $T^1\mathbb{H}$ convergeant vers u . Puisque l'action de $PSL(2, \mathbb{R})$ sur $T^1\mathbb{H}$ est simplement transitive il existe une unique suite $(g_n)_{n \geq 1}$ de $PSL(2, \mathbb{R})$ telle que $g_n(v) = u_n$ où $v = (i, \vec{v})$ avec $v^+ = \infty$. Et puisque l'application qui à un élément h de $PSL(2, \mathbb{R})$ associe l'élément $h(v)$ de $T^1\mathbb{H}$ est un homéomorphisme alors la suite (g_n) converge vers $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ tel que $g(v) = u$. Donc d'après la proposition 4.12, $\psi(u_n) = \psi(g_n(v)) = g_n(\pm e_1)$ et $\psi(u) = \psi(g(v)) = g(\pm e_1)$. Par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi(u_n) = \psi(u)$.

□

L'action de $PSL(2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{E} = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}) / \{\pm Id\}$ est conjuguée à son action projective sur $\mathbb{P}^1\mathbb{R} = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}) / \sim$ avec $\vec{v} \sim \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \lambda \vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{array}{ccc} T^1\mathbb{H} & \xrightarrow{\tilde{h}_{\mathbb{R}}} & T^1\mathbb{H} \\ \psi \downarrow & & \psi \downarrow \\ \mathbb{E} & \xrightarrow{g} & \mathbb{E} \end{array}$$

$$PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{E} \text{ duale } PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{P}^1\mathbb{R}$$

$$\Gamma \backslash T^1\mathbb{H} \simeq \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright N \text{ duale } \Gamma \curvearrowright PSL(2, \mathbb{R})/N \simeq \mathbb{E} = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}) / \{\pm Id\}$$

L'action de $h_{\mathbb{R}}$ sur $T^1S = \Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$ est duale à celle de Γ sur l'espace $T^1\mathbb{H} / \tilde{h}_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{E}$. Par dualité, la dynamique du flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ sur T^1S se traduit donc en termes d'action linéaire de Γ sur \mathbb{E} .

Soient un sous-groupe linéaire discret Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$ et l'ensemble limite Λ du groupe fuchsien correspondant. Posons $\mathbb{E}(\Gamma) = \{\vec{V} = \psi(v) \in \mathbb{E} / v^+ \in \Lambda\}$. Nous remarquons d'après la proposition 4.9 que $\mathbb{E}(\Gamma) = \psi(\Omega_h)$ et si le groupe Γ est de première espèce alors $\mathbb{E}(\Gamma) = \mathbb{E}$.

Proposition 4.14. *L'ensemble $\mathbb{E}(\Gamma)$ est invariant par l'action linéaire de Γ et est fermé.*

Démonstration :

La première partie de l'assertion résulte de la proposition 4.12 et du fait que l'ensemble Λ est Γ -invariant.

Soit une suite $(\psi(u_n))$ de $\mathbb{E}(\Gamma)$ convergeant vers un élément $\psi(u)$ de \mathbb{E} . Puisque l'application ψ est continue alors la suite (u_n) d'éléments de $T^1\mathbb{H}$ converge vers u et d'après la relation de convergence 4.1 la suite (u_n^+) d'éléments de Λ converge vers $u^+ \in \Lambda$ car Λ est un fermé. Par suite $\psi(u) \in \mathbb{E}(\Gamma)$. D'où $\mathbb{E}(\Gamma)$ est fermé.

□

La proposition suivante relie la dynamique de l'action du flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ sur le fibré unitaire tangent T^1S à celle de Γ sur l'ensemble \mathbb{E} . La nature topologique d'une orbite de $h_{\mathbb{R}}$ sur T^1S est la même que celle de Γ sur \mathbb{E} .

Proposition 4.15. (*Prop. 2.1 [18]*)

Soient $u = (z, \vec{u})$ et $u' = (z', \vec{u}')$ dans $T^1\mathbb{H}$. Il existe une suite (t_n) de \mathbb{R} telle que $(h_{t_n}(\pi(u)))$ converge vers $\pi(u')$ si et seulement s'il existe une suite (γ_n) de Γ telle que $\gamma_n(\psi(u))$ converge vers $\psi(u')$.

Démonstration :

Supposons qu'il existe une suite de nombres réels (t_n) telle que la suite $(h_{t_n}(\pi(u)))$ converge vers $\pi(u')$. Ce qui entraîne d'après la relation de convergence 4.3 qu'il existe une suite $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de Γ telle que la suite $(\gamma_n \tilde{h}_{t_n}(u))$ converge vers u' . Puisque la fonction ψ est continue et constante sur une orbite de $\tilde{h}_{\mathbb{R}}$ alors $(\psi(\gamma_n \tilde{h}_{t_n}(u)))_{n \geq 1}$ converge vers $\psi(u')$.

Inversement, soient $u = (z, \vec{u})$ et $u' = (z', \vec{u}')$. Supposons qu'il existe une suite (γ_n) d'éléments de Γ telle que $(\gamma_n(\psi(u)))_{n \geq 1}$ converge vers $\psi(u')$. Par définition de l'application ψ les suites $(\gamma_n(u^+))_{n \geq 1}$ et $(\beta_{\gamma_n(u^+)}(i, \gamma_n(z)))_{n \geq 1}$ convergent respectivement vers u'^+ et $\beta_{u'^+}(i, z')$. Notons t_n le réel tel que $\gamma_n \tilde{h}_{t_n}(u)$ est tangent à la géodésique passant par z' et d'extrémité $\gamma_n(u^+)$. Posons $\gamma_n \tilde{h}_{t_n}(z, \vec{u}) = (z_n, \vec{u}_n)$. Puisque $u_n^+ = \gamma_n(u^+)$ alors la suite $(u_n^+)_{n \geq 1}$ converge vers u'^+ . Et puisque $\beta_{\gamma_n(u^+)}(i, \gamma_n(z)) = \beta_{u_n^+}(i, z_n)$ converge vers $\beta_{u'^+}(i, z')$ alors la suite $(z_n)_{n \geq 1}$ converge vers z' . On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_{t_n}(\pi(u)) = \pi(u')$.

□

3 Liens entre points limites d'un groupe fuchsien et orbites horocycliques

Il existe une correspondance entre la nature des points de l'ensemble limite Λ d'un groupe fuchsien Γ et la topologie des orbites du flot horocyclique sur le fibré unitaire tangent de la surface $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$. Nous énonçons dans ce qui suit quatre théorèmes qui établissent cette correspondance et nous les appellerons *théorèmes de correspondance*.

3.1 Orbites denses

Rappelons qu'une orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ est dense dans Ω_h si $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))} = \Omega_h$. Énonçons le lemme suivant.

Lemme 4.16. *Soient $u = (z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ et $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de Γ .*

La suite $(\beta_{u^+}(i, \gamma_n^{-1}(i)))_{n \geq 1}$ tend vers $+\infty$ si et seulement si la suite $(\|\gamma_n(\psi(u))\|)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

Démonstration :

Par définition nous avons

$$\gamma_n(\psi(u)) = \psi(\gamma_n(u)) = \frac{\pm e^{\frac{1}{2}\beta_{\gamma_n(u^+)}(i, \gamma_n(z))}}{\sqrt{(\gamma_n(u^+))^2 + 1}} \begin{pmatrix} \gamma_n(u^+) \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \|\gamma_n(\psi(u))\| = e^{\frac{1}{2}\beta_{\gamma_n(u^+)}(i, \gamma_n(z))}.$$

Et puisque $\beta_{\gamma_n(u^+)}(i, \gamma_n(z)) = \beta_{u^+}(i, z) - \beta_{u^+}(i, \gamma_n^{-1}(i))$. Alors $(\beta_{u^+}(i, \gamma_n^{-1}(i)))_{n \geq 1}$ tend vers $+\infty$ si et seulement si la suite $(\beta_{\gamma_n(u^+)}(i, \gamma_n(z)))_{n \geq 1}$ tend vers $-\infty$ si et seulement si $\|\gamma_n(\psi(u))\|$ tend vers 0.

□

Théorème 4.17. ([18] Théorème IV.3.1)

Soit $v = (z, \vec{v}) \in T^1\mathbb{H}$. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. Le point v^+ est un point limite horocyclique.
2. L'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ est dense dans Ω_h .
3. Il existe une suite (γ_n) de Γ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\gamma_n(\vec{V})\| = 0$.

Démonstration :

2) \Rightarrow 3) Supposons que $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))} = \Omega_h$. Ce qui implique que $\pi(\overline{h_{\mathbb{R}}(v)}) = \pi(\tilde{\Omega}_h)$. Ce qui entraîne que $\overline{h_{\mathbb{R}}(v)} = \tilde{\Omega}_h$. Et puisque l'application ψ est continue nous avons $\psi(\overline{h_{\mathbb{R}}(v)}) = \psi(\tilde{\Omega}_h) = \mathbb{E}(\Gamma)$. C'est-à-dire $\overline{\Gamma \cdot \vec{V}} = \mathbb{E}(\Gamma)$.

3) \Rightarrow 2) Réciproquement, supposons que $\overline{\Gamma \cdot \vec{V}} = \mathbb{E}(\Gamma)$ c'est-à-dire $\overline{\Gamma(\psi(v))} = \psi(\tilde{\Omega}_h)$. Soit $u = (p, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ tel que $\tilde{h}_{\mathbb{R}}(u) \in \tilde{\Omega}_h$. Il existe une suite (γ_n) d'éléments de Γ telle

que la suite $(\gamma_n(\psi(v)))$ et donc $(\psi(\gamma_n(v)))$ converge vers $\psi(u)$. Puisque l'application ψ est continue la suite $(\gamma_n(v))$ converge vers u . Ce qui implique que les suites $(\gamma_n(v^+))$ et $(\beta_{\gamma_n(v^+)}(i, \gamma_n(z)))$ convergent respectivement vers $u^+ \in \Lambda$ et $\beta_{u^+}(i, p)$. Considérons le réel t_n tel que $\tilde{h}_{t_n}(\gamma_n(z))$ appartient au rayon géodésique $[p, \gamma_n(v^+)]$. Nous avons la suite $(\tilde{h}_{t_n}(\gamma_n(v^+)))$ converge vers u^+ et la suite $(\tilde{h}_{t_n}(\gamma_n(z)))$ converge vers p . Et donc la suite $(h_{t_n}(\pi(v)))$ converge vers $\pi(u)$.

1) \Leftrightarrow 3) Soit $v = (z, \vec{v}) \in T^1\mathbb{H}$. D'après la proposition 3.18, le point limite $v^+ \in \Lambda_h$ si et seulement si il existe une suite (γ_n) d'éléments de Γ telle que $(\beta_{\gamma_n}(i, \gamma_n^{-1}(i)))_{n \geq 1}$ tend vers $+\infty$. Ce qui est équivalent à dire que la suite $(\|\gamma_n(\psi(u))\|)_{n \geq 1}$ converge vers 0 d'après le lemme 4.16.

□

3.2 Orbites périodiques

Définition 4.18. Un élément $\pi(v)$ de T^1S est dit **périodique** par $h_{\mathbb{R}}$ s'il existe un réel $T > 0$ tel que $h_T(\pi(v)) = \pi(v)$. Le plus petit réel $T_v > 0$ tel que $h_{T_v}(\pi(v)) = \pi(v)$ est appelé la **période** de $\pi(v)$. Et l'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ est dite **orbite périodique**.

Théorème 4.19. Soit $v \in T^1\mathbb{H}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. Le point v^+ est un point limite parabolique.
2. L'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ est périodique.
3. Il existe une application linéaire γ de $\Gamma \setminus \{Id\}$ telle que $\gamma(\psi(v)) = \psi(v)$.

Démonstration :

Commençons par montrer 2) \Leftrightarrow 3). Soit $v = (z, \vec{v}) \in T^1\mathbb{H}$. Si l'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ est périodique alors par définition ils existent un réel $T > 0$ et une isométrie $\gamma \in \Gamma \setminus \{Id\}$ tels que $\tilde{h}_T(v) = \gamma v$. Ce qui équivaut à $\psi(\tilde{h}_T(v)) = \psi(\gamma v)$. C'est-à-dire $\gamma(\psi(v)) = \psi(v)$.

Montrons maintenant 3) \Leftrightarrow 1). Par définition

$$\begin{aligned} \gamma(\psi(v)) = \psi(v) &\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma(v^+) = v^+ \\ \beta_{v^+}(i, z) = \beta_{\gamma(v^+)}(i, \gamma(z)) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma(v^+) = v^+ \\ \beta_{v^+}(i, \gamma^{-1}(i)) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Autrement dit γ fixe v^+ et préserve l'horocycle $\mathcal{O}_{v^+}(\gamma^{-1}(i))$, c'est-à-dire γ est une isométrie parabolique de point fixe v^+ . Donc $v^+ \in \Lambda_h$ est un point limite parabolique.

□

Remarque 4.20. (i) Si $\pi(v)$ est $h_{\mathbb{R}}$ -périodique alors $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ est inclus dans Ω_h car $v^+ \in \Lambda_p \subset \Lambda$.

(ii) Si $\pi(v)$ est $h_{\mathbb{R}}$ -périodique alors $g_t(\pi(v))$ est $h_{\mathbb{R}}$ -périodique pour tout $t \in \mathbb{R}$. En effet si $\pi(v)$ est périodique alors il existe $T > 0$ et $\gamma \in \Gamma \setminus Id$ tels que $\tilde{h}_T(v) = \gamma(v)$. Ce qui implique que $\tilde{g}_t \circ \tilde{h}_T = \tilde{g}_t(\gamma v)$. Et donc d'après le théorème 4.11, $\tilde{h}_{T'}(\tilde{g}_t v) = \gamma(\tilde{g}_t v)$ avec $T' = Te^{-t}$. C'est-à-dire $g_t(\pi(v))$ est périodique.

3.3 Orbites fermées non périodiques et orbites irrégulières

Terminons la classification des orbites horocycliques suivant la nature des points limites de Γ par les théorèmes qui suivent.

Proposition 4.21. Soit $u = (z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$. L'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(u))$ est fermée si et seulement si l'orbite $\Gamma(\vec{U}) = \Gamma(\psi(u))$ est fermée dans \mathbb{E} .

Démonstration :

Supposons d'abord que l'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(u))$ est fermée. Soit une suite $(\gamma_n \vec{U})_{n \geq 1}$ convergente d'éléments de l'orbite $\Gamma \cdot \vec{U}$. Par construction de l'application ψ ils existent des réels x et t tels que

$$\begin{cases} \gamma_n(u^+) \rightarrow x \\ \beta_{\gamma_n u^+}(i, \gamma_n(z)) \rightarrow t. \end{cases}$$

Considérons le réel t_n tel que le point $\tilde{h}_{t_n}(\gamma_n(z))$ appartient au rayon géodésique $[i, \gamma_n u^+)$. Soient $v = (p, \vec{v}) \in T^1\mathbb{H}$ tel que $v^+ = x$ et $\beta_x(i, p) = t$. La suite $\tilde{h}_{t_n}(\gamma_n u)$ converge vers v . Comme l'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(u))$ est fermée il existe alors $\gamma \in \Gamma$ et $s \in \mathbb{R}$ tels que $v = \tilde{h}_s(\gamma u) = \gamma \tilde{h}_s(u)$. L'application ψ étant continue donc la suite $\psi(\tilde{h}_{t_n}(\gamma_n u))$ converge vers $\psi(\gamma u) = \gamma \psi(u) = \gamma \vec{u} \in \Gamma \cdot \vec{U}$. Par suite l'orbite $\Gamma \cdot \vec{U}$ est fermée.

Supposons à présent que l'orbite $\Gamma \cdot \vec{U}$ soit fermée. Puisque ψ est continue alors $\psi^{-1}(\Gamma \cdot \vec{U}) = \psi^{-1}(\pi(\psi(\tilde{h}_{\mathbb{R}}(u)))) = h_{\mathbb{R}}(\pi(u))$ est fermée.

□

Pour la démonstration du théorème qui suit nous renvoyons le lecteur aux références suivantes [53] et [19].

Théorème 4.22. Soit $v = (z, \vec{v}) \in T^1\mathbb{H}$. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. Le point v^+ est un point limite discret.
2. L'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ est fermée non périodique dans Ω_h .
3. L'orbite $\Gamma \vec{V} = \Gamma(\psi(v))$ est fermée et \vec{V} n'est vecteur propre d'aucun élément de $\Gamma \setminus \{Id\}$.

Passons maintenant au dernier type d'orbite horocyclique.

Définition 4.23. Une orbite horocyclique $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ est dite *irrégulière* si elle n'est ni fermée et ni dense dans Ω_h

Il résulte de cette définition et des théorèmes 4.17, 4.19 et 4.22 les équivalences suivantes

Théorème 4.24. Soit $v \in T^1\mathbb{H}$. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. Le point v^+ est un point limite irrégulier.
2. L'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ est irrégulière.
3. L'orbite $\Gamma \vec{V}$ n'est pas fermée et $\{(0, 0)\} \notin \overline{\Gamma \vec{V}}$.

Pour terminer reprenons l'exemple 3.31 du chapitre 3 pour donner divers types d'orbites horocycliques suivant la nature du point ∞ du bord $\partial\mathbb{H}$.

Exemple 4.25. Soit (r_n) une suite de nombre réels positifs et $x_n = 2\sum_{k=1}^{n-1} r_k + r_n$. Notons $C_n = (x_n, r_n)$ le demi-cercle orthogonal à l'axe réel de centre et rayon euclidiens x_n et r_n . On obtient un système de demi-cercles tangents sur le demi-plan droit de \mathbb{H} . Soit C'_n l'image de C_n par la réflexion $z \mapsto -\bar{z}$ et h_n la composition de l'inversion par rapport à C_n et de la réflexion $z \mapsto -\bar{z}$. En termes explicite $h_n(z) = \frac{x_n z + r_n^2 - x_n^2}{-z + x_n}$ et C_n est le cercle isométrique de h_n . L'isométrie h_1 est parabolique de point fixe $\xi = 0$ et pour tout $n > 1$, h_n est hyperbolique. Donc d'après les théorèmes 4.17 et 4.19, l'ensemble Ω_h contient des orbites denses dans Ω_h et des orbites périodiques.

Si la série $\sum r_k$ converge alors Γ est de seconde espèce et $\infty \in \partial\mathbb{H} \setminus \Lambda$. Tous les horocycles de l'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ avec $v^+ = \infty$ partent à l'infini dans les deux directions. Par suite l'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ est fermée et non périodique.

L'ensemble non-errant peut contenir des orbites fermées non-périodiques. Lorsqu'on pose $r_n = \frac{1}{n}$, nous avons $\lim_{n \rightarrow +\infty} (Im(h_n(i))) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{r_n}{x_n})^2 = 0$ d'après l'exemple 3.31. Et d'après le théorème 4.22 l'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ telle que $v^+ = \infty$ est fermée et non périodique. Et lorsqu'on pose $r_1 = 1$, $x_1 = 2$ et on définit par récurrence $r_{n+1} = 3r_n + 1$, $x_{n+1} = 5r_{n+1}$, le point $\infty \in \Lambda_{irr}$ d'après l'exemple 3.31. Par suite d'après le théorème 4.24 l'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ telle que $v^+ = \infty$ est irrégulière.

Pour conclure nous notons que la seule connaissance de la nature d'un point limite permet d'obtenir le comportement topologique de la trajectoire horocyclique correspondante. Nous retenons également le théorème de caractérisation suivant qui résulte du théorème 3.34 et des différents théorèmes de correspondance entre la nature topologiques des orbites horocycliques de Ω_h et celle des points de l'ensemble limite Λ de cette section.

Théorème 4.26. Un groupe fuchsien Γ est géométriquement infini si et seulement si Ω_h contient des orbites autres que denses et périodiques c'est-à-dire une orbite fermée non périodique ou une orbite irrégulière.

Chapitre 5

Ensembles $h_{\mathbb{R}}$ -minimaux

Sommaire

1	Conditions de non-existence d'ensemble $h_{\mathbb{R}}$ -minimal	88
2	Exemples de flots horocycliques sans ensembles minimaux . .	92

La recherche d'un ensemble minimal pour un flot sur un espace topologique est au coeur de la théorie des systèmes dynamiques depuis ses débuts, voir [10], [28] et [31]. Ce chapitre s'inscrit dans ce sillage et étudie, lorsque la surface hyperbolique est géométriquement infinie, l'existence d'un ensemble minimal pour le flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ restreint à son ensemble non-errant Ω_h . Contrairement au flot géodésique, voir [20], un ensemble minimal pour le flot horocyclique n'existe pas toujours. Dans ce chapitre après être revenu sur quelques définitions nous établissons un critère de non-existence d'ensemble $h_{\mathbb{R}}$ -minimal. Puis nous accorderons une partie importante à la construction d'exemples de flots horocycliques sans ensembles $h_{\mathbb{R}}$ -minimaux. Ces exemples font appel à une combinaison des trois chapitres précédents.

1 Conditions de non-existence d'ensemble $h_{\mathbb{R}}$ -minimal

Commençons par le rappel de la définition d'un ensemble minimal donnée à l'introduction de ce manuscrit.

Définition 5.1. *Soit le flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ sur le fibré unitaire tangent T^1S d'une surface hyperbolique S . On dira qu'une partie A de T^1S est $h_{\mathbb{R}}$ -minimale si :*

- (i) *la partie A est non-vide,*
- (ii) *la partie A est fermée,*
- (iii) *$h_{\mathbb{R}}(A) \subseteq A$ et*
- (iv) *pour toute partie non vide, fermée $B \subset A$, $h_{\mathbb{R}}(B) = B \Rightarrow B = A$.*

Le flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ est dit minimal si T^1S est $h_{\mathbb{R}}$ -minimal.

Remarque 5.2. (a) *Si un ensemble A est $h_{\mathbb{R}}$ -minimal alors il est l'adhérence de l'orbite de chacun de ses éléments.*

(c) *Si A et B sont $h_{\mathbb{R}}$ -minimaux alors $A \cap B = \emptyset$ ou $A = B$, voir [28].*

Lorsque la surface est géométriquement finie les ensembles $h_{\mathbb{R}}$ -minimaux sont bien connus et le théorème suivant résume la situation.

Théorème 5.3. *L'ensemble Ω_h est minimal si et seulement si Γ est un groupe convexe co-compact. En particulier, le flot horocyclique est minimal sur T^1S si et seulement si Γ est un réseau uniforme.*

Démonstration :

D'après le corollaire 3.33 le groupe Γ est convexe co-compact si et seulement si $\Lambda = \Lambda_h$. Ce qui est équivalent à dire que toute orbite de Ω_h est dense d'après le théorème 4.17.

□

Il résulte de ce théorème et de la caractérisation de la finitude d'un groupe fuchsien que si Γ est géométriquement fini et non convexe co-compact alors les seuls ensembles $h_{\mathbb{R}}$ -minimaux de Ω_h sont ses orbites périodiques.

Lorsque la surface est géométriquement infinie la situation est tout à fait différente. On sait que dans le cadre géométriquement infini une orbite dense ne peut être $h_{\mathbb{R}}$ -minimale, car l'ensemble non-errant Ω_h contient des orbites autres que denses, et qu'une orbite fermée est $h_{\mathbb{R}}$ -minimale. La question naturelle qui se pose est *qu'en est-il de l'adhérence d'une orbite irrégulière?* Dans cette section nous répondons à cette question sous des hypothèses faites sur la surface. Commençons d'abord par définir sur l'ensemble des orbites horocycliques de T^1S une relation d'équivalence qui met en jeu le flot géodésique $g_{\mathbb{R}}$.

Définition 5.4. *Nous dirons que deux orbites horocycliques $h_{\mathbb{R}}(\pi(u))$ et $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ sont en relation s'il existe un réel t_0 tel que $g_{t_0}(h_{\mathbb{R}}(\pi(u))) = h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$.*

Remarquons que deux orbites en relation sont de même nature topologique. En effet $g_{t_0}(h_{\mathbb{R}}(\pi(u))) = h_{\mathbb{R}}(\pi(v)) \Rightarrow h_{\mathbb{R}}(g_{t_0}(\pi(u))) = h_{\mathbb{R}}(\pi(v)) \Rightarrow \exists s \in \mathbb{R} / \pi(\tilde{h}_s \tilde{g}_{t_0} u) = \pi(v)$ et donc il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $u^+ = \gamma v^+$. Par suite les orbites $h_{\mathbb{R}}(\pi(u))$ et $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ sont de même nature topologique d'après la section 3 du chapitre 4.

Rappelons maintenant l'énoncé de notre principal résultat.

Théorème 5.5. *(voir [27] Théorème 1.1)*

Soit S une surface hyperbolique géométriquement infinie. Si le flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ admet au plus un nombre dénombrable de classes d'équivalence d'orbites irrégulières, alors les seuls éventuels ensembles $h_{\mathbb{R}}$ -minimaux sont ses orbites fermées.

Par dualité entre l'action du flot $h_{\mathbb{R}}$ sur $T^1S = \Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$ et l'action linéaire du groupe Γ sur $\mathbb{E} = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}) / \{\pm Id\}$, l'ensemble non-errant Ω_h du flot horocyclique est vectoriellement $\mathbb{E}(\Gamma) = \{\vec{V} \in \mathbb{E} / v^+ \in \Lambda\}$, voir section 2 du chapitre 4 de ce manuscrit ou section 1 du chapitre 5 de [18]. Le théorème 5.5 s'énonce en termes vectoriels :

Théorème 5.6. *Si l'action linéaire d'un sous-groupe discret M_{Γ} de $PSL(2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{E}(\Gamma)$ a au plus un nombre dénombrable d'orbites non fermées et non denses, alors il n'existe pas d'ensemble minimal pour l'action de M_{Γ} sur $\mathbb{E}(\Gamma)$.*

Avant de démontrer le théorème 5.5 remarquons qu'il existe une correspondance bi-univoque entre l'ensemble des orbites horocycliques sur Ω_h modulo le flot géodésique et l'ensemble des orbites sous l'action du groupe Γ sur Λ . Ainsi si les orbites horocycliques irrégulières modulo le flot géodésique sont dénombrables et si l'adhérence d'une telle orbite $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))}$ ne contient que des orbites irrégulières alors il existe $I \subset \mathbb{N}$ tel que :

$$\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))} \subset \bigcup_{u^+ \in \Lambda_{irr}} h_{\mathbb{R}}(\pi(u)) = \bigcup_{i \in I} h_{\mathbb{R}} g_{\mathbb{R}}(\pi(v_i)).$$

Pour démontrer le théorème 5.5 nous utiliserons les propositions suivantes 5.7 et 5.8 qui à leur tours sont établies en utilisant un point de vue vectoriel.

Proposition 5.7. *Soient Γ un groupe géométriquement infini et $\pi(v) \in \Omega_h$. S'il existe un réel $t_0 \neq 0$ tel que $g_{t_0} \overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))} \cap \overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))} \neq \emptyset$ et si $\overline{h_{\mathbb{R}}\pi(v)}$ est minimal, alors $\overline{h_{\mathbb{R}}\pi(v)} = \Omega_h$.*

Démonstration :

Posons $F = \overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))}$ et $M = g_{t_0} \overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))} \cap \overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))} = g_{t_0} F \cap F$. L'hypothèse $M \neq \emptyset$ et F minimal entraînent que $F = g_{t_0} F$. En effet si $f \in M$ et $s \in \mathbb{R}$, on a $h_s f \in F$ car F est $h_{\mathbb{R}}$ -invariant. Puisque $f \in g_{t_0} F$ alors $f = g_{t_0} f'$ pour $f' \in F$, ce qui implique que $h_s f = h_s g_{t_0} f' = g_{t_0} h_{s'} f' \in g_{t_0} F$ car $h_{s'} f' \in F$ avec $s' = e^{-t_0} s$. Par suite $M = h_s M$, pour tout $s \in \mathbb{R}$. Puisque l'ensemble $M \subset F$ est un fermé non vide, invariant par $h_{\mathbb{R}}$ et puisque F est $h_{\mathbb{R}}$ -minimal, $M = F$. D'où $F = g_{t_0} F$.

Nous avons donc $F = g_{t_0 \mathbb{Z}} F$. Ce qui implique que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $g_{t_0 k} \pi(v) \in F = \overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))}$, il existe alors une suite (s_n^k) de réels telle que $(h_{s_n^k}(\pi(v))) \rightarrow g_{t_0 k} \pi(v)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Autrement dit $(\pi(\tilde{h}_{s_n^k}(v))) \rightarrow \pi(g_{t_0 k}(v))$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Il existe alors une suite (γ_n^k) de Γ telle que $\gamma_n^k(\vec{V}) = \gamma_n^k(\psi(v)) \rightarrow \psi(g_{t_0 k}(v))$ où ψ est l'application continue définie à la section 2 du chapitre 5. D'après la définition de ψ nous avons $\psi(g_{t_0 k}(v)) = e^{\frac{t_0 k}{2}}(\vec{V})$. Alors $\gamma_n^k(\vec{V}) \rightarrow e^{\frac{t_0 k}{2}}(\vec{V})$. Lorsque $k \rightarrow -\infty$, $\|\gamma_n^k(\vec{V})\| \rightarrow 0$. Par suite d'après le théorème 4.17, $v^+ \in \Lambda_h$ et $\overline{h_{\mathbb{R}}\pi(v)} = \Omega_h$.

□

Proposition 5.8. *Soit Γ un groupe géométriquement infini. Si $\Lambda_{irr} = \bigcup_{i \in I \subset \mathbb{N}} (\Gamma \cdot \xi_i)$, alors pour tout $v \in T^1\mathbb{H}$ tel que $v^+ \in \Lambda_{irr}$, l'adhérence $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))}$ n'est pas $h_{\mathbb{R}}$ -minimal.*

Démonstration :

Comme $v^+ \in \Lambda_{irr}$, l'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ n'est ni fermée, ni dense, et donc il existe $u \in T^1\mathbb{H}$ tel que $\pi(u) \in \overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))} \setminus h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ et $u^+ \notin \Lambda_h$. Deux cas sont possibles :

- soit $u^+ \in \Lambda_p \cup \Lambda_d$ et donc $h_{\mathbb{R}}(\pi(u))$ est fermée. Alors $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))}$ contient un sous-ensemble propre fermé, $h_{\mathbb{R}}$ -minimal. Par suite $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))}$ n'est pas $h_{\mathbb{R}}$ -minimal.
- soit $u^+ \in \Lambda_{irr}$. Supposons que $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))}$ est $h_{\mathbb{R}}$ -minimal. Alors pour tout $\pi(w) \in \overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))}$, on a $w^+ \in \Lambda_{irr}$ et donc $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))} \subset \bigcup_{i \in I} h_{\mathbb{R}} g_{\mathbb{R}} \pi(v_i)$ avec $v_i^+ = \xi_i$, $i \in I$. Puisque $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ est non dense et que son adhérence est $h_{\mathbb{R}}$ -minimale, d'après la proposition 5.7 pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $g_t \overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))} \cap \overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))} = \emptyset$. Il existe alors $J \subset I$, et $w_j \in T^1\mathbb{H}$, $w_j^+ = \xi_j$ tels que $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))} = \bigcup_{j \in J} h_{\mathbb{R}}(\pi(w_j))$.

Adoptons le point de vue vectoriel et considérons l'action de Γ sur \mathbb{E} par dualité. A $h_{\mathbb{R}}(\pi(v)) = \pi(\tilde{h}_{\mathbb{R}}(v))$ nous associons ${}^{\pm}\Gamma\vec{V}$ et à $h_{\mathbb{R}}(\pi(w_j))$ nous associons ${}^{\pm}\Gamma\vec{W}_j$. Nous avons, par dualité ${}^{\pm}\Gamma\vec{V} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma, j \in J} \{ {}^{\pm}\gamma\vec{W}_j \}$. Cet ensemble est un fermé minimal pour l'action de Γ .

Comme $v^+ \notin \Lambda_h$, $\overline{{}^{\pm}\Gamma\vec{V}} \neq \mathbb{E}$ donc il existe un réel $c > 0$ tel que $\|\vec{U}\| > c$, pour tout $\vec{U} \in \overline{{}^{\pm}\Gamma\vec{V}}$. Par suite il existe un ouvert V de $(0,0)$ dans \mathbb{R}^2 tel que $\overline{{}^{\pm}\Gamma\vec{V}} \subset \mathbb{E} \setminus V$. L'ensemble $\overline{{}^{\pm}\Gamma\vec{V}}$ est donc un fermé de $\overline{{}^{\pm}\Gamma\vec{V}} \subset \mathbb{E} \setminus V$. Par suite $(\overline{{}^{\pm}\Gamma\vec{V}}, d)$ est un espace métrique complet où d est la distance euclidienne sur \mathbb{R}^2 , donc $\overline{{}^{\pm}\Gamma\vec{V}}$ est un espace de Baire. Par ailleurs puisque pour tout $j \in J$ et $\gamma \in \Gamma$, $\gamma\vec{W}_j \in \overline{{}^{\pm}\Gamma\vec{V}}$, il existe une suite infinie (γ_n) de Γ telle que $\gamma_n\vec{V}$ converge vers $\gamma\vec{W}_j$. Autrement dit pour tout voisinage U de $\gamma\vec{W}_j$, il existe un entier N tel que pour tout $n > N$, $\gamma_n\vec{V} \in U$. Et donc $\{\gamma\vec{W}_j\}$ est d'intérieur vide dans $\overline{{}^{\pm}\Gamma\vec{V}}$ par la topologie induite. Par suite $\overline{{}^{\pm}\Gamma\vec{v}}$ est une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide donc par la propriété de Baire, $\overline{{}^{\pm}\Gamma\vec{V}}$ est d'intérieur vide. Ceci est impossible car $(\overline{{}^{\pm}\Gamma\vec{V}}, d)$ est un espace complet et donc son intérieur est non vide. D'où $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))}$ n'est pas $h_{\mathbb{R}}$ -minimal.

□

Démonstration du théorème 5.5 :

Le théorème 5.5 est une conséquence immédiate des propositions ci-dessus. En effet si un ensemble $C \subset \Omega_h$ est $h_{\mathbb{R}}$ -minimal alors il existe $v \in T^1\mathbb{H}$ tel que $C = \overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))}$. On sait que l'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ ne peut être dense sinon le flot $h_{\mathbb{R}}$ restreint à Ω_h serait minimal ce qui est impossible car Ω_h contient au moins une orbite non dense d'après le théorème 4.26. L'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ n'est également pas irrégulière d'après la proposition 5.8. D'où l'orbite

$h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ ne peut être que fermée.

□

Il résulte de ce théorème le corollaire suivant qui donne un critère de non-existence d'ensemble $h_{\mathbb{R}}$ -minimal.

Corollaire 5.9. (voir [27], Corollaire 1.1)

Soit S une surface hyperbolique géométriquement infinie. Si aucune trajectoire horocyclique n'est fermée dans l'ensemble non-errant et si l'ensemble des classes d'équivalence des orbites irrégulières est au plus dénombrable, alors le flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ n'admet pas d'ensemble minimal.

Nous allons utiliser ce corollaire pour construire des exemples de surfaces hyperboliques géométriquement infinies dont les flots horocycliques associés restreints à leur ensemble non-errant n'admettent pas d'ensembles $h_{\mathbb{R}}$ -minimaux.

2 Exemples de flots horocycliques sans ensembles minimaux

Dans cette section nous donnons trois exemples de surfaces hyperboliques géométriquement infinies construites de différentes manières, voir section 3 du chapitre 2. Nos deux premiers exemples 2.1 et 2.2 sont respectivement des surfaces hyperboliques de seconde et première espèce avec une seule classe d'orbites irrégulières et le troisième exemple 2.3 est une surface hyperbolique de première espèce, construite par recollement de pantalons hyperboliques avec un nombre infini dénombrable de classes d'orbites irrégulières.

2.1 Groupe de demi-cercles symétriques

Dans cette sous-section nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème 5.10. ([27], Théorème 4.1)

Il existe des groupes fuchsien Γ dont la restriction du flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ sur $\Gamma \backslash T^1 \mathbb{H}$ à son ensemble non-errant Ω_h n'admet pas d'ensemble $h_{\mathbb{R}}$ -minimal. De plus, il existe $\pi(u_0) \in \Omega_h$ tel que

1. $h_{\mathbb{R}}(\pi(u_0))$ n'est pas fermé,
2. $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(u_0))} \subset g_{\mathbb{R}} h_{\mathbb{R}}(\pi(u_0))$
3. $\forall \pi(u) \in \Omega_h - g_{\mathbb{R}} h_{\mathbb{R}}(\pi(u_0)), \overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(u))} = \Omega_h$.

2.1.1 Présentation du groupe

Plaçons nous sur le demi-plan de Poincaré \mathbb{H} et considérons le groupe de demi-cercles symétriques Γ qui résulte de la famille des demi-cercles, $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de centres $c_k = Q^k$ et

de rayons $r_k = \lambda Q^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, $Q > 1$ et $0 < \lambda < \frac{Q-1}{Q+1} < 1$. Les centres $c_k \rightarrow \infty$ et $c_{k+1} - r_{k+1} > c_k + r_k$. Posons $S_{-k} = \sigma(S_k)$ où σ est la réflexion par rapport à l'axe des imaginaires. Pour tout entier relatif k notons par D_k le demi-disque euclidien ouvert de frontière S_k et E_k son complémentaire dans $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$.

Soit h_k l'unique isométrie hyperbolique telle que $h_k(S_k) = S_{-k}$ et $h_k(E_k) = D_k$. Plus précisément

$$h_k(z) = -c_k - \frac{r_k^2}{z - c_k}.$$

Nous remarquons que $h_k^{-1} = h_{-k}$ et S_k est le cercle isométrique de l'élément hyperbolique h_k .

Lemme 5.11. *Le groupe $\Gamma = \langle h_k \rangle_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un groupe fuchsien géométriquement infini purement hyperbolique.*

Démonstration :

Par construction le groupe Γ est géométriquement infini sans torsion. Montrons également qu'il est sans élément parabolique. Soit $\gamma \in \Gamma$ et posons $\gamma = h_{n_1} \dots h_{n_s}$, un mot réduit de γ . Nous pouvons supposer que $h_{n_1} \neq h_{n_s}^{-1}$. Nous avons $\lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma^k(i) \in D_{n_1}$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma^{-k}(i) \in D_{-n_s}$ or $D_{n_1} \cap D_{-n_s} = \emptyset$. Donc γ admet deux points fixes $\lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma^{\pm k}(i) = \gamma^{\pm}$ distincts. Par suite γ est hyperbolique.

□

Proposition 5.12. *L'ensemble $\Delta = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}^*} E_k$ coïncide avec $\Delta_i(\Gamma)$ le domaine de Dirichlet du groupe $\Gamma = \langle h_k \rangle_{k \in \mathbb{Z}^*}$ centré au point i .*

Démonstration :

Remarquons d'abord que pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{Id\}$, $\gamma(i) \neq i$, donc le domaine de Dirichlet centré en i , $\Delta_i(\Gamma)$ est bien défini.

Montrons ensuite que $\Delta_i(\Gamma) \subset \Delta$. Pour cela il suffit de montrer que tout point du cercle isométrique $S_k = \{z \in \mathbb{H} / z = c_k + r_k e^{i\theta}, 0 < \theta < \pi\}$ de l'isométrie hyperbolique h_k est un point de la médiatrice $I_k = \{z \in \mathbb{H} / \frac{|z - h_{-k}(i)|^2}{Im(h_{-k}(i))} = |z - i|^2\}$ du segment géodésique $[i, h_{-k}(i)]$. Nous savons que $h_{-k}(i) = [c_k - \frac{c_k r_k^2}{1+c_k^2}] + i \frac{r_k^2}{1+c_k^2}$ donc pour tout $z \in S_k$ nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{|z - h_{-k}(i)|^2}{Im(h_{-k}(i))} &= \frac{1 + c_k^2}{r_k^2} \left[\left(r_k \cos \theta + \frac{c_k r_k^2}{1 + c_k^2} \right)^2 + \left(r_k \sin \theta - \frac{r_k^2}{1 + c_k^2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1 + c_k^2}{r_k^2} \left[\left(\frac{r_k(1 + c_k^2) \cos \theta + c_k r_k^2}{1 + c_k^2} \right)^2 + \left(\frac{r_k(1 + c_k^2) \sin \theta - r_k^2}{1 + c_k^2} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{1+c_k^2} \left[(1+c_k^2)^2 + r_k^2(1+c_k^2) + 2r_k(1+c_k^2)(c_k \cos \theta - \sin \theta) \right] \\
 &= 1 + c_k^2 + r_k^2 + 2r_k(c_k \cos \theta - \sin \theta) \\
 &= 1 + c_k^2 + r_k^2 \cos^2 \theta + r_k^2 \sin^2 \theta + 2r_k c_k \cos \theta - 2r_k \sin \theta \\
 &= (c_k + r_k \cos \theta)^2 + (r_k \sin \theta - 1)^2 = |z - i|^2.
 \end{aligned}$$

Ainsi $S_k \equiv I_k$ et donc $\Delta_i(\Gamma) \subset \Delta$.

Pour finir remarquons que $\Delta_i(\Gamma)$ n'est pas une partie propre de Δ . En effet si c'était le cas il existerait $z \in \Delta_i(\Gamma)$ et $\gamma \in \Gamma \setminus \{Id\}$ tels que $\gamma(z) \in Int(\Delta)$. Or on sait que $\gamma(z) = h_{k_1} \dots h_{k_n}(z) \in D_{k_1}$ avec $h_{k_1} \dots h_{k_n}$ la forme réduite de γ , ce qui est impossible car $Int(\Delta) \cap D_{k_1} = \emptyset$.

□

Le groupe Γ est également de seconde espèce car il admet par construction des intervalles non-triviaux de discontinuité.

Corollaire 5.13. *Pour tout mot réduit $h_{-k_{p_n}} \dots h_{-k_n}$, la suite des diamètres des disques $D_{p_n;n} = h_{-k_{p_n}} \dots h_{-k_n}(\overline{D_{k_n}})$ tend vers 0.*

Démonstration :

Puisque $D_{p_n;n} = h_{-k_{p_n}} \dots h_{-k_n}(\overline{D_{k_n}}) \subset h_{-k_{p_n-1}} \dots h_{-k_n}(\overline{D_{k_{p_n-1}}}) = D_{p_n-1;n-1}$ alors les disques $D_{p_n;n}$ sont emboîtés. Si la suite des diamètres euclidiens ($diam(D_{p_n;n})$) ne converge pas vers 0, il existe un compact K de \mathbb{H} rencontré par toutes les géodésiques $h_{-k_{p_n}} \dots h_{-k_n}(C_n)$ où C_n est le bord de $D_{p_n;n}$. Les géodésiques C_n sont des côtés de Δ donc les images de ce domaine par $h_{-k_{p_n}} \dots h_{-k_n}$ rencontrent K . Ce qui est impossible car Δ est un domaine de Dirichlet donc localement fini, voir [37].

□

2.1.2 Codage de l'ensemble limite de Γ

Notons par $\mathcal{A} = \{h_k; h_{-k}, k \in \mathbb{N}^*\}$ l'ensemble des générateurs de Γ et leur inverse. Tout élément $g \neq Id$ de Γ s'écrit sous la forme réduite unique $g = h_{k_1} \dots h_{k_p}$ où les $h_{k_j} \in \mathcal{A}$ et $k_{j+1} + k_j \neq 0$ pour tout $0 \leq j \leq p-1$. Il en résulte un codage unique de l'élément g par la suite finie réduite $[k_1, \dots, k_p]$, $k \geq 0$. De la même manière puisque l'infini, ∞ est l'unique point d'accumulation de la famille $(S_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, l'ensemble limite Λ de Γ a un codage simple en termes de suites réduites (finies ou infinies). L'infini, ∞ correspond à la suite vide, tout point $h_{k_1} \dots h_{k_p}(\infty)$ est représenté par une suite finie (k_1, \dots, k_p) et un point ξ de $\Lambda \setminus \Gamma(\infty)$ correspond à une suite infinie (k_1, k_2, \dots) avec $\xi = \lim_{p \rightarrow \infty} h_{k_1} \dots h_{k_p}(i)$. Pour plus de détails

voir la partie 5.1. 2 du chapitre 2. Nous avons la proposition suivante.

Proposition 5.14. *Soient $\xi \in \Lambda$ et $(k_j)_{j \geq 1}$ une suite infinie réduite correspondante. Si l'ensemble des lettres distinctes de la suite $(k_j)_{j \geq 1}$ est finie, alors $\xi \in \Lambda_h$.*

Démonstration :

Soit Γ' le sous-groupe fuchsien engendré par les isométries hyperboliques de la suite $(k_j)_{j \geq 1}$. Par construction Γ' est géométriquement fini, donc $\Lambda(\Gamma') = \Lambda_h(\Gamma')$. Puisque $\Lambda_h(\Gamma') \subset \Lambda_h$ donc $\xi \in \Lambda(\Gamma') \subset \Lambda_h$.

□

2.1. 3 Démonstration du théorème 5.10

Pour démontrer le théorème nous commencerons par rappeler la proposition 3.20 sous forme de lemme puis nous établissons deux autres lemmes.

Lemme 5.15. (3.20)

Un point limite $\xi \neq \infty$ est horocyclique si et seulement s'il existe une suite (γ_n) d'éléments de Γ et une suite (w_n) de points de la géodésique verticale $(\xi; \infty)$ telles que $w_n \rightarrow \xi$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et $\gamma_n(w_n) \notin \mathcal{O}_{\gamma_n(\xi)}^+(i)$.

Lemme 5.16. *Le point ∞ n'est pas un point limite horocyclique.*

Démonstration :

Remarquons d'abord que si le point $\infty \in \Lambda_h$, alors il existe une suite (γ_n) d'éléments de Γ telle que $Im(\gamma_n(i)) \rightarrow +\infty$. Montrons que pour toute isométrie $\gamma \in \Gamma$, nous avons $Im(\gamma(i)) \leq 1$. Soit $\gamma \neq Id$ et $\gamma = h_{k_1} \dots h_{k_p}$ son écriture réduite. Nous savons que pour tout $h_k \in \mathcal{A}$, $h_k(i) \in D_{-k}$ et $|h'_k(i)| < 1$. De même $h_{k_j} \dots h_{k_l}(i) \in D_{-k_j} \subset E_{k_{j-1}}$ et $|(h_{k_{j-1}})'[h_{k_j} \dots h_{k_l}(i)]| \leq 1$, pour tout $1 \leq j \leq l \leq p$. Ainsi nous avons

$$|\gamma'(i)| = |(h_{k_1} \dots h_{k_p})'(i)| = |h'_{k_p}(i) \times (h_{k_{p-1}})'(h_{k_p}(i)) \times \dots \times (h_{k_1})'(h_{k_2} \dots h_{k_p}(i))| \leq 1.$$

Remarquons également que $|g'(i)| = Im(g(i))$ pour toute isométrie positive g telle que $g(\infty) \neq \infty$. Par conséquent $Im(\gamma(i)) \leq 1$. D'où $\infty \notin \Lambda_h$.

□

Lemme 5.17. *Il existe $\delta > 0$ tel que quelque soit deux demi-cercles différents S_p et S_q , si le demi-cercle S_q et l'horocycle $\mathcal{O}_\eta(i)$ avec $\eta \in [c_p - r_p; c_p + r_p]$ sont sécants alors*

$$(Int(\mathcal{O}_\eta(i)) \cap D_q) \subset \{z \in \mathbb{H} : Imz \geq \delta\}.$$

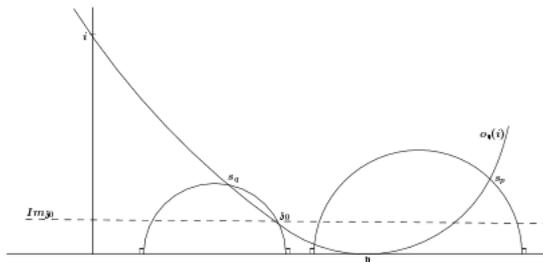


FIGURE 5.1 – Position de deux disques et d'un horocycle

Démonstration :

Soit $z_0 \in \mathbb{H}$ le point d'intersection de $\mathcal{O}_\eta(i)$ et de S_q dont la partie imaginaire est la plus petite. Nous avons :

$$\begin{cases} z_0 \in S_q \Rightarrow z_0 = c_q + r_q e^{i\theta}, & \text{avec } 0 < \theta < \pi \text{ et } \theta \neq \frac{\pi}{2}, \\ z_0 \in \mathcal{O}_\eta(i) \Rightarrow \text{Im} z_0 = \frac{|z_0 - \eta|^2}{1 + \eta^2}. \end{cases} \quad \text{ce qui donne :}$$

$$\text{Im} z_0 = \frac{|c_q + r_q e^{i\theta} - \eta|^2}{1 + \eta^2} = \frac{(c_q - \eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q - \eta) \cos \theta}{1 + \eta^2}$$

– Supposons $p > 0$. Dans ce cas nous avons $0 < c_p - r_p \leq \eta \leq c_p + r_p$ et par suite :

$$\frac{1}{1 + \eta^2} \geq \frac{1}{1 + (c_p + r_p)^2} \geq \frac{1}{Q^{2p}[1 + (1 + \lambda)^2]}$$

car $Q > 1$, $c_p = Q^p$ et $r_p = \lambda Q^p$.

• Si $0 < q < p$, alors nous avons $0 < c_q - r_q < c_q + r_q < c_p - r_p \leq \eta \leq c_p + r_p$ et $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Donc

$$(c_q - \eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q - \eta) \cos \theta \geq (c_q - \eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q - \eta) \geq [(c_p - r_p) - (c_q + r_q)]^2$$

$$\Rightarrow (c_q - \eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q - \eta) \cos \theta \geq Q^{2p}[(1 - \lambda) - (1 + \lambda)Q^{q-p}]^2$$

$$\Rightarrow (c_q - \eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q - \eta) \cos \theta \geq Q^{2p}[(1 - \lambda) - (1 + \lambda)Q^{-1}]^2$$

car $q - p \in]-\infty; -1]$ et $Q > 1$.

Et il s'en suit que :

$$\text{Im} z_0 \geq \frac{[(1 - \lambda) - (1 + \lambda)Q^{-1}]^2}{1 + (1 + \lambda)^2} = \delta_1.$$

• Si $0 < p < q$, alors nous avons $0 < c_p - r_p \leq \eta \leq c_p + r_p < c_q - r_q < c_q + r_q$ et $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. Donc

$$\begin{aligned}
 (c_q - \eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q - \eta) \cos \theta &\geq (c_q - \eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q - \eta) \geq [(c_q - r_q) - (c_p + r_p)]^2 \\
 \Rightarrow (c_q - \eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q - \eta) \cos \theta &\geq Q^{2p}[(1 - \lambda)Q^{q-p} - (1 + \lambda)]^2 \\
 \Rightarrow (c_q - \eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q - \eta) \cos \theta &\geq Q^{2p}[(1 - \lambda)Q - (1 + \lambda)]^2
 \end{aligned}$$

car $q - p \in [1; +\infty[$ et $Q > 1$.

Et il s'en suit que :

$$Imz_0 \geq \frac{[(1 - \lambda)Q - (1 + \lambda)]^2}{1 + (1 + \lambda)^2} = \delta_2.$$

• Si $q < 0 < p$, alors nous avons $c_q - r_q < c_q + r_q < 0 < c_p - r_p \leq \eta \leq c_p + r_p$ et $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Donc

$$\begin{aligned}
 (c_q - \eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q - \eta) \cos \theta &\geq (c_q - \eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q - \eta) \geq [(c_p - r_p) - (c_q + r_q)]^2 \\
 \Rightarrow (c_q - \eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q - \eta) \cos \theta &\geq Q^{2p}(1 - \lambda)^2(1 + Q^{-p-q})^2 \\
 \Rightarrow (c_q - \eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q - \eta) \cos \theta &\geq Q^{2p}(1 - \lambda)^2.
 \end{aligned}$$

Et il s'en suit que :

$$Imz_0 \geq \frac{(1 - \lambda)^2}{1 + (1 + \lambda)^2} = \delta_3.$$

– Supposons $p < 0$. Dans ce cas nous obtenons des inégalités similaires à celles précédentes. Nous avons $c_p - r_p \leq \eta \leq c_p + r_p < 0$ et par suite :

$$\frac{1}{1 + \eta^2} \geq \frac{1}{1 + (c_p - r_p)^2} \geq \frac{1}{Q^{-2p}[1 + (1 + \lambda)^2]}$$

car $Q > 1$, $c_p = -Q^{-p}$ et $r_p = \lambda Q^{-p}$.

• Si $p < q < 0$, alors nous avons $c_p - r_p \leq \eta \leq c_p + r_p < c_q - r_q < c_q + r_q < 0$ et $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. Donc

$$\begin{aligned}
 (c_q - \eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q - \eta) \cos \theta &\geq (c_q - \eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q - \eta) \geq [(c_q - r_q) - (c_p + r_p)]^2 \\
 \Rightarrow (c_q - \eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q - \eta) \cos \theta &\geq Q^{-2p}[(1 - \lambda) - (1 + \lambda)Q^{p-q}]^2 \\
 \Rightarrow (c_q - \eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q - \eta) \cos \theta &\geq Q^{-2p}[(1 - \lambda) - (1 + \lambda)Q^{-1}]^2
 \end{aligned}$$

car $p - q \in]-\infty; -1]$ et $Q > 1$.

Et il s'en suit que :

$$Imz_0 \geq \frac{[(1-\lambda) - (1+\lambda)Q^{-1}]^2}{1 + (1+\lambda)^2} = \delta_1.$$

• Si $q < p < 0$, alors nous avons $c_q - r_q < c_q + r_q < c_p - r_p \leq \eta \leq c_p + r_p < 0$ et $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Donc

$$\begin{aligned} (c_q - \eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q - \eta) \cos \theta &\geq (c_q - \eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q - \eta) \geq [(c_p - r_p) - (c_q + r_q)]^2 \\ &\Rightarrow (c_q - \eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q - \eta) \cos \theta \geq Q^{-2p}[(1-\lambda)Q^{p-q} - (1+\lambda)]^2 \\ &\Rightarrow (c_q - \eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q - \eta) \cos \theta \geq Q^{2p}[(1-\lambda)Q - (1+\lambda)]^2 \end{aligned}$$

car $p - q \in [1; +\infty[$ et $Q > 1$.

Et il s'en suit que :

$$Imz_0 \geq \frac{[(1-\lambda)Q - (1+\lambda)]^2}{1 + (1+\lambda)^2} = \delta_2.$$

• Si $p < 0 < q$, alors nous avons $c_p - r_p \leq \eta \leq c_p + r_p < 0 < c_q - r_q < c_q + r_q$ et $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. Donc

$$\begin{aligned} (c_q - \eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q - \eta) \cos \theta &\geq (c_q - \eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q - \eta) \geq [(c_q - r_q) - (c_p + r_p)]^2 \\ &\Rightarrow (c_q - \eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q - \eta) \cos \theta \geq Q^{-2p}(1-\lambda)^2(1 + Q^{-p-q})^2 \\ &\Rightarrow (c_q - \eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q - \eta) \cos \theta \geq Q^{-2p}(1-\lambda)^2. \end{aligned}$$

Et il s'en suit que :

$$Imz_0 \geq \frac{(1-\lambda)^2}{1 + (1+\lambda)^2} = \delta_3.$$

Posons $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, nous obtenons $Imz_0 \geq \delta$. Comme pour tout $z \in Int(\mathcal{O}_\eta(i)) \cap D_q$, $Imz_0 \leq Imz$, alors nous avons : $Int(\mathcal{O}_\eta(i)) \cap D_q \subset \{z \in \mathbb{H} : Imz \geq \delta\}$.

□

Démonstration du théorème 5.10 :

Nous allons montrer que l'ensemble limite Λ de Γ se décompose comme suit : $\Lambda = \Lambda_h \cup \Lambda_{irr}$ et $\Lambda_{irr} = \Gamma.\infty$.

Montrons que $\infty \in \Lambda_{irr}$. Puisque les $c_k \rightarrow +\infty$ alors $\infty \in \Lambda$. Par ailleurs Γ ne contient pas d'isométrie parabolique et $\lim_{k \rightarrow \infty} (Imh_k(i)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_k^2}{1+c_k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{r_k}{c_k})^2 = \lambda^2 \neq 0$ donc $\infty \notin \Lambda_p \cup \Lambda_d$. Nous avons également $\infty \notin \Lambda_h$ d'après le lemme 5.16. D'où ∞ est un point limite irrégulier puisque $\Lambda_{irr} = \Lambda \setminus (\Lambda_h \cup \Lambda_p \cup \Lambda_d)$.

Montrons maintenant que tout $\xi \in \Lambda \setminus \Gamma(\infty)$ est un point limite horocyclique. Puisque ξ n'est pas sur l'orbite de l'infini alors il est codé par une suite réduite infinie, (k_1, k_2, \dots) . Puisque $\Lambda_p = \emptyset$, si la suite (k_1, k_2, \dots) contient un nombre fini d'éléments distincts alors $\xi \in \Lambda_h$ d'après la proposition 5.14. Si la suite (k_1, k_2, \dots) contient une infinité d'éléments distincts il existe alors une suite d'entiers (p_n) telle que $k_{p_n} \in (k_1, k_2, \dots)$ et $p_n \rightarrow +\infty$. Quitte à extraire une sous-suite nous pouvons supposer que la suite (p_n) est telle que $n \leq p_n$. Pour tout entier n , soit un point

$$w_n \in h_{k_1} \dots h_{k_{n-2}}(\Delta) \cap (\xi; \infty).$$

Nous avons, $w_n \rightarrow \xi$, lorsque $n \rightarrow +\infty$. Posons $\gamma_n = [-k_{p_{n-1}}, \dots, -k_1]$, alors $\gamma_n(\xi) = (k_{p_n}, \dots) \in \overline{D_{-k_{p_n}}}$ et $\gamma_n(w_n) \in h_{-k_{p_{n-1}}} \dots h_{-k_{n-1}}(\Delta) \subset h_{-k_{p_{n-1}}} \dots h_{-k_n}(\overline{D_{k_{n-1}}}) \subset D_{k_{p_{n-1}}}$.

Posons $D_{p_{n-1}; n-1} = h_{-k_{p_{n-1}}} \dots h_{-k_n}(\overline{D_{k_{n-1}}})$ et montrons que

$$D_{p_{n-1}; n-1} \cap \mathcal{O}_{\gamma_n(\xi)}^+(i) = \emptyset.$$

Si le demi-cercle $S_{k_{p_{n-1}}}$ et l'horocycle $\mathcal{O}_{\gamma_n(\xi)}(i)$ sont disjoints ou tangents alors

$$D_{p_{n-1}; n-1} \cap \mathcal{O}_{\gamma_n(\xi)}^+(i) = \emptyset$$

.

Si le demi-cercle $S_{k_{p_{n-1}}}$ et l'horocycle $\mathcal{O}_{\gamma_n(\xi)}(i)$ sont sécants, alors d'après le lemme 5.17

$$D_{p_{n-1}; n-1} \cap \mathcal{O}_{\gamma_n(\xi)}^+(i) \subset \{z \in \mathbb{H} : \text{Im}z \geq \delta\}.$$

Par ailleurs d'après le lemme 5.13 la suite des diamètres euclidiens ($\text{diam}(D_{p_{n-1}; n-1})$) tend vers 0, donc pour n assez grand, $\text{diam}(D_{p_{n-1}; n-1}) < \delta$ et alors $D_{p_{n-1}; n-1} \cap \mathcal{O}_{\gamma_n(\xi)}^+(i) = \emptyset$. Ce qui implique que $\gamma_n(w_n) \notin \mathcal{O}_{\gamma_n(\xi)}^+(i)$, pour tout n . D'où d'après le lemme 5.15, $\xi \in \Lambda_h$. Finalement nous avons $\Lambda_{irr} = \Gamma(\infty)$ et $\Lambda \setminus \Gamma(\infty) = \Lambda_h$ et donc d'après le section 3 du chapitre 4, l'ensemble non-errant Ω_h est constitué d'orbites denses et d'une seule classe d'orbites horocycliques irrégulières. Le reste du théorème 5.10 résulte du corollaire 5.9.

□

Il résulte de la démonstration ci-dessus et de la correspondance entre la nature des points de l'ensemble limite Λ et celle des orbites de Ω_h que pour tout $\pi(u) \in T^1S$

1. ou bien $h_{\mathbb{R}}(\pi(u))$ est fermée et $\pi(u)$ n'appartient pas à Ω_h ,
2. ou bien $h_{\mathbb{R}}(\pi(u))$ est dense dans Ω_h ,
3. ou bien $h_{\mathbb{R}}(\pi(u))$ n'est pas fermée et son adhérence $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(u))} \subset g_{\mathbb{R}}h_{\mathbb{R}}(\pi(u))$.

Nous avons ainsi une classification complète des orbites du flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$.

2.2 Surface cannelée

Cet exemple propose les outils qui servent à établir le théorème 5.29 de la sous-section suivante. Précisons tout d'abord que dans cette sous-section et la suivante les recollements de surfaces hyperboliques sont faits suivant le procédé décrit dans la sous-section 3.2 du chapitre 2. Rappelons maintenant qu'une surface cannelée est obtenue par recollement d'une infinité de pantalons hyperboliques $\{P_n\}$, voir la sous-section 5.2 du chapitre 2. Un pantalon P_n s'obtient par le recollement de deux hexagones \mathcal{H}_n^\pm isométriques.

Tout au long de cette sous-section un pantalon hyperbolique P_n est défini par les paramètres (l_n, l'_n, l_n) qui sont les longueurs de ses composantes à bord géodésiques. Les poignets du pantalon P_n sont les composantes à bord, nous les notons c_n, c'_n et α_n de longueurs respectives l_n, l'_n et l_n , voir la section 4 du chapitre 2.

2.2.1 Temps perdu lorsqu'on traverse un pantalon hyperbolique

Commençons par définir une fonction qui évalue le temps perdu par un rayon géodésique sur une surface hyperbolique. Cette *fonction de perte de temps* permet de classer les différents rayons géodésiques sur une surface hyperbolique.

Définition 5.18. (*Perte de temps - rayons quasi-minimisant*)

Soient S une surface hyperbolique, $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow S$ un rayon géodésique paramétrisé par unité de longueur d'arc et Δ_α la fonction définie par

$$\Delta_\alpha(t) = t - d(\alpha(t), \alpha(0)).$$

Le rayon α est dit **non quasi-minimisant** si la fonction $\Delta_\alpha(t)$ n'est pas bornée, sinon le rayon α est dit **quasi-minimisant**.

Un élément $\pi(v)$ de T^1S est dit non quasi-minimisant respectivement quasi-minimisant si le rayon géodésique défini par $\pi(v)$ est non quasi-minimisant respectivement quasi-minimisant.

Lorsque le rayon α est quasi-minimisant il y'a trois possibilités :

Définition 5.19. Soit un rayon géodésique $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow S$, paramétrisé par unité de longueur d'arc.

- si $\Delta_\alpha(t) = 0$, α est dit **minimisant**,
- s'il existe un réel $t_0 > 0$, tel que $\alpha|_{[t_0, +\infty[}$ est minimisant, α est dit **pré-minimisant**,
- si $\alpha|_{[t, +\infty[}$ n'est pas minimisant pour tout $t > 0$, α est dit **rigide**.

Un rayon non quasi-minimisant comme un rayon quasi-minimisant peuvent être infinis c'est-à-dire ils peuvent traverser un bout infini. La manière dont un rayon géodésique infini

part à l'infini dépend de la géométrie de la surface.

Le théorème fondamental suivant, dû à Eberlein [22], relie la nature d'un rayon géodésiques d'une surface hyperbolique à celle de l'extrémité de l'un de ses relevés sur le plan hyperbolique.

Théorème 5.20. *Soient la projection $\pi : \mathbb{H} \rightarrow S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$, $\xi \in \partial \mathbb{H}$ et α un rayon géodésique orienté dont un des relevés $\tilde{\alpha}$ est tel que $\tilde{\alpha}(+\infty) = \xi$. Le point ξ n'est pas un point limite horocyclique si et seulement si α est un rayon géodésique quasi-minimisant.*

Démonstration :

Supposons que $\xi \notin \Lambda_h$. Il existe alors un réel $A \geq 0$ tel que $\beta_\xi(\tilde{\alpha}(0), \gamma(\tilde{\alpha}(0))) \leq A$, pour tout $\gamma \in \Gamma$. Autrement dit

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [t - d(\tilde{\alpha}(t), \gamma(\tilde{\alpha}(0)))] \leq A$$

Puisque la fonction f est croissante alors pour tout $t \geq 0$,

$$t - d(\tilde{\alpha}(t), \gamma(\tilde{\alpha}(0))) \leq A \Rightarrow \forall \gamma \in \Gamma \text{ et } \forall t \geq 0, t - d(\tilde{\alpha}(t), \gamma(\tilde{\alpha}(0))) \leq A.$$

$$\Rightarrow t - \inf_{\gamma \in \Gamma} d(\tilde{\alpha}(t), \gamma(\tilde{\alpha}(0))) \leq A \Rightarrow t - d_S(\alpha(t), \alpha(0)) \leq A \Rightarrow \forall t \geq 0 \Delta_\alpha(t) \leq A.$$

C'est-à-dire le rayon α est quasi-minimisant.

Supposons que le rayon α est quasi-minimisant. Ce qui implique

$$\exists A \geq 0 / \forall t \geq 0 \Delta_\alpha(t) = t - d_S(\alpha(t), \alpha(0)) \leq A.$$

$$\Rightarrow \exists A \geq 0 \forall t \geq 0 t - \inf_{\gamma \in \Gamma} d(\tilde{\alpha}(t), \gamma(\tilde{\alpha}(0))) \leq A.$$

$$\Rightarrow t - d(\tilde{\alpha}(t), \gamma(\tilde{\alpha}(0))) \leq A, \forall \gamma \in \Gamma \Rightarrow \beta_\xi(\tilde{\alpha}(0), \gamma(\tilde{\alpha}(0))) \leq A \Rightarrow \xi \notin \Lambda_h.$$

□

Soit une surface cannelée S la proposition suivante évalue le temps perdu par une géodésique σ qui tourne sur un pantalon P_n de cette surface.

Proposition 5.21. *Soit σ un rayon géodésique qui traverse un pantalon P_n d'une surface hyperbolique S en entrant au temps t_1 en c_n et en sortant au temps $t_2 > t_1$ coupant α_n , voir la figure 5.2. Si σ tourne (change de face) au moins une fois entre les instants t_1 et t_2 , alors il perd un temps au moins égal à $\frac{l_n}{2}$, c'est-à-dire : $\Delta_\sigma(t_1, t_2) = t_2 - t_1 - d(\sigma(t_1), \sigma(t_2)) \geq \frac{l_n}{2}$.*

Démonstration :

Cette preuve est inspirée de celle du lemme 7 de [30].

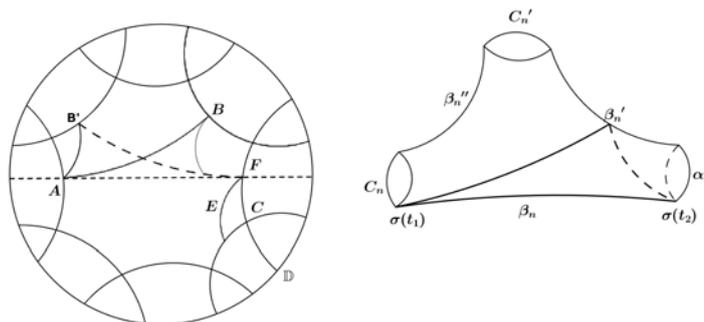


FIGURE 5.2 – Temps perdu par une géodésique sur un pantalon

Soient les géodésiques fermées c_n , c'_n et α_n qui bordent le pantalon P_n de longueurs respectives l_n , l'_n et l_n et β_n l'orthogonale commune à c_n et α_n aux points respectifs A et C . Nous noterons par β'_n et β''_n les deux autres orthogonales communes aux géodésiques fermées frontières de P_n , voir figure 5.2

Soit σ la géodésique qui pénètre dans P_n par c_n en A au temps t_1 et ressort de P_n par α_n en C au temps t_2 . Si la géodésique σ tourne au moins une fois alors elle rencontre β'_n ou β''_n , se retrouve sur l'autre face de P_n avant de sortir par α_n . Ces deux possibilités sont équivalentes en termes de temps perdu par σ dans P_n . Notons respectivement par B et F les points d'intersection de β'_n avec σ et α_n , voir figure 5.2. Soit E le projeté orthogonal de B sur β_n , voir la figure 5.2. Passons au relevé de P_n dans \mathbb{H} et gardons les même notations pour les relevés des points et des géodésiques. Posons $BE = q = \ln(k)$ et $BF = s$ et montrons d'abord que $AB - AE > \ln(\cosh(q))$. Sans perdre de généralités nous posons $E = i$, $B = ki$ et $A = s + it$ avec $p^2 + t^2 = 1$ et $p, t \in (0, 1)$.

La formule standard de la distance entre deux points z et w de \mathbb{H} , voir le chapitre 1 la formule 1.5 :

$$d(z, w) = \ln \left[\frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right] \quad \text{donne}$$

$$f(t) := AB - AE = \ln \left[\frac{1 + k^2 + \sqrt{1 + k^4 + 2k^2(1 - 2t^2)}}{2k(1 + \sqrt{1 - t^2})} \right].$$

Nous avons :

$$f'(t) = \frac{1}{t} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} - \frac{1 + k^2}{\sqrt{1 + k^4 + 2k^2(1 - 2t^2)}} \right] > 0 \quad \text{pour } 0 < t < 1.$$

Le minimum de f est atteint à $t = 0$ et est égal à $\ln(\frac{k^2+1}{2k}) = \ln(\cosh(q))$. Par suite $AB - AE > \ln(\cosh(q))$.

Nous montrons de la même manière que $CB - CE > \ln(\cosh(q))$. Et ainsi

$$AB + BC > AE + EC + 2 \ln(\cosh(q)) > AC + 2 \ln(\cosh(q)).$$

Puisque l'angle géométrique \widehat{ABC} est aigu alors le point E est entre les points A et C . Du quadrilatère à trois angles droits $EBFC$ nous obtenons voir le théorème 1.39 :

$$g(s) := \cosh(q) = \sqrt{1 + (\sinh(\frac{l_n}{2}) \cosh(s))^2}.$$

Nous avons :

$$g'(s) = \frac{\sinh^2(\frac{l_n}{2}) \sinh(s) \cosh(s)}{\sqrt{1 + (\sinh(\frac{l_n}{2}) \cosh(s))^2}} > 0.$$

Le minimum de g est atteint à $s = 0$ et est égal à $\sqrt{1 + \sinh^2(\frac{l_n}{2})}$.

Finalement nous avons $AB + BC - AC > \ln(1 + \sinh^2(\frac{l_n}{2})) = \ln(\cosh(l_n)) \geq \frac{l_n}{2}$ et puisque $t_2 - t_1 = AB + BC$ et $d(\sigma(t_1), \sigma(t_2)) = AC$, nous avons $\Delta_\sigma(t_1, t_2) = t_2 - t_1 - d(\sigma(t_1), \sigma(t_2)) \geq \frac{l_n}{2}$.

□

2.2.2 Surface cannelée sans ensemble $h_{\mathbb{R}}$ -minimal

Les deux méthodes de construction d'une surface hyperbolique exposées à la section 3 du chapitre 2 sont légèrement différentes. La première méthode requiert d'un groupe fuchsien Γ agissant sur \mathbb{H} et ne dépend pas d'un choix d'un domaine fondamental de Γ . Par contre, la deuxième méthode requiert simplement un polygone \mathcal{P} avec un ensemble d'applications appariantes et ne nécessite pas d'un groupe fuchsien Γ pour lequel \mathcal{P} est un polygone fondamental. Dans la suite nous combinons les deux méthodes de construction : le polygone \mathcal{P} est un domaine fondamental du groupe Γ et l'ensemble d'applications appariantes de \mathcal{P} engendre le groupe Γ .

a) Brique de construction :

Commençons par la construction d'un pantalon de référence P_1 de composantes à bord α_1 , α et α_2 . Le pantalon P_1 s'obtient à partir de deux hexagones hyperboliques à angles droits \mathcal{H}_1^\pm isométriques construits sur la figure 5.3. On se place sur \mathbb{H} et on construit deux cercles C_k , $k = 1, 2$ disjoints de rayons r_k et de centres $x_k = 3r_k$ tels que $0 < x_1 < x_2$ et $x_1 - r_1 > 0$. Soient L l'axe des imaginaires de \mathbb{H} et $\tilde{\alpha}_1$ la géodésique perpendiculaire à L et C_1 respectivement aux points z_1 et z_2 . On pose $d(z_1, z_2) = \frac{l_1}{2}$. De la même manière on désigne d'un côté par $\tilde{\alpha}$ la géodésique perpendiculaire à C_1 et C_2 et de l'autre par $\tilde{\alpha}_2$ la

géodésique perpendiculaire à C_2 et L , voir la figure 5.3. On pose

$$d(z_3, z_4) = \frac{l_2}{2} \text{ avec } z_3 \in C_1 \text{ et } z_4 \in C_2,$$

$$d(z_5, z_6) = \frac{l_3}{2} \text{ avec } z_5 \in C_2 \text{ et } z_6 \in L.$$

On obtient l'hexagone \mathcal{H}_1^+ de frontière L , $\tilde{\alpha}_1$, C_1 , $\tilde{\alpha}$, C_2 et $\tilde{\alpha}_2$. On pose $\mathcal{H}_1^- = \eta\left(\mathcal{H}_1^+\right)$ où η est la réflexion par rapport à l'axe des imaginaires L .

Soient η_1 et η_2 les réflexions respectives par rapports aux géodésiques C_1 et C_2 . Posons

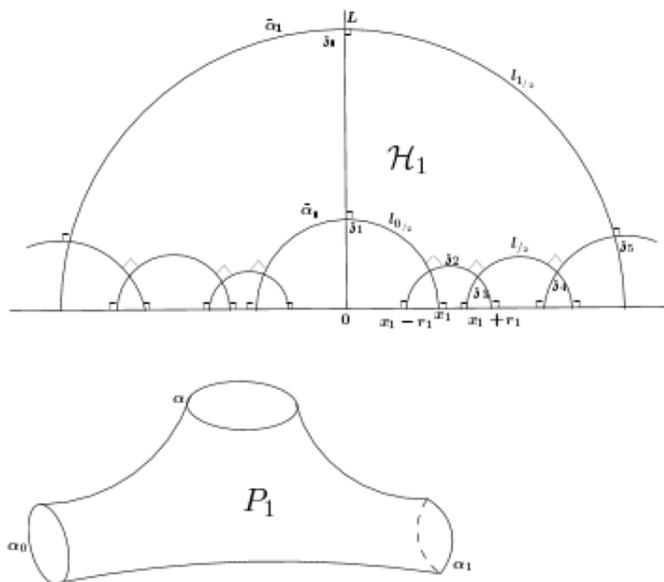


FIGURE 5.3 – Brique de construction

$h_1 = \eta \circ \eta_2$ et $h_2 = \eta \circ \eta_1$, nous avons $P_1 = \Gamma_1 \backslash \mathbb{H}$ où $\Gamma_1 = \langle h_1, h_2 \rangle$. Pour tout $k = 1, 2$, la géodésique $\tilde{\alpha}_k$ est l'axe de translation de l'isométrie hyperbolique h_k . La projection sur P_1 de l'axe $\tilde{\alpha}_k$ est librement homotope au bord α_k . Le cercle C_k de rayon et centre euclidiens r_k et $x_k = 3r_k$ est le cercle isométrique de l'isométrie hyperbolique h_k . Pour tout $k = 1, 2$, l'isométrie h_k s'écrit $h_k(z) = \frac{-c_k z + c_k^2 - r_k^2}{z - c_k}$ et la trace de h_k en valeur absolue est égale à 6. Par suite les isométries h_k sont conjuguées à l'isométrie $z \mapsto 6z$ et donc $l_1 = l_3$.

Dans la suite nous désignerons les longueurs des composantes à bord α_1 , α et α_2 du pantalon P_1 respectivement par l , l' et l .

b) Construction d'une surface cannelée :

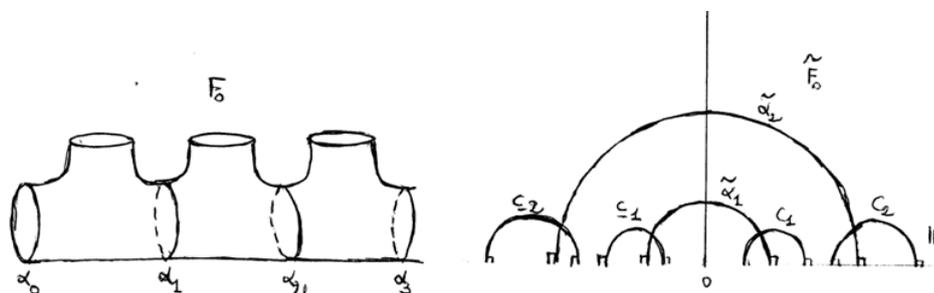
Construisons une surface cannelée, notée S_0 , en deux étapes :

- 1^{er} étape : on recolle de la gauche vers la droite une infinité de pantalons hyperboliques $(P_n)_{n \geq 1}$ isométriques à P_1 de composantes à bord $(\alpha_1^n, \alpha^n, \alpha_2^n)$ respectivement isométriques aux composantes $(\alpha_1, \alpha, \alpha_2)$ de telle sorte que $P_n \cap P_{n+1}$ est la géodé-

sique fermée de longueur $l_n = l$. Soit h_n l'isométrie hyperbolique d'axe la géodésique $\tilde{\alpha}_n$ perpendulaire à l'axe des réels dont la projection sur S_0 est librement homotope à α_n . Les géodésiques $\tilde{\alpha}_n$ forment une suite emboîtée, voir figure 5.4. On note C_n le cercle isométrique de l'isométrie h_n de rayon euclidien r_n et centre $x_n = 3r_n$.

On obtient une surface hyperbolique géométriquement infinie, purement hyperbolique avec un nombre infini dénombrable de bouts fini et un unique bout infini. Nous noterons cette surface par F_0 et nous l'appellerons la *colonne vertébrale* de la surface S_0 .

- 2^e étape : on bouche les trous de la surface F_0 par des surfaces compactes. Plus précisément on recolle sur les bouts circulaires des pantalons P_n des surfaces compactes à courbure -1 difféomorphes au tore privé d'un disque, voir figure 5.5.



devant et de derrière de la surface cannelée F_0 : les fermetures des composantes connexes de $F_0 - \text{Fix}_{F_0}(h)$.

d) Rayons quasi-minimisants de la surface cannelée S_0 :

Analysons les rayons géodésiques quasi-minimisants qui vont vers le bout infini de la surface S_0 . Nous commençons par rappeler sous forme de propositions quelques propriétés des rayons géodésiques quasi-minimisants d'une surface cannelée quelconque en particulier de la surface S_0 . Pour les démonstrations de ces propositions nous renvoyons à [29].

Proposition 5.22. (voir [29], Lemme 2.1 et Théorème 2.1)

Le rayon géodésique β est un rayon minimisant. En plus tout rayon minimisant qui va vers l'unique bout infini de S_0 est asymptotique à β .

Proposition 5.23. (voir [29], Théorème 3.2)

Soit $\sigma : [0, +\infty[\rightarrow S_0$ un rayon géodésique quasi-minimisant infini (qui va vers l'unique bout infini de S_0). Alors il existe $N > 0$, tel que pour tout $n > N$, σ rencontre α_n exactement en un seul point.

Proposition 5.24. (voir [29], Théorème 3.3)

Soit σ un rayon géodésique pré-minimisant ou rigide qui va vers l'unique bout infini de S_0 . Alors il existe un rayon minimisant α de S_0 tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $T_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t > T_\varepsilon$, $\sigma(t)$ appartient au ε -voisinage de α .

Soit $\sigma : [0, +\infty)$ un rayon géodésique quasi-minimisant. Notons par t_{n-1} le temps d'entrée pour la première fois de σ dans le pantalon P_n et t_n le temps de sortie pour la dernière fois de σ du pantalon P_n . Soit $\{P_{n_k}\}_{k \in \mathbb{K} \subset \mathbb{N}}$ est la famille des pantalons sur lesquelles le rayon σ tourne éventuellement. D'après la proposition 5.21 nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\Delta_\sigma = (t_n - t_{n-1}) - d(\sigma(t_n), \sigma(t_{n-1})) \leq \frac{l}{2}.$$

Ce qui implique que

$$\Delta_\sigma = t - d(\sigma(0), \sigma(t)) \leq \sum_{k \in \mathbb{K} \subset \mathbb{N}} \frac{l}{2}.$$

Il résulte des propositions ci-dessus que si σ est un rayon géodésique quasi-minimisant qui va vers l'unique bout infini de S_0 alors il existe un temps t_0 à partir duquel la géodésique reste dans la colonne vertébrale F_0 de la surface S_0 et ne traverse pas les cols des pantalons P_n . Ainsi sur la surface S_0 les trois catégories de rayons géodésiques quasi-minimisants de la définition 5.19, si elles existent sur S_0 , peuvent être identifiées selon le nombre de fois dont ils tournent sur les pantalons P_n :

- ceux qui ne tournent sur aucun pantalon, ce sont les rayons géodésiques minimisants de S_0 ,

- ceux qui tournent sur un nombre fini de pantalons, ce sont les rayons géodésiques pré-minimisants et
- ceux qui tournent sur une infinité de pantalons, ce sont les rayons géodésiques rigides.

e) L'inexistence d'ensembles $h_{\mathbb{R}}$ -minimaux sur T^1S_0 :

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 5.25. *Le flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ sur le fibré unitaire tangent T^1S_0 n'admet pas d'ensemble minimal.*

La démonstration de la proposition 5.25 fait intervenir les trois lemmes suivants.

Lemme 5.26. *Tout rayon géodésique quasi-minimisant σ de S_0 est soit minimisant ou pré-minimisant (ie non-rigide).*

Démonstration :

Soient σ un rayon quasi-minimisant de S_0 et $\{P_{k_j}\}_{j \in J \subset \mathbb{N}}$ la famille des pantalons de S_0 sur lesquelles tourne le rayon σ . D'après la proposition 5.21 lorsque σ tourne sur P_{k_j} il perd un temps au moins égal à $\frac{l_{k_j}}{2} = \frac{l}{2}$, nous avons donc $\Delta_{\sigma}(t) = t - d(\sigma(t), \sigma(0)) \geq \sum_{j \in J} (\frac{l_{k_j}}{2}) = \sum_{j \in J} (\frac{l}{2})$. La partie J de \mathbb{N} est fini sinon $\Delta_{\sigma}(t)$ serait non-bornée ce qui est impossible car σ est quasi-minimisant. Autrement dit le rayon σ est pré-minimisant ou minimisant.

□

Considérons le rayon minimisant β , la géodésique qui suit la partie inférieure des pantalons de S_0 et montrons que tous les rayons géodésiques infinis quasi-minimisants de S_0 sont asymptotes.

Lemme 5.27. *Tout rayon géodésique infini quasi-minimisant σ de S_0 est asymptote à β .*

Démonstration :

Puisque d'après le lemme 5.26 tout rayon quasi-minimisant est minimisant ou pré-minimisant c'est-à-dire minimisant à partir d'un certain temps t_0 nous pouvons supposer, quitte à changer l'origine du rayon, que le rayon σ est minimisant. Dans ce cas, puisque σ ne tourne plus et va vers l'unique bout infini de S_0 alors il ne coupe pas les bords β'_n et β_n des pantalons P_n . Un relevé $\tilde{\sigma}$ d'un tel rayon est un rayon géodésique de \mathbb{H} qui ne coupent que les axes $\tilde{\alpha}_n$. Donc $\tilde{\sigma}$ a pour extrémité ∞ . Par suite β et σ sont asymptotes.

□

Enonçons notre dernier lemme qui donne la nature des extrémités des relevés des rayons quasi-minimisants.

Lemme 5.28. *L'extrémité $\tilde{\beta}(+\infty)$ d'un relevé du rayon β est un point limite irrégulier.*

Démonstration :

Soient Γ le groupe fuchsien tel que $S_0 = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ et h_n l'isométrie hyperbolique d'axe la géodésique $\tilde{\alpha}_n$ perpendulaire à l'axe des réels dont la projection sur $S_0 = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ est librement homotope à α_n . Notons d'abord que les centres x_n des cercles C_n tendent vers l'infini donc $\infty = \tilde{\beta}(+\infty)$ appartient à l'ensemble limite Λ de Γ . Le groupe $\Gamma' = \langle h_n \rangle$ est un sous-groupe fuchsien de paires de demi-cercles du groupe Γ (voir sous-section 2.1). Soit le domaine de Dirichlet de Γ' centré en i , $\mathcal{D}_i(\Gamma') = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} E_n$, où $E_n = \{z \in \mathbb{H} \mid |z - x_n| \leq r_n\}$, voir la proposition 5.12. Par construction de S_0 l'axe des imaginaire est un relevé de β sur \mathbb{H} . Donc $\infty = \tilde{\beta}(+\infty) \in \partial \mathcal{D}_i(\Gamma') \cap \Lambda'$ où $\Lambda' \subset \Lambda$ est l'ensemble limite de Γ' . Par suite d'après le corollaire 3.24 le point $\tilde{\beta}(+\infty)$ ne peut être un point limite horocyclique. Puisque S_0 est purement hyperbolique alors $\tilde{\beta}(+\infty) \notin \Lambda_p$. Par ailleurs $\lim_{n \rightarrow +\infty} (Im(h_n(i))) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{r_n}{x_n})^2 = \frac{1}{9} > 0$. Et donc $\tilde{\beta}(+\infty) \notin \Lambda_d$. D'où d'après la classification, du chapitre 3, des points limites d'un groupe fuchsien non-élémentaire $\tilde{\beta}(+\infty) \in \Lambda_{irr}$.

□

Démonstration de la proposition 5.25 :

Nous avons d'un côté le lemme 5.27 qui dit que tous les rayons quasi-minimisants sont asymptotes. Autrement dit d'après le théorème 5.20 tous les points limites non-horocycliques forment une seule orbite sous l'action de Γ . Et de l'autre côté le lemme 5.28 qui dit qu'un représentant $\tilde{\beta}(+\infty)$ de cette classe est un point limite irrégulier. Donc $\partial \mathbb{H} \backslash \Lambda_h = \Gamma \cdot \tilde{\beta}(+\infty)$ avec $\tilde{\beta}(+\infty) \in \Lambda_{irr}$. D'où d'après le corollaire 5.9 le flot horocyclique sur $T^1 S_0$ n'admet pas d'ensemble $h_{\mathbb{R}}$ -minimal.

□

De la même manière que la sous-section précédente nous pouvons classifier toutes les orbites horocycliques. Il existe $\pi(u_0) \in T^1 S$ tel que

- si $\pi(u) \in T^1 S \setminus g_{\mathbb{R}} h_{\mathbb{R}}(\pi(u_0))$ alors $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(u))} = \Omega_h$,
- sinon $h_{\mathbb{R}}(\pi(u))$ n'est pas fermée et son adhérence $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(u))} \subset g_{\mathbb{R}} h_{\mathbb{R}}(\pi(u_0))$.

2.3 Exemple de surface hyperbolique avec un nombre infini dénombrable d'orbites irrégulières

Cet exemple sert à démontrer le théorème suivant.

Théorème 5.29. *Il existe un groupe fuchsien Γ de première espèce dont le flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ sur $T^1 S$ n'admet pas d'ensemble $h_{\mathbb{R}}$ -minimal. En plus $T^1 S$ contient une infinité dénombrable de classes d'orbites irrégulières.*

Construisons une surface, noté S avec un nombre infini dénombrable de bouts infini en trois étapes :

- 1^{er} étape : on reprend la colonne vertébrale F_0 de la surface S_0 puis on recolle à sa droite une surface compacte à courbure -1 difféomorphe au tore privé d'un disque.
- 2^e étape : on prend une infinité de copies de la surface F_0 . Notons cette famille de copies par $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} = \{(P_k^n)\}$ où les P_k^n sont les pantalons recollés de la surface F_n . Puis on recolle sur les bouts circulaires supérieurs des pantalons P_k^n des surfaces compactes à courbure -1 difféomorphes au tore privé d'un disque. On obtient une infinité de surfaces, notées S_n , voir la figure 5.6.
- 3^e étape : on recolle les surfaces S_n sur les bouts circulaires supérieurs des pantalons P_n de la surface F_0 , voir la figure 5.6.

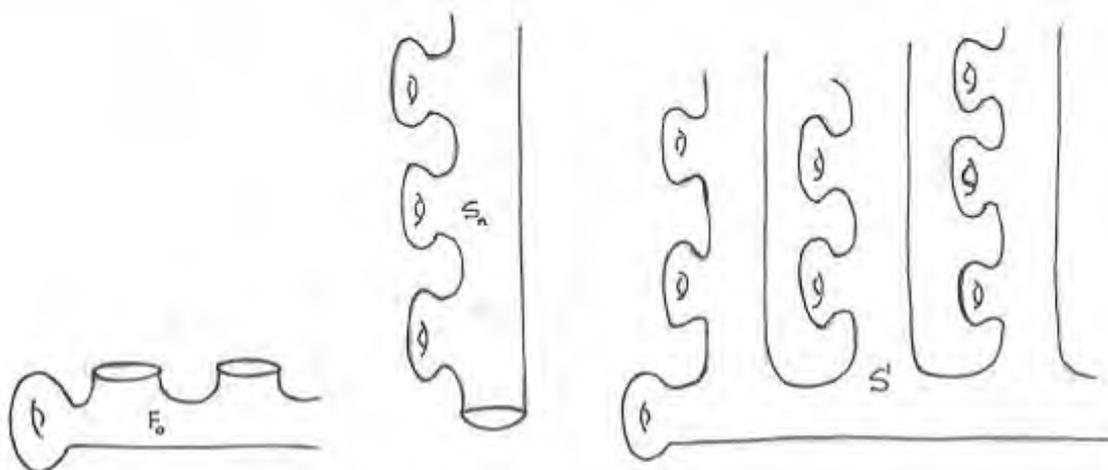


FIGURE 5.6 – Surface avec un nombre infini dénombrable de bouts infinis

La surface S obtenue est géométriquement infinie, de première espèce, purement hyperbolique avec un nombre infini dénombrable de bouts infinis $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Lemme 5.30. *Soit $\sigma : [0, +\infty) \rightarrow S$ un rayon géodésique. Si le rayon σ séjourne dans un pantalon P_k^n de la surface S tout en rencontrant toutes les composantes à bord de ce pantalon alors il perd un temps au moins égal à une constante M .*

Démonstration :

Puisque chaque pantalon P_k^n est isométrique au pantalon P_1 de référence, voir la sous-

section 2.2. 2 précédente, alors le pantalon P_k^n est déterminé par le triplet (l, l', l) qui sont les longueurs de ses composantes à bord. D'après les formules trigonométriques du théorème 1.40 du chapitre 1, nous avons

$$\cosh a_3 = \sinh a_1 \sinh a_2 \cosh b_3 - \cosh a_1 \cosh a_2$$

Ici $a_1 = a_3 = l$, $a_2 = l'$. Les longueurs des coutures de P_k^n sont b_1 , b_2 et b_3 . Nous avons alors

$$\cosh b_3 = \frac{\cosh l}{\sinh l} \times \frac{1 + \cosh l'}{\sinh l'}.$$

Ce qui implique que

$$b_3 = \ln \left[\frac{\cosh l}{\sinh l} \times \frac{1 + \cosh l'}{\sinh l'} + \sqrt{1 + \left(\frac{\cosh l}{\sinh l} \times \frac{1 + \cosh l'}{\sinh l'} \right)^2} \right].$$

Désignons par t_1 le temps d'entrée de σ pour la première fois dans P_k^n et t_2 le temps de sortie de σ pour la dernière fois de P_k^n . Nous avons

$$\Delta_\sigma(t)|_{P_k^n} = (t_2 - t_1) - d(\sigma(t_1), \sigma(t_2)) \geq b_3 + b_2.$$

Puisque ici $b_2 = b_3$, on pose $M = 2b_2$, d'où

$$\Delta_\sigma(t)|_{P_k^n} \geq M.$$

□

Proposition 5.31. *Soit $\sigma : [0, +\infty) \rightarrow S$ un rayon géodésique quasi-minimisant qui traverse un bout infini de la surface S . Ils existent un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et un temps t_{n_0} tels que pour $t \geq t_{n_0}$, $\sigma(t)$ appartienne à la "colonne vertébrale" F_{n_0} et traverse le bout infini correspondant E_{n_0} .*

Démonstration :

Considérons la famille $\{F_k\}_{k \in K}$ des "colonnes vertébrales" visitées par le rayon géodésique σ avant de ressortir. Lorsque σ entre dans F_k et ressort alors il perd un temps au moins égal à la constante M d'après le lemme 5.30. Puisque $\sum_{k \in K} M \leq \Delta_\sigma(t) < \infty$ alors la famille $\{F_k\}_{k \in K}$ des "colonnes vertébrales" visitées par le rayon géodésique σ est finie. Et alors à partir d'un temps t_{n_0} le rayon σ reste dans une seule "colonne vertébrale" F_{n_0} .

□

Passons maintenant à la démonstration du théorème 5.29.

Démonstration du théorème 5.29 : D'après la proposition 5.31 à partir d'un temps t_n une géodésique quasi-minimisant qui va vers un bout infini E_n de la surface S reste dans la "colonne vertébrale" correspondante F_n . On sait d'après la sous-section 2.2. 2 précédente que chaque bout infini E_n correspond à une seule classe de rayons géodésiques quasi-minimisants asymptotes qui à son tour correspond à une unique classe de points limites irréguliers $\Gamma.\xi_n$. Nous avons donc $\partial\mathbb{H} = \Lambda_h \cup (\cup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma.\xi_n)$ avec $\xi_n \in \Lambda_{irr}$. D'où d'après la section 3 le fibré unitaire tangent T^1S n'admet que des orbites denses et une infinité dénombrable d'orbites irrégulières. Le reste du théorème découle du corollaire 5.9.

□

Conclusions et Perspectives

La dynamique topologique du flot horocyclique sur une surface géométriquement infinie est différente de celle sur une surface géométriquement finie. Dans le premier cas l'existence d'ensemble $h_{\mathbb{R}}$ -minimaux n'est pas garantie. Dans cette thèse nous avons montré que l'adhérence d'une orbite irrégulière n'est pas $h_{\mathbb{R}}$ -minimal lorsque l'ensemble non-errant Ω_h admet un nombre dénombrable de classes d'orbites irrégulières et n'admet pas d'orbites fermées. La topologie d'une trajectoire irrégulière semble être compliquée. Sur les différentes familles de surfaces hyperboliques géométriquement infinies construites à la section 2 du chapitre 5, l'adhérence $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))}$ d'une orbite horocyclique est soit dense dans Ω_h , soit incluse dans l'image de $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ par le flot géodésique $g_{\mathbb{R}}$. Peut-on décrire dans le cas général, l'adhérence des orbites irrégulières ?

Se pose également la question des propriétés métriques du flot horocyclique dans les exemples que nous avons construits. Les premiers travaux dans cet esprit montrent que le flot $h_{\mathbb{R}}$ est minimal si et seulement si il est uniquement ergodique, voir [26], [51]. Soient μ une mesure σ -finie et l'espace mesuré $(T^1S = \Gamma \backslash T^1\mathbb{D}, \mu)$. Rappelons que le flot $h_{\mathbb{R}}$ est dit *ergodique* si pour tout ensemble A mesurable, $h_{\mathbb{R}}$ -invariant de T^1S , nous avons $\mu(A) = 0$ ou $\mu(T^1S \setminus A) = 0$. Le flot $h_{\mathbb{R}}$ est dit *uniquement ergodique* lorsqu'il est ergodique par rapport à une unique mesure μ . Les mesures ergodiques invariantes par $h_{\mathbb{R}}$ sont connues lorsque la surface est géométriquement finie. H. Furstenberg a montré que si la surface est compacte alors il existe une unique mesure de probabilité invariante par le flot horocyclique et elle est proportionnelle à la mesure de Liouville du flot géodésique, voir [26]. S. G. Dani dans [21] a établi que si la surface est de volume fini alors une mesure invariante ergodique par le flot horocyclique est soit proportionnelle à la mesure de Liouville ou admet pour support une orbite périodique. En volume infini il n'existe pas de mesure non triviale finie invariante par $h_{\mathbb{R}}$ sauf celles de supports les orbites périodiques. Néanmoins il existe des mesures de Radon Γ -invariantes. Burger et Roblin ont montré que si la surface est géométriquement finie et de volume infini alors les mesures de Radon invariantes par le flot horocyclique sont soit proportionnelles à la mesure de Bowen-Margulis, soit sont les mesures infinies de support les orbites horocycliques errantes, soit sont les mesures finies de support les orbites périodiques, voir [13].

Lorsque Γ est géométriquement infini la situation est plus complexe. Sans autre hypothèse sur la surface à notre connaissance les seuls travaux sont ceux de Starkov et de Kaimanovich, voir [53] et [36]. Leur résultat principal est la démonstration, par Kaimanovich, de la conjecture de Starkov à savoir : l'ergodicité du flot horocyclique par rapport à la mesure de Liouville est équivalente à celle de l'action sur le bord du groupe fuchsien associé. La plupart des résultats connus dans le cadre géométriquement infini sont établis lorsque Γ est de première espèce et lorsque la surface possède des propriétés géométriques particulières. Dans ce dernier cadre Babillot et Ledrappier ont classifié les mesures ergodiques invariantes par le flot horocyclique sur les revêtements abéliens de surfaces compactes, voir [5]. Dans la lignée des travaux de Sullivan, Babillot, en observant l'abondance des mesures de Radon invariantes ergodiques par le flot horocyclique et l'abondance des fonctions propres positives de l'opérateur de Laplace-Beltrami de la surface hyperbolique S , a suggéré un programme d'étude des mesures de Radon invariantes ergodiques par le flot horocyclique, voir [4]. Plus précisément elle propose une méthode permettant de déduire les mesures de Radon invariantes à partir des fonctions propres positives de l'opérateur de Laplace-Beltrami de S , voir [4]. De telles mesures non proportionnelles aux mesures induites par les orbites fermées sont quasi-invariantes par le flot géodésique. On dira que ces mesures vérifient *la propriété de Babillot*. Plus tard O. Sarig dans [52] a montré la correspondance de Babillot dans le cas de certaines surfaces géométriquement infinies de première espèce qu'il nomme *weakly tame surfaces*.

Une autre question est de savoir *si le théorème 5.5 se généralise en dimension supérieure, en particulier lorsque l'on considère l'espace hyperbolique* $\mathbb{H}^3 = \{(z, t) : z \in \mathbb{C}, t > 0\}$? Cet espace est une variété riemannienne, connexe, simplement connexe, complète dont la courbure sectionnelle est égale à -1 . Une telle variété (\mathbb{H}^3, d) est naturellement munie d'un bord géométrique $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. La classification des isométries de \mathbb{H}^3 qui conservent l'orientation des angles subsiste, voir [44]. La notion de groupe fuchsien Γ est remplacée par celle de *groupe Kleinien*, définie de la même manière, comme étant un sous-groupe discret du groupe $Isom^+(\mathbb{H}^3) \simeq PSL(2, \mathbb{C})$ des isométries de \mathbb{H}^3 qui conservent l'orientation. En revanche la notion de groupe discret de type fini ne coïncide plus avec celle de géométriquement fini. Les définitions d'ensemble limite Λ de Γ et de ses différentes classes données dans le chapitre 3 restent inchangées. La caractérisation de la finitude d'un groupe discret par ses points limites reste également inchangée : un groupe kleinien Γ est géométriquement fini si et seulement si tout point limite de Γ est soit horosphérique ou parabolique borné, voir [12]. En revanche les différentes classes de Λ ne sont pas forcément disjointes. Par exemple soit Γ le sous-groupe de $PSL(2, \mathbb{C})$ engendré par la translation $t(z) = z + iN$ et le groupe de Schottky de type infini inclus dans $PSL(2, \mathbb{R})$, construit à

partir de demi-cercles de \mathbb{H}^2 dont les rayons tendent vers $+\infty$. Pour N grand, Γ est un groupe kleinien et le point ∞ appartient à l'ensemble limite de Γ et peut être à la fois horosphérique et parabolique, voir [3].

Soit $u = ((z, t), \vec{u})$ un élément du fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{H}^3$, notons u^+ l'extrémité du rayon géodésique tangent à u en (z, t) et $\mathcal{O}_{u^+}(z, t)$ l'horosphère centré en u^+ passant par le point (z, t) . La relation d'équivalence donnée par $u \sim u'$ si et seulement si $\mathcal{O}_{u^+}(z, t) = \mathcal{O}_{u'^+}(z', t')$ définit sur $T^1\mathbb{H}^3$ un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$. L'image de $\tilde{\mathcal{F}}$ par la projection π de $T^1\mathbb{H}^3$ sur $T^1V = \Gamma \backslash T^1\mathbb{H}^3$, notée \mathcal{F} est appelée *feuilletage horosphérique*. Elle remplace la notion de flot horocyclique en dimension 2. Il existe une approche de ce feuilletage basée sur les repères de l'espace \mathbb{H}^3 , voir [24]. Lorsque le groupe kleinien Γ est géométriquement fini, ce point de vue a permis à Ferte dans [24] d'établir des correspondances entre la topologie des feuilles de \mathcal{F} et la nature des points limites de Γ .

Dans l'optique de généraliser le théorème 5.5 et de construire des familles explicites de groupes kleinien comme dans la section 2 du chapitre 5, il peut être utile de regarder ce point de vue des repères afin d'établir une correspondance entre la nature des points de l'ensemble limite d'un groupe kleinien géométriquement infini et le comportement des feuilles de \mathcal{F} .

Bibliographie

- [1] ABIKOFF, W. The real analytic theory of teichmüller space. *Lecture Notes in Math* 820.
- [2] ÁLVAREZ, V., AND RODRÍGUEZ, J. M. Structure theorems for riemann and topological surfaces. *Journal of the London Mathematical Society* 69, 1 (2004), 153–168.
- [3] APANASOV, B. N. *Conformal geometry of discrete groups and manifolds*, vol. 32. Walter de Gruyter, 2000.
- [4] BABILLOT, M. *On the classification of invariant measures for horosphere foliations on nilpotent covers of negatively curved manifolds*. na, 2004.
- [5] BABILLOT, M., AND LEDRAPPIER, F. Geodesic paths and horocycle flow on abelian covers. *Lie Groups and ergodic theory (Mumbai, 1996)* (1998), 1–32.
- [6] BASMAJIAN, A. Hyperbolic structures for surfaces of infinite type. *Transactions of the American Mathematical Society* 336, 1 (1993), 421–444.
- [7] BEARDON, A. F. *The geometry of discrete groups*, vol. 91. Springer Science & Business Media, 2012.
- [8] BENEDETTI, R., AND PETRONIO, C. *Lectures on hyperbolic geometry*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [9] BENIERE, J.-C., AND MEIGNIEZ, G. Flows without minimal set. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 19, 01 (1999), 21–30.
- [10] BIRKHOFF, G. D. *Collected mathematical papers*, vol. 2. Dover Publications, 1950.
- [11] BORTHWICK, D. *Spectral theory of infinite-area hyperbolic surfaces*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [12] BOWDITCH, B. H., ET AL. Geometrical finiteness with variable negative curvature. *Duke Mathematical Journal* 77, 1 (1995), 229.
- [13] BURGER, M., ET AL. Horocycle flow on geometrically finite surfaces. *Duke Math. J* 61, 3 (1990), 779–803.
- [14] BUSER, P. *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*. Springer Science & Business Media, 2010.

- [15] BUTTON, J. All fuchsian schottky groups are classical schottky groups. *Geometry and Topology Monographs 1* (1998), 117–125.
- [16] COSTA, A. F. *Topics on Riemann surfaces and Fuchsian groups*, vol. 287. Cambridge University Press, 2001.
- [17] DAL’BO, F. Topologie du feuilletage fortement stable. In *Annales de l’institut Fourier* (2000), vol. 50, pp. 981–993.
- [18] DAL’BO, F. *Trajectoires géodésiques et horocycliques*. EDP sciences, 2012.
- [19] DAL’BO, F., AND STARKOV, A. On a classification of limit points of infinitely generated schottky groups. *Journal of dynamical and control systems 6*, 4 (2000), 561–578.
- [20] DAL’BO, F., AND STARKOV, A. On noncompact minimal sets of the geodesic flow. *Journal of dynamical and control systems 8*, 1 (2002), 47–64.
- [21] DANI, S. Invariant measures and minimal sets of horospherical flows. *Inventiones mathematicae 64*, 2 (1981), 357–385.
- [22] EBERLEIN, P. Horocycle flows on certain surfaces without conjugate points. *Transactions of the American Mathematical Society 233* (1977), 1–36.
- [23] EBERLEIN, P. *Geodesics and ends in certain surfaces without conjugate points*, vol. 199. Cambridge University Press, 1978.
- [24] FERTE, D. Flot horosphérique des repères sur les variétés hyperboliques de dimension 3 et spectre des groupes kleinien. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society 33*, 1 (2002), 99–123.
- [25] FREUDENTHAL, H. Über die enden topologischer räume und gruppen. *Mathematische Zeitschrift 33*, 1 (1931), 692–713.
- [26] FURSTENBERG, H. The unique ergodicity of the horocycle flow. In *Recent advances in topological dynamics*. Springer, 1973, pp. 95–115.
- [27] GAYE, M., AND LO, C. Sur l’inexistence d’ensembles minimaux pour le flot horocyclique. *Confluentes Mathematici* (Juin 2017).
- [28] GOTTSCHALK, W. H., AND HEDLUND, G. A. *Topological dynamics*, vol. 36. American Mathematical Soc., 1955.
- [29] HAAS, A. Dirichlet points, garnett points and infinite ends of hyperbolic surfaces i. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Series AI 21* (1996), 3–29.
- [30] HAAS, A., AND SUSSKIND, P. The geometry at infinity of a hyperbolic riemann surface of infinite type. *Geometriae Dedicata 130*, 1 (2007), 1–24.
- [31] HASSELBLATT, B., AND KATOK, A. *Handbook of dynamical systems*, vol. 1. Elsevier, 2002.

- [32] HEDLUND, G. A., ET AL. Fuchsian groups and transitive horocycles. *Duke Math. J* 2, 3 (1936), 530–542.
- [33] HUBBARD, J. H. *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics : Teichmüller theory*. Matrix Press, 2006.
- [34] INABA, T. An example of a flow on a non-compact surface without minimal set. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 19, 01 (1999), 31–33.
- [35] JOST, J. *Riemannian geometry and geometric analysis*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [36] KAIMANOVICH, V. A. Ergodic properties of the horocycle flow and classification of fuchsian groups. *Journal of dynamical and control systems* 6, 1 (2000), 21–56.
- [37] KATOK, S. *Fuchsian groups*. University of Chicago press, 1992.
- [38] KEEN, L., AND LAKIC, N. *Hyperbolic geometry from a local viewpoint*, vol. 68. Cambridge University Press, 2007.
- [39] KELLY, P., AND MATTHEWS, G. *The non-Euclidean, hyperbolic plane : its structure and consistency*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [40] KULIKOV, M. The horocycle flow without minimal sets. *Comptes Rendus Mathématique* 338, 6 (2004), 477–480.
- [41] KULIKOV, M. S. Schottky-type groups and minimal sets of horocycle and geodesic flows. *Sbornik : Mathematics* 195, 1 (2004), 35.
- [42] LABOURIE, F. *Lectures on representations of surface groups*. Citeseer, 2013.
- [43] LEHNER, J. *Discontinuous groups and automorphic functions*, vol. 8. American Mathematical Society Providence, 1964.
- [44] MASKIT, B. *Kleinian groups*, vol. 287. Springer Science & Business Media, 2012.
- [45] MATSUMOTO, S. Horocycle flows without minimal sets. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* 23, 3 (2016), 661–673.
- [46] NICHOLLS, P. Ford and dirichlet regions for discrete groups of hyperbolic motions. *Transactions of the American Mathematical Society* 282, 1 (1984), 355–365.
- [47] PATTERSON, S. Some examples of fuchsian groups. *Proceedings of the London Mathematical Society* 3, 2 (1979), 276–298.
- [48] PETERSEN, P. *Riemannian geometry*, vol. 171. Springer, 2006.
- [49] PURZITSKY, N. A cutting and pasting of noncompact polygons with applications to fuchsian groups. *Acta Mathematica* 143, 1 (1979), 233–250.
- [50] QUEFFÉLEC, H. *Topologie-5e ed. : Cours et exercices corrigés*. Dunod, 2016.

- [51] RATNER, M. Raghunathan's conjectures for $sl(2, \mathbb{r})$. *Israel Journal of Mathematics* 80, 1-2 (1992), 1–31.
- [52] SARIG, O. The horocycle flow and the laplacian on hyperbolic surfaces of infinite genus. *Geometric and Functional Analysis* 19, 6 (2010), 1757–1812.
- [53] STARKOV, A. Fuchsian groups from the dynamical viewpoint. *Journal of dynamical and control systems* 1, 3 (1995), 427–445.
- [54] STILLWELL, J. *Geometry of surfaces*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [55] SULLIVAN, D. The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 50 (1979), 171–202.
- [56] TOUBIANA, E., AND SÁ EARP, R. Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de riemann. *Bibliothèque des sciences* (1997).

UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
ECOLE DOCTORALE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUE

THESE DE DOCTORAT UNIQUE

Spécialité : GEOMETRIE ET APPLICATIONS

Nom et prénoms : LO CHEIKH

Titre de la thèse : Ensembles minimaux pour le flot horocyclique sur une surface hyperbolique géométriquement infinie.

Résumé :

Cette thèse porte sur la topologie des orbites du flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ sur le fibré unitaire tangent d'une surface hyperbolique géométriquement infinie S en restriction à son ensemble non-errant Ω_h . Après être revenu sur l'étude des groupes fuchsien et la construction de surfaces hyperboliques nous proposons différents points de vue de ce flot. Nous montrons que la dynamique de l'action d'un groupe fuchsien sur le bord à l'infini du demi-plan de Poincaré est en corrélation avec celle du flot horocyclique sur le fibré unitaire tangent T^1S . Nous construisons explicitement plusieurs familles de surfaces hyperboliques géométriquement infinies avec une description complète des adhérences des orbites du flot horocyclique. Le résultat principal de cette thèse est de montrer que sous certaines conditions les seuls éventuels ensembles minimaux pour le flot horocyclique sont ses orbites fermées.

Mots clés : Surfaces hyperboliques géométriquement infinies, points limites d'un groupe fuchsien, orbites horocycliques, propriétés topologiques.

Name and first name: LO CHEIKH

Thesis title: Minimal sets for the horocycle flow on a geometrically infinite hyperbolic surface.

Summary:

This thesis studies the topology of the orbits of the horocycle flow $h_{\mathbb{R}}$ on the unit tangent bundle of a geometrically infinite hyperbolic surface S restricted to its non-wandering set Ω_h . After returning to the study of fuchsian groups and the construction of hyperbolic surfaces we propose different views of the horocycle flow. We show that the dynamics of the action of a fuchsian group on the boundary of the Poincaré hyperbolic plane is correlated with that of the corresponding horocycle flow on the unit tangent bundle of the surface T^1S . We explicitly construct several families of geometrically infinite hyperbolic surfaces with a complete description of the closures of the horocycle orbits. The main result of this thesis shows that under some assumptions the only possible minimal sets for the horocycle flow are the closed orbits.

Key words: Geometrically infinite hyperbolic surfaces, limit point of a fuchsian group, horocycle orbits, topological properties.