

REPUBLIQUE DU SENEGAL
UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



Faculté des Sciences et Techniques
Ecole Doctorale Mathématiques et Informatique (EDMI)
Laboratoire de Mathématiques et de la Décision(LMDAN)

THÈSE DE DOCTORAT
pour l'obtention du grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

Mention : Mathématiques Appliquées

Option : Modélisation et Calcul Scientifique

présentée par

Fulgence MANSAL

**PROBLÈMES DE CONTRÔLE ET D'OPTIMISATION
GEOMÉTRIQUE DANS LA MODÉLISATION DES
SYSTÈMES DE PÊCHERIE AVEC PRIX VARIABLE**

Soutenue le 16 Mai 2015 devant le jury composé de :

M. HAMIDOU DATHE	Professeur	UCAD	(Président)
M. MOUSSA BALDE	Maître de Conférences	UCAD	(Codirecteur)
M. DIARAF SECK	Professeur	UCAD	(Codirecteur)
M. PIERRE AUGER	Directeur de recherche à l'IRD	UPMC (France)	(Codirecteur)
M. ABDOULAYE SENE	Maître de Conférences	UCAD	(Rapporteur)
M. JEAN PIERRE FRANÇOISE	Professeur	UPMC (France)	(Rapporteur)
M. MOHAMED KHALADI	Professeur	UCA (Maroc)	(Rapporteur)
M. IDRISSE LY	Maître de Conférences	UCAD	(Examineur)

A mes très chers parents

Remerciements

J'ai l'honneur aujourd'hui de témoigner ma profonde gratitude à l'égard de tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier chaleureusement l'ensemble des membres du jury qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir examiner mon travail : le Professeur Abdoulaye SENE, le Professeur Mohamed KHALADI et le Professeur Jean Pierre FRANÇOISE pour avoir accepté d'être rapporteurs, et de consacré du temps à la lecture de mon manuscrit. Je leur remercie pour leurs conseils et pour leurs remarques qui m'ont permis de corriger et d'améliorer le manuscrit.

J'exprime mes vives remerciements au Professeur Hamidou DATHE pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider ce jury de thèse.

C'est avec beaucoup de reconnaissance que j'exprime mes remerciements à mes directeurs de thèse : Moussa BALDE, Diaraf SECK et Pierre AUGER, pour m'avoir proposé un sujet aussi passionnant et mené ce travail avec toute la rigueur qu'il fallait. Leur disponibilité, leur écoute, leur confiance et leurs encouragements ont permis d'instaurer un climat de travail de qualité et aujourd'hui d'achever cette thèse. Plus que des directeurs de thèse, ils ont été pour moi des tuteurs aussi bien au Sénégal que durant les brefs mais intéressants moments en France et en Algérie. Je les remercie de m'avoir initié à la théorie du contrôle et aux systèmes dynamiques et de m'avoir transmis leur passion de la recherche.

Le Pr. Idrissa LY, m'a honoré par sa participation au jury de thèse, je le remercie vivement.

Je tiens à remercier vivement le Dr. Tri Nguyen HUU avec qui j'ai eu l'opportunité de beaucoup travailler sur la deuxième partie de la thèse. Son savoir, sa rigueur, sa disponibilité et son hospitalité étaient toujours au rendez-vous durant toutes les longues journées de travail que j'ai eu à le côtoyer. Le dialogue permanent qui s'est instauré entre nous a été un atout majeur dans l'aboutissement de cette thèse.

La vie d'un chercheur est parsemée de rencontres. Je remercie les collègues que j'ai entrevus régulièrement au cours de conférences, colloques ou séminaires (à Mbour, Dakar, Saint Louis,

Fance, Algérie) pour les discussions scientifiques enrichissantes. C'est à cet effet que j'ai rencontré le Professeur Aziz Allaoui et le Professeur Ali Moussaoui avec qui j'ai beaucoup discuté durant mon séjour en Algérie .

Je remercie particulièrement mon collègue et ami de tous les jours Sidy LY avec qui j'ai su gérer les moments difficiles de cette thèse et avec qui j'ai partagé une partie des travaux depuis la deuxième année.

Je tiens à exprimer mon amitié et ma très grande sympathie au Dr Mountaga LAM. Il m'a toujours apporté son soutien pendant les moments difficiles et ce depuis mon master. Ces conseils et encouragements m'ont été d'un grand apport durant ces années de thèse.

Je tiens à remercier ma famille d'avoir eu confiance en moi et de m'avoir soutenu. J'exprime ma profonde reconnaissance à mes parents pour m'avoir encouragé et accompagné depuis le début : mon défunt papa pour son esprit scientifique et inventeur qui m'a aidé et soutenu dès la plus tendre enfance à exceller en mathématiques et à qui je dédie ma thèse et surtout ma maman pour ce qu'elle a fait et que je ne saurais lister. Je remercie également mes frères et soeurs pour tous les bons moments passés en leur compagnie.

Je conclurai en remerciant de tout cœur mon ami Roger Maurice DIOUF et sa femme Marie Reine et tout particulièrement celle qui reste ma meilleure amie Marie Pierre BEBGA qui a su m'épauler et m'écouter et me conseiller à chaque fois sans jamais faillir.

Résumé

L'objet de cette thèse est la modélisation des systèmes de pêcheries avec prix variable. Dans la première partie de la thèse nous proposons un modèle de pêcheries constitués de contraintes sur des inconnues définissant la densité de poissons et l'effort de pêche sur les différents sites et la densité sur le stock libre. La position des sites associés à des DCPS est déterminé en optimisant une fonctionnelle. Le modèle est formulé par la maximisation du bénéfice et la minimisation de la fonctionnelle. L'approche du contrôle optimal est alors établie après avoir discuté de la contrôlabilité locale autour des points d'équilibre. La partie qui suit est consacrée tout d'abord au même modèle de pêche multi-site mais avec un prix variable motivé par la théorie économique classique qui considère le prix comme fonction de la différence entre la demande $D(p)$, qui est supposée être une fonction linéaire monotone et décroissante du prix, et l'offre . En supposant que la variation du prix est rapide par rapport aux autres processus en jeu, nous réduisons ce système par la méthode d'agrégation des variables. Nous pouvons ensuite définir une stratégie basée sur le nombre de DCPs nous permettant de passer d'un équilibre de surexploitation à un équilibre de pêche durable. Par la suite, nous avons généralisé ce modèle au cas où une partie des poissons peut être stockée avant d'être vendue et au cas où les poissons sont structurés en classes d'âge. Nos résultats ont montré que dans ces deux cas, nous obtenons des résultats similaires avec notamment la même équation du prix d'équilibre du marché.

Mots clés : Systèmes dynamiques, pêche multi-site , prix variable, capture optimale, optimisation, méthode d'agrégation, équilibre, stabilité, contrôlabilité, simulations numériques, Equation du Prix du Marché, fonction demande, surexploitation / pêche durable.

Table des matières

1	Introduction générale	12
2	Outils Mathématiques Fondamentaux	16
2.1	Dynamique des populations	16
2.2	Systèmes dynamiques	19
2.2.1	Etude des systèmes dynamiques linéaires	19
2.2.1.1	L'exponentielle d'une matrice	19
2.2.1.2	Forme de Jordan et calcul de l'exponentielle	20
2.2.1.3	Points d'équilibre et stabilité	20
2.2.1.4	Classification topologique des points d'équilibre	21
2.2.2	Etude des systèmes dynamiques non linéaires	23
2.2.2.1	Linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre	23
2.2.2.2	Théorème de linéarisation et portrait de phase	25
2.2.2.3	Les critères de Routh-Hurwitz	26
2.2.2.4	Théorème de Poincaré-Bendixson	27
2.2.2.5	Théorie de Lyapunov et Stabilité	29
2.2.3	Méthode d'agrégation des variables pour les EDO	30
2.2.3.1	Définitions et notations	30
2.2.3.2	Théorème de réduction	32
2.3	Optimisation statique	33
2.3.1	Optimisation sans contraintes	33
2.3.2	Conditions d'optimalité	34
2.3.2.1	Conditions nécessaires du premier ordre	34
2.3.2.2	Conditions nécessaires et suffisantes du second ordre	34
2.3.3	Optimisation avec contraintes	34
2.3.3.1	Conditions d'optimalité dans le cas de contraintes d'égalités	35
2.3.3.2	Conditions d'optimalité dans le cas de contraintes d'inégalités	35
2.4	Théorie du contrôle	36
2.4.1	Contrôlabilité	37

2.4.1.1	Contrôlabilité locale d'un système non linéaire	39
2.4.2	Contrôle optimal	40
2.4.3	Principe du Maximum de Pontryagin	41
2.4.3.1	Enoncé générale	41
2.4.3.2	Conditions de transversalité	43
3	Théorie du contrôle en dynamique des populations	46
3.1	Introduction	46
3.2	Position et Modélisation du problème	47
3.2.1	Position du Problème	47
3.2.2	Modélisation du problème	48
3.2.3	Modèle de pêche multi-site	48
3.2.4	Problème de contrôle géométrique	50
3.2.4.1	Problème sans contraintes	50
3.2.5	Problème de contrôle optimal	56
3.2.5.1	Condition d'optimalité	56
3.3	Contrôlabilité	69
3.3.1	Contrôlabilité locale	69
3.3.1.1	Cas où g est le contrôle	70
3.3.1.2	Cas general où $\alpha = (\alpha_{12}; \dots \alpha_{i;i+1}; \dots \alpha_{1;L})$ est le contrôle	71
3.3.2	Contrôlabilité globale	73
3.3.2.1	Cas où g est le contrôle	73
3.3.2.2	Cas où $g(M_1, M_2) = \alpha_{12} \ M_1 M_2\ ^2$; α_{12} étant le contrôle	74
3.3.3	Contrôle optimal	75
3.4	Simulations Numériques	78
3.4.1	Simulation Numérique du système	79
3.4.2	Simulation Numérique du contrôle	80
3.5	Conclusion	82
4	Modèles de pêche avec prix variable	83
4.1	De la surexploitation à la pêche durable	84
4.1.1	Introduction	84
4.1.2	Un modèle de pêche multi-site	84
4.1.2.1	Modèle agrégé	86
4.1.2.2	Equilibres et analyse de stabilité locale	87
4.1.3	Discussion du modèle	89
4.1.4	Appendice : modèle de pêche muti-site	90
4.1.4.1	Calcul de l'équilibre rapide	90
4.1.4.2	Dérivation du modèle agrégé	92

4.1.4.3	Analyse de l'équilibre non-trivial	93
4.1.5	Conclusion	94
4.2	Etude de l'équation du prix du marché	95
4.2.1	Introduction	95
4.2.2	Présentation du modèle mathématique de pêcherie avec prix variable de la ressource	95
4.2.2.1	Existence d'équilibres	96
4.2.2.2	Analyse de la stabilité locale	96
4.2.2.3	Typologie de la dynamique	97
4.2.2.4	Comparaison du prix du poisson dans le cas des deux équilibres stables positifs	99
4.2.3	Généralisation à un modèle de population structurée en classes d'âge . .	101
4.2.4	Généralisation au modèle de Auger-Ducrot	102
4.2.5	Appendices	103
4.2.5.1	Appendice A : Domaines d'existence pour les équilibres non tri- viaux	103
4.2.5.2	Appendice B : Stabilité locale de l'équilibre non-trivial	104
4.2.5.3	Appendice C : Attracteur borné	106
4.2.6	Conclusion	110
5	Conclusion générale et perspectives	111

Table des figures

2.1	Modèles de récifs artificiels destinés à fournir un habitat aux organismes marins .	18
2.2	Modules utilisés pour la restauration de récifs coralliens, mis en place par des plongeurs (à gauche), et après environ 70 jours (à droite).	18
2.3	Modèles de Dispositif de Concentration des Poissons.	18
2.4	Portraits de phases plans et linéaires lorsque les valeurs propres de A , λ_1 et λ_2 , ont une partie imaginaire non nulle.	23
2.5	Portraits de phases plans et linéaires, $\dot{x} = Ax$, lorsque les valeurs propres de A , λ_1 et λ_2 , sont réelles (ε_1 et ε_2 vecteurs propres de A , lorsqu'ils existent)	24
2.6	Représentation fictive d'une trajectoire pour un système dynamique planaire donné.	25
3.1	Cercle de centre M_1 de rayon R_0	53
3.2	Simulation dans le cas de deux FADs où $R_0 = 3$ et les coordonnées données sur la figure	54
3.3	(a) Triangle équilatéral de coté $\frac{R_0}{\sqrt{3}}$, (b) Triangle rectangle isocèle en M_1 de coté $\frac{R_0}{\sqrt{2}}$.	55
3.4	(a) Simulation dans le cas de trois FADs où $R_0 = \sqrt{3}$. Les points M_2 et M_3 étant confondus, (b) Simulation dans le cas de trois FADs où $R_0 = \sqrt{3}$. Les points M_2 et M_3 étant légèrement distants et leurs distances respectivement au point M_1 sensiblement égales.	55
3.5	(a) Simulation dans le cas de trois FADs où $R_0 = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Les points M_2 et M_3 étant confondus, (b) Simulation dans le cas de trois FADs où $R_0 = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Les points M_1 et M_2 et M_3 formant légèrement un triangle isocèle.	56
3.6	Les équilibres (\bar{n}_i, \bar{E}_i) pour différentes valeurs du nombre de sites L : (a) Simulation avec quatre FADS où $R_0 = \frac{3\sqrt{4}}{4}$, (b) Simulation avec 5 FADS où $R_0 = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ et (c) Simulation avec 10 FADS où $R_0 = \frac{3\sqrt{10}}{10}$	56
3.7	Résolution Numérique avec Runge Kutta	80
3.8	Evolution du control $u(t)$	81
3.9	Effect du contrôle sur la densité $n(t)$, effort de pêche $E(t)$, et les multiplicateurs de Lagrange $p_1(t)$ et $p_2(t)$	82

- 4.1 Les équilibres (\bar{n}_i, \bar{E}_i) pour différents nombres de FADs L : (a) $L = 5$, (b) $L = 8$ et (c) $L = 11$. Les équilibres se trouvent à l'intersection des deux courbes de l'équation 4.12, représentées en noir et gris. Les valeurs des paramètres sont $r = 3$, $A = 3$, $q = 11.11$, $c = 1$, $K = 4$, $\gamma = 1$ et $\alpha = 0.1$ 88
- 4.2 La capture totale correspondante respectivement à l'équilibre $(\bar{n}_1; \bar{E}_1)$, $(\bar{n}_2; \bar{E}_2)$ et $(\bar{n}_3; \bar{E}_3)$, en fonction du nombre de sites. La ligne continue en rouge représente les équilibres stables $((\bar{n}_1; \bar{E}_1)$ et $(\bar{n}_3; \bar{E}_3))$, tandis que la ligne en pointillé représente l'équilibre instable $(\bar{n}_2; \bar{E}_2)$. Les valeurs des paramètres sont $r = 3$, $A = 3$, $q = 11.11$, $c = 1$, $K = 4$, $\gamma = 1$ et $\alpha = 0.1$. Le paramètre L est supposé être un nombre entier. Cependant, les courbes sont représentées sous forme de valeurs continues pour une meilleure compréhension de leur variations. 90
- 4.3 Dynamique obtenue en modifiant le nombre de FADs : (a) Densités des poissons n (ligne en bleue) et effort de pêche E (en rouge), (b) capture totale en fonction du temps. Entre $t = 0$ et $t = 15$, $L = 5$, entre $t = 15$ et $t = 25$, $L = 11$; pour $t > 25$, $L = 5$ 91
- 4.4 $\alpha > qkA/c$. *A gauche* : La demande (en noire) et l'offre ($f(p)$ pour $n = c/pq$ et $E = r(1 - c/pqk)/q$) (rouge) dépendant de p . Les deux courbes ne se croisent pas, en conséquence il n'y a pas d'équilibre non-trivial dans le quadrant positif. *A droite* : l'évolution dans le temps de la dynamique : le stock de poissons (en noir), l'effort de pêche (en rouge) et le prix (en bleue). 98
- 4.5 $\alpha < qkA/c$ et $A > rk/3$. *A gauche* : la demande (en noire) et l'offre (en rouge) ($f(p)$ pour $n = c/pq$ et $E = r(1 - c/pqk)/q$), dépendant de p . Les deux courbes se croisent au point p^* , correspondant à l'équilibre ξ^* . *A droite* : l'évolution dans le temps de la dynamique : le stock de poissons (en noir), l'effort de pêche (en rouge) et le prix (en bleue). 99
- 4.6 $\alpha < qkA/c$ et $A < rk/3$. *A gauche* : la demande (en bleue) et l'offre (en rouge) ($f(p)$ pour $n = c/pq$ et $E = r(1 - c/pqk)/q$), dépendant de p . Les deux lignes obliques en pointillé représentent la demande pour α^- et α^+ . Entre ces deux lignes en pointillé, les deux courbes se coupent 3 fois, et seulement une fois à l'extérieur. Les lignes noires verticales en pointillé correspondent à $p = p^-$ et $p = p^+$. Quand $p^- < p^* < p^+$, l'équilibre ξ^* est instable, tandis qu'en dehors de cette zone, ξ^* est localement asymptotiquement stable. Si $\alpha > \alpha^+$ ou $\alpha < \alpha^-$, il y a un seul équilibre. La dynamique est similaire à celle décrite sur la Figure 4.5. *A droite* : l'évolution dans le temps de la dynamique : le stock de poissons (en noir) tendant vers sa capacité limite, l'effort de pêche (en rouge) et le prix (en bleue). 100

- 4.7 $\alpha < qkA/c$ et $A < rk/3$. Portrait de phase de la dynamique. Les équilibres sont représentés par des points gris, et les hétéroclines par des courbes grises. Les courbes en bleu représentent les trajectoires qui tendent asymptotiquement vers un des deux équilibres localement asymptotiquement stable. 101
- 4.8 $\dot{V}(n, E)$ (surface noire). La partie blanche du plan $\dot{V} = 0$ représente l'ensemble compact qui englobe l'ensemble $\{(n, E) \mid \dot{V} > 0\}$. Les ensembles Σ et Σ_i pour $i = 0 \dots 2$ sont représentés en zones grises. Les paramètres sont $r = 0.9$, $k = 3$, $q = 0.1$, $c = 2$, $A = 2$, $\alpha = 0.1$ et $\varphi = 0.1$ 107
- 4.9 Sur la surface dessinée, $V(n, E, p)$ est constant. L'espace sous la surface correspond à Ω_∞ . L'ensemble compact Ω_∞^+ correspond à l'espace situé sous la surface et sur le plan $p = 0$. Les paramètres sont $r = 0.9$, $k = 3$, $q = 0.1$, $c = 2$, $A = 2$, $\alpha = 0.1$ et $\varphi = 0.1$ 109

Chapitre 1

Introduction générale

La pêche a été longtemps considérée comme étant une activité pérenne malgré la pression de pêche très forte dans les dernières années. En raison de la baisse drastique des captures et de l'extinction notée de certaines espèces, il est aujourd'hui prouvé que les ressources halieutiques ne sont pas inépuisables [34]. Face à cette situation, il est urgent pour les décideurs politiques et économiques de se doter de moyens scientifiques d'estimation et de contrôle de la ressource afin d'assurer une gestion pérenne de la pêche dans le temps et dans l'espace. La compréhension de la dynamique des principales espèces pêchées constitue un préalable indispensable à une bonne gestion des ressources halieutiques.

Notre approche conceptuelle

Les stocks de poissons commencent à s'épuiser et à ne plus pouvoir fournir la quantité de poissons exigée par l'homme. L'aquaculture prend le relais des ressources naturelles mais il est intéressant de savoir comment protéger au mieux les stocks. Ainsi, il apparaît qu'il est important de connaître la dynamique de la population des poissons exploités afin de savoir quelle stratégie de pêche adopter. Les modèles de dynamique des populations de poissons exploités, lorsqu'ils existent, sont des outils d'aide performants pour la gestion des ressources halieutiques. Ces modèles sont pour la plupart conçus dans le cadre d'une grande collaboration entre **mathématiciens, biologistes et économistes**. Les modèles qui existent dans la littérature ne prétendent pas décrire de façon exacte la dynamique d'une population de poissons, ils donnent une représentation formelle d'une partie de la réalité sur la dynamique de la population de certaines espèces pêchées. A travers ces modèles et en usant d'outils bien connus de théorie du contrôle, nous pouvons dans certains cas prétendre à l'étude de l'estimation et du comportement de la taille des stocks de poissons. La modélisation mathématique des ressources renouvelables a reçu beaucoup d'attention depuis de nombreuses années. L'originalité des modèles bio-économique est de prendre en compte aussi bien les aspects biologiques qu'

économiques. Nous nous référons à deux livres classiques et récents [17, ?].

Dans la plupart des modèles mathématiques, en général une fonction logistique, une première équation décrit l'évolution dans le temps de la ressource, suivant une croissance logistique de plus en plus utilisée. La capture est le plus souvent représentée par une fonction de Schaefer [65]. Un concept clé en bio-économie concerne le rendement maximal durable (RMD) plus connu sous le nom de (MSY = Maximum Sustainable Yield), qui correspond à la capture maximale d'une pêcherie pendant une période indéterminée. Ensuite, une seconde équation est parfois ajoutée pour décrire la variation dans le temps de l'effort de pêche ou plus généralement (dans le cas d'une autre ressource de poissons), le nombre d'entreprises (supposée homogène) impliqués dans l'exploitation de la ressource à temps différents [66, 67, 13]. De nombreux modèles mathématiques de pêche considèrent un prix de marché constant de la ressource. Cependant, certains auteurs ont supposé que le prix peut dépendre de certaines variables telles que la densité de ressources, ou l'effort de pêche [13]. Dans l'article [7], une troisième équation a même été ajoutée afin de tenir compte de la variation temporelle du prix en fonction de la demande et de l'offre.

Il est également crucial de prendre en compte la dimension spatiale des pêcheries dans les modèles de pêche multi-sites. En effet, l'environnement est en général hétérogène avec différents sites de pêche connectés entre eux par des migrations. La pêche est donc considérée comme un réseau de parcelles reliées par la migration [59]. La population de poissons est parfois représentée comme une métapopulation dans la mer [38] en se concentrant dans les processus d'extinction locales à différentes échelles. Les patches peuvent correspondre à différentes zones de pêche ainsi que les aires marines protégées (AMP), des habitats artificiels / récifs. Nous allons en particulier nous concentrer ici sur les sites artificiels appelés dispositifs de concentration de poissons (DCP) ou encore Habitats artificiels (HA) [36, 41].

La raison pour laquelle les poissons se regroupent autour de ces dispositifs n'est pas encore clairement établi. Aujourd'hui, l'utilisation des DCP largement répandue, en particulier l'utilisation des DCP industriels de grande envergure mais souvent sans aucune réglementation [25]. Plus de la moitié des captures de thons tropicaux dans le monde sont faits autour des DCPs [24]. Les thons ou les gros poissons pélagiques se déplacent rapidement et sont attirés par des DCPs [30], où ils restent pendant un temps relativement court, de quelques jours [51, 19] et ensuite retournent en haute mer pour rejoindre les bancs de poissons. De plus, selon l'article [19] les poissons quittent souvent un DCP donné avant d'aller à un autre ou retourner en haute mer.

La compréhension de l'effet des DCPs sur les stocks de poissons, de la capture est un aspect clé pour l'amélioration de gestion de la pêche. Nous présentons un modèle bioéconomique de la pêcherie qui considère explicitement les effets des DCPs et qui décrit la variation dans le temps des stocks de poissons et de l'effort de pêche en couplant les deux aspects précédents, c'est à dire la variation des prix de la ressource selon la demande et l'offre, et un environnement hétérogène, représenté comme un ensemble des sites reliés par migrations. Notre approche se concentre particulièrement sur l'effet du nombre de DCP sur la dynamique de la pêche ainsi que

sur le passage d'une pêcherie sur-exploitée avec des risques élevées d'extinction de la ressource à une pêcherie correspondant à une économie de développement durable. Nous montrons que la variation du nombre de sites, par exemple des DCP, permet de passer d'un équilibre de pêche de sur-exploitation à un équilibre de pêcherie de développement durable tout en augmentant la capture totale. Dans beaucoup de pays en développement, différents types de pêcheries constituent le paysage de l'activité halieutique : les pêcheries artisanales ou traditionnelles locales côtoient quotidiennement les pêcheries industrielles nationales ou étrangères. Cette cohabitation, dont on relève souvent le caractère conflictuel, implique de nombreux enjeux socio-économiques et environnementaux.

Cette thèse est organisée en trois chapitres comme il suit :

Le *chapitre 1*, présente les principales notions et les résultats utilisés au cours de cette thèse. Les résultats que nous avons tenus à rappeler sont très bien connus et nous avons volontairement omis la preuve de certains d'entre eux. Néanmoins nous avons indiqué des références pour les lecteurs qui souhaiteraient se faire une idée de la démonstration de certains résultats énoncés.

Au *chapitre 2*, nous présentons un modèle de pêcherie multi-site décrivant la dynamique d'une population de poissons soumise à un prélèvement par pêche sur des dispositifs de concentration des poissons(DCP). L'objectif de ce modèle est de voir l'importance de la disposition des DCPs sur la dynamique de la pêche, de la stabilité d'une population et de voir s'il est possible de contrôler le système afin de l'amener à un état désiré par la théorie du contrôle optimal ainsi que de gérer l'exploitation pour éviter une extinction totale de la population. Les travaux effectués dans cette partie vont faire l'objet d'une soumission pour publication

Le *chapitre 3* est divisé en deux parties .

Nous abordons en premier lieu la question de l'estimation de la taille du stock pour des populations de poissons et de l'effort de pêche dont la dynamique est décrite par le modèle donné au chapitre 2. Ce problème a été déjà abordé dans [8] avec un prix variable et une fonction demande de la forme $D(p) = A - p$. Nous considérons une généralisation de cette fonction demande $D(p) = A - \gamma p$.

Nous utilisons la méthode d'agrégation des variables nous permettant de démontrer qu'il existe aussi bien un équilibre de surexploitation qu'un équilibre de pêcherie durable, et qu'il est possible de définir une stratégie basée sur le nombre de DCPs pour passer d'un état correspondant à la surexploitation à un autre de pêcherie durable. Les travaux effectués dans cette partie ont fait l'objet d'une publication [45]

Dans la deuxième partie, nous avons appliqué notre modèle de pêche classique sans échelle de temps avec prix variable à un ensemble de cas, comme le cas d'une population exploitée structurée en classes d'âge ou encore le cas d'une pêcherie avec stockage de la ressource. Nos résultats montrent que l'Equation du Prix du Marché ou MPE en anglais obtenue peut être généralisée à différents types de modèles de pêche présentant les mêmes dynamiques qualitatives aussi bien d'équilibre que de stabilité. Les travaux réalisés dans cette deuxième partie ont aussi fait l'objet d'une publication[46].

Chapitre 2

Outils Mathématiques Fondamentaux

2.1 Dynamique des populations

La dynamique des populations s'intéresse au développement numérique de toutes les populations d'êtres vivants, et plus particulièrement de celles des animaux sexués. Les répartitions de poids, la composition par âge des individus, l'environnement, la biologie des groupes, et les processus qui influent sur ces changements font également partie de son champ d'étude. Ces études ont pour but, outre de prévoir les accroissements ou diminutions des populations, de comprendre les influences environnementales sur les effectifs des populations. Des études sur ces sujets sont incontournables par exemple pour la gestion de la pêche, la gestion cynégétique, le management des zones protégées, le contrôle des populations d'animaux dits nuisibles... La dynamique des populations tente de comprendre les facteurs responsables des variations d'effectifs au sein d'une population. Les stocks de poissons commencent à s'épuiser et à ne plus pouvoir fournir la quantité de poissons exigée par l'homme.

L'article [25] nous dit que nul n'ignore que les récifs artificiels ont été utilisés de tout temps dans de nombreuses régions du monde. Il est par exemple établi qu'ils étaient présents il y a environ trois mille ans en mer Méditerranée, où les pierres servant à lester les cages à filet utilisées pour la pêche au thon (thonaires) étaient abandonnées et, avec le temps, s'accumulaient et formaient des sites attirant les poissons (Riggio et al., 2000).

Les définitions du récif artificiel diffèrent selon les pays et les régions. Pour favoriser une interprétation commune du terme, la définition ci-après a été adoptée, et à titre de référence : "Un récif artificiel est une structure immergée, construite ou placée délibérément sur le fond marin dans le but d'imiter certaines fonctions d'un récif naturel destinées à protéger, régénérer,

concentrer et/ou valoriser les peuplements de ressources marines vivantes”. Les objectifs d’un récif artificiel peuvent également être de protéger, restaurer et régénérer des habitats aquatiques, mais aussi **permettre d’augmenter la biomasse**, et donc la disponibilité, d’espèces de poissons commerciales, en valorisant leur survie, leur croissance et leur reproduction. Il faut pour cela accroître leur(s) habitat(s) préféré(s), notamment les frayères, les zones de nourrissage, les caches et les lieux de repos, en tenant compte des besoins aussi bien des adultes que des juvéniles.

Les récifs peuvent être conçus pour accueillir plusieurs espèces (en comportant des niches de formes et de tailles diverses) ou ils peuvent être destinés à une espèce particulière et adaptés à l’habitat requis par l’espèce ciblée.

Les récifs artificiels peuvent aussi être utilisés pour concentrer certains poissons dans un endroit particulier. Toutefois, ces récifs dits d’attraction jouent le rôle de pièges à poissons, ce qui en facilite la prise par les pêcheurs.

De tels récifs d’attraction sont couramment utilisés à des fins récréatives mais jouent également un rôle important dans la pêche artisanale, dans la mesure où :

1. la connaissance des lieux de récolte contribue à la sécurité de la récolte ;
2. les lieux proches de la côte renforcent la sécurité des pêcheurs utilisant de petites embarcations.

Les récifs artificiels sont destinés à subvenir aux besoins des communautés biologiques ou à les protéger. Il est donc important de bien cerner la biologie et l’écologie existantes du site proposé.

La connaissance des activités de pêche existant dans la zone déterminera le niveau d’exploitation des ressources et donc la valeur de la mise en place d’un récif dans cette zone. Elle aidera aussi à décider du nombre de structures ou de la taille du récif. Avant d’implanter un récif de valorisation de la pêche, il importe donc de disposer de données concernant :

1. la flottille ;
2. le lieu et l’état de la zone de pêche ;
3. les principales techniques de pêche utilisées ;

Les structures utilisées dans ce but comprennent une variété de modèles et peuvent être construites en plusieurs matériaux différents, selon l’habitat requis. Les récifs peuvent être conçus pour accueillir plusieurs espèces (en comportant des niches de formes et de tailles diverses) ou ils peuvent être destinés à une espèce particulière et adaptés à l’habitat requis par l’espèce ciblée. Parmi les divers modèles possibles, figurent des structures cellulaires ou alvéolaires, des structures mixtes, à matrice ou en treillis.

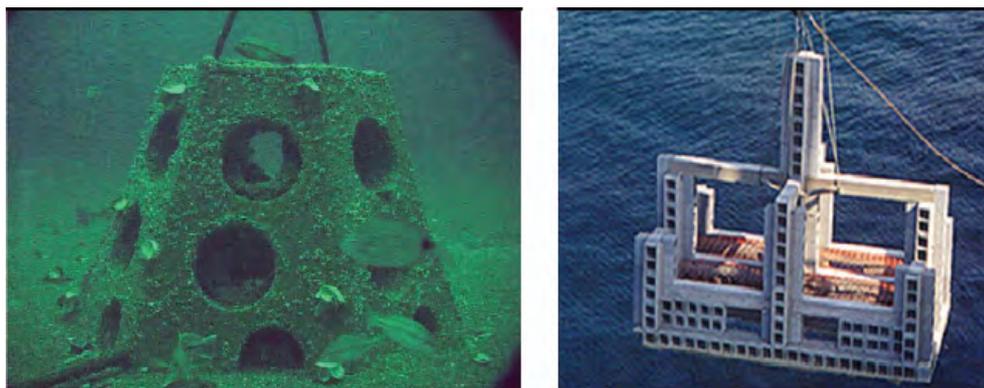


FIGURE 2.1 – Modèles de récifs artificiels destinés à fournir un habitat aux organismes marins



FIGURE 2.2 – Modules utilisés pour la restauration de récifs coralliens, mis en place par des plongeurs (à gauche), et après environ 70 jours (à droite).



FIGURE 2.3 – Modèles de Dispositif de Concentration des Poissons.

2.2 Systèmes dynamiques

Nous allons essayer de définir ce qu'on appelle un système dynamique en nous reportant aux ouvrages traitant du sujet. La définition la plus simple qu'on puisse trouver est : «Par système dynamique, il faut entendre tout système, quelle que soit sa nature qui évolue au cours du temps» ou encore la définition suivante : « Un système dynamique consiste en un ensemble d'états possibles et d'une règle qui détermine l'état actuel du système en fonction de ses états passés ». Le but principal de la théorie des systèmes dynamiques est de comprendre le comportement final ou asymptotique des variables du modèle lorsque le processus dynamique est décrit par une équation différentielle.

Définition 2.2.1. (Cas linéaire) Une Equation Différentielle Ordinaire (EDO) scalaire est une équation mettant en jeu une fonction $x(t) : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $m > 1$,

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(m)}) = 0,$$

où $x^{(m)}$ représente la dérivée d'ordre m de x par rapport à t et F est une fonction suffisamment régulière de $I \times \mathbb{R}^m$ dans \mathbb{R} . L'ordre d'une EDO est défini comme le plus grand ordre de dérivation présent dans l'équation, c'est à dire m . La variable t représente en général le temps dans des équations qui modélisent un processus d'évolution en temps.

2.2.1 Etude des systèmes dynamiques linéaires

Une équation différentielle est une équation qui contient la dérivée d'une ou de plusieurs fonctions dépendant d'une ou de plusieurs variables indépendantes. Si l'équation ne contient que des dérivées par rapport à une seule variable indépendante, l'équation est appelée équation différentielle ordinaire (EDO). Pour un exposé complet sur les systèmes linéaires, nous renvoyons à [31]. Considérons le système linéaire

$$\dot{x} = Ax(t), \tag{2.1}$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et A une matrice $n \times n$ à coefficients constants.

2.2.1.1 L'exponentielle d'une matrice

La matrice dépendant du temps $\exp(tA)$ est définie par la série absolument convergente de terme général et de somme :

$$\exp(tA) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \dots + \frac{t^k}{k!}A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!},$$

où I est la matrice identité. On appelle $t \mapsto \exp(tA)$ l'exponentielle de la matrice A . Quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, l'unique solution $x(t)$ du problème de Cauchy $\dot{x} = Ax(t)$, $x(0) = x_0$ s'exprime sous la forme

$$x(t) = \exp(tA)x_0.$$

2.2.1.2 Forme de Jordan et calcul de l'exponentielle

Le calcul de l'exponentielle de matrice $\exp(tA)$ peut être simplifié en faisant intervenir une transformation P inversible qui diagonalise A , lorsque c'est possible, ou qui transforme A en une matrice diagonale par blocs, dite matrice de Jordan (voir par exemple [31]). Le résultat suivant précise les notations.

Théorème 2.2.1. *Soit A une matrice $n \times n$ dont le polynôme caractéristique scindé sur \mathbb{C} s'écrit sous la forme*

$$\det(\lambda \mathbb{I}_N - A) = \prod_{i=1}^q (\lambda - \lambda_i)^{d_i},$$

d_i étant l'ordre de multiplicité algébrique de λ_i .

Il existe une matrice inversible P (à coefficients complexes) telle que

$$A = P^{-1}JP$$

où

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_q \end{pmatrix}$$

2.2.1.3 Points d'équilibre et stabilité

Une question importante est de connaître le comportement des trajectoires initialement voisines de l'équilibre et pour cela on définit la notion de stabilité d'un point d'équilibre. La stabilité est un des aspects essentiels dans l'étude des systèmes dynamiques linéaires et non-linéaires. C'est un concept qui a donné lieu à différentes terminologies qui vont être brièvement rappelées afin de préciser dans quelle acception le terme stabilité est utilisé dans cette thèse. Les points fixes (points d'équilibres) jouent un rôle capital dans l'étude des systèmes dynamiques. Henri Poincaré (1854-1912) montra que pour caractériser un système dynamique à plusieurs variables, il n'est pas nécessaire de calculer les solutions détaillées ; il suffit en effet de connaître les points fixes (points d'équilibres) et leurs stabilité. Ce résultat de grande importance simplifie considérablement l'étude des systèmes non-linéaires au voisinage de ces points. Alors pour déterminer la stabilité d'un point équilibre, il faut étudier le comportement des solutions dans un petit voisinage de celui-ci.

Définition 2.2.2. *Soit le système d'équations différentielles $\dot{x} = f(x)$ où $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. on dit que $x_0 \in \mathbb{R}^d$ est un équilibre si la fonction constante $x(t) = x_0$ est solution de $\dot{x} = f(x)$. C'est à dire $\dot{x} = f(x_0) = 0$.*

Pour tout point d'équilibre d'un système dynamique quelconque, il n'existe que trois types de stabilité : la stabilité asymptotique, la stabilité neutre, ou l'instabilité.

Définition 2.2.3. Un point d'équilibre (x^*, y^*) d'un système dynamique $\dot{x} = f(x)$ est dit **neutralement stable** si pour tout voisinage V de (x^*, y^*) , il existe un plus petit voisinage $V' \subseteq V$ de (x^*, y^*) tel que toute trajectoire traversant V' reste dans V lorsque t augmente.

Par exemple, les centres sont neutralement stables.

Définition 2.2.4. Un point d'équilibre (x^*, y^*) d'un système dynamique $\dot{x} = f(x)$ est dit **asymptotiquement stable** s'il est stable et s'il existe un voisinage V de (x^*, y^*) tel que toute trajectoire traversant V converge vers (x^*, y^*) lorsque t tend vers l'infini.

Par exemple, les foyers et les noeuds stables sont asymptotiquement stables.

La stabilité asymptotique impose que la limite des trajectoires lorsque $t \rightarrow \infty$ soit le point d'équilibre, tandis que la stabilité neutre impose seulement que les trajectoires restent dans un voisinage du point d'équilibre sans nécessairement tendre vers celui-ci.

Définition 2.2.5. Un point d'équilibre (x^*, y^*) d'un système dynamique $\dot{x} = f(x)$ qui n'est pas stable est dit **instable**.

2.2.1.4 Classification topologique des points d'équilibre

On appelle $\nu(p)$ le plus petit entier k tel que $\dim(\text{Ker}(A - \lambda_p I)^k) = \text{mult}(\lambda_p)$ où $(\text{mult}(\lambda_p))$ étant la multiplicité de λ_p dans le polynôme caractéristique de A et λ est dite valeur propre de A lorsque $\nu(k) > 1$.

Théorème 2.2.2. Soit $\dot{x} = Ax$ un système linéaire où A appartient à $\mathbb{R}^{d,d}$ (matrice de taille $d * d$) de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$.

- L'origine O est un équilibre uniformément stable si et seulement si $\forall i R_e(\lambda_i) \leq 0$ et il existe au moins un k tel que $R_e(\lambda_k) < 0$ pour les valeurs propres.
- L'origine O est un équilibre uniformément asymptotiquement stable si $\forall i R_e(\lambda_i) \leq -\sigma < 0$ et alors on a $\forall t \|\varphi(t, x_0)\| \leq K \|x_0\| e^{-\sigma t}$ avec $K > 0$ et $\sigma > 0$.
- S'il existe λ tel que $R_e(\lambda) > 0$ alors l'origine O est instable.

Démonstration. (voir [16, 21, 2])

□

Théorème 2.2.3. (CNS de stabilité asymptotique).

Soit le problème de Cauchy pour le système (2.1), $x(0) = x_0$ où A est une matrice $n \times n$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Ce système possède la propriété que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ quel que soit x_0 (c'est à dire que le point d'équilibre 0 est **globalement asymptotiquement stable**) si et seulement si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative.

Démonstration. Pour plus de détails voir [52]

□

On va donner une illustration du théorème 2.2.2 par le cas où $d = 2$ c'est à dire on considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

On suppose que A est inversible de sorte que l'origine O est le seul point d'équilibre. Les valeurs propres de la matrice A sont les valeurs λ solutions de l'équation caractéristique :

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad I : \text{matrice identité}$$

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0 \quad \text{équation caractéristique}$$

où $\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$ est la trace de A , et $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ son déterminant.

Le discriminant de l'équation caractéristique est $\Delta = (\operatorname{tr}(A))^2 - 4\det(A)$.

- A possède deux valeurs propres distinctes ($\Delta > 0$) : λ_1 et λ_2

Soient ε_1 et ε_2 les vecteurs propres correspondant à λ_1 et λ_2 : toute solution est de la forme $x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} \varepsilon_1 + a_2 e^{\lambda_2 t} \varepsilon_2$.

1. $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. Le point d'équilibre à l'origine O du portrait de phase est appelé un noeud ; toutes les trajectoires partant du point d'équilibre s'en éloignent, on a un noeud instable.
2. $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$. Quelle que soit la condition initiale, les trajectoires convergent vers le point d'équilibre, on a un noeud stable.
3. Si λ_1 et λ_2 sont de signes opposés par exemple $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$ alors l'origine O du portrait de phase est ici un point selle.

- A possède deux valeurs propres réelles identiques ($\Delta = 0$) : λ_0

(i) Dans le cas où A est diagonale

Si $\lambda_0 > 0$ on a une étoile instable et si $\lambda_0 < 0$ on a une étoile stable

(ii) Si A n'est pas diagonale

Si $\lambda_0 > 0$ l'origine est dans ce cas un noeud dégénéré instable. La droite à partir de laquelle les trajectoires changent de direction est la droite le long de laquelle les vecteurs vitesse sont verticaux et si $\lambda_0 < 0$ alors l'origine est un noeud dégénéré asymptotiquement stable.

- A possède deux valeurs complexes conjuguées ($\Delta < 0$) : $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

Dans le plan correspondant à ce cas de figure, les solutions correspondent à des spirales (sauf pour $\alpha = 0$), qui s'éloignent ou se rapprochent de $(0,0)$ en fonction du signe de α , et dont le sens de rotation est donné par le signe de β .

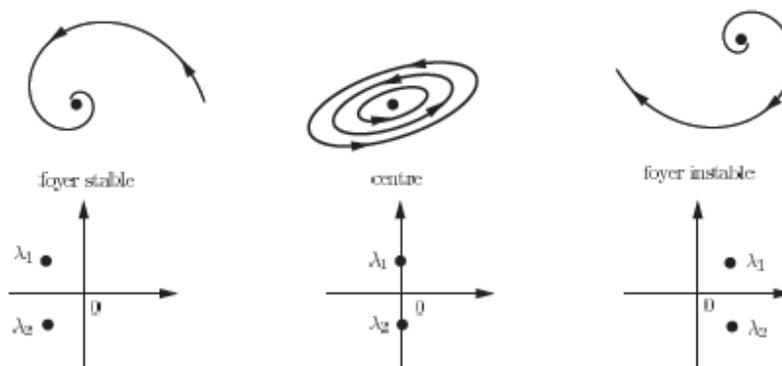


FIGURE 2.4 – Portraits de phases plans et linéaires lorsque les valeurs propres de A , λ_1 et λ_2 , ont une partie imaginaire non nulle.

2.2.2 Etude des systèmes dynamiques non linéaires

On considère des systèmes d'EDO couplées non linéaires :

$$\dot{x} = f(x) \quad , x \in S \subseteq \mathbb{R}^2 \tag{2.2}$$

où f est une fonction non linéaire continûment différentiable de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .

Par rapport à ce que nous avons vu pour les systèmes linéaires, il va falloir raisonner de manière locale au voisinage des points d'équilibre (méthode de linéarisation), et nous verrons que le portrait de phase global n'est pas toujours une réplique exacte du portrait de phase local au voisinage des points d'équilibre.

D'une manière générale, un système dynamique non linéaire peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{x} = \text{partie linéaire} + \text{partie non linéaire} \tag{F}$$

2.2.2.1 Linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre

Considérons un système dynamique général écrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, z) \\ \dot{y} = g(x, y, z) \\ \dot{z} = h(x, y, z) \end{cases}$$

et admettant un point d'équilibre (x^*, y^*, z^*) solution de :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x^*, y^*, z^*) = 0 \\ \dot{y} = g(x^*, y^*, z^*) = 0 \\ \dot{z} = h(x^*, y^*, z^*) = 0 \end{cases}$$

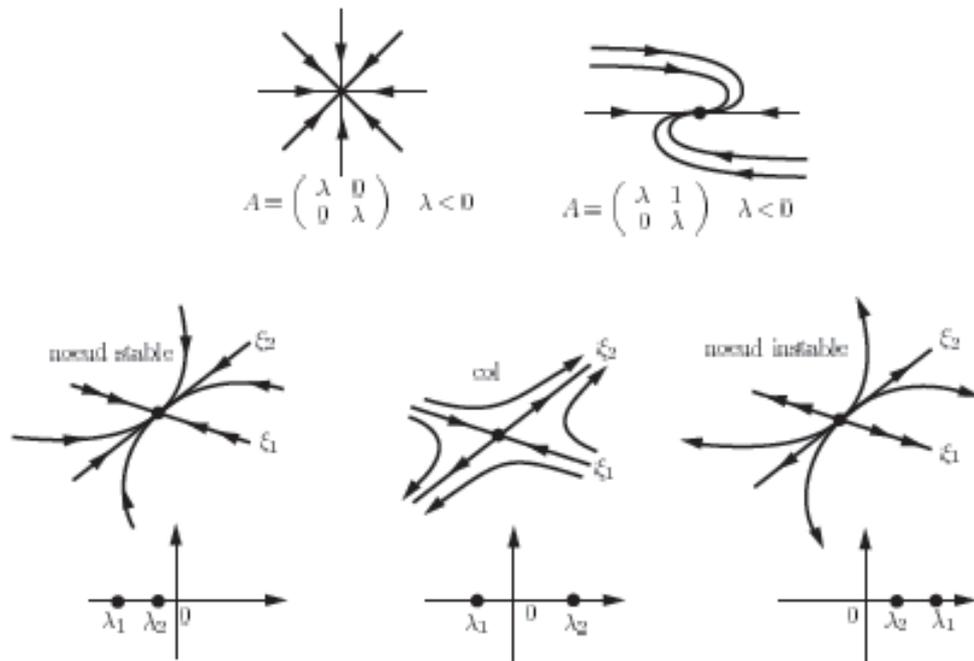


FIGURE 2.5 – Portraits de phases plans et linéaires, $\dot{x} = Ax$, lorsque les valeurs propres de A , λ_1 et λ_2 , sont réelles (ε_1 et ε_2 vecteurs propres de A , lorsqu'ils existent)

On introduit, comme dans \mathbb{R}^3 , les coordonnées locales (ou variables locales) :

$$\begin{cases} u = x(t) - x^* \\ v = y(t) - y^* \\ w = z(t) - z^* \end{cases}$$

On se place dans un voisinage de (x^*, y^*, z^*) et on procède à un développement en série de Taylor au premier ordre des fonctions f et g :

$$\begin{cases} \dot{u} = \dot{x} = f(x^*, y^*, z^*) + \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x^*, y^*, z^*)}(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(x^*, y^*, z^*)}(y - y^*) + \frac{\partial f}{\partial z}|_{(x^*, y^*, z^*)}(z - z^*) \\ \dot{v} = \dot{y} = g(x^*, y^*, z^*) + \frac{\partial g}{\partial x}|_{(x^*, y^*, z^*)}(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}|_{(x^*, y^*, z^*)}(y - y^*) + \frac{\partial g}{\partial z}|_{(x^*, y^*, z^*)}(z - z^*) \\ \dot{w} = \dot{z} = h(x^*, y^*, z^*) + \frac{\partial h}{\partial x}|_{(x^*, y^*, z^*)}(x - x^*) + \frac{\partial h}{\partial y}|_{(x^*, y^*, z^*)}(y - y^*) + \frac{\partial h}{\partial z}|_{(x^*, y^*, z^*)}(z - z^*) \end{cases}$$

Or $f(x^*, y^*, z^*) = g(x^*, y^*, z^*) = h(x^*, y^*, z^*) = 0$, d'où :

$$\begin{cases} \dot{u} = a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w \\ \dot{v} = a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w \\ \dot{w} = a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = A^* \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

où $A^* = [a_{ij}]$ est la matrice Jacobienne calculée au point d'équilibre avec :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ et } A^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x^*, y^*, z^*)} & \frac{\partial f}{\partial y}|_{(x^*, y^*, z^*)} & \frac{\partial f}{\partial z}|_{(x^*, y^*, z^*)} \\ \frac{\partial g}{\partial x}|_{(x^*, y^*, z^*)} & \frac{\partial g}{\partial y}|_{(x^*, y^*, z^*)} & \frac{\partial g}{\partial z}|_{(x^*, y^*, z^*)} \\ \frac{\partial h}{\partial x}|_{(x^*, y^*, z^*)} & \frac{\partial h}{\partial y}|_{(x^*, y^*, z^*)} & \frac{\partial h}{\partial z}|_{(x^*, y^*, z^*)} \end{pmatrix}.$$

Le système $\dot{U} = A^*U$ est un système linéaire qui approxime le système de départ au voisinage du point d'équilibre (x^*, y^*, z^*) . Ainsi, si un système possède plusieurs points d'équilibre, il y a aura autant de systèmes linéaires que de points d'équilibre.

2.2.2.2 Théorème de linéarisation et portrait de phase

Théorème 2.2.4. *Soit le système non-linéaire $\dot{x} = f(x)$ admettant un point d'équilibre et tel que $\det A^* \neq 0$ où A^* est la matrice Jacobienne associée au système au point d'équilibre. Alors, dans un voisinage du point d'équilibre, les portraits de phase du système et de sa forme linéarisée $\dot{U} = A^*U$ sont qualitativement équivalents, sous réserve que le système linéarisé ne corresponde pas à des centres.*

Portrait de phase dans \mathbb{R}^2

On peut définir en chaque point de la trajectoire un vecteur vitesse \vec{v} qui est tangent à la trajectoire et orienté dans le sens de parcours de celle-ci.

Les points d'équilibre sont tels que $\vec{v} = \vec{0}$

Définition 2.2.6. *On définit les isoclines **nulles verticales** comme le lieu des points du portrait de phase tel que la direction de \vec{v} soit strictement verticale, i.e., tel que la composante horizontale du vecteur vitesse soit nulle : $\vec{v}(0, y)$. Ainsi, les isoclines nulles verticales sont les courbes solutions de l'équation $\dot{x} = 0$.*

Définition 2.2.7. *On définit les isoclines **nulles horizontales** comme le lieu des points du portrait de phase tel que la direction de \vec{v} soit strictement horizontale, i.e., tel que la composante verticale du vecteur vitesse soit nulle : $\vec{v}(x, 0)$. Ainsi, les isoclines nulles horizontales sont les courbes solutions de l'équation $\dot{y} = 0$.*

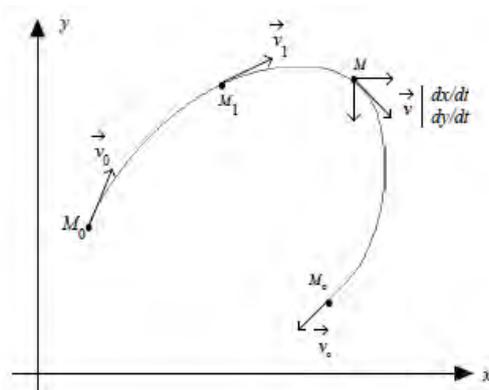


FIGURE 2.6 – Représentation fictive d'une trajectoire pour un système dynamique planaire donné.

Par définition, aux points d'équilibre, le vecteur vitesse est nul. Par conséquent, un point d'équilibre se trouve à l'intersection des isoclines nulles de nature différente (verticale et horizontale).

2.2.2.3 Les critères de Routh-Hurwitz

Soit A une matrice réelle carrée de dimension n et le système différentiel $\dot{x} = f(x)$ admettant comme point d'équilibre $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ tel que $f(x^*) = 0$.

Pour démontrer qu'un point d'équilibre est asymptotiquement stable, il faut donc a priori calculer les n valeurs propres λ_i de A et vérifier que $\forall i \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$. Une méthode algébrique a été développée par Routh et Hurwitz, basée sur le calcul de déterminants particuliers dits déterminants de Routh.

Supposons que le système $\dot{x} = f(x)$ soit linéarisé et s'écrive $\dot{U} = A^*U$. Les valeurs propres de A^* sont solutions de l'équation caractéristique :

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Les déterminants de Routh-Hurwitz sont définis de la manière suivante :

$$H_1 = |a_1|, \quad H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \dots$$

$$H_j = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{2j-1} & a_{2j-2} & a_{2j-3} & \dots & a_j \end{vmatrix} \quad \dots \quad H_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Proposition 2.2.1. Dans le cas d'une matrice de dimension n , les termes h_{jk} des déterminants de Routh-Hurwitz ($j, k=1, \dots, n$) sont définies de la manière suivante :

1. $h_{jk} = a_{2j-k}$ pour $0 < 2j - k \leq n$
2. $h_{jk} = 1$ pour $2j = k \iff 2j - k = 0$
3. $h_{jk} = 0$ pour $2j < k \iff 2j - k < 0$ ou $2j > n + k \iff 2j - k > n$

Proposition 2.2.2. x^* est asymptotiquement stable $\iff \forall i, \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \iff \forall i, H_i > 0$.

Dans \mathbb{R}^3 l'équation caractéristique est $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$, et les déterminants de Routh-Hurwitz s'écrivent :

$$H_1 = |a_1| = a_1 \quad H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3 \quad H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_3H_2$$

Les conditions de stabilité d'un point d'équilibre sont donc

$$\begin{cases} a_1 > 0 \\ a_1a_2 > a_3 \\ a_3 > 0 \end{cases}$$

2.2.2.4 Théorème de Poincaré-Bendixson

On s'intéresse ici à la description des solutions d'une équation différentielle du premier ordre autonome (c'est à dire en régime permanent, lorsque le champ de vitesse imposé ne dépend pas du temps). On peut l'écrire formellement :

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.3}$$

ceci dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^n et on suppose que f est continûment dérivable

Définition 2.2.8. (*Notion de flot*)

Etant donné un point x appartenant à Ω on note $\phi_t(x)$ la position de x après un déplacement d'une durée t ($t \in \mathbb{R}$). L'application $\phi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ est appelée le flot (associé au champ f) et vérifie :

1. $\frac{d}{dt}\phi_t(x) = f(\phi_t(x))$
2. $\phi_0(x) = x \quad \forall x \in \Omega$
3. $\phi_{t+s} = \phi_t\phi_s$

Notations : si x est un point de Ω on note $\gamma(x)$ la trajectoire issue de x et $\gamma^+(x)$ la demi trajectoire correspondant aux temps positifs :

$$\gamma(x) = \{\phi_t(x), t \in \mathbb{R}\},$$

$$\gamma^+(x) = \{\phi_t(x), t \in \mathbb{R}^+\}.$$

Définition 2.2.9 (Ensemble limite). Soit x un élément de Ω ; l'ensemble ω -limite de x noté $\omega(x)$ est défini par :

$$\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\phi_s(x), s \geq t\}}.$$

La notation ω signifie que l'on regarde l'ensemble limite de x vers les temps positifs. On pourrait aussi définir l'ensemble $\omega(x)$ de la manière suivante :

$$\omega(x) = \{y \in \Omega \mid \exists t_n \rightarrow \infty ; \phi_{t_n}(x) \rightarrow y\}$$

L'exemple le plus simple d'ensemble ω -limite est celui du point d'équilibre attractif.

Définition 2.2.10 (Point d'équilibre attractif). *On dit qu'un point d'équilibre est attractif (asymptotiquement stable) si, dans un voisinage, toutes les trajectoires s'en rapprochent.*

Si on se donne un point x dans ce voisinage, l'ensemble limite de x est alors constitué par le point d'équilibre attractif lui-même. On peut définir le **bassin d'attraction** du point d'équilibre (ensemble des points dont l'ensemble ω -limite est constitué du point d'équilibre) : c'est un ensemble positivement invariant.

Définition 2.2.11 (Ensembles invariants). *Un domaine D de Ω est un ensemble positivement invariant si et seulement si : $\forall t > 0, \phi_t(D) \subset D$.*

Un domaine invariant piège donc les trajectoires : si une trajectoire rentre dans D , elle n'en sort plus.

Définition 2.2.12 (Domaine attractant). *Un domaine D de Ω est un domaine attractant si D est compact et positivement invariant.*

Le théorème de Poincaré-Bendixson permet de décrire tous les ensembles ω -limites compacts d'un système dynamique **planaire**.

Théorème 2.2.5 (Poincaré-Bendixson). *Soit D un domaine attractant du plan pour le système dynamique (2.3) son ω -limite est soit :*

1. *Un point d'équilibre attractif;*
2. *Une trajectoire périodique (un cycle limite);*
3. *Une réunion de points d'équilibre reliés par des trajectoires régulières.*

Conséquence : Un ensemble limite ω -limite non vide compact d'un système dynamique planaire, qui ne contient pas de point d'équilibre, est une trajectoire périodique.

Preuve : voir [11, 29, 33, 15]

Corollaire 2.2.1. *S'il existe dans le plan un domaine attractant pour un système dynamique, et qui ne contient pas de point d'équilibre, ou qui contient un unique point d'équilibre instable, alors il existe au moins un cycle limite entièrement contenu dans ce domaine.*

Il n'est pas toujours facile d'obtenir un domaine attractant (on dit une « boîte » de Poincaré-Bendixson) qui permette d'appliquer le théorème ou le corollaire. Selon les systèmes, il sera parfois possible d'utiliser une fonction de Lyapunov pour arriver à nos fins.

2.2.2.5 Théorie de Lyapunov et Stabilité

Les fonctions de Lyapunov du système différentiel (2.3) dans \mathbb{R}^n sont utilisées pour étudier la stabilité des points d'équilibre et l'invariance de régions de \mathbb{R}^n .

Définition 2.2.13. Soit V une fonction de classe C^1 de $U \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R} . On appelle dérivée orbitale de V en $x \in U$ pour le flot ϕ_t la limite

$$\dot{V}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (V(\phi_t(x)) - V(x)) = DV(x)f(x).$$

Définition 2.2.14. Une fonction de Liapunov pour le système (2.3) est une fonction $V \in C^1(U)$ telle que $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout $x \in U$.

Théorème 2.2.6. (Théorème de stabilité de Liapunov) Soit \bar{x} un point d'équilibre du système (2.3). Soit $O \subset U$, et soit V une fonction de $C(O) \cap C^1(O \setminus \{\bar{x}\})$ telle que :

1. $V(\bar{x}) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq \bar{x}$

2. $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout $x \in O \setminus \{\bar{x}\}$

Alors \bar{x} est stable, Si de plus

3. $\dot{V}(x) < 0$ pour tout $x \in O \setminus \{\bar{x}\}$

Alors \bar{x} est asymptotiquement stable.

Démonstration. . Soit $\delta > 0$ tel que $B(\bar{x}, \delta) \subset O$. Notons $k > 0$ le minimum de V sur la frontière de $\bar{B}(\bar{x}, \delta)$. Soit $O_k = \{x \in B(\bar{x}, \delta) / V(x) < k\}$. Remarquons que O_k est un voisinage ouvert de \bar{x} . Pour toute solution de $\dot{x} = f(x)$ telle que $x(0) \in O_k$, on a $x(t) \in O_k$ pour tout $t > 0$ (c'est une conséquence de (2)). Par conséquent \bar{x} est stable.

Supposons que (3) est vérifié. Soit x_0 un point quelconque de $B(\bar{x}, r) \subset O_k$ (O_k est un voisinage de \bar{x} donc un tel $r > 0$ existe). La fonction $t \mapsto V(\phi_t(x_0))$ est décroissante et bornée inférieurement par 0. Soit L la limite de $V(\phi_t(x_0))$ quand $t \rightarrow \infty$. Si $L = 0$, alors la preuve est terminée. Sinon on a $\dot{V}(\phi_t(x_0)) \leq -c < 0$ pour tout $t \geq 0$, et on obtient une contradiction. \square

Théorème 2.2.7. Supposons que $C(O) \cap C^1(O \setminus \{\bar{x}\})$ vérifie les conditions (1) et (2) du théorème de stabilité de Liapunov. S'il existe un voisinage compact $\bar{\Omega} \subset O$ de \bar{x} tel que $\bar{\Omega}$ soit positivement invariant, et $\bar{\Omega} \setminus \bar{x}$ ne contient aucune orbite $(\phi_t(x))_{t \in \mathbb{R}}$ sur laquelle V est constante, alors \bar{x} est asymptotiquement stable et $\bar{\Omega}$ est contenu dans le domaine d'attraction de \bar{x} .

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Soit $(\phi_t(x_0))_{t > 0}$ une orbite contenue dans $\bar{\Omega}$ telle que $\phi_t(x_0)$ ne converge pas vers \bar{x} quand t tend vers l'infini. Il existe une suite $(t_n)_n$ tendant vers l'infini, et $a \neq \bar{x}$, $a \in \bar{\Omega}$, tels que $\lim_n \phi_{t_n}(x_0) = a$.

Montrons que la trajectoire $\phi_t(a)$ existe pour tout $t \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\bar{\Omega}$ étant positivement

invariant, $\phi_t(a)$ existe pour $t \geq 0$. De plus, $\phi_t(\phi_{t_n}(x_0))$ existe pour tout $t \in [-t_n, 0)$. Comme $\lim_n \phi_{t_n}(x_0) = a$, on en déduit $\phi_t(a)$ est défini sur $t \in [-t_n, 0)$.

En effet $a \in \overline{\Omega}$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon)$ tel que $|a - \phi_{t_n}(x_0)| < \varepsilon$ pour $n \geq N(\varepsilon)$. Donc $\phi_t(a) = \phi_t(\phi_{t_n}(x_0) + a - \phi_{t_n}(x_0))$ est bien défini si $n \geq N(\varepsilon)$ et si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit. Etant donné que $-t_n \rightarrow -\infty$, $\phi_t(a)$ est défini pour tout $t \leq 0$.

Soit $L = \{b \in \overline{\Omega} \mid \text{il existe une suite } (t_n)_n \text{ tendant vers l'infini telle que } \lim_n \phi_{t_n}(x_0) = b\}$. On a $\alpha = V(a) = \inf\{V(\phi_t(x_0)) \mid t \leq 0\}$. Donc tous les points de L sont tels que $V(b) = \alpha$. Montrons $\phi_s(a) \in L$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. On a $\lim_n \phi_{t_n+s}(x_0) = \phi_s(a)$, car $\phi_{t_n+s}(x_0) = \phi_s(\phi_{t_n}(x_0))$ et $\lim_n \phi_s(\phi_{t_n}(x_0)) = \phi_s(a)$. on en déduit que V est constante sur $(\phi_t(a))_{t \in \mathbb{R}}$, ce qui est en contradiction avec une des hypothèses. Le théorème est donc démontré. \square

Théorème 2.2.8. (*Théorème d'instabilité*) Soit \bar{x} un point d'équilibre du système $\dot{x} = f(x)$. Soit $O \subset U$ un voisinage de \bar{x} , et soit $V \in C^1(O)$. Supposons que

1. $V(\bar{x}) = 0$ et dans tout voisinage de \bar{x} il existe des points où v est strictement positive
2. $\dot{V}(x) > 0$ pour tout $x \in O$

alors \bar{x} est instable.

Preuve. Soit $r > 0$ tel que $B(\bar{x}, r) \subset O$. Grace à (1), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 \in B(\bar{x}, \varepsilon)$ tel que $V(x_0) > 0$. Comme $\dot{V} > 0$ sur $B(\bar{x}, \varepsilon)$, $V(\phi_t(x_0)) \geq V(x_0) + Kt$. On en déduit que $\phi_t(x_0) \notin B(\bar{x}, r)$ pour t assez grand (en effet si ce n'était pas le cas on aurait $\max_{B(\bar{x}, r)} V \geq V(\phi_t(x_0)) \geq V(x_0) + Kt$ pour tout $t \geq$, ce qui est absurde). Ce qui prouve que \bar{x} est instable.

2.2.3 Méthode d'agrégation des variables pour les EDO

Dans cette section, nous faisons un bref rappel sur les méthodes d'agrégation pour les systèmes d'EDO impliquant au moins deux échelles de temps différentes (lent et rapide). Les conditions suffisantes pour qu'un système soit parfaitement aussi bien approximativement agrégé ont été étudiées dans le cadre général de modèles de population dans [43, 31, 32] .

2.2.3.1 Définitions et notations

On considère un ensemble de plusieurs populations, appelé système, décomposé en sous-populations appelées états. Chaque état correspond par exemple à un site dans l'espace, ou bien à une activité, à un type de comportement.

On note n_i^α la densité de l'état i de la population α où $\alpha = 1, \dots, A$ et $i = 1, \dots, N_\alpha$. On dit que n_i^α est une variable d'état. Soit N_α le nombre d'états de la population α et A le nombre de populations. Enfin, on note n le vecteur dont les composantes sont les densités des états i de la population α .

$$(n_1^1, n_2^1, \dots, n_{N_1}^1, n_1^2, n_2^2, \dots, n_{N_2}^2, \dots, n_1^\alpha, n_2^\alpha, \dots, n_{N_\alpha}^\alpha, \dots, n_1^A, n_2^A, \dots, n_{N_A}^A).$$

La dynamique des états, donnée par la dérivée des variables d'états, est supposée rapide par rapport à la dynamique des populations, ceci signifie que l'on suppose que les migrations, c'est-à-dire les changements de milieux, où d'activités, se font rapidement par rapport à la croissance globale des populations, et à l'effet des interactions entre celles-ci.

A partir de ces notations, on propose alors un modèle initial suivant :

$$\frac{dn_i^\alpha}{d\tau} = F_i^\alpha(n) + \varepsilon f_i^\alpha(n). \quad (2.4)$$

Les fonctions F_i^α et f_i^α correspondent respectivement au processus rapide et lent qui affectent n_i^α et ε est un réel positif suffisamment petit ($\varepsilon \ll 1$). Le modèle (2.4) est décrit par un ensemble d'équations différentielles simples (O.D.E.) gouverné par plusieurs variables appelées micro-variables contenant K équations.

où K représente le nombre total de micro variable. Plus précisément, nous avons :

$$K = \sum_{\alpha=1}^A N_\alpha.$$

Nous voulons maintenant construire un modèle qui décrit le système au niveau macro variable. Une macro variable est une variable variant lentement, c'est une intégrale première de la dynamique rapide, plus précisément nous allons définir Y_j , $j = 1, \dots, N$. Une telle variable peut être définie comme une fonction de n . Le fait que Y_j est une variable lente signifie que sa dérivée par rapport à τ est de l'ordre ε :

$$Y_j = \phi_j(n) \quad ; \quad j = 1, \dots, N \quad (2.5)$$

$$\frac{dY_j}{d\tau} = \sum_{\alpha=1}^A \sum_{i=1}^{N_\alpha} \frac{\partial \phi_j(n)}{\partial n_i^\alpha} \frac{dn_i^\alpha}{d\tau} = 0(\varepsilon). \quad (2.6)$$

La seconde équation (2.6) associée à l'équation (2.4) implique l'égalité suivante :

$$\sum_{\alpha=1}^A \sum_{i=1}^{N_\alpha} \frac{\partial \phi_j(n)}{\partial n_i^\alpha} F_i^\alpha(n) = 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, N \quad (2.7)$$

D'où les équations de macro-variables s'écrit comme suite :

$$\frac{dY_j}{d\tau} = \varepsilon \sum_{\alpha=1}^A \sum_{i=1}^{N_\alpha} \frac{\partial \phi_j(n)}{\partial n_i^\alpha} f_i^\alpha(n) \quad ; \quad j = 1, \dots, N \quad (2.8)$$

Le système (2.8) est composé de N équations alors que le système initial (2.4) est composé de K équations.

Puisque le système est plus détaillé au niveau micro, nous devrions avoir $N \ll K$, pour utiliser les macro-variables, nous remplaçons les N micro-variables dans le modèle complet (2.4) par quelques expressions en fonction des macro-variables, et cela est possible dans les conditions suivantes :

Nous supposons que l'ensemble des N équations (2.6) permet d'écrire N variables parmi les micro-variables n_i^α , $\alpha = 1, \dots, A$ et $i = 1, \dots, N_\alpha$, comme une fonction des macro-variables Y_j nous avons donc traité K variables où N sont des macro-variables et $K - N$ sont des micro-variables. Ce système est formé par $K - N$ équation du système (2.4) et N équations du système (2.8). Autrement dit, nous effectuons un changement de variable $n \rightarrow (X, Y)$. Avec ce changement de variable, le système obtenu est celui que nous utilisons dans le prochain paragraphe ; il s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{dX_i}{d\tau} = F_i(X, Y) + \varepsilon f_i(X, Y) & i = 1, \dots, K - N \\ \frac{dY_j}{d\tau} = \varepsilon G_j(X, Y) & j = 1, \dots, N \end{cases} \quad (2.9)$$

Avec

$$G_j(X, Y) = \sum_{\alpha=1}^A \sum_{i=1}^{N_\alpha} \frac{\partial \phi_j(X, Y)}{\partial n_i^\alpha} f_i^\alpha(X, Y) \quad j = 1, \dots, N$$

Dans cette forme, le modèle est appelé un système lent-rapide.

2.2.3.2 Théorème de réduction

Afin d'effectuer l'analyse, nous ajoutons au système (2.9) l'équation $\frac{d\varepsilon}{d\tau} = 0$.

$$\begin{cases} \frac{dX_i}{d\tau} = F_i(X, Y) + \varepsilon f_i(X, Y) & i = 1, \dots, K - N & (a) \\ \frac{dY_j}{d\tau} = \varepsilon G_j(X, Y) & j = 1, \dots, N & (b) \\ \frac{d\varepsilon}{d\tau} = 0 & & (c) \end{cases} \quad (2.10)$$

Les composantes de la variable lente Y dans \mathbb{R}^N représentent les densités globales des populations, et les composantes de la variable rapide X dans \mathbb{R}^{K-N} représentent les densités d'états. Les conditions de la réduction sont les suivantes :

- (C1) Lorsque ε est nul dans le système (2.10) alors Y est une constante. Nous supposons que, pour chaque $Y \in \mathbb{R}^N$, il existe au moins un équilibre $(X = X^*(Y), Y, 0)$ défini par $F_i(X^*(Y), Y) = 0$, $i = 1, \dots, K - N$.

Nous définissons l'ensemble :

$$\mathcal{M}_0 = \{(X, Y, \varepsilon) ; X = X^*(Y) ; \varepsilon = 0\}. \quad (2.11)$$

- (C2) Notons $J(Y)$ de la partie linéaire du système (2.10) autour de l'équilibre $(X^*(Y), Y, 0)$. Nous supposons que la matrice Jacobienne $J(Y)$ à $K - N$ valeurs propres de partie réelles strictement négatives, et $N + 1$ valeurs propres de parties réelles nulles, avec cette condition l'ensemble \mathcal{M}_0 est normalement hyperbolique (Voir la définition suivante).

Définition 2.2.15. *La variété \mathcal{M}_0 est dite normalement hyperbolique si la linéarisation du système (2.10) en chaque point de \mathcal{M}_0 à exactement $N + 1$ valeurs propres de parties réelles nulles.*

Sous ces deux conditions et avec les mêmes notations, Fénichel a énoncé le théorème de réduction suivant :

Théorème 2.2.9. *Pour tout compact Ω de \mathbb{R}^N , et tout entier naturel $r > 1$, il existe un nombre réel ε_0 et une application ψ de classe C^r en Y et ε ,*

$$\begin{aligned} \psi : \Omega \times [0, \varepsilon_0] &\rightarrow \mathbb{R}^{K-N} \\ (Y, \varepsilon) &\mapsto X = \psi(Y, \varepsilon) \end{aligned}$$

tels que

- $\psi(Y, 0) = X^*(Y)$
- le graphe W est invariant pour le flot défini par le champ de vecteur (2.10)
- W est tangente à la centrale E^C en tout point $(X^*(Y), Y, 0) \in \mathcal{M}_0$.

E^C est l'espace propre associé aux valeurs propres de $J(Y)$ avec la partie réelle nulle. Cela signifie que nous pouvons considérer l'approximation de la restriction du système $X' = F_i(X, Y)$ à la variété centrale W , qui nous permet de réduire la dimension du modèle.

Le système réduit appelé modèle agrégé est la suivante :

$$\frac{dY_j}{dt} = G_j(\psi(Y, \varepsilon), Y),$$

décrit dans ce cas la dynamique lente sur la variété centrale avec $t = \varepsilon\tau$. Puisque ε est petit, nous approchons le système précédent par :

$$\frac{dY_j}{dt} = G_j(\psi(Y, 0), Y).$$

Ce système décrit dans ce cas l'approximation à l'ordre 0 de la dynamique lente. En outre, lorsque ψ est de classe C^r , nous pouvons calculer une expansion du développement de Taylor de la variété invariante par rapport au petit paramètre ε afin d'augmenter la précision du système réduit.

2.3 Optimisation statique

2.3.1 Optimisation sans contraintes

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que u est un minimum local de f , s'il existe un voisinage $\nu_u \subset U$ tel que $f(u) \leq f(v) \forall v \in \nu_u$. On définit de même un maximum local par la relation $f(u) \geq f(v), \forall v \in \nu_u$. Bien sur, on dira de même que u représente un maximum local de f si $-f$ possède un minimum local en u . Si $\forall v \in U, f(u) \leq f(v)$, on parlera alors de minimum global. Un extremum local est encore appelé extremum relatif et un extremum global est encore appelé

extremum strict.

Lorsque sur un voisinage pointé $\nu_u - \{u\}$ de u on a $f(u) < f(v)$, $\forall v \in \nu_u - \{u\}$, on dit que u est un minimum local strict de f .

2.3.2 Conditions d'optimalité

2.3.2.1 Conditions nécessaires du premier ordre

Les conditions que nous allons donner sont des conditions différentielles qui portent sur la dérivée de la fonction à minimiser.

Théorème 2.3.1 (Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre). *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle différentiable sur \mathbb{R}^n . Si x^* réalise un minimum (global ou local) de f sur \mathbb{R}^n alors*

$$\nabla f(x^*) = 0. \quad (2.12)$$

Définition 2.3.1. *Un point x^* de \mathbb{R}^n vérifiant $\nabla f(x^*) = 0$ est appelé point critique ou point stationnaire .*

La relation $\nabla f(x^*) = 0$ est aussi appelée équation d'Euler.

Démonstration. (Théorème 2.3.1) Voir [28]

2.3.2.2 Conditions nécessaires et suffisantes du second ordre

Théorème 2.3.2 (Condition nécessaire du second ordre). *Si x^* est un minimum local de la fonction f sur \mathbb{R}^n , alors $\nabla f(x^*) = 0$ et $y^T \nabla^2 f(x^*) y \geq 0 \forall y \in \mathbb{R}^n$ (i.e la matrice Hessienne $\nabla^2 f(x^*)$ est semi-définie positive).*

Théorème 2.3.3 (Condition suffisante du second ordre). *Soit x^* de \mathbb{R}^n . Si $\nabla f(x^*) = 0$ et si $y^T \nabla^2 f(x^*) y > 0 \forall y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ (i.e la matrice Hessienne $\nabla^2 f(x^*)$ est définie positive) alors x^* est un minimum local de la fonction f sur \mathbb{R}^n .*

2.3.3 Optimisation avec contraintes

Définition 2.3.2. *Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, et soit K un sous ensemble de \mathbb{R}^n . On s'intéresse à la recherche de $\bar{u} \in K$ tel que :*

$$\begin{cases} \bar{u} \in K \\ f(\bar{u}) = \inf_K f \end{cases} \quad (2.13)$$

Ce problème est un problème de minimisation avec contrainte (ou “sous contrainte”) au sens où l’on cherche u qui minimise f en astreignant u à être dans K . Voyons quelques exemples de ces contraintes (définies par l’ensemble K), qu’on va expliciter à l’aide des p fonctions continues, $g_i \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $i = 1 \dots p$.

1. **Contraintes d’égalités.** On pose $K = \{x, g_i(x) = 0, i = 1 \dots p\}$. Le problème de minimisation de f peut alors être résolu grâce au théorème des multiplicateurs de Lagrange.
2. **Contraintes d’inégalités.** On pose $K = \{x \in E, g_i(x) \leq 0, i = 1 \dots p\}$. Le problème de minimisation de f peut alors être résolu grâce au théorème de Kuhn-Tucker.

2.3.3.1 Conditions d’optimalité dans le cas de contraintes d’égalités

Dans tout ce paragraphe, on considérera les hypothèses et notations suivantes :

$$\begin{cases} f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), g_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), i = 1 \dots p; \\ K = \{u \in \mathbb{R}^n, g_i(u) = 0, \forall i = 1 \dots p\}; \\ g = (g_1, \dots, g_p)^t \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p). \end{cases} \quad (2.14)$$

Remarque 2.3.1. (Quelques rappels de calcul différentiel).

Comme $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, si $u \in \mathbb{R}^n$, alors $Dg(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ ce qui revient à dire, en confondant l’application linéaire $Dg(u)$ avec sa matrice, que $Dg(u) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Par définition, $Im(Dg(u)) = \{Dg(u)z, z \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^p$ et $rang(Dg(u)) = dim(Im(Dg(u))) \leq p$. On rappelle de plus que

$$Dg(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

et que $rang(Dg(u)) \leq \min(n, p)$. De plus, si $rang(Dg(u)) = p$, alors les vecteurs $(Dg_i(u))_{i=1 \dots p}$ sont linéairement indépendants dans \mathbb{R}^n .

Théorème 2.3.4. (Multipliateurs de Lagrange)

Soit $\bar{u} \in K$ tel que $f(\bar{u}) = \inf_K f$. On suppose que f est différentiable en \bar{u} et $dim(Im(Dg(\bar{u}))) = p$ (ou $rang(Dg(\bar{u})) = p$), alors :

$$\text{il existe } (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^t \in \mathbb{R}^p \text{ tels que } \nabla f(\bar{u}) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla g_i(\bar{u}) = 0.$$

Pour la preuve se référer à [28].

2.3.3.2 Conditions d’optimalité dans le cas de contraintes d’inégalités

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $g_i \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, p$, on considère maintenant un ensemble K de la forme : $K = \{x \in \mathbb{R}^n, g_i(x) \leq 0 \forall i = 1, \dots, p\}$, et on cherche à résoudre le problème de

minimisation (3.10) qui s'écrit :

$$\begin{cases} \bar{x} \in K, \\ f(\bar{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in K. \end{cases} \quad (2.16)$$

Remarque 2.3.2. Soit \bar{x} une solution de (3.10) et supposons que $g_i(\bar{x}) < 0$, pour tout $i \in 1, \dots, p$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que si $x \in B(\bar{x}, \varepsilon)$ alors $g_i(x) < 0$ pour tout $i = 1, \dots, p$.

On a donc $f(\bar{x}) \leq f(x)$, $x \in B(\bar{x}, \varepsilon)$. On est alors ramené à un problème de minimisation sans contrainte, et si f est différentiable en \bar{x} , on a donc $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

Théorème 2.3.5. (Kuhn-Tucker). Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, soit $g_i \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ pour $i = 1, \dots, p$, et soit $K = \{x \in \mathbb{R}^n, g_i(x) \leq 0 \forall i = 1, \dots, p\}$. On suppose qu'il existe \bar{x} solution de (3.10), et on pose $I(\bar{x}) = \{i = 1, \dots, p \text{ tel que } g_i(\bar{x}) = 0\}$. On suppose que f est différentiable en \bar{x} et que la famille (de \mathbb{R}^n) $\nabla g_i(\bar{x})$, $i \in I(\bar{x})$ est libre. Alors il existe une famille $(\lambda_i)_{i \in I(\bar{x})} \subset \mathbb{R}_+$ telle que

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0.$$

Dans la pratique, on a intérêt à écrire la conclusion du théorème de Kuhn-Tucker (i.e. l'existence de la famille $(\lambda_i)_{i \in I(\bar{x})}$) sous la forme du système de $n + p$ équations et $2p$ inéquations à résoudre suivant :

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0, \\ \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \lambda_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, p. \end{cases} \quad (2.17)$$

2.4 Théorie du contrôle

Qu'est ce que c'est la théorie du contrôle? La théorie du contrôle analyse la propriété des systèmes commandés, c'est à dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard... L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal). Les domaines d'application sont multiples : aérospatiale, automobile, robotique, aéronautique, internet et les communications en général, mais aussi le secteur médical, chimique, génie des procédés, etc.

Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des

équations différentielles, intégrales fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, etc. Pour cela la théorie du contrôle est l'interconnexion de nombreux domaines mathématiques. Les contrôles sont des fonctions ou des paramètres, habituellement soumis à des contraintes. Si on peut amener (en temps fini) un système de contrôle d'un état initial à un état final prescrit, on dit que le système est contrôlable. Une fois le problème de contrôlabilité posé on peut de plus vouloir passer de l'état initial à l'état final en minimisant un certain critère : on parle alors de contrôle optimal.

La théorie du contrôle optimal est apparue après la seconde guerre mondiale, répondant à des besoins pratiques de guidage, notamment dans le domaine de l'aéronautique et de la dynamique du vol. Le point clé de cette théorie est le principe du maximum de Pontryagin, formulé par L.S. Pontryagin en 1956, qui donne une condition nécessaire d'optimalité et permet de calculer les trajectoires optimales. Les points forts de la théorie ont été la découverte de la méthode de programmation dynamique, la découverte des liens entre les solutions d'un problème de contrôle optimal et des résultats de la théorie de stabilité de Lyapunov etc.

Notons que l'allure des trajectoires optimales dépend forcément du critère d'optimisation. Par exemple pour réaliser un créneau et garer sa voiture, il est bien évident que la trajectoire suivie diffère si on réalise l'opération en temps minimal ou bien en minimisant la quantité d'essence dépensée. Le plus court chemin entre deux points n'est donc pas forcément la ligne droite. En 1638, Galilée étudie le problème suivant : déterminer la courbe sur laquelle une bille roule, sans vitesse initiale, d'un point A à un point B, avec un temps de parcours minimal, sous l'action de la pesanteur. C'est le fameux problème de la brachistochrone (du grec brakhistos, "le plus court", et chronos, "temps"). Galilée pense (à tort) que la courbe cherchée est l'arc de cercle, mais il a déjà remarqué que la ligne droite n'est pas le plus court chemin en temps. En 1696, Jean Bernoulli pose ce problème comme défi aux mathématiciens de son époque. Il trouve lui-même la solution comme étant un arc de cycloïde commençant par une tangente verticale. Ce résultat a motivé le développement de la théorie du calcul des variations, devenue plus tard, la théorie du contrôle optimal. Cette théorie a commencé dans les années 50, avec la formulation du principe du maximum de Pontryagin, qui généralise les équations d'Euler-Lagrange du calcul des variations.

2.4.1 Contrôlabilité

Considérons un système de contrôle général

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.18)$$

où f est une application de classe C^1 de $I \times V \times U$ dans \mathbb{R}^n , I est un intervalle de \mathbb{R} , V ouvert de \mathbb{R}^n , U un ouvert de \mathbb{R}^m , $(t_0, x_0) \in I \times V$. Ces hypothèses assurent, pour tout contrôle u , l'existence et l'unicité sur d'une solution maximale $x_u(t)$ sur un intervalle $P \subset I$, du problème

de Cauchy (2.18).

En général le vecteur des états $x(t)$ appartient à une variété différentielle M de dimension n (on supposera ici que M est un ouvert connexe de \mathbb{R}^n), et les contrôles $u(\cdot)$ appartiennent à un ensemble de contrôles admissibles \mathcal{U} , qui est un ensemble de fonctions localement intégrables définies sur $[0; +\infty)$ à valeurs dans $U \subset \mathbb{R}^m$. On suppose le champ de vecteur f suffisamment régulier, de sorte que pour toute condition initiale $x_0 \in M$ et tout contrôle admissible $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, le système (2.18) admet une unique solution $x(t)$ telle que $x(0) = x_0 = x_u(0)$, et que cette solution soit définie sur $[0; +\infty)$.

Un système est dit contrôlable si on peut le ramener à tout état prédéfini au moyen d'un contrôle. Plus précisément on pose les définitions suivantes.

Définition 2.4.1. (*Ensemble accessible*).

L'ensemble accessible en temps T pour le système (2.18) noté $\text{Acc}(x_0; T)$ est l'ensemble des extrémités au temps T des solutions du système partant de x_0 au temps $t = 0$. C'est l'ensemble des destinations possibles en temps T du système (2.18) en faisant varier le contrôle u .

Définition 2.4.2. On dit que le système (2.18) est contrôlable (ou commandable) si pour tous les états $x_0, x_1 \in M$, il existe un temps fini T et un contrôle admissible $u(\cdot) : [0; T] \rightarrow U$ tel que $x_1 = x(T; x_0; u(\cdot)) = x_u(T)$.

Considérons le système suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.19)$$

où A est une matrice $n \times n$ appelée matrice d'état et B une matrice $n \times m$ appelée matrice de commande. Les solutions de (2.19) sont données par :

$$x(t, x_0, u(\cdot)) = x_0 e^{tA} + \int_0^t Bu(s) ds. \quad (2.20)$$

Le système linéaire (2.19) s'obtient généralement par linéarisation du système non linéaire (2.18) autour d'un point d'équilibre $(x_e; u_e)$ pour lequel $f(x_e; u_e) = 0$. En effet, si on pose

$$X = x - x_e, \quad U = u - u_e, \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e; u_e), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_e; u_e)$$

On obtient alors l'équation :

$$\dot{X} = AX + BU, \quad (2.21)$$

Le système linéaire commandé $\dot{X} = AX + BU$ s'appelle alors l'approximation linéaire (ou le linéarisé tangent) du système non linéaire (2.18).

Théorème 2.4.1 (Critère de contrôlabilité de Kalman). *Le système linéaire (2.19) est contrôlable si et seulement si la matrice de contrôlabilité (ou de commandabilité) de Kalman*

$$(B; AB; \dots; A^{n-1}B),$$

est de rang n . On dit alors que la paire $(A; B)$ est commandable.

2.4.1.1 Contrôlabilité locale d'un système non linéaire

Définition 2.4.3. On dit que le système (2.18) est localement contrôlable au point x_0 s'il existe un voisinage \mathcal{A} de x_0 tel que pour tout $x_1 \in \mathcal{A}$, il existe un temps fini T et un contrôle admissible $u(\cdot) : [0; T] \rightarrow U$ tel que $x_1 = x(T; x_0; u(\cdot))$.

On ne dispose pas de condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité pour un système non linéaire. On a une condition suffisante de contrôlabilité locale qu'on peut obtenir par linéarisation (voir article [42], p. 32 et 366).

Théorème 2.4.2. Supposons qu'il existe $u_0 \in \mathbb{R}^m$ tel que U soit un voisinage de u_0 et $f(x_0; u_0) = 0$. Soient

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; u_0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0; u_0)$$

Si le rang de la matrice $(B; AB; \dots; A^{n-1}B)$ est égal à n (c'est à dire que le système linéaire $\dot{x} = Ax + Bu$ est contrôlable), alors le système non linéaire (2.18) est localement contrôlable en x_0 .

Notons que la contrôlabilité du linéarisé n'est pas une condition nécessaire de contrôlabilité du système non linéaire. En fait, pour les systèmes non linéaires, il existe un critère simple, rappelant le critère de Kalman, qui permet d'aborder les questions de contrôlabilité. Expliquons le sur le système particulier

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), \quad |u| \leq 1$$

On appelle crochet de Lie des deux champs de vecteurs f et g , le champ de vecteur défini par la formule :

$$x \rightarrow [f; g](x) = Df(x)g(x) - Dg(x)f(x),$$

et l'algèbre de Lie engendrée par f et g , notée $\mathcal{L}(f; g)$, la plus petite famille close pour l'opération de crochet qui contienne f et g . Le rang en x de $(f; g)$ est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les valeurs en x des éléments de $\mathcal{L}(f; g)$. Appelons ensemble des états accessibles à partir de x_0 l'ensemble des points qui peuvent être atteints à partir de x_0 un utilisant tous les contrôles admissibles. Un résultat fondamental est que, si le rang en x_0 de $(f; g)$ est égal à n , alors l'ensemble des états accessibles à partir de x_0 est d'intérieur non vide. De ce résultat on déduit le critère de Kalman. En effet, considérons le système

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad u \in \mathbb{R}$$

où le contrôle u est non borné. Les états accessibles du système

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad |u| \leq 1$$

sont contenus dans l'espace vectoriel des états contrôlable à partir de x_0 du système où le contrôle est non borné. Si ces états accessibles sont d'intérieur non vide quel que soit x_0 le système sera contrôlable, puisqu'un sous espace vectoriel d'intérieur non vide est l'espace tout entier. Calculons les crochets :

$$\begin{aligned} [(x \rightarrow Ax), (x \rightarrow b)](x) &= Ab, \\ [(x \rightarrow Ax), (x \rightarrow Ab)](x) &= A^2b, \\ &\vdots \\ [(x \rightarrow Ax), (x \rightarrow A^{n-2}b)](x) &= A^{n-1}b, \end{aligned}$$

On voit que le critère de Kalman équivaut à la condition du rang. Un exposé complet sur quelques aspects élémentaires de cette méthode se trouve dans [35, 44]

2.4.2 Contrôle optimal

Le concept de la formulation d'un problème de contrôle optimal exige une description mathématique du processus à contrôler, une proclamation des contraintes physiques et la détermination du critère de performance.

La formulation d'un problème de contrôle optimal est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(T, u) = \int_0^T f^0(t, x_u(t), u(t))dt + g(T, x(T)), \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ x(t_0) = x_0 \in M_0, \\ x(T) = x_1 \in M_1, \\ u \in U; \quad t \in T = [0, T] \end{array} \right. \quad (2.22)$$

avec M_0 et M_1 sont deux variétés de \mathbb{R}^n , I un intervalle de \mathbb{R} , $x_0 = x(0)$ est la position initiale du système (2.18), $x(T)$ est sa position terminale (finale). En pratique, la position du système peut représentée la vitesse, la position, la température, etc.

Soit f^0 est une application de classe C^1 de $I \times V \times U$, et g une fonction continue sur V . Pour tout contrôle $u \in \mathcal{U}$ on définit le coût de la trajectoire associée $x_u(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$

$$J(T, u) = \int_0^T f^0(t, x_u(t), u(t))dt + g(T, x(T)) \quad (2.23)$$

Le problème de contrôle optimal est de déterminer les trajectoires $x_u(\cdot)$ solutions de

$$\dot{x}_u(t) = f(t, x_u(t), u(t)) \quad (2.24)$$

telles que $x_u(0) \in M_0$, $x_u(T) \in M_1$ et minimisant le coût $J(T, u)$. On dit que le problème de contrôle optimal est à *temps final non fixé* si le temps T est libre, sinon on parle de problème à *temps final fixé*. On distingue deux problèmes importants :

Problème de Lagrange

C'est le problème dont le critère à minimiser est égal à :

$$J(T, u) = \int_0^T f^0(t, x_u(t), u(t)) dt$$

c'est à dire $g \equiv 0$

Problème de Mayer

Ici c'est le problème dont le critère est le suivant :

$$J(T, u) = g(T, x(T))$$

c'est à dire $f^0 = 0$, $J(T, u)$ est le coût terminal.

Avant de résoudre un problème de contrôle optimal, on se pose les questions suivantes :

Question 1 : Existe-t-il un contrôle $u \in U$ tel que la trajectoire associée à u joigne l'état initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ à un état final $x_1 \in \mathbb{R}^n$ en un temps fini ? C'est le problème de contrôlabilité appelé aussi problème de commandabilité.

Question 2 : Si le système est contrôlable, on peut vouloir déterminer un contrôle $u \in U$ tel que la trajectoire associée à ce contrôle joigne l'état initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ à un état terminal $x_1 = x(T) \in \mathbb{R}^n$, en minimisant un certain critère de performance.

2.4.3 Principe du Maximum de Pontryagin

2.4.3.1 Enoncé générale

Théorème 2.4.3. *On considère le système de contrôle dans \mathbb{R}^n*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \tag{2.25}$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 et où les contrôles sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle $[0, t_e(u)[$ de \mathbb{R}^+ et à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Soient M_0 et M_1 deux ensembles de \mathbb{R}^n . On note \mathcal{U} l'ensemble des contrôles admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final de M_1 en temps $t(u) < t_e(u)$

Par ailleurs on définit le coût d'un contrôle u sur $[0, t]$

$$c(t, u) = \int_0^t f^0(s, x(s), u(s)) ds + g(t, x(t)), \tag{2.26}$$

où $f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont C^1 et $x(\cdot)$ est la trajectoire de (2.25) associée au contrôle u . On considère le problème de contrôle optimal suivant : déterminer une trajectoire reliant M_0 et M_1 et minimisant le coût. Le temps final peut être fixé ou non.

* Si le contrôle $u \in \mathcal{U}$ associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[0, T]$ alors il existe une application $p(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue appelée vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$, tels que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial et tels que, pour presque tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)),\end{aligned}\quad (2.27)$$

où $H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 f^0(t, x, u)$ est le Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur $[0, T]$

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, v) \quad (2.28)$$

* Si de plus le temps final pour joindre la cible M_1 n'est pas fixé, on a la condition au temps final T

$$\max_{v \in \Omega} H(T, x(T), p(T), p^0, v) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)) \quad (2.29)$$

* Si de plus M_0 et M_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents en $x(0) \in M_0$ et $x(T) \in M_1$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités (ou juste l'une des deux).

$$p(0) \perp T_{x(0)} M_0 \quad (2.30)$$

$$p(T) - p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)) \perp T_{x(T)} M_1 \quad (2.31)$$

Remarque 2.4.1. Si le contrôle u est continu au temps T , la condition (2.29) peut s'écrire

$$H(T, x(T), p(T), p^0, u(T)) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)) \quad (2.32)$$

Remarque 2.4.2. Si la variété M_1 s'écrit sous la forme

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n / F_1(x) = \dots = F_p(x) = 0\} \quad (2.33)$$

où les F_i sont des fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R}^n , alors la condition (2.31) se met sous la forme

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} / p(T) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla F_i(x(T)) + p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)) \quad (2.34)$$

Remarque 2.4.3. Dans les conditions du théorème on a de plus pour presque tout $t \in [0, T]$

$$\frac{d}{dt} H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(t, x(t), p(t), p^0, u(t))$$

En particulier si le système augmenté est autonome, c'est à dire si f et f^0 ne dépendent pas de t , et on a : $\forall t \in [0, T]$

$$\max_{v \in \Omega} H(x(t), p(t), p^0, v) = Cste$$

Cette égalité est valable partout sur $[0, T]$

Remarque 2.4.4. La convention $p^0 \leq 0$ conduit au principe du maximum.

La convention $p^0 \geq 0$ conduirait au principe du minimum c'est à dire la condition (3.3.3) serait une condition de minimum

Remarque 2.4.5. Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^m$, i.e. lorsqu'il n'y a pas de contraintes sur le contrôle, la condition de maximum (3.3.3) devient $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0$ et on retrouve le principe du maximum faible (2.27)

Définition 2.4.4. Une extrémale du problème de contrôle optimal est un quadruplet $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ solution des équations (2.27) et (3.3.3). Si $p^0 = 0$, on dit que l'extrémale est anormale et si $p^0 \neq 0$ l'extrémale est dite normale.

Remarque 2.4.6. Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^m$, c'est à dire lorsqu'il n'y a pas de contraintes sur le contrôle, alors la trajectoire $x(\cdot)$, associée au contrôle $u(\cdot)$, est une trajectoire singulière du système

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (2.35)$$

si et seulement elle est projection d'une extrémale anormale $(x(\cdot), p(\cdot), 0, u(\cdot))$.

Ceci résulte en effet de la caractérisation Hamiltonienne des trajectoires singulières, cf proposition 1 de [47]. Remarquons que puisque $p^0 = 0$, ces trajectoires ne dépendent pas du coût. Elles sont intrinsèques au système. Le fait qu'elles puissent pourtant être optimales s'explique de la manière suivante : en générale, une trajectoire singulière a une propriété de rigidité, c'est à dire la seule trajectoire joignant ses extrémités, et donc en particulier elle est optimale, ceci est indépendant du critère d'optimisation choisi.

Ce lien entre extrémales anormales et trajectoires singulières, pour $\Omega = \mathbb{R}^m$, montre bien la difficulté liée à l'existence éventuelle de telles trajectoires.

Définition 2.4.5. Les conditions (2.30) et (2.31) sont appelées **conditions de transversalité sur le vecteur adjoint**. La condition (2.29) est appelée **condition de transversalité sur le Hamiltonien**. Elles sont ici écrites de manière très générale, et dans les paragraphes suivants nous allons les réécrire plus simplement.

Remarque 2.4.7. Le problème important du temps minimal correspond à $f^0 = 1$ et $g = 0$, où bien à $f^0 = 0$ et $g(t, x) = t$. Dans les deux cas les conditions de transversalité sont bien les mêmes

Remarque 2.4.8. Il existe des versions plus générales du principe du maximum, pour des dynamiques non lisses ou hybrides.

2.4.3.2 Conditions de transversalité

Conditions de transversalité sur le vecteur adjoint

Dans ce paragraphe le temps final pour atteindre la cible peut être fixé ou non. Réécrivons les conditions (2.30) et (2.31) dans les deux cas importants suivants.

-Problème de Lagrange

Dans ce cas le coût s'écrit

$$C(t, u) = \int_0^T f^0(s, x(s), u(s)) ds$$

c'est à dire $g = 0$ les conditions de transversalité (2.30) et (2.31) sur le vecteur adjoint s'écrivent alors

$$p(0) \perp T_{x(0)} M_0; \quad p(T) \perp T_{x(T)} M_1 \quad (2.36)$$

Remarque 2.4.9. *Si par exemple $M_0 = \{x_0\}$, la condition (2.30) devient vide. Si au contraire $M_0 = \mathbb{R}^n$, c'est à dire si le point initial n'est pas fixé, on obtient $p(0) = 0$.*

De même si $M_1 = \mathbb{R}^n$, on obtient $p(T) = 0$. Autrement dit si le point final est libre alors le vecteur adjoint au temps final est nul.

-Problème de Mayer

Dans ce cas le coût s'écrit

$$C(t, u) = g(t, x(t)),$$

i.e $f^0 = 0$. Les conditions de transversalité (2.30) et (2.31) (ou (2.33)) ne se simplifient pas à priori. Mais dans le cas particulier important où $M_1 = \mathbb{R}^n$, autrement dit le point final $x(T)$ est libre, la condition (2.31) devient

$$p(T) = p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)).$$

Si de plus g ne dépend pas du temps, on a coutume d'écrire

$$p(T) = p^0 \nabla g(x(T)),$$

autrement dit le vecteur adjoint au temps final est égal, à la constante p^0 près, au gradient de g pris au point final.

Conditions de transversalité sur le Hamiltonien

La condition (2.29) n'est valable que si le temps final pour atteindre la cible n'est pas fixé. Dans ce paragraphe nous nous plaçons donc dans ce cas.

La seule simplification notable de cette condition est le cas où la fonction g ne dépend pas du temps t (ce qui est vrai pour un problème de Lagrange) et la condition de transversalité (2.29) sur le Hamiltonien devient alors

$$\max_{v \in \Omega} H(T, x(T), p(T), p^0, v) = 0,$$

ou encore, si u est continu au temps T ,

$$H(T, x(T), p(T), p^0, u(T)) = 0.$$

Autrement dit le *Hamiltonien s'annule au temps final*

Remarque 2.4.10. Si le système augmenté est de plus autonome, i.e si f et f^0 ne dépendent pas de t alors d'après la remarque (2.4.3) on a le long d'une extrémale $\forall t \in [0, T]$

$$\max_{v \in \Omega} H(T, x(T), p(T), p^0, v) = 0,$$

Généralités sur les conditions de transversalité

Pour écrire les conditions de transversalité associées à un problème de contrôle plus général, il faut écrire les relations adéquates en termes de multiplicateurs de Lagrange.

Par exemple considérons un problème de Lagrange avec des conditions aux limites mélangées, i.e on cherche une trajectoire solution de

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

minimisant le coût

$$C(T, u) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt,$$

et vérifiant les conditions aux limites $(x(0), x(T)) \in M$ où M est une sous variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

On peut alors montrer que dans ce cas les conditions de transversalité (2.30) et (2.31) sur le vecteur adjoint s'écrivent

$$(-p(0), p(T)) \perp T_{(x(0), x(T))} M.$$

Un cas important de conditions mélangées est le cas des trajectoires périodiques, i.e $x(0) = x(T)$ non fixé. Dans ce cas on a

$$M = \{(x, x) / x \in \mathbb{R}^n\},$$

et la condition de transversalité donne

$$p(0) = p(T).$$

Autrement dit, non seulement la trajectoire est périodique, mais aussi son relèvement extrémal.

Chapitre 3

Théorie du contrôle en dynamique des populations

Dans cette partie nous nous fixons comme objectif de déterminer la position optimale où devraient être placés les Habitats artificiels communément appelés Fish Agregating Devices (FADs) ou plus simplement les Dispositifs de Concentration des Poissons (DCPs) dans un endroit bien déterminé de la mer tout en préservant la ressource . Notre travail tourne autour de trois points : en premier lieu nous faisons une étude d'un problème d'optimisation statique avec deux fonctionnelles ou l'une généralise l'autre, ensuite un problème d'optimisation avec contraintes d'un modèle agrégé en utilisant la méthode du principe du maximum de Pontryagin et nous terminons par l'étude d'un problème de contrôlabilité sur la préservation des ressources halieutiques.

3.1 Introduction

Les pêcheries industrielles utilisent beaucoup de moyens très sophistiqués en vue de faire une excellente capture. Parmi ces moyens nous pouvons citer les Dispositifs de Concentration des Poissons (DCPs). Il y a des matériaux utilisés pour attirer les poissons vers un endroit désiré de la mer. Mais la détermination de la position de tels moyens nécessitent un coût et des efforts importants. Dans le but de maximiser les bénéfices , on se propose de déterminer la position optimale pour placer les FADs. Beaucoup d'articles traitent de l'importance de faire appel aux FADs et leur disposition reste seulement linéaire.

3.2 Position et Modélisation du problème

3.2.1 Position du Problème

Rappelons que le coût dans les activités de pêcheries est défini par les salaires dû aux ouvriers, le personnel, l'équipement utilisé, la nourriture, la possibilité de mettre des capteurs pour évaluer la quantité de poissons. Il est important de noter que si la ressource n'est pas préservée, aucune activité économique n'est rentable dans le secteur de la pêche. C'est pourquoi même s'il existe des moyens et techniques adéquates de capture dans beaucoup de pêcheries, il est important de préserver la ressource dans l'utilisation de méthodes sophistiqués et que les activités économiques soient profitables. Pour prendre en compte le profit économique et la préservation de la ressource nous proposons d'étudier les problèmes d'optimisation liés à deux aspects. Et nous allons essentiellement utiliser la méthode du Principe du Maximum de Pontryagin et les outils fondamentaux de la théorie du contrôle des systèmes d'équations différentielles ordinaires. La résolution de ces types de problème pourrait donner une bonne approximation du nombre d'habitats à placer et leurs locations. Avec ces outils mathématiques, nous allons nous focaliser sur le placement géométrique des pièges. Dans notre cas, ces pièges sont les DCPs. Le placement de ces problèmes d'obstacles appartient à la famille des problèmes d'optimisation géométrique.

Et la plupart du temps il y a des contraintes traduites en équations ou inéquations des Equations Différentielles Partielles(EDP) ou Equations Différentielles Ordinaires (EDO).

Dans notre cas nous considérons un système d'EDO et nous allons introduire un critère à optimiser dépendant de la position des pièges tout en minimisant les coûts économiques et les distances entre les FADs. Notre étude va s'articuler comme suit :

- En tenant en compte le travail intéressant fait dans les articles [7, 5] par Auger et al. dans le cas où le nombre de sites est déterminé, nous introduisons des fonctionnelles géométriques afin d'obtenir des conditions suffisantes décrivant la position optimale des obstacles ou des pièges. Et dans les résultats, nous retrouvons la position linéaire considérée par Auger et al. dans l'article [5] afin d'estimer le nombre de sites dans les pêcheries artisanales multi-sites.
- Le second résultat intéressant se trouve dans la contrôlabilité. Nous introduisons les variables de contrôles dépendant des sites dans le but de suivre la population des poissons des ressources considérées. Et dans le choix particulier de l'expression des variables de contrôles, nous montrons un résultat optimal exprimé comme suit : quelques sites devraient être épargnés des activités de pêcheries afin que la ressource soit préservée. Dans une expression générale des variables de contrôle nous obtenons une condition nécessaire et suffisante pour obtenir une évolution stable de la ressource sur un intervalle considéré $[0, T]$ où T est fixé. Mais avant de nous attaquer à l'étude du contrôle optimal, nous établissons quelques résultats de contrôlabilité. Dans la suite de ce travail,

nous allons considérer l'expression des FADs pour expliciter les pièges ou les obstacles ou les sites .

3.2.2 Modélisation du problème

Dans cette section, notre but est de proposer des modèles lent-rapide pour la localisation géométriques des FADs. En fait ces modèles sont constitués de $L + 1$ variables décrivant la dynamique des poissons et L variables décrivant l'effort de pêche où L désigne le nombre de FADs qui doivent être installés en un endroit Ω de la mer. Soit $M_i = (x_i; y_i) \subset \mathbb{R}^2_{i=1, \dots, L}$, les positions inconnues. Notre but est de déterminer où les FADs doivent être placés. Nous supposons que les points M_i appartiennent à un disque $D(O; R_0)$ où O est le centre de D et R_0 est le rayon. Comme présenté dans l'article [4] nous utilisons des méthodes d'agrégation des variables dans l'ordre de réduire le nombre de variables du modèle lent rapide à deux variables globales n et E gouvernant respectivement la dynamique des poissons et de l'effort de pêche totale. Ensuite nous allons introduire deux fonctionnelles à optimiser sous les contraintes du modèle lent rapide des équations différentielles ordinaires tel que les FADs devraient avoir des positions optimales, que la ressource soit préservée et que les acteurs de la pêche soient satisfaits.

Nous commençons par une optimisation sans contraintes. Dans ce cas nous obtenons des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour la localisation des FADs suivi de l'étude du problème du principe du maximum de Pontryagin. Et finalement nous terminons la partie théorique par une étude des problèmes de contrôlabilité locale et globale et une action caractéristique du contrôle optimale quand nous avons un résultat de contrôlabilité. La dernière section de cette partie est dédiée aux simulations numériques. Et nous allons considérer ces modèles, mais pour le compléter présentons quelques points importants qui seront régulièrement utilisés pour notre étude.

3.2.3 Modèle de pêche multi-site

Dans cette partie nous étudions un modèle de pêche multi-site structuré en différents sites qui sont associés à différents FADs. Nous supposons que le système a une capacité limite constante K .

Nous appelons k_s et k_i , $i \in \{1; L\}$ respectivement la capacité limite du stock et de chaque site i , L étant le nombre de sites. On suppose qu'une proportion constante α , $0 < \alpha < 1$ du stock est libre, alors que la proportion restante est attachée aux sites.

$$\left\{ \begin{array}{l} k_s = \alpha K, \\ \sum_{i=1}^L k_i = (1 - \alpha)K. \end{array} \right.$$

Nous supposons que le mouvement des poissons et le déplacement des bateaux se fait suivant une échelle de temps rapide τ , alors que la dynamique de la pêche se fait suivant une échelle

de temps lent $t = \varepsilon\tau$ où $\varepsilon \ll 1$ est un paramètre suffisamment petit. Les poissons se déplacent entre les sites et sur le stock libre. alors que les bateaux se déplacent entres sites voisins. Il est important de noté que le taux de mouvement des bateaux d'un site à un site voisin dépends de la distance entre ces sites. En conséquence, nous assumons un taux de mouvement symétrique pour les bateaux : $\beta_i ; i+1 = \beta_{i+1} ; i$ $i \in \{1; L - 1\}$. Nous assumons également que le taux de mouvement des poissons est inversement propotionnelle à la capacité limite des sites, ou du stock libre, nous avons :

$$m_{si} = \frac{m_0}{k_i} ; m_{is} = \frac{m_0}{k_s}, \quad (3.1)$$

où m_0 est une constante positive qui représente le taux de migration

On considère que les poissons ont potentiellement des taux de croissance différents sur le stock libre et sur les sites que nous notons par r_s et r_1 respectivement. Nous utilisons d'autres paramètres notés Q , c et a .

Q = paramètre de capturabilité des FADs.

c = Coût par effort de pêche sur les FADs.

a = Prix par unité de poissons sur les sites.

Soit donc $n_s(t)$ la densité de poissons sur le stock libre au temps t et $n_i(t)$ la densité de poissons sur le site i au temps t , soit $E_i(t)$ l'effort de pêche du site i au temps t , $i \in \{1 ; L\}$.

Le système suivant décrit l'évolution de la pêche dans le temps :

$$\begin{cases} \frac{dn_s}{d\tau} = \sum_{i=1}^L m_{si}n_i - \sum_{i=1}^L m_{is}n_s + \varepsilon r_s n_s \left(1 - \frac{n_s}{k_s}\right), \\ \frac{dn_i}{d\tau} = m_{is}n_s - m_{si}n_i + \varepsilon \left[r_1 n_i \left(1 - \frac{n_i}{k_i}\right) - Q n_i E_i\right], \\ \frac{dE_i}{d\tau} = \beta_i ; i-1 E_{i-1} + \beta_i ; i-1 E_{i-1} - (\beta_{i-1} ; i + \beta_{i+1} ; i) E_i + \varepsilon (-c + aQ n_i) E_i. \end{cases} \quad (3.2)$$

Remarque 3.2.1. En assumant que $\varepsilon = 0$, à l'échelle de temps rapide ,la densité totale de poissons est égale à $n(t) = n_s(t) + \sum_{i=1}^L n_i(t)$.

A l'état d'équilibre rapide, le système devient :

$$\sum_{i=1}^L m_{si}n_i - \sum_{i=1}^L m_{is}n_s = 0, \quad (3.3)$$

$$m_{is}n_s - m_{si}n_i = 0, \quad (3.4)$$

$$\beta_i ; i-1 E_{i-1} + \beta_i ; i+1 E_{i+1} - (\beta_{i-1} ; i + \beta_{i+1} ; i) E_i = 0. \quad (3.5)$$

En remplaçant m_{si} et m_{is} par leur valeurs données de l'équation (3.1) dans l'équation (3.4) nous avons

$$n_i^* = \frac{k_i}{k_s} n_s^*.$$

Pour $i = 1$, l'équation (3.5) devien $\beta_{1,2} E_2 - \beta_{2,1} E_1 = 0$. Puisque $\beta_{1,2} = \beta_{2,1}$ nous obtenons à l'état d'équilibre $E_1^* = E_2^*$. Pour $i = 2$, il est facile de montrer que $E_3^* = E_2^* = E_1^*$ à l'équilibre

et par conséquent nous avons :

$$\forall i \in \{1, L\} \quad E_i^* = E_1^*.$$

Par un simple calcul nous obtenons les résultats suivants :

$$n_i^* = \frac{k_i}{K} n ; \quad n_s^* = \frac{k_s}{K} n ; \quad E_i^* = \frac{1}{L} E.$$

Dans la suite, nous allons utiliser le modèle agrégé obtenu en réduisant le modèle complet (cf [7]). Le modèle agrégé est défini par :

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = rn \left(1 - \frac{n}{K}\right) - QnE \\ \frac{dE}{dt} = (-c + aQn) E \end{cases}$$

où $r = \alpha r_s + (1 - \alpha)r_1$ est le taux global de croissance, $n(t)$ et $E(t)$ étant respectivement la densité totale de poissons et l'effort de pêche total. Les autres paramètres Q , c et a ont été déjà définis.

3.2.4 Problème de contrôle géométrique

3.2.4.1 Problème sans contraintes

Dans cette sous section il s'agit de résoudre des problèmes d'optimisation sans contraintes, on suppose que le mouvement des poissons et le déplacement des bateaux se produisent à une échelle de temps rapide τ tandis que le taux de croissance des poissons et la dynamique de pêche se produisent à une échelle de temps lent $t = \varepsilon\tau$. Nous supposons symétriques les rythmes de mouvements des bateaux et inversement proportionnel à la capacité limite du milieu. Considérons à présent les fonctionnelles suivantes :

$$G_1 = \left(\sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=i+1}^L \|M_i M_j\|^2 - R_0^2 \right)^2,$$

$$G_2 = \left(\sum_{i=1}^{L-1} \|M_i M_{i+1}\|^2 + \|M_L M_1\|^2 - R_0^2 \right)^2.$$

La fonctionnelle G_2 est en fait un cas particulier de la fonctionnelle G_1 qui tient en compte non seulement de la distance entre les 2 FADs consécutifs mais aussi de la diagonale séparant les FADs ($L \geq 4$) tandis que la fonctionnelle G_2 ne prend en compte que la distance entre les FADs consécutifs. Cette fonctionnelle G_2 est plus facile à manipuler dans le cas d'agrégation du modèle (3.2).

Soit donc la fonctionnelle $G_1 = \left[\sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=i+1}^L \|M_i M_j\|^2 - R_0^2 \right]^2$ qui est égale à

$$G_1 = \left(\sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=i+1}^L (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - R_0^2 \right)^2.$$

Il s'agit de minimiser G_1 sous les contraintes du modèle sans échelle de temps :

$$\begin{cases} \dot{n}_i = (\sum m_{ij} n_j - \sum m_{ji} n_i) + r_i n_i (1 - \frac{n_i}{K_i}) - a_i n_i E_i, \\ \dot{E}_i = (\sum k_{ij} E_j - \sum k_{ji} E_i) + p a_i n_i E_i - c_i E_i, \\ n_i(0) = n_{i0} \quad i = 1, \dots, L \\ E_i(0) = E_{i0} \quad i = 1, \dots, L \end{cases} \quad (3.6)$$

où m_{ij} et k_{ij} sont des fonctions qui ne dépendent pas de la position des FADs.

r_i représente le taux de croissance de la ressource sur chaque site.

k_i représente la capacité limite du milieu sur chaque site

a_i représente le paramètre de capturabilité sur chaque site

c_i représente le cout par unité d'effort de pêche sur chaque site.

L'étude de ce modèle devient par conséquent un problème d'optimisation sans contraintes qui consiste à minimiser la fonctionnelle G_1 qui se traduit par :

$$K(M_1, \dots, M_L) = \min G_1(M_1, \dots, M_L) = \min \left[\sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=i+1}^L \|M_i M_j\|^2 - R_0^2 \right]^2$$

où R_0 est le rayon d'un disque centré au point origine O, et qui représente la zone d'installation des FADs. Ce problème est abordé avec les outils d'optimisation différentiable.

Donnons à présent une condition nécessaire d'optimalité du premier ordre pour la localisation des FADs de la fonctionnelle G_1 .

Théorème 3.2.1. *Une condition nécessaire d'optimalité du premier ordre pour la localisation des FADs est donnée par : $\nabla G_1 = 0$ c'est à dire :*

$$\left(\sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=i+1}^L \|M_i M_j\|^2 - R_0^2 \right) = 0.$$

Démonstration. Soit $G_1(M_1, \dots, M_L) = \left(\sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=i+1}^L \|M_i M_j\|^2 - R_0^2 \right)^2$

avec $M_i = (x_i ; y_i)$ et $M_j = (x_j ; y_j)$ pour tout $i, j \in \{1 \dots L\}$

Posons

$$G_1(M_1, \dots, M_L) = \left(\sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=i+1}^L (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - R_0^2 \right)^2$$

$$= ((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+\dots+(x_1-x_L)^2+(y_1-x_L)^2+(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+\dots+(x_2-x_L)^2+(y_2-x_L)^2 \\ + \dots + (x_{L-1}-x_L)^2+(y_{L-1}-x_L)^2 - R_0^2)^2$$

Donc $\nabla G_1 = 0$ équivaut à :

$$\begin{cases} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_L} = 0, \\ \frac{\partial G_1}{\partial y_1} = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial G_1}{\partial y_L} = 0, \end{cases}$$

La dérivation par rapport à chaque variable donne :

$$\begin{cases} \left[Lx_1 - \sum_{i=1}^L x_i \right] \left(\sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=i+1}^L \|M_i M_j\|^2 - R_0^2 \right) = 0, \\ \vdots \\ \left[Lx_L - \sum_{i=1}^L x_i \right] \left(\sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=i+1}^L \|M_i M_j\|^2 - R_0^2 \right) = 0, \\ \vdots \\ \left[Ly_1 - \sum_{i=1}^L y_i \right] \left(\sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=i+1}^L \|M_i M_j\|^2 - R_0^2 \right) = 0, \\ \vdots \\ \left[Ly_L - \sum_{i=1}^L y_i \right] \left(\sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=i+1}^L \|M_i M_j\|^2 - R_0^2 \right) = 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

Résoudre le système (3.7) équivaut aussi à résoudre 4^L systèmes. Chaque système correspond à une disposition. Parmi ces dispositions, nous pouvons citer celles vérifiant :

1. $\sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=i+1}^L \|M_i M_j\|^2 - R_0^2 = 0,$

2. Tous les points M_i sont alignés.

En supposant que les FADs du type M_i et M_j pour $i = 1, \dots, L-1$ et $j = i+1, \dots, L$ sont équidistants alors :

$$\|M_1 M_2\|^2 + \|M_1 M_3\|^2 + \dots + \|M_1 M_L\|^2 + \|M_2 M_3\|^2 + \|M_2 M_4\|^2 + \dots + \|M_2 M_L\|^2 + \dots + \|M_{L-1} M_L\|^2 = R_0^2.$$

□

□

Nous allons présenter quelques exemples.

Exemple 1. Pour $L = 2$ nous allons détailler cet exemple et exposer tous les cas de figure possibles et retenir celui qui semble être le plus intéressant.

La condition nécessaire d'optimalité du premier ordre est traduite par :

$$\begin{cases} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial G_1}{\partial y_1} = 0 \\ \frac{\partial G_1}{\partial y_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - x_2)A = 0 \\ (y_1 - y_2)A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - x_2) \left(\|M_1 M_2\|^2 - R_0^2 \right) = 0, \\ (y_1 - y_2) \left(\|M_1 M_2\|^2 - R_0^2 \right) = 0, \end{cases}$$

avec $A = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - R_0^2$.

Le système précédent correspond à plusieurs cas de figures :

$$\text{1}^{\text{er}} \text{ cas : } \begin{cases} x_1 = x_2, \\ \text{et} \\ y_1 = y_2, \end{cases}$$

Les deux points représentant les FADS sont confondus.

$$\text{2}^{\text{ème}} \text{ cas : } \begin{cases} x_1 = x_2, \\ \text{et} \\ (y_1 - y_2)A = 0, \end{cases}$$

Si $M_1 = O$ (centre du cercle $\mathcal{C}(O ; R_0)$) alors M_2 appartient à l'intersection du cercle et de la droite verticale passant par M_1 .

$$\text{3}^{\text{ème}} \text{ cas : } \begin{cases} (x_1 - x_2)A = 0, \\ \text{et} \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Si $M_1 = O$ (centre du cercle $\mathcal{C}(O ; R_0)$) alors M_2 appartient à l'intersection du cercle et de la droite horizontale passant par M_1 .

$$\text{4}^{\text{ème}} \text{ cas : } A = 0 \Leftrightarrow \|M_1 M_2\|^2 = R_0^2 \Leftrightarrow \|M_1 M_2\| = R_0.$$

Pour se fixer les idées prenons $M_1 = O$, alors $M_2 \in \mathcal{D}(O, R_0)$.

Dans tout ce qui suit, nous considérons seulement le cas où $A = 0$ comme condition nécessaire d'optimalité. En effet c'est le cas le plus intéressant et regroupe tous les autres cas possibles.

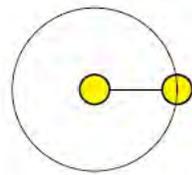


FIGURE 3.1 – Cercle de centre M_1 de rayon R_0

Simulation

Dans toutes les simulations faites dans cette partie afin de trouver la position optimale des FADS

nous proposons une méthode numérique pour résoudre le problème sur la condition nécessaire d'optimalité. Pour cela nous utilisons 2 logiciels : ipopt pour trouver les coordonnées des points et Geogebra pour les placer dans un repère.

Les simulations suivantes ont été faites dans le cas de 2 FADs nous permettant d'avoir un cercle. Nous plaçons les différents points.

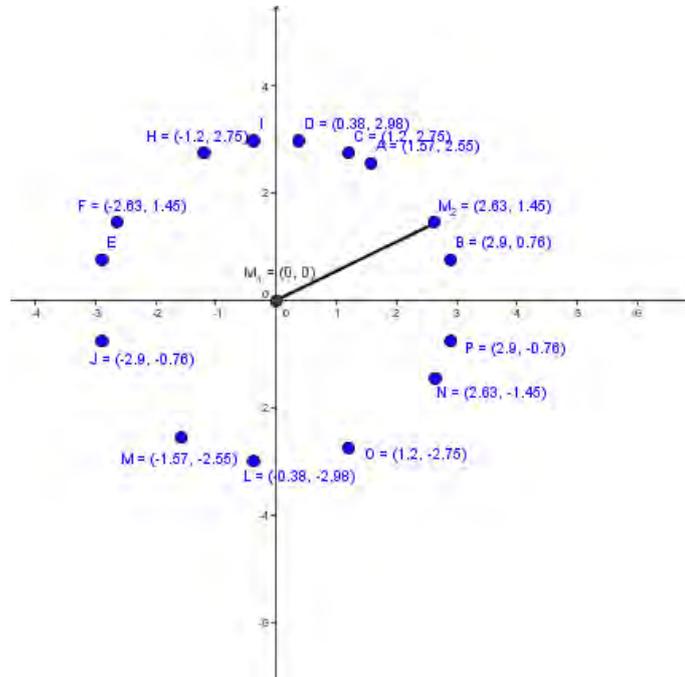


FIGURE 3.2 – Simulation dans le cas de deux FADs où $R_0 = 3$ et les coordonnées données sur la figure

Exemple 2 Pour $L = 3$ la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre est traduite par :

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = x_3, \\ \text{ou} \\ y_1 = y_2 = y_3, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \|M_1M_2\|^2 + \|M_2M_3\|^2 + \|M_3M_1\|^2 = R_0^2.$$

Comme $M_1, M_2, M_3 \in D(0, R_0)$, on a une infinité de positions possibles pour les FADs.

Par exemple si $\|M_1M_2\| = \|M_2M_3\| = \|M_1M_3\| \implies 3\|M_1M_3\|^2 = R_0^2$

$$\implies \|M_1M_3\| = \frac{R_0}{\sqrt{3}}.$$

On obtient un triangle équilatéral de coté $\frac{R_0}{\sqrt{3}}$

Ou bien un triangle rectangle isocèle en M_1 de coté $\|M_1M_3\| = \frac{R_0}{\sqrt{2}}$.

Simulation Dans cette partie nous proposons 2 simulations suivant les positions désirées pour M_2 et M_3

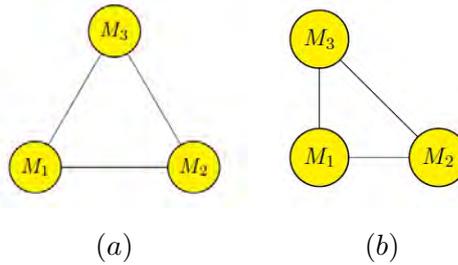


FIGURE 3.3 – (a) Triangle équilatéral de coté $\frac{R_0}{\sqrt{3}}$, (b) Triangle rectangle isocèle en M_1 de coté $\frac{R_0}{\sqrt{2}}$.

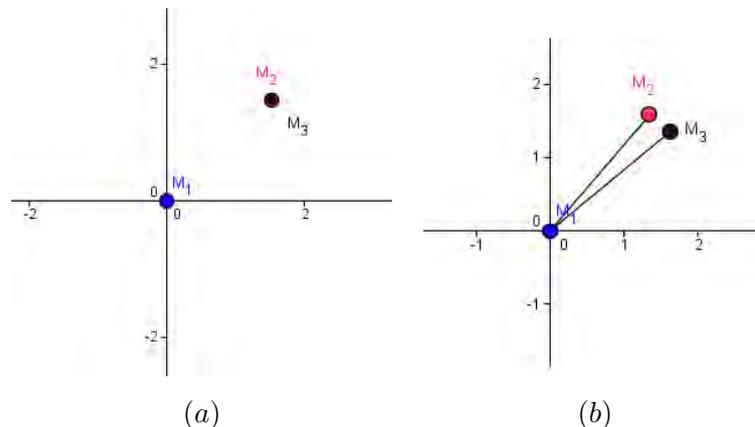


FIGURE 3.4 – (a) Simulation dans le cas de trois FADs où $R_0 = \sqrt{3}$. Les points M_2 et M_3 étant confondus, (b) Simulation dans le cas de trois FADs où $R_0 = \sqrt{3}$. Les points M_2 et M_3 étant légèrement distants et leurs distances respectivement au point M_1 sensiblement égales.

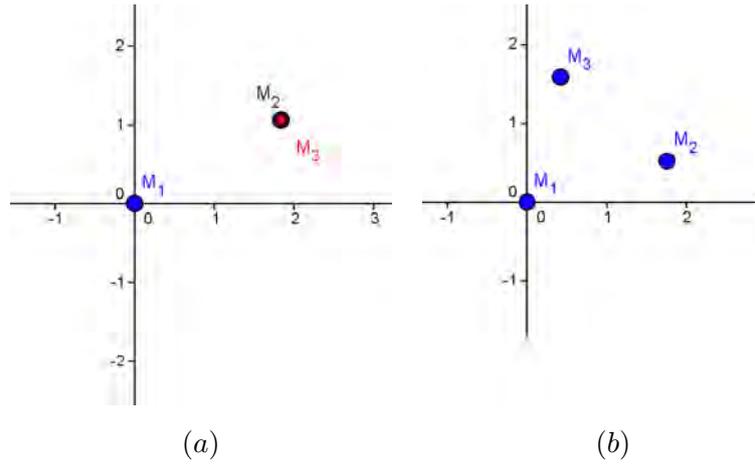


FIGURE 3.5 – (a) Simulation dans le cas de trois FADs où $R_0 = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Les points M_2 et M_3 étant confondus, (b) Simulation dans le cas de trois FADs où $R_0 = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Les points M_1 et M_2 et M_3 formant légèrement un triangle isocèle.

Simulations

Ici nous proposons quelques simulations dans le cas où nous avons 4, 5, ou 10 FADs.

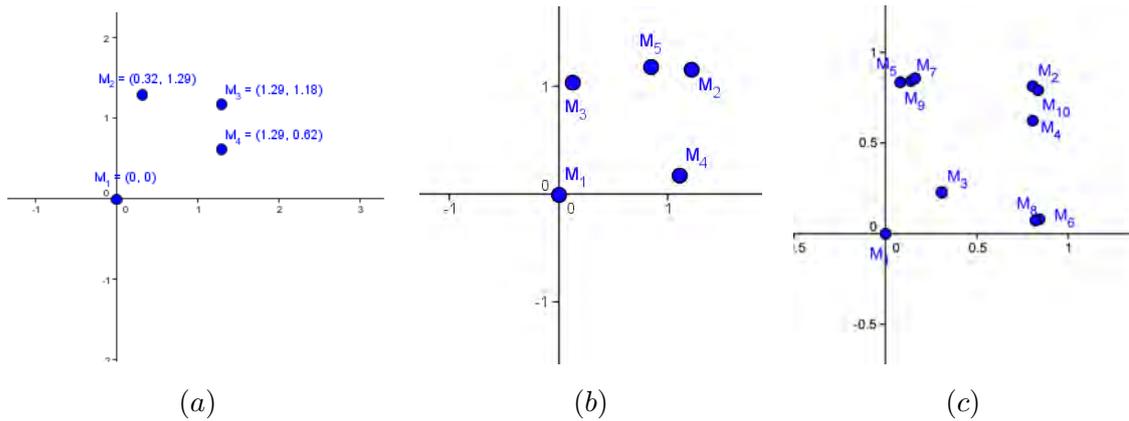


FIGURE 3.6 – Les équilibres (\bar{n}_i, \bar{E}_i) pour différentes valeurs du nombre de sites L : (a) Simulation avec quatre FADs où $R_0 = \frac{3\sqrt{4}}{4}$, (b) Simulation avec 5 FADs où $R_0 = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ et (c) Simulation avec 10 FADs où $R_0 = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

3.2.5 Problème de contrôle optimal

3.2.5.1 Condition d'optimalité

On donne la formulation du problème et les conditions nécessaires d'optimalité. L'objectif dans cette partie est d'optimiser le critère défini ci-dessous en fonction des captures, des coûts et de la distance entre les FADs.

Soit donc le bénéfice $\mathcal{H}(t, M_1, M_2, \dots, M_L) = \text{capture} - \text{coûts} = \sum_{i=1}^L (a_i n_i E_i - c_i E_i)$. Ce nouveau

modèle est formulé de manière à maximiser H et de minimiser G_1 et nous proposons le problème suivant :

$$\max \int_0^T \mathcal{H}(t, M_1, M_1, \dots, M_L) dt + \min G_1(M_1, \dots, M_L)$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} \dot{n}_i = \left(\sum_{j \neq i}^L m_{ij} n_j - \sum_{j \neq i}^L m_{ji} n_i \right) + r_i n_i \left(1 - \frac{n_i}{K_i} \right) - a_i n_i E_i, \\ \dot{E}_i = \left(\sum_{j \neq i}^L k_{ij} E_j - \sum_{j \neq i}^L k_{ji} E_i \right) + p a_i n_i E_i - c_i E_i, \\ n_i(0) = n_{i0}, \quad i = 1, \dots, L \\ E_i(0) = E_{i0}, \quad i = 1, \dots, L \end{cases} \quad (3.8)$$

$$m_{ij} = f(x_i, y_i, x_j, y_j) \text{ et } k_{ij} = k(x_i, y_i, x_j, y_j)$$

Sous les mêmes contraintes nous travaillerons avec :

$$R(t, M_1, \dots, M_L) = \min \int_0^T \left[-H(t, M_1, \dots, M_L) + \frac{1}{T} G_1(t, M_1, \dots, M_L) \right] dt.$$

car

$$\max \int_0^T H dt = \min \int_0^T -H dt,$$

$$\min \int_0^T \left[-H + \frac{1}{T} G_1 \right] dt \geq \min \int_0^T -H dt + \min G_1.$$

Dans ce problème, on considère les M_i comme les contrôles et on introduit la fonction de contrôle $u \in \mathbb{R}^{2L}$ définie par :

$$u_1 = x_1; u_2 = x_2; \dots; u_L = x_L; u_{L+1} = y_1; \dots; u_{2L} = y_L.$$

Il s'agit de choisir le meilleur contrôle afin de pouvoir déterminer les positions des sites des M_i tel que le problème ci dessus admette une solution et que $R(t, M_1, \dots, M_L)$ atteigne sa valeur minimale c'est à dire $R(t, M_1, \dots, M_L) = \min \int_0^T \left[-H + \frac{1}{T} G_1 \right] dt$.

La fonction Hamiltonienne associée au problème ci dessus est donnée par :

$$\mathcal{H}(t, X, p, u) = \langle p, \varphi(t, X, u) \rangle - \sum_{i=1}^L \lambda_i f_i(t, X, u) = p \varphi(t, X, u) - \lambda_0 f_0(t, X, u).$$

où p un vecteur fonction et λ_i étant les multiplicateurs de Lagrange associés à ce problème

$$X = (n, E) \text{ avec } n = (n_i); \quad E = (E_i)$$

$$f_0(t, X, u) = \sum_{i=1}^L (-a_i n_i E_i + c_i E_i) + \frac{1}{T} G_1(t, M_1, \dots, M_L),$$

$$\text{où } G_1(t, M_1, \dots, M_L) = \left[\sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=i+1}^L \|M_i M_j\|^2 - R_0^2 \right]^2,$$

$$\varphi(t, X, u) = (\dot{n}_i, \dot{E}_i),$$

Le principe du maximum de Pontryagin (PMP) fournit les conditions nécessaires d'optimalité de ce problème de contrôle optimal.

Théorème 1 (Principe du maximum de Pontryagin). *On considère le système de contrôle dans \mathbb{R}^n et $\dot{X} = f(t, X, u)$ où $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ qui est l'ensemble des contrôles admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial M_0 à un point final M_1 . Les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout $t \in [0, T]$.*

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(t, X(t), p(t), u(t)), \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X}(t, X(t), p(t), u(t)),\end{aligned}$$

où $\mathcal{H}(t, X(t), p(t), u(t)) = \langle p, f(t, X, u) \rangle - \lambda_0 f_0(t, X, u)$ est l'Hamiltonien du système et on a la condition de maximisation presque partout sur $[0, T]$,

$$\mathcal{H}(t, X, p, \lambda_0, u) = \max_{\bar{u}} \mathcal{H}(t, X, p, \bar{u}).$$

Lorsqu'il n'y a pas de contraintes sur le contrôle et \mathcal{H} différentiable, alors la condition du maximum ci-dessus devient $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0$. En appliquant le principe du maximum on a les conditions nécessaires d'extrémum :

$$1) \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X}(t, X(t), \lambda_0, p, u(t)) = -p(t)\varphi_X + \lambda_0 f_{0X},$$

ce qui donne :

$$\dot{p} + p(t)\varphi_X = \lambda_0 f_{0X},$$

$$2) \dot{X} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(t, p(t), \lambda_0, u(t)) = \varphi(t),$$

3) Conditions d'optimalités par rapport à u :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(t, X(t), \lambda_0, p, u(t)) = 0 \text{ ce qui donne } p(t)\varphi_u = \lambda_0 f_{0u}.$$

Nous allons présenter deux cas d'exemples typiques.

- Cas où $m_{ij} = k_{ij} = \text{cste}$

Pour se fixer les idées prenons $cste = 1$ ce qui nous donne les contraintes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{n}_i = \sum_{j \neq i}^L n_j - (L-1)n_i + r_i n_i \left(1 - \frac{n_i}{K_i}\right) - a_i n_i E_i, \\ \dot{E}_i = \sum_{j \neq i}^L E_j - (L-1)E_i + \lambda a_i n_i E_i - c_i E_i, \\ n_i(0) = n_{i0}, \quad i = 1, \dots, L \\ E_i(0) = E_{i0}, \quad i = 1, \dots, L \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Exemple 1 : Pour $L = 2$

Soit \mathcal{H} l'hamiltonien défini par :

$$\mathcal{H}(t, x, u) = p_1 \varphi_1 + p_2 \varphi_2 + p_3 \varphi_3 + p_4 \varphi_4 - \lambda_0 f_0$$

Les conditions d'Euler du PMP sont données par : $\dot{X} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}$ et $\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X}$ c'est à dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{n}_1 = n_2 - n_1 + r_1 n_1 \left(1 - \frac{n_1}{K_1}\right) - a_1 n_1 E_1, \\ \dot{n}_2 = n_1 - n_2 + r_2 n_2 \left(1 - \frac{n_2}{K_2}\right) - a_2 n_2 E_2, \\ \dot{E}_1 = E_2 - E_1 + \lambda a_1 n_1 E_1 - c_1 E_1, \\ \dot{E}_2 = E_1 - E_2 + \lambda a_2 n_2 E_2 - c_2 E_2, \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial n_1} \\ &= p_1 \left[1 - r_1 \left(1 - \frac{2n_1}{K_1}\right) + a_1 E_1\right] - p_2 - p_3 p a_1 E_1 - \lambda_0 a_1 E_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_2 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial n_2} \\ &= -p_1 + p_2 \left[1 - r_2 \left(1 - \frac{2n_2}{K_2}\right) + a_2 E_2\right] - p_4 p a_2 E_2 - \lambda_0 a_2 E_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_3 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial n_3} \\ &= p_1 a_1 n_1 + p_3 \left[1 - p a_1 n_1 E_1 + c_1\right] - p_4 + \lambda_0 (-a_1 n_1 + c_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_4 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial n_4} \\ &= p_2 a_2 n_2 + p_3 + p_4 \left[1 - p a_2 n_2 E_2 + c_2\right] + \lambda_0 (-a_2 n_2 + c_2), \end{aligned}$$

La condition d'optimalité du PMP par rapport à u est définie par :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1} &= p_1 \varphi_{1u_1} + p_2 \varphi_{2u_1} + p_3 \varphi_{3u_1} + p_4 \varphi_{4u_1} - \lambda_0 f_{0u_1} \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 - 4 \frac{\lambda_0}{T} (u_1 - u_2) [(u_1 - u_2)^2 + (u_3 - u_4)^2 - R_0^2] = 0.\end{aligned}$$

d'où $(u_1 - u_2)[(u_1 - u_2)^2 + (u_3 - u_4)^2 - R_0^2] = 0$ qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 = x_2, \\ \text{ou} \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - u_2)^2 - R_0^2 = 0. \end{array} \right.$$

De même

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_2} &= p_1 \varphi_{1u_2} + p_2 \varphi_{2u_2} + p_3 \varphi_{3u_2} + p_4 \varphi_{4u_2} - \lambda_0 f_{0u_2} \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 - 4 \frac{\lambda_0}{T} (u_1 - u_2) [(u_1 - u_2)^2 + (u_3 - u_4)^2 - R_0^2] = 0.\end{aligned}$$

d'où $(u_1 - u_2)[(u_1 - u_2)^2 + (u_3 - u_4)^2 - R_0^2] = 0$ qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 = x_2, \\ \text{ou} \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - R_0^2 = 0. \end{array} \right.$$

c'est à dire $x_1 = x_2$ ou $\|M_1 M_2\|^2 = R_0^2$ donc les FADs sont dirigés verticalement et de plus si $M_1 = O$, alors $M_2 \in \mathcal{D}(O, R_0)$.

En faisant le même calcul pour $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_3} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_4}$ on a :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_3} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_4} = -4 \frac{\lambda_0}{T} (u_3 - u_4) [(u_1 - u_2)^2 + (u_3 - u_4)^2 - R_0^2] = 0$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{c} u_3 = u_4 \\ \text{ou} \\ (u_1 - u_2)^2 + (u_3 - u_4)^2 - R_0^2 = 0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{c} y_1 = y_2, \\ \text{ou} \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - u_2)^2 - R_0^2 = 0. \end{array} \right.$$

c'est à dire $y_1 = y_2$ ou $\|M_1 M_2\|^2 = R_0^2$ donc les FADs sont dirigés horizontalement et de plus si $M_1 = O$, alors $M_2 \in \mathcal{D}(O, R_0)$.

Conclusion

La condition d'optimalité est donnée par :

$$\|M_1 M_2\|^2 = R_0^2 \quad ; \quad M_1 \text{ et } M_2 \in D(0 ; R_0)$$

(voir figure 3.1)

Exemple 2 : Pour $L = 3$

L'Hamiltonien est donné par :

$$\mathcal{H}(t, X, u) = p_1\varphi_1 + p_2\varphi_2 + p_3\varphi_3 + p_4\varphi_4 + p_5\varphi_5 + p_6\varphi_6 - \lambda_0 f_0.$$

Le problème consiste à minimiser la fonctionnelle J définie par :

$$J = \int_0^T \left[\sum_{i=1}^3 (-a_i n_i E_i + c_i E_i) + \frac{1}{T} G_1(t, M_1, M_2, M_3) \right] dt$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = n_2 + n_3 - 2n_1 + r_1 n_1 \left(1 - \frac{n_1}{K_1}\right) - a_1 n_1 E_1, \\ \dot{n}_2 = n_1 + n_3 - 2n_2 + r_2 n_2 \left(1 - \frac{n_2}{K_2}\right) - a_2 n_2 E_2, \\ \dot{n}_3 = n_1 + n_2 - 2n_3 + r_3 n_3 \left(1 - \frac{n_3}{K_3}\right) - a_3 n_3 E_3, \\ \dot{E}_1 = E_2 + E_3 - 2E_1 + \lambda a_1 n_1 E_1 - c_1 E_1, \\ \dot{E}_2 = E_1 + E_3 - 2E_2 + \lambda a_2 n_2 E_2 - c_2 E_2, \\ \dot{E}_3 = E_1 + E_2 - 2E_3 + \lambda a_3 n_3 E_3 - c_3 E_3 \end{cases}$$

$$f_0(t, X, u) = [-(a_1 n_1 E_1 + a_2 n_2 E_2 + a_3 n_3 E_3) + (c_1 E_1 + c_2 E_2 + c_3 E_3)] + \frac{1}{T} G_1(t, M_1, M_2, M_3)$$

$$\varphi(t, X, u) = \left(n_1 = \varphi_1 ; n_2 = \varphi_2 ; n_3 = \varphi_3 ; \dot{E}_1 = \varphi_4 ; \dot{E}_2 = \varphi_5 ; \dot{E}_3 = \varphi_6 \right).$$

Les conditions d'Euler du PMP sont données par : $\dot{X} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}$ et $\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X}$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial n_1} \\ &= -[p_1[-2 + r_1(1 - \frac{2n_1}{K_1}) - a_1 E_1] + p_2 + p_3 + p_4 p a_1 E_1 + \lambda_0 a_1 E_1] \\ &= p_1[2 - r_1(1 - \frac{2n_1}{K_1}) + a_1 E_1] - p_2 - p_3 - p_4 p a_1 E_1 - \lambda_0 a_1 E_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_2 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial n_2} \\ &= -[p_1 + p_2[-2 + r_2(1 - \frac{2n_2}{K_2}) - a_2 E_2] + p_3 + p_5 p a_1 E_1 + \lambda_0 a_2 E_2] \\ &= -p_1 + p_2[2 - r_2(1 - \frac{2n_2}{K_2}) + a_2 E_2] - p_3 - p_5 p a_1 E_1 - \lambda_0 a_2 E_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_3 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial n_3} \\ &= -[p_1 + p_2 + p_3[-2 + r_3(1 - \frac{2n_3}{K_3}) - a_3 E_3] + p_6 p a_3 E_3 + \lambda_0 a_3 E_3] \\ &= -p_1 - p_2 + p_3[2 - r_3(1 - \frac{2n_3}{K_3}) + a_3 E_3] - p_6 p a_3 E_3 - \lambda_0 a_3 E_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_4 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E_1} \\ &= -[-p_1 a_1 n_1 + p_4[-2 + p a_1 n_1 - c_1] + p_5 + p_6 - \lambda_0(-a_1 n_1 + c_1)] \\ &= p_1 a_1 n_1 + p_4[2 - p a_1 n_1 + c_1] - p_5 - p_6 + \lambda_0(-a_1 n_1 + c_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}_5 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E_2} \\
&= -[-p_2 a_2 n_2 + p_4 + p_5[-2 + p a_2 n_2 - c_2] + p_6 - \lambda_0(-a_2 n_2 + c_2)] \\
&= p_2 a_2 n_2 - p_4 + p_5[2 - p a_2 n_2 + c_2] - p_6 + \lambda_0(-a_2 n_2 + c_2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}_6 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E_3} \\
&= -[-p_3 a_3 n_3 + p_4 + p_5 + p_6[-2 + p a_3 n_3 - c_3] - \lambda_0(-a_3 n_3 + c_3)] \\
&= p_3 a_3 n_3 - p_4 - p_5 + p_6[2 - p a_3 n_3 + c_3] + \lambda_0(-a_3 n_3 + c_3).
\end{aligned}$$

La condition d'optimalité par rapport à u est traduite par : $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1} &= p_1 \varphi_{1u_1} + p_2 \varphi_{2u_1} + p_3 \varphi_{3u_1} + p_4 \varphi_{4u_1} + p_5 \varphi_{5u_1} + p_6 \varphi_{6u_1} - \lambda_0 f_{0u_1} \\
&= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 - 4 \frac{\lambda_0}{T} A(2u_1 - u_2 - u_3) = 0.
\end{aligned}$$

avec

$A = (u_1 - u_2)^2 + (u_4 - u_5)^2 + (u_1 - u_3)^2 + (u_4 - u_6)^2 + (u_2 - u_3)^2 + (u_5 - u_6)^2 - R_0^2$ donc $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1} = 0 \implies A(2u_1 - u_2 - u_3) = 0$ d'où

$$\begin{cases} 2u_1 - u_2 - u_3 = 0, \\ (u_1 - u_2)^2 + (u_4 - u_5)^2 + (u_1 - u_3)^2 + (u_4 - u_6)^2 + (u_2 - u_3)^2 + (u_5 - u_6)^2 - R_0^2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_2} &= p_1 \varphi_{1u_2} + p_2 \varphi_{2u_2} + p_3 \varphi_{3u_2} + p_4 \varphi_{4u_2} + p_5 \varphi_{5u_2} + p_6 \varphi_{6u_2} - \lambda_0 f_{0u_2} \\
&= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 - 4 \frac{\lambda_0}{T} A(-u_1 + 2u_2 - u_3) = 0
\end{aligned}$$

$\implies A(-u_1 + 2u_2 - u_3) = 0$ ce qui donne

$$\begin{cases} -u_1 + 2u_2 - u_3 = 0, \\ (u_1 - u_2)^2 + (u_4 - u_5)^2 + (u_1 - u_3)^2 + (u_4 - u_6)^2 + (u_2 - u_3)^2 + (u_5 - u_6)^2 - R_0^2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_3} &= p_1 \varphi_{1u_3} + p_2 \varphi_{2u_3} + p_3 \varphi_{3u_3} + p_4 \varphi_{4u_3} + p_5 \varphi_{5u_3} + p_6 \varphi_{6u_3} - \lambda_0 f_{0u_3} \\
&= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 - 4 \frac{\lambda_0}{T} A(-u_1 - u_2 + 2u_3) = 0
\end{aligned}$$

$\implies A(-u_1 - u_2 + 2u_3) = 0$ ce qui donne

$$\begin{cases} -u_1 - u_2 + 2u_3 = 0, \\ (u_1 - u_2)^2 + (u_4 - u_5)^2 + (u_1 - u_3)^2 + (u_4 - u_6)^2 + (u_2 - u_3)^2 + (u_5 - u_6)^2 - R_0^2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_4} &= p_1 \varphi_{1u_4} + p_2 \varphi_{2u_4} + p_3 \varphi_{3u_4} + p_4 \varphi_{4u_4} + p_5 \varphi_{5u_4} + p_6 \varphi_{6u_4} - \lambda_0 f_{0u_4} \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 - 4 \frac{\lambda_0}{T} A(2u_4 - u_5 - u_6) = 0\end{aligned}$$

$\implies A(2u_4 - u_5 - u_6) = 0$ ce qui donne

$$\begin{cases} 2u_4 - u_5 - u_6 = 0, \\ (u_1 - u_2)^2 + (u_4 - u_5)^2 + (u_1 - u_3)^2 + (u_4 - u_6)^2 + (u_2 - u_3)^2 + (u_5 - u_6)^2 - R_0^2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_5} &= p_1 \varphi_{1u_5} + p_2 \varphi_{2u_5} + p_3 \varphi_{3u_5} + p_4 \varphi_{4u_5} + p_5 \varphi_{5u_5} + p_6 \varphi_{6u_5} - \lambda_0 f_{0u_5} \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 - 4 \frac{\lambda_0}{T} A(-u_4 + 2u_5 - u_6) = 0\end{aligned}$$

$\implies A(-u_4 + 2u_5 - u_6) = 0$ ce qui donne

$$\begin{cases} -u_4 + 2u_5 - u_6 = 0, \\ (u_1 - u_2)^2 + (u_4 - u_5)^2 + (u_1 - u_3)^2 + (u_4 - u_6)^2 + (u_2 - u_3)^2 + (u_5 - u_6)^2 - R_0^2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_6} &= p_1 \varphi_{1u_6} + p_2 \varphi_{2u_6} + p_3 \varphi_{3u_6} + p_4 \varphi_{4u_6} + p_5 \varphi_{5u_6} + p_6 \varphi_{6u_6} - \lambda_0 f_{0u_6} \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 - 4 \frac{\lambda_0}{T} A(-u_4 - u_5 + 2u_6) = 0\end{aligned}$$

$\implies A(-u_4 - u_5 + 2u_6) = 0$ ce qui donne

$$\begin{cases} -u_4 - u_5 + 2u_6 = 0, \\ (u_1 - u_2)^2 + (u_4 - u_5)^2 + (u_1 - u_3)^2 + (u_4 - u_6)^2 + (u_2 - u_3)^2 + (u_5 - u_6)^2 - R_0^2 = 0. \end{cases}$$

En fin de compte on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ \text{ou} \qquad \qquad \text{ou} \quad A = 0. \\ 2y_1 - y_2 - y_3 = 0, \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 = 0, \\ -y_1 - y_2 + 2y_3 = 0, \end{array} \right.$$

Les deux systèmes étant équivalents, on a une infinité de solutions d'où $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 - R_0^2 = 0$. Par conséquent $\|M_1 M_2\|^2 + \|M_2 M_3\|^2 + \|M_3 M_1\|^2 = R_0^2$ Comme $M_1, M_2, M_3 \in D(0, R_0)$, on a une infinité de positions possibles

pour les FADs.

± Par exemple si $\|M_1M_2\| = \|M_2M_3\| = \|M_1M_3\| \implies 3\|M_1M_3\|^2 = R_0^2$.

$$\implies \|M_1M_3\| = \frac{R_0}{\sqrt{3}}$$

On obtient un triangle équilatéral de coté $\frac{R_0}{\sqrt{3}}$ (voir figure 2).

± Ou bien un triangle rectangle isocèle en M_2 de coté $\|M_1M_3\| = \frac{R_0}{\sqrt{2}}$ (voir figure 3).

Proposition 3.2.1. Soit \mathcal{H} l'hamiltonien défini par la fonction de Pontryagin

$\mathcal{H} = \langle p, \varphi(t, X, u) \rangle - \sum_{i=1}^L \lambda_i f_i(t, X, u)$ où p, λ sont des multiplicateurs. Alors la condition d'optimalité est traduite par :

$$\sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=1}^L \|M_i M_j\|^2 = R_0^2.$$

C'est à dire si L est le nombre total de FADs alors la condition d'optimalité est traduite par :

$$\|M_1M_2\|^2 + \|M_1M_3\|^2 + \dots + \|M_1M_L\|^2 + \|M_2M_3\|^2 + \|M_2M_4\|^2 + \dots + \|M_2M_L\|^2 + \dots + \|M_{L-1}M_L\|^2 = R_0^2.$$

° Dans le cas régulier où la distance entre deux FADs consécutifs est constante c'est à dire :

$\|M_1M_2\| = \|M_2M_3\| = \|M_3M_4\| = \dots = \|M_LM_1\|$ alors la condition d'optimalité est donné par : $L\|M_1M_L\|^2 = R_0^2$ d'où

$$\|M_1M_L\| = \frac{R_0}{\sqrt{L}}.$$

(on ne prends pas en compte la distance entre les diagonales)

° Dans le cas où les FADs sont équidistants et si nous fixons M_1 , les autres points M_j , $j \neq 1$ appartiennent au cercle de centre M_1 et de rayon donné par la condition d'optimalité suivante :

$$\|M_1M_L\| = R_0 \sqrt{\frac{2}{L(L-1)}}.$$

(la diagonale séparant deux FADs est prise en compte)

En effet cette somme comporte $\frac{L(L-1)}{2}$ termes identiques .

• **Cas où** $m_{ij} = m_{ji} = \alpha\|M_iM_j\|^2$ et $k_{ij} = k_{ji} = \beta\|M_iM_j\|^2$.

Théorème 3.2.2. Si $\lambda_0 = \frac{T}{2}$ (simplifier les calculs) alors la condition d'optimalité dans le cas de deux FADs est donnée par :

$$\alpha(n_1 - n_2)(p_1 - p_2) + \beta(E_2 - E_1)(p_3 - p_4) = 2[(u_1 - u_2)^2 + (u_3 - u_4)^2 - R_0^2]$$

Démonstration. Le cas $L = 2$

on a :

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = m_{12}n_2 - m_{21}n_1 + r_1n_1(1 - \frac{n_1}{K_1}) - a_1n_1E_1, \\ \dot{n}_2 = m_{21}n_1 - m_{12}n_2 + r_2n_2(1 - \frac{n_2}{K_2}) - a_2n_2E_2, \\ \dot{E}_1 = k_{12}E_2 - k_{21}E_1 + \lambda a_1n_1E_1 - c_1E_1, \\ \dot{E}_2 = k_{21}E_1 - k_{12}E_2 + \lambda a_2n_2E_2 - c_2E_2, \end{cases}$$

$$f_0(t, X, u) = [-(a_1n_1E_1 + a_2n_2E_2) + (c_1E_1 + c_2E_2)] + \frac{1}{T}G_1(t, M_1, M_2)$$

$$\text{où } G_1(M_1, M_2) = [||M_1M_2||^2 - R_0^2]^2$$

$$\varphi(t, X, u) = (n_i; \dot{E}_i) \quad i = 1, 2$$

$$\mathcal{H}(t, X, p, u, \lambda_0) = p_1\varphi_1 + p_2\varphi_2 + p_3\varphi_3 + p_4\varphi_4 - \lambda_0f_0,$$

En appliquant le PMP à ce problème les conditions d'Euler sont données par : $\dot{X} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}$ et $\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X}$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial n_1} \\ &= p_1[m_{21} - r_1(1 - \frac{2n_1}{K_1}) + a_1E_1] - p_2m_{21} - p_3pa_1E_1 - \lambda_0a_1E_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_2 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial n_2} \\ &= -p_1m_{12} + p_2[m_{12} - r_2(1 - \frac{2n_2}{K_2}) + a_2E_2] - p_4pa_2E_2 - \lambda_0a_2E_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_3 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E_1} \\ &= p_1a_1n_1 + p_3[k_{21} - pa_1n_1E_1 + c_1] - p_4k_{21} + \lambda_0(-a_1n_1 + c_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_4 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E_2} \\ &= p_2a_2n_2 + p_3k_{12} + p_4[k_{12} - pa_2n_2E_2 + c_2] + \lambda_0(-a_2n_2 + c_2), \end{aligned}$$

La condition d'optimalité par rapport à u est traduite par : $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0$ avec $M_1 = (x_1 = u_1; y_1 = u_3)$ et $M_2 = (x_2 = u_2; y_2 = u_4)$

$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1} = 0$ ce qui donne

$$(u_1 - u_2)(2\alpha(n_1 - n_2)(p_1 - p_2) + 2\beta(E_2 - E_1)(p_3 - p_4) - 4\frac{\lambda_0}{T}[(u_1 - u_2)^2 + (u_3 - u_4)^2 - R_0^2]) = 0$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = u_2, \\ \text{ou} \\ 2\alpha(n_1 - n_2)(p_1 - p_2) + 2\beta(E_2 - E_1)(p_3 - p_4) - 4\frac{\lambda_0}{T}[(u_1 - u_2)^2 + (u_3 - u_4)^2 - R_0^2] = 0 \end{array} \right.$$

De même $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_2} = 0$ nous donne le même résultat.

Cependant $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_3} = 0$ et $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_4} = 0$ nous donne comme résultat :

$$(u_3 - u_4)(2\alpha(n_1 - n_2)(p_1 - p_2) + 2\beta(E_2 - E_1)(p_3 - p_4) - 4\frac{\lambda_0}{T}[(u_1 - u_2)^2 + (u_3 - u_4)^2 - R_0^2]) = 0$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} u_3 = u_4, \\ 2\alpha(n_1 - n_2)(p_1 - p_2) + 2\beta(E_2 - E_1)(p_3 - p_4) - 4\frac{\lambda_0}{T}[(u_1 - u_2)^2 + (u_3 - u_4)^2 - R_0^2] = 0 \end{array} \right.$$

Par conséquent on a le même résultat pour les 4 équations. Pour simplifier les calculs on peut poser $\lambda_0 = \frac{T}{2}$ et nous avons au final :

$$\alpha(n_1 - n_2)(p_1 - p_2) + \beta(E_2 - E_1)(p_3 - p_4) = 2[(u_1 - u_2)^2 + (u_3 - u_4)^2 - R_0^2].$$

□

Remarque 1. Si l'effort de pêche est constant sur chaque site et que la densité de population soit la même sur les sites c'est à dire : $n_1 = n_2$ et $E_1 = E_2$ alors $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - R_0^2 = 0$ d'où $\|M_1 M_2\|^2 = R_0^2$. Par conséquent $\|M_1 M_2\| = R_0$ et on retrouve la condition d'optimalité simple pour $L = 2$.

Exemple 4 Le cas $L = 3$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{n}_1 = m_{12}n_2 + m_{13}n_3 - m_{21}n_1 - m_{31}n_1 + r_1n_1(1 - \frac{n_1}{K_1}) - a_1n_1E_1, \\ \dot{n}_2 = m_{21}n_1 + m_{23}n_3 - m_{12}n_2 - m_{32}n_2 + r_2n_2(1 - \frac{n_2}{K_2}) - a_2n_2E_2, \\ \dot{n}_3 = m_{31}n_1 + m_{32}n_2 - m_{13}n_3 - m_{23}n_3 + r_3n_3(1 - \frac{n_3}{K_3}) - a_3n_3E_3, \\ \dot{E}_1 = k_{12}E_2 + k_{13}E_3 - k_{21}E_1 - k_{31}E_1 + \lambda a_1n_1E_1 - c_1E_1, \\ \dot{E}_2 = k_{21}E_1 + k_{23}E_3 - k_{12}E_2 - k_{32}E_2 + \lambda a_2n_2E_2 - c_2E_2, \\ \dot{E}_3 = k_{31}E_1 + k_{32}E_2 - k_{13}E_3 - k_{23}E_3 + \lambda a_3n_3E_3 - c_3E_3, \end{array} \right.$$

$$f_0(t, X, u) = [-(a_1 n_1 E_1 + a_2 n_2 E_2 + a_3 n_3 E_3) + (c_1 E_1 + c_2 E_2 + c_3 E_3)] + \frac{1}{T} G_1(t, M_1, M_2, M_3)$$

$$\varphi(t, X, u) = (n_i; \dot{E}_i) \quad i = 1, 2, 3$$

L'hamiltonien est donné par :

$$H(t, X, p, u, \lambda_0) = p_1 \varphi_1 + p_2 \varphi_2 + p_3 \varphi_3 + p_4 \varphi_4 + p_5 \varphi_5 + p_6 \varphi_6 - \lambda_0 f_0$$

Le principe du maximum de Pontryagin nous donne :

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial n_1} \\ &= p_1[m_{21} + m_{31} - r_1(1 - \frac{2n_1}{K_1}) + a_1 E_1] - p_2 m_{21} - p_3 m_{31} - p_4 p a_1 E_1 - \lambda_0 a_1 E_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial n_2} \\ &= -p_1 m_{12} + p_2[m_{12} + m_{32} - r_2(1 - \frac{2n_2}{K_2}) + a_2 E_2] - p_3 m_{32} - p_5 p a_2 E_2 - \lambda_0 a_2 E_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial n_3} \\ &= -p_1 m_{13} - p_2 m_{23} + p_3[m_{13} + m_{23} - r_3(1 - \frac{2n_3}{K_3}) + a_3 E_3] - p_6 p a_3 E_3 - \lambda_0 a_3 E_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_4 &= -\frac{\partial H}{\partial n_3} \\ &= p_1 a_1 n_1 + p_4[k_{21} + k_{31} - p a_1 n_1 + c_1] - p_5 k_{21} - p_6 k_{31} + \lambda_0(-a_1 n_1 + c_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_5 &= -\frac{\partial H}{\partial n_4} \\ &= p_2 a_2 n_2 - p_4 k_{12} + p_5[k_{12} + k_{32} - p a_2 n_2 + c_2] - p_6 k_{32} + \lambda_0(-a_2 n_2 + c_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_6 &= -\frac{\partial H}{\partial n_4} \\ &= p_3 a_3 n_3 - p_4 k_{13} - p_5 k_{23} + p_6[k_{13} + k_{23} - p a_3 n_3 + c_3] + \lambda_0(-a_3 n_3 + c_3) \end{aligned}$$

La condition d'optimalité par rapport à u nous est donnée par : $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$

avec $M_1 = (x_1 = u_1; y_1 = u_4)$; $M_2 = (x_2 = u_2; y_2 = u_5)$ et $M_3 = (x_2 = u_3; y_3 = u_6)$

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha[(u_1 - u_2)(n_2 - n_1)(p_1 - p_2) + (u_1 - u_3)(n_3 - n_1)(p_1 - p_3)] \\ + 2\beta[(u_1 - u_2)(p_4 - p_5)(E_2 - E_1) + (u_1 - u_3)(E_3 - E_1)(p_4 - p_6)] - \frac{\lambda_0}{T} 4A(2u_1 - u_2 - u_3) = 0 \end{cases}$$

avec

$$A = (u_1 - u_2)^2 + (u_4 - u_5)^2 + (u_1 - u_3)^2 + (u_4 - u_6)^2 + (u_2 - u_3)^2 + (u_5 - u_6)^2 - R_0^2$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha[(u_1 - u_2)(n_1 - n_2)(p_1 - p_2) + (u_2 - u_3)(n_3 - n_2)(p_2 - p_3)] \\ + 2\beta[(u_1 - u_2)(p_4 - p_5)(E_1 - E_2) + (u_2 - u_3)(E_3 - E_2)(p_5 - p_6)] - \frac{\lambda_0}{T}4A(-u_1 + 2u_2 - u_3) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha[(u_1 - u_3)(n_1 - n_3)(p_1 - p_3) + (u_2 - u_3)(n_2 - n_3)(p_2 - p_3)] \\ + 2\beta[(u_1 - u_3)(E_1 - E_3)(p_4 - p_6) + (u_2 - u_3)(E_2 - E_3)(p_5 - p_6)] - \frac{\lambda_0}{T}4A(-u_1 - u_2 + 2u_3) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha[(u_4 - u_5)(n_2 - n_1)(p_1 - p_2) + (u_4 - u_6)(n_1 - n_3)(p_1 - p_3)] \\ + 2\beta[(u_4 - u_5)(E_2 - E_1)(p_4 - p_5) + (u_4 - u_6)(E_1 - E_3)(p_4 - p_6)] - \frac{\lambda_0}{T}4A(2u_4 - u_5 - u_6) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_5} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha[(u_4 - u_5)(n_1 - n_2)(p_1 - p_2) + (u_5 - u_6)(n_3 - n_2)(p_2 - p_3)] \\ + 2\beta[(u_4 - u_5)(E_1 - E_2)(p_4 - p_5) + (u_5 - u_6)(E_3 - E_2)(p_5 - p_6)] - \frac{\lambda_0}{T}4A(-u_4 + 2u_5 - u_6) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_6} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha[(u_4 - u_6)(n_3 - n_1)(p_1 - p_3) + (u_5 - u_6)(n_2 - n_3)(p_2 - p_3)] \\ + 2\beta[(u_4 - u_6)(E_3 - E_1)(p_4 - p_6) + (u_5 - u_6)(E_2 - E_3)(p_5 - p_6)] - \frac{\lambda_0}{T}4A(-u_4 - u_5 + 2u_6) = 0 \end{cases}$$

Remarque 2. Si l'effort de pêche est constant sur chaque site et que la densité de population soit la même sur les sites c'est à dire : $n_1 = n_2 = n_3$ et $E_1 = E_2 = E_3$ alors des égalités précédentes nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ \quad \quad \quad \text{ou} \quad \quad \quad \text{ou} \quad A = 0 \\ 2y_1 - y_2 - y_3 = 0, \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 = 0, \\ -y_1 - y_2 + 2y_3 = 0. \end{array} \right.$$

Ce qui donne

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 - R_0^2 = 0.$$

Par conséquent $\|M_1M_2\|^2 + \|M_2M_3\|^2 + \|M_3M_1\|^2 = R_0^2$ et on retrouve la condition d'optimalité simple.

3.3 Contrôlabilité

Considérons un système de contrôle général

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.10)$$

où f est une application de classe C^1 de $I \times V \times U$ dans \mathbb{R}^n , I est un intervalle de \mathbb{R} , V ouvert de \mathbb{R}^m , $(t_0, x_0) \in I \times V$. On veut répondre à la question suivante : étant donné le système (3.10), où peut-on aller en temps T en faisant varier le contrôle u . L'ensemble des extrémités au temps T des solutions du système partant de x_0 au temps $t = 0$ est appelé ensemble accessible en temps T . Dans un premier temps, nous supposons fixer le nombre L de FADS et nous allons regarder la contrôlabilité locale et globale. Pour cela nous considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{n} = rn(1 - \frac{n}{K}) - QnE + ng(M_1, M_2, \dots, M_L), \\ \dot{E} = (-c + pQn)E. \end{cases} \quad (3.11)$$

où g représente le contrôle et vérifie $0 \leq g(M_1, M_2, \dots, M_L) \leq 1$.

3.3.1 Contrôlabilité locale

Proposition 3.3.1. *Considérons le système de contrôle général (3.11). Soit donc $f(x_0, u_0) = 0$ un point critique de f et notons $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0)$ et $B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)$. On suppose que*

$$rg(B|AB|\dots|A^{n-1}B) = n.$$

Alors le système est localement contrôlable en x_0

Notre objectif est d'appliquer la précédente proposition dans deux cas : quand le contrôle est considéré comme un scalaire et le second est dédié à la recherche de la pondération maximale pour la localisation des FADS.

3.3.1.1 Cas où g est le contrôle

Posons $X = (n ; E)$ le système précédent correspond à

$$\dot{X} = F(X ; g),$$

avec

$$F(X ; g) = \begin{pmatrix} rn(1 - \frac{n}{K}) - QnE + ng \\ (-c + pQn)E \end{pmatrix}.$$

Nous rappelons que nous avons déjà obtenu les points d'équilibre du système (1) qui sont donnés par :

$$(0 ; 0) ; (K ; 0) \quad \text{et} \quad \left(\frac{c}{pQ} ; \frac{r}{Q} \left(1 - \frac{c}{pQK} \right) \right).$$

Théorème 3.3.1. *En supposant que $g \equiv 0$ alors le point d'équilibre $\left(\frac{c}{pQ} ; \frac{r}{Q} \left(1 - \frac{c}{pQK} \right) \right)$ est l'unique point localement contrôlable du système .*

Démonstration. En appliquant la linéarisation du système, nous avons :

$$\dot{X} = \frac{\partial F}{\partial X}(X ; g)X + \frac{\partial F}{\partial g}(X ; g)g$$

Ce qui correspond à

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} r(1 - \frac{2n}{K}) - QE + g & -Qn \\ pQE & -c + pQn \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} g$$

d'où $\dot{X} = AX + Bg$ avec

$$A = \begin{pmatrix} r(1 - \frac{2n}{K}) - QE + g & -Qn \\ pQE & -c + pQn \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Au voisinage du point d'équilibre $(0 ; 0)$ pour $g \equiv 0$ nous avons :

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ E \end{pmatrix}$$

La condition de Kalman donne :

$$(B ; AB) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

par conséquent le système n'est pas localement contrôlable.

- Au voisinage du point d'équilibre $(K ; 0)$ on a :

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -r & -QK \\ 0 & -c + pQK \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} g$$

La condition de Kalman donne :

$$C = (B ; AB) = \begin{pmatrix} K & -rK \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a $\text{rang}C = 1 < 2$ donc le système n'est pas localement contrôlable.

• Au voisinage du point d'équilibre $\left(\frac{c}{pQ} ; \frac{r}{Q} \left(1 - \frac{c}{pQK}\right)\right)$ on a :

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \frac{-r}{pQk} & -\frac{c}{p} \\ pr \left(1 - \frac{c}{pQK}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{c}{pQ} \\ 0 \end{pmatrix} g$$

La condition de Kalman donne :

$$C = (B ; AB) = \begin{pmatrix} \frac{c}{pQ} & -\frac{c^2}{(pQ)^2K} \\ 0 & \frac{cr}{Q} \left(1 - \frac{c}{pQk}\right) \end{pmatrix}$$

on $\text{rang}C = 2$ donc le système est localement contrôlable. \square

3.3.1.2 Cas general où $\alpha = (\alpha_{12}; \dots; \alpha_{i,i+1}; \dots; \alpha_{1,L})$ est le contrôle

Dans ce paragraphe nous considérons un vecteur de pondération affecté à la localisation des points M_i $i = 1, \dots, L$. Ce vecteur est en fait notre variable de contrôle.

Soit donc le système (3.11) :

$$\begin{cases} \dot{n} &= rn \left(1 - \frac{n}{K}\right) - QnE + ng(M_1; M_2 \dots; M_L), \\ \dot{E} &= (-c + pQn)E. \end{cases} \quad (3.12)$$

Théorème 3.3.2. *En supposant que $g(M_1; M_2 \dots; M_L) = \sum_{i=1}^{L-1} \alpha_{ii+1} \|M_i M_{i+1}\|^2 + \alpha_{1L} \|M_1 M_L\|^2$ alors le point d'équilibre $\left(\frac{c}{pQ} ; \frac{r}{Q} \left(1 - \frac{c}{pQK}\right)\right)$ est l'unique point localement contrôlable du système.*

Démonstration. Soit donc le contrôle définit par :

$$g(M_1; M_2 \dots; M_L) = \sum_{i=1}^{L-1} \alpha_{ii+1} \|M_i M_{i+1}\|^2 + \alpha_{1L} \|M_1 M_L\|^2.$$

Le système (3.12) devient :

$$\begin{cases} \dot{n} &= rn \left(1 - \frac{n}{K}\right) - QnE + n \left(\sum_{i=1}^{L-1} \alpha_{ii+1} \|M_i M_{i+1}\|^2 + \alpha_{1L} \|M_1 M_L\|^2 \right), \\ \dot{E} &= (-c + pQn)E. \end{cases}$$

Nous désignons par $\alpha = (\alpha_{12}; \dots; \alpha_{i,i+1}; \dots; \alpha_{1L})$, le contrôle du système (3.12). Posons $X = (n ; E)$ le système (3.12) peut être réécrit de la manière suivante :

$$\dot{X} = F(X ; \alpha),$$

avec

$$F(X; \alpha) = \begin{pmatrix} rn(1 - \frac{n}{K}) - QnE + n \left(\sum_{i=1}^{L-1} \alpha_{ii+1} \|M_i M_{i+1}\|^2 + \alpha_{1L} \|M_1 M_L\|^2 \right) \\ (-c + pQn)E \end{pmatrix},$$

Nous commençons d'abord par chercher le système linéarisé :

$$\dot{X} = \frac{\partial F}{\partial X}(X; \alpha) X + \frac{\partial F}{\partial \alpha}(X; \alpha) \alpha^t.$$

avec

$$\frac{\partial F}{\partial X}(X; \alpha) = \begin{pmatrix} r(1 - \frac{2n}{K}) - QE + \sum_{i=1}^{L-1} \alpha_{ii+1} \|M_i M_{i+1}\|^2 + \alpha_{1L} \|M_1 M_L\|^2 & -Qn \\ pQE & -c + pQn \end{pmatrix},$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(X; \alpha) = \begin{pmatrix} n \|M_1 M_2\|^2 & \cdots & n \|M_i M_{i+1}\|^2 & \cdots & n \|M_1 M_L\|^2 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \dot{X} = & \begin{pmatrix} r(1 - \frac{2n}{K}) - QE + \sum_{i=1}^{L-1} \alpha_{ii+1} \|M_i M_{i+1}\|^2 + \alpha_{1L} \|M_1 M_L\|^2 & -Qn \\ pQE & -c + pQn \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ E \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} n \|M_1 M_2\|^2 & \cdots & n \|M_i M_{i+1}\|^2 & \cdots & n \|M_1 M_L\|^2 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{ii+1} \\ \vdots \\ \alpha_{1L} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

pour tout $i \in \{2, \dots, L-1\}$.

D'où $\dot{X} = AX + B\alpha$ avec

$$A = \begin{pmatrix} r(1 - \frac{2n}{K}) - QE + \sum_{i=1}^{L-1} \alpha_{ii+1} \|M_i M_{i+1}\|^2 + \alpha_{1L} \|M_1 M_L\|^2 & -Qn \\ pQE & -c + pQn \end{pmatrix},$$

et

$$B = \begin{pmatrix} n \|M_1 M_2\|^2 & \cdots & n \|M_i M_{i+1}\|^2 & \cdots & n \|M_1 M_L\|^2 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

Il est facile de voir déjà que le système de contrôle n'est pas localement contrôlable.

• Au voisinage du point d'équilibre $\left(\frac{c}{pQ} ; \frac{r}{Q} \left(1 - \frac{c}{pQK}\right)\right)$ on a :

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \frac{-cr}{pQk} & -\frac{c}{p} \\ pr \left(1 - \frac{c}{pQK}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{c}{pQ} \|M_1 M_2\|^2 & \cdots & \frac{c}{pQ} \|M_i M_{i+1}\|^2 & \cdots & \frac{c}{pQ} \|M_1 M_L\|^2 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \alpha$$

Avec

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-cr}{pQk} & -\frac{c}{p} \\ pr \left(1 - \frac{c}{pQK}\right) & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$B = \begin{pmatrix} \frac{c}{pQ} \|M_1 M_2\|^2 & \cdots & \frac{c}{pQ} \|M_i M_{i+1}\|^2 & \cdots & \frac{c}{pQ} \|M_1 M_L\|^2 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui nous donne :

$$AB = \begin{pmatrix} \frac{(c)^2 r}{(pQ)^2 K} \|M_1 M_2\|^2 & \cdots & \frac{(c)^2 r}{(pQ)^2 K} \|M_i M_{i+1}\|^2 & \cdots & \frac{(c)^2 r}{(pQ)^2 K} \|M_1 M_L\|^2 \\ \frac{cr}{Q} \left(1 - \frac{c}{pQk}\right) \|M_1 M_2\|^2 & \cdots & \frac{cr}{Q} \left(1 - \frac{c}{pQk}\right) \|M_i M_{i+1}\|^2 & \cdots & \frac{cr}{Q} \left(1 - \frac{c}{pQk}\right) \|M_1 M_L\|^2 \end{pmatrix}$$

La condition de Kalman donne :

$$(B ; AB) = \begin{pmatrix} \frac{c}{pQ} \|M_1 M_2\|^2 & \cdots & \frac{c}{pQ} \|M_1 M_L\|^2 & \frac{(c)^2 r}{(pQ)^2 K} \left(1 - \frac{c}{pQk}\right) \|M_1 M_2\|^2 & \cdots & \frac{(c)^2 r}{(pQ)^2 K} \left(1 - \frac{c}{pQk}\right) \|M_1 M_L\|^2 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{cr}{Q} \left(1 - \frac{c}{pQk}\right) \|M_1 M_2\|^2 & \cdots & \frac{cr}{Q} \left(1 - \frac{c}{pQk}\right) \|M_1 M_L\|^2 \end{pmatrix}.$$

on a $\text{rang}C = 2$ donc le système est localement contrôlable. \square

3.3.2 Contrôlabilité globale

Dans cette partie, il sera question d'étudier la contrôlabilité globale du système (3.11) dans plusieurs cas de figures.

Proposition 3.3.2. *Tout système contrôlé de la forme*

$$\dot{X} = AX + uB. \quad (3.13)$$

est complètement contrôlable si et seulement si le sous-espace vectoriel engendré par la famille de n vecteurs $\{B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B\}$ est l'espace tout entier.

3.3.2.1 Cas où g est le contrôle

Nous considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{n} &= rn \left(1 - \frac{n}{K}\right) - QnE + ng(M_1, M_2, \dots, M_L), \\ \dot{E} &= (-c + pQn)E. \end{cases} \quad (3.14)$$

où g représente le contrôle. Posons $X = (n ; E)$, le système précédent peut être écrit sous la forme :

$$\dot{X} = F_0(X) + gF_1(X),$$

avec

$$F_0(X) = \begin{pmatrix} rn(1 - \frac{n}{K}) - QnE \\ (-c + pQn)E \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad F_1(X) = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.3.3. *Le système (3.14) n'est pas globalement contrôlable.*

Démonstration. Calculons les crochets de Lie suivants : $[F_1 ; F_0]$. Nous avons

$$[F_1 ; F_0] = F_0'(X) F_1(X) - F_1'(X) F_0(X),$$

avec

$$F_0'(X) = \begin{pmatrix} r(1 - \frac{2n}{K}) - QE & -Qn \\ pQE & -c + pQn \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad F_1'(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui nous permet d'obtenir

$$[F_1 ; F_0] = \begin{pmatrix} -\frac{rn^2}{K} \\ pnQE \end{pmatrix}.$$

Soit $X = (x ; y) \in \mathbb{R}^2$ existe-t-il des réels

λ_1 et λ_2 tels que $X = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 [F_1 ; F_0]$ ce qui donne :

$$\begin{cases} x &= \lambda_1 n - \lambda_2 \frac{n^2}{K}, \\ y &= \lambda_2 pnQE. \end{cases}$$

Pour tout $n \neq 0$ nous avons $\lambda_2 = \frac{y}{pnQE}$.

Pour $n = 0$, y n'est pas défini dans ce cas $\text{vect}\{F_1 ; [F_1 ; F_0]\} \neq \mathbb{R}^2$ donc le système n'est pas globalement contrôlable. □

Après l'étude théorique faite sur la contrôlabilité du système, nous cherchons à déterminer le contrôle optimal. Et dans le cas où les calculs sont possibles, nous faisons les simulations numériques dans le but de voir l'évolution du système.

3.3.2.2 Cas où $g(M_1, M_2) = \alpha_{12} \|M_1 M_2\|^2$; α_{12} étant le contrôle

Dans cette partie, il s'agit d'étudier la contrôlabilité globale du système suivant :

$$\begin{cases} \dot{n} &= rn(1 - \frac{n}{K}) - QnE + n\alpha_{12} \|M_1 M_2\|^2, \\ \dot{E} &= (-c + pQn)E. \end{cases} \quad (3.15)$$

où α_{12} représente le contrôle.

Théorème 3.3.4. *Le système (3.15) n'est pas globalement contrôlable.*

Démonstration. Pour se faire nous posons : $X = (n ; E)$, le système précédent peut être écrit sous la forme :

$$\dot{X} = F_0(X) + \alpha_{12}F_1(X).$$

avec

$$F_0(X) = \begin{pmatrix} rn(1 - \frac{n}{K}) - QnE \\ (-c + pQn)E \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_1(X) = \begin{pmatrix} n \|M_1M_2\|^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous commençons d'abord par calculer le crochet de Lie suivant : $[F_1 ; F_0]$.

$$[F_1 ; F_0] = F_0'(X) F_1(X) - F_1'(X) F_0(X)$$

avec

$$F_0'(X) = \begin{pmatrix} r(1 - \frac{2n}{K}) - QE & -Qn \\ pQE & -c + pQn \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_1'(X) = \begin{pmatrix} \|M_1M_2\|^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ce qui conduit au résultat suivant :

$$[F_1 ; F_0] = \begin{pmatrix} -\frac{rn^2}{K} \|M_1M_2\|^2 \\ pnQE \|M_1M_2\|^2 \end{pmatrix}$$

Soit $X = (x ; y) \in \mathbb{R}^2$ existe-t-il des réels

λ_1 et λ_2 tels que $X = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 [F_1 ; F_0]$ ce qui donne :

$$\begin{cases} x &= \lambda_1 n \|M_1M_2\|^2 - \lambda_2 \frac{rn^2}{K} \|M_1M_2\|^2 \\ y &= \lambda_2 pnQE \|M_1M_2\|^2 \end{cases}$$

Pour tout $n \neq 0$ nous avons Pour $n = 0$, y n'est pas défini dans ce cas $\text{vect} \{F_1 ; [F_1 ; F_0]\} \neq \mathbb{R}^2$ donc le système n'est pas globalement contrôlable. \square

3.3.3 Contrôle optimal

Soit $\dot{X}(t) = (\dot{n} ; \dot{E})$ et $X(0) = (n(0) ; E(0))$ avec $n(0) = n_0$ et $E(0) = E_0$

Considérons le système de contrôle suivant et $f(M_1; M_2 \dots; M_L) = u$ le contrôle

$$(F) \begin{cases} \dot{n} &= rn(1 - \frac{n}{K}) - QnE + nf(M_1; M_2 \dots; M_L), \\ \dot{E} &= (-c + aQn)E. \end{cases}$$

Nous introduisons

$$\mathcal{M}(X; u; p) = \int_0^T f_0(t; X; u) + g(X(T)). \quad (3.16)$$

Nous cherchons à minimiser

$$\min \mathcal{M}(X; u; p), \quad u \in \mathcal{U}_{ad} = \mathbb{R}^{2L} \text{ l'ensemble des contrôles admissibles} \quad (3.17)$$

Soit donc

$$g(X(T)) = |E_T - E_d|^2 + |n_T - n_d|^2,$$

et

$$f_0(t; X; u) = \frac{1}{T}u^2.$$

Notre choix est motivé par l'étude de la contrôlabilité du système. En fait on regarde les valeurs de n et E tels que le système soit contrôlable. Et pour estimer le contrôle optimal nous allons considérer les valeurs de n et de E dans le cas où le système est contrôlable.

La fonction hamiltonienne est définie par :

$$\mathcal{H}(X, p, u) = \langle p, \dot{X} \rangle - f_0(t; X; u),$$

$$\mathcal{H}(X, p, u) = p_1 \dot{n} + p_2 \dot{E} - f_0(t; X; u),$$

Le système (F) peut être réécrit comme :

$$\dot{X} = F_0(X) + uF_1(X),$$

avec

$$F_0(X) = \begin{pmatrix} rn(1 - \frac{n}{K}) - QnE \\ (-c + pQn)E \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_1(X) = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

nous obtenons

$$\mathcal{H}(X, p, u) = p_1[rn(1 - \frac{n}{K}) - QnE + nu] + p_2(-c + aQn)E - \lambda_0 f_0(t; X; u),$$

La condition de maximisation devient dans ce cas sur $[0, T]$

$$\mathcal{H}(X, p, u) = \max_{b \in \mathbb{R}^{2L}} \mathcal{H}(X, p, b),$$

$$\mathcal{H}(X, p(t), u(t)) = \max_{b \in \mathbb{R}^{2L}} \left(p_1[rn(1 - \frac{n}{K}) - QnE + nb] + p_2[(-c + aQn)E] - \frac{\lambda_0}{T}b^2 \right).$$

La troisième condition du principe du maximum Pontryagin est donnée par :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(X, p, u) = 0.$$

Il est équivalent à $\frac{-2\lambda_0}{T}u + p_1n = 0$ et le contrôle optimal est donné par :

$$u^* = \frac{T}{2\lambda_0}p_1(t)n(t). \quad (3.18)$$

Au point d'équilibre $(\frac{c}{pQ}; \frac{r}{Q}(1 - \frac{c}{aQk}))$ nous avons montré que le système est localement contrôlable.

Ce qui nous a permis de proposer les états désirés de n et de E .

Soit $n_d = n^* = \frac{c}{aQ}$ et $E_d = E^* = \frac{r}{Q}(1 - \frac{c}{aQk})$, l'état désiré au temps T .

Nous remplaçons les valeurs du contrôle u^* dans le système (F) et pour $\lambda_0 = 1$, nous avons le nouveau modèle suivant :

$$(F_1) \begin{cases} \dot{n} &= rn(1 - \frac{n}{K}) - QnE + \frac{T}{2}p_1n^2, \\ \dot{E} &= (-c + aQn)E, \\ \dot{p}_1 &= -p_1 [r(1 - \frac{2n}{K}) - QE + \frac{T}{2}p_1n] - p_2aQE, \\ \dot{p}_2 &= p_1Qn - p_2(-c + aQn). \end{cases}$$

en remplaçant n^* et E^* par leurs expressions dans (F_1) nous avons :

$$\dot{p}_2 = 0 \implies p_1 = 0,$$

$$\dot{p}_1 = 0 \text{ pour } p_1 = 0 \implies p_2 = -1,$$

La matrice jacobienne est donnée par :

$$J = \begin{bmatrix} r(1 - \frac{2n}{K}) - QE + 2p_1n & -Qn & n^2 & 0 \\ aQE & aQn - c & 0 & 0 \\ -p_1(p_1 - \frac{2r}{K}) & p_1Q - p_2aQ & -(r(1 - \frac{2n}{K}) - QE + 2p_1n) & -aQE \\ p_1Q - p_2aQ & 0 & Qn & c - aQn \end{bmatrix}$$

Au point n^* et E^* la matrice jacobienne est donnée par :

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{rc}{aQk} & -\frac{c}{a} & \frac{c^2}{a^2Q^2} & 0 \\ ra(1 - \frac{c}{aQk}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & aQ & \frac{rc}{aQk} & -ra(1 - \frac{c}{aQk}) \\ aQ & 0 & \frac{c}{a} & 0 \end{bmatrix}$$

En considérant que :

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} \dot{n} \\ \dot{E} \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} n \\ E \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

nous avons

$$\begin{pmatrix} \dot{n}(t) \\ \dot{E}(t) \\ \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{rc}{aQk} & -\frac{c}{a} & \frac{c^2}{a^2Q^2} & 0 \\ ra(1 - \frac{c}{aQk}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & aQ & \frac{rc}{aQk} & -ra(1 - \frac{c}{aQk}) \\ aQ & 0 & \frac{c}{a} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ E \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Le système est équivalent à : $\dot{Y}(t) = AY(t)$ avec :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} n \\ E \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{rc}{aQk} & -\frac{c}{a} & \frac{c^2}{a^2Q^2} & 0 \\ ra(1 - \frac{c}{aQk}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & aQ & \frac{rc}{aQk} & -ra(1 - \frac{c}{aQk}) \\ aQ & 0 & \frac{c}{a} & 0 \end{pmatrix},$$

Le système (F_1) correspond à $\dot{Y} = f(Y)$. Le point intéressant correspond à l'équilibre de pêcheries viable dans le cas où $aQK > c$ est $\left(\frac{c}{aQ}; \frac{r}{Q}\left(1 - \frac{c}{aQk}\right)\right)$ lequel est associé aux multiplicateurs de Lagrange.

$$p_1 = 0,$$

$$p_2 = -1,$$

Proposition 3.3.3. *Pour $aQK > c$, l'étude locale su système (F_1) autour du point fixe $\left(\frac{c}{aQ}; \frac{r}{Q}\left(1 - \frac{c}{aQk}\right)\right)$ associés aux multiplicateurs de Lagrange p_1 et p_2 correspond à une solution d'équations du second ordre définies par :*

$$\ddot{p}_1(t) - \frac{rc}{aQK}\dot{p}_1(t) + rc\left(1 - \frac{c}{aQk}\right)p_1(t) = 0. \quad (3.19)$$

La solution est donnée par :

$$p_1(t) = \lambda_1 \exp\left(\frac{t}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \cot(\sqrt{3}) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right],$$

Nous obtenons une équation différentielle du second ordre en $n(t)$ avec un second membre en $\dot{p}_1(t)$

$$\ddot{n}(t) + \frac{rc}{aQK}\dot{n}(t) + rc\left(1 - \frac{c}{aQk}\right)n(t) = \frac{c^2}{a^2Q^2}\dot{p}_1(t), \quad (3.20)$$

et la solution $n(t)$ est donnée par l'expression suivante :

$$n(t) = \frac{-1}{16} \exp\left(\frac{-t}{2}\right) \csc\left[\sqrt{3}\right]^2.$$

Pour la preuve il suffit de remplacer et d'appliquer les outils mathématiques de la théorie des équations différentielles ordinaires.

3.4 Simulations Numériques

Dans cette section nous présentons quelques applications numériques sur les études déjà faites dans les précédentes sections. Nous allons considéré 2 exemples ($L = 2$ et $L = 3$) pour le problème de Lagrange où nous utilisons la fonctionnelle G_2 pour trouver les conditions d'optimalité ensuite nous traçons avec l'aide de la méthode de Runge Kutta l'évolution de la densité et de l'effort de pêche .

Les exemples présentés avec le principe du maximum de Pontryagin sont plus généraux avec comme fonctionnelle G_1 (pour $L \geq 4$). Ce qui nous permet de déterminer la position des FADs. Pour cela nous utilisons 2 logiciels : ipopt pour trouver les coordonnées des points et Geogebra pour les placer.

3.4.1 Simulation Numérique du système

Dans cette section, nous résolvons numériquement le système suivant (M) en utilisant la méthode de Runge-Kutta

$$(M) \begin{cases} \dot{n}(t) &= -\frac{cr}{aQK}n(t) - \frac{c}{a}E(t), \\ \dot{E}(t) &= ar(1 - \frac{c}{aQK})n(t), \\ \dot{p}_1(t) &= \frac{cr}{aQK}p_1(t) - ar(1 - \frac{c}{aQK})p_2(t), \\ \dot{p}_2(t) &= \frac{c}{a}p_1(t). \end{cases}$$

On se donne les valeurs des paramètres suivants $a = 1$, $r = 2$, $Q = 0,5$, $c = 1$ et $K = 4$ et nous nous plaçons dans le cas où $aQK > c$ ie dans le cas où l'équilibre $(\frac{c}{aQ}; \frac{r}{Q}(1 - \frac{c}{aQK}))$ est positif et correspond à une pêcherie viable. En remplaçant les constantes par leurs valeurs, on obtient les valeurs suivantes :

$$n^* = \frac{c}{aQ} = 2,$$

$$E^* = \frac{r}{Q}(1 - \frac{c}{aQK}) = 2,$$

et les multiplicateurs de Lagrange associés à cet équilibre sont donnés par :

$$p_1^* = 0,$$

et

$$p_2^* = -1.$$

En remplaçant les constantes dans le système précédent, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{n}(t) \\ \dot{E}(t) \\ \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ E \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix},$$

Le système est équivalent à $\dot{Y}(t) = AY(t)$ avec :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} n \\ E \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De l'équation $\dot{Y}(t) = AY(t)$, nous obtenons : $\dot{n}(t) = -n(t) - E(t)$ et $\dot{E}(t) = n(t)$. En dérivant cette dernière équation, nous obtenons $\dot{n}(t) = \ddot{E}(t)$ et en changeant \dot{n} par sa valeur dans la première équation du système, nous obtenons une équation différentielle du second ordre définie par : by :

$$\ddot{E} + \dot{E} + E = 0,$$

cette solution est donnée par :

$$E(t) = C \exp\left(\frac{-1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \phi\right),$$

En dérivant cette solution, nous obtenons :

$$n(t) = -C \exp\left(\frac{-1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \phi + \frac{\pi}{6}\right).$$

Comme conditions initiales nous posons : $n(0) = E(0) = 30$, et nous avons :

$$C = 60 \quad \text{et} \quad \phi = \frac{\pi}{3},$$

ce qui nous donne

$$E(t) = 60 \exp\left(\frac{-1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$n(t) = -60 \exp\left(\frac{-1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 2\frac{\pi}{3}\right).$$

La figure suivante est obtenue avec la méthode de Runge Kutta method. dans cette méthode, nous prenons comme conditions initiales $Y(0) = (30 \ 30 \ 45 \ 20)$ et $h = 0,05$ comme un temps de discrétisation . En fait nous représentons la solution $Y(t)$ dans un intervalle de temps $t \in [0; 12]$. Les courbes en bleu foncée , verte, rouge, et bleu claire représentent les fonctions $n(t)$, $E(t)$, $P_1(t)$ et $P_2(t)$ respectivement.

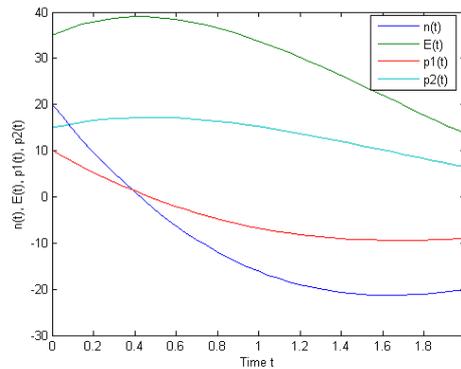


FIGURE 3.7 – Résolution Numérique avec Runge Kutta

3.4.2 Simulation Numérique du contrôle

Ici nous donnons la solution du contrôle optimal définie en (10) pour les valeurs suivantes $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 3$, $T = 2$, $k = 3$, $n(0) = n_0 = 20$ et $n_T = n(2) = 70$. Ce qui donne

$$p_1(t) = 3e^{\frac{t}{2}} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \cot(\sqrt{3}) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right],$$

et une simple valeur de

$$n(t) = 2e^{-\frac{t}{2}} \csc \left[\sqrt{3} \right] \left(-(7 + 3e^t) \sin \left[\frac{\sqrt{3}}{2} (-2 + t) \right] + 35e \sin \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \right).$$

En remplaçant les valeurs de $p_1(t)$ and $n(t)$ précédemment trouvées en (10) nous avons :

$$u(t) = 6 \csc \left[\sqrt{3} \right] \left(\cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) - \cot(\sqrt{3}) \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right) * \left(-(7 + 3e^t) \sin \left[\frac{\sqrt{3}}{2} (-2 + t) \right] + 35e \sin \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \right).$$

et nous représentons l'évolution de $u(t)$ sur l'intervalle $[0, 2]$ par la courbe suivante :

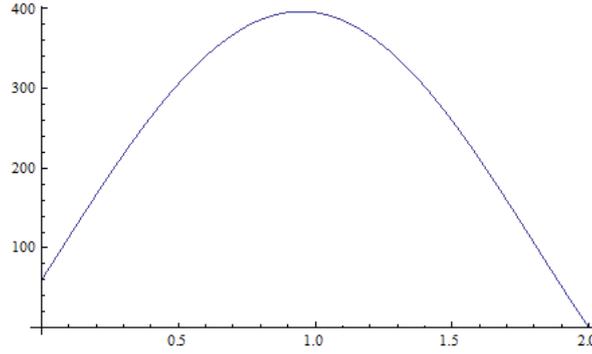


FIGURE 3.8 – Evolution du control $u(t)$.

Puis, nous résolvons numériquement le système suivant (F_1) en utilisant la matrice jacobienne

$$(F_2) \begin{cases} \dot{n}(t) &= -\frac{cr}{aQK}n(t) - \frac{c}{a}E(t) + \frac{c^2}{a^2Q^2}p_1(t), \\ \dot{E}(t) &= ra\left(1 - \frac{c}{aQK}\right)n(t), \\ \dot{p}_1(t) &= aQE(t) + \frac{rc}{aQK}p_1(t) - ar\left(1 - \frac{c}{aQK}\right)p_2(t), \\ \dot{p}_2(t) &= aQn(t) + \frac{c}{a}p_1(t). \end{cases}$$

On choisit $a = 1$, $r = 2$, $Q = 0,5$, $c = 1$ et $K = 4$ et nous nous plaçons dans le cas où $aQK > c$ i.e dans le cas où l'équilibre $\left(\frac{c}{aQ}; \frac{r}{Q}\left(1 - \frac{c}{aQK}\right)\right)$ est positif et correspond à une pêche viable. En changeant les constantes dans le système suivant, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{n}(t) \\ \dot{E}(t) \\ \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ E \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix},$$

Le système est équivalent à $\dot{Y}(t) = AY(t)$ avec :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} n \\ E \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

La figure suivante est obtenue avec la méthode de Runge Kutta. Nous prenons comme condition initiale $Y(0) = (20, 35, 0, 1)$ et un temps de discrétisation $h = 0,05$. En fait nous représentons la solution $Y(t)$ sur un intervalle de temps $t \in [0; 2]$.

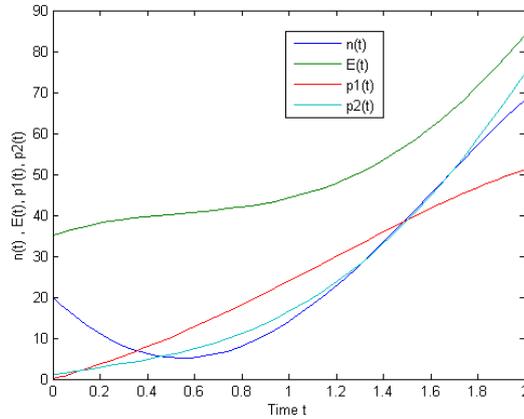


FIGURE 3.9 – Effect du contrôle sur la densité $n(t)$, effort de pêche $E(t)$, et les multiplicateurs de Lagrange $p_1(t)$ et $p_2(t)$.

3.5 Conclusion

Dans cette partie on a présenté un modèle de pêche multisite déterminé par l'utilisation de DCPs. On s'est alors proposé de déterminer la position optimale pour placer les DCPs tandis que d'autres papiers n'ont considérés la position des DCPs que linéaire. L'utilisation du Principe du Maximum de Pontryagin nous a permis de déterminer les coordonnées des points M_i à placer dans un endroit bien choisit de la mer. Et pour cela nous avons introduit un critère défini par une fonctionnelle à optimiser qui nous a permis d'obtenir des conditions suffisantes d'optimalité pour la localisation optimale des FADs en tenant compte de la distance entre les différents DCPs. Ceci nous permet de considérer les fonctions m_{ij} et k_{ij} d'abord comme des constantes ensuite dépendant de la position des DCPs, on retrouve la même condition d'optimalité et ce sous certaines conditions. Le point d'équilibre contrôlable obtenu avec la fonctionnelle G_2 a ainsi permis de déterminer le contrôle optimal et de pouvoir amener le système à un état désiré à un temps T .

Les résultats obtenus dans cette partie ont fait l'objet d'un papier qui va bientôt être soumis. Toutefois il serait très intéressant de voir quels seraient les résultats si le modèle décrit par les EDOs est remplacé par un modèle distribué ou plus encore si le champ de vecteurs associé au système d'EDO n'est plus régulier.

Chapitre 4

Modèles de pêche avec prix variable

La modélisation bioéconomique a apporté un vif intérêt surtout du point de vue de la théorie du contrôle [17, 48]. Nous renvoyons également au livre sur la gestion des ressources renouvelables [20]. Dans la plupart des modèles mathématiques, le prix de la ressource est constant. À notre connaissance, peu de contributions ont considéré un prix variable ou un prix dépendant de la capture [66, 67, 13]. Le but de ce travail est de présenter un modèle bioéconomique de la pêche qui est un système dynamique dans lequel le prix de la ressource sur le marché est une variable. En effet, selon la théorie économique classique [71], la variation des prix dépend de la différence entre la demande et l'offre. Ce qui nous amène à considérer dans un premier temps un modèle de pêche multi-site avec différents DCPs (déjà traité dans le chapitre précédent) ou cette fois la variation du prix est introduite. Dans le cadre de ce modèle, nous verrons comment il est possible de passer de la surexploitation à une pêche durable¹ en faisant varier le nombre de sites. Dans la deuxième partie² en utilisant un modèle sans échelles de temps, nous faisons l'étude d'une équation du prix du marché pouvant admettre de un à trois équilibres qui peuvent coexister. Nous généraliserons par la suite notre étude au cas d'une population exploitée structurée en classes d'âge et au cas d'une pêche avec stockage d'une partie de la ressource.

1. Ly S., Mansal F., Balde M., Nguyen Huu Tri, Auger Pierre. *A model of a multi-site fishery with variable price : from over-exploitation to sustainable fisheries*. Mathematical Modelling of Natural Phenomena, 2013, 8 (6), p. 130-142. ISSN 0973-5348

2. F.Mansal , Tri Nguyen Huu , M.Balde, P.Auger . *A Mathematical Model of a Fishery with Variable Market Price : Sustainable Fishery/Over-exploitation*. Acta Biotheor (2014) 62 :305 ?323 DOI 10.1007/s10441-014-9227-7

4.1 De la surexploitation à la pêche durable

4.1.1 Introduction

Dans cette partie nous considérons un modèle de pêche multi-sites. Dans ce modèle on suppose que la capture des poissons par les navires de pêche se fait uniquement autour d'un DCP donné. On suppose aussi qu'il n'y a pas de pêche en haute mer. En conséquence, le stock total de poissons est divisé en deux compartiments importants : un stock libre non pêché en haute mer et un stock exploité autour du système composé par les objets flottants ou DCPs. Ainsi le modèle considéré prend en compte le mouvement des poissons de la mer aux DCPs et du mouvement des bateaux d'un DCP à un autre voisin où se font les captures, [49]. Dans la réalité, les bateaux de pêche se déplacent rapidement d'un DCP à l'autre pour y pêcher. De la même manière, les poissons restent peu de temps (quelques jours) autour d'un DCP avant de retourner en haute mer. Dans ces conditions, nous allons prendre en compte dans le modèle deux échelles de temps, une échelle de temps rapide correspondra aux mouvements des poissons et des bateaux et une échelle de temps lente en comparaison correspondra à la croissance des poissons, à la capture et l'évolution de l'effort de pêche .

4.1.2 Un modèle de pêche multi-site

Nous considérons dans cette partie la côte le long de laquelle se trouvent L sites artificiels disposés selon une chaîne linéaire. Nous faisons les mêmes suppositions que dans le chapitre précédent . Soit donc $n_s(t)$ la densité de poissons attaché au stock libre de la mer au temps t , $n_i(t)$ la densité de poissons sur le site i au temps t , et $E_i(t)$ l'effort de pêche sur le site i au temps $t, i \in [1, L]$. Sur les différents sites et en haute mer, la population de poissons suit une croissance logistique. Nous rappelons aussi que les poissons ont des taux différents de croissance pour le stock libre et sur les sites que nous appelons r_s et r_1 , respectivement.

Nous allons maintenant inclure la dynamique du prix du marché de la ressource. Dans beaucoup d'articles le prix de la ressource était considéré comme une constante ou une fonction de la capture [66, 67, 13]. Selon la théorie classique économique [71] le prix est fonction de la différence entre la demande $D(p)$ (qui est la quantité de poissons demandée par les consommateurs) et l'offre qui est simplement donnée par la capture instantanée sur tous les sites.

$$\frac{dp}{d\tau} = \Phi \left(D(p) - q \sum_{i=1}^L n_i E_i \right). \quad (4.1)$$

Φ est une constante positive et q le coefficient de capturabilité supposé homogène .

Nous considérons une fonction demande linéaire comme dans [40]. Une telle fonction linéaire est supposée être une fonction décroissante du prix du marché avec une valeur maximale A :

$$D(p) = A - \gamma p \quad (4.2)$$

où γ est une constante positive que nous appelons la sensibilité de la demande par rapport au prix.

Le système suivant décrit l'évolution dans le temps de la pêche :

$$\begin{cases} \frac{dn_s}{d\tau} = \sum_{i=1}^L m_{si}n_i - \sum_{i=1}^L m_{is}n_s + \varepsilon r_s n_s \left(1 - \frac{n_s}{k_s}\right), \\ \frac{dn_i}{d\tau} = m_{is}n_s - m_{si}n_i + \varepsilon \left(r_1 n_i \left(1 - \frac{n_i}{k_i}\right) - qn_i E_i\right), \\ \frac{dE_i}{d\tau} = \beta_{i,i-1}E_{i-1} + \beta_{i,i+1}E_{i+1} - (\beta_{i-1,i} + \beta_{i+1,i})E_i + \varepsilon(-c + pqn_i)E_i, \\ \frac{dp}{d\tau} = \Phi \left(D(p) - q \sum_{i=1}^L n_i E_i\right). \end{cases} \quad (4.3)$$

Soit K est une constante représentant la capacité limite globale du système pour les poissons. Nous appelons k_s et $k_i, i \in [1, L]$, la capacité limite du stock libre et sur le site i respectivement, avec

$$k_s = \alpha K, \quad (4.4)$$

$$\sum_{i=1}^L k_i = (1 - \alpha)K, \quad (4.5)$$

où $0 < \alpha < 1$ est une proportion constante de la capacité limite en haute mer, tandis que la proportion restante est attachée aux sites.

Sur le site i , l'effort de pêche varie proportionnellement en fonction de la différence entre le profit (pqn_i , où p est le prix par unité de biomasse et q le coefficient de capturabilité) et le coût c par unité d'effort de pêche.

Si la pêche est rentable, c'est-à-dire si le bénéfice net est supérieur au coût d'exploitation par unité d'effort de pêche, l'armateur investit dans la pêche et il en résulte que l'effort de pêche augmente. Dans le cas contraire, l'armateur désinvestit et l'effort de pêche diminue. Le mouvement des poissons et le déplacement des bateaux se fait à une échelle de temps rapide τ , tandis la croissance des poissons et la dynamique de la pêche se fait à une échelle de temps lente $t = \varepsilon\tau$, avec $\varepsilon \ll 1$. Nous supposons que le taux de mouvement des bateaux d'un site à un autre voisin dépend de la distance entre ces sites. Par conséquent nous supposons que les taux de mouvement des navires sont symétriques : $\beta_{i+1,i} = \beta_{i,i+1}$; $i \in \{1, \dots, L-1\}$. Nous supposons aussi que le taux de mouvement des poissons est inversement proportionnel à la capacité limite du site de départ (ou du stock libre).

On note

$$m_{si} = \frac{m_0}{k_i}; \quad m_{is} = \frac{m_0}{k_s} \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, L\}. \quad (4.6)$$

où m_{is} (resp. m_{si}) est le taux de mouvement entre le stock et le site i (resp. le site i et le stock libre), m_0 est une constante positive représentant le taux de migration quand la capacité limite du site de départ est fixé à 1.

4.1.2.1 Modèle agrégé

Afin d'analyser la dynamique du modèle, nous appliquons les méthodes d'agrégation des variables décrites en [4] et au premier chapitre pour obtenir un modèle réduit : un système d'équations différentielles ordinaires à deux dimensions le stock total de poissons et l'effort de pêche total à l'échelle de temps lent. L'agrégation du modèle complet consiste à supposer que la dynamique rapide admet un équilibre rapide stable que nous remplaçons dans les équations du modèle complet.

Nous déterminons maintenant les équilibres rapides. Nous analysons dans un premier temps le système rapide en supposant que $\varepsilon = 0$ dans l'équation (4.3).

Ce modèle est similaire à celui présenté dans [7] où l'effet du nombre de sites était étudié avec un prix constant contrairement à notre cas. A l'échelle de temps rapide, la densité totale de poissons $n(t) = \sum_{i=1}^L n_i(t) + n_s(t)$ reste constante ainsi que l'effort de pêche total $E(t) = \sum_{i=1}^L E_i(t)$. Il est facile de vérifier qu'il existe un unique et positif équilibre stable et rapide pour toutes valeurs de la densité totale de poissons et de l'effort de pêche total (voir Appendix 4.1.4.1) :

$$n_s^* = \frac{k_s}{K} n = \alpha n, \quad (4.7)$$

$$n_i^* = \frac{k_i}{K} n \quad \text{avec} \quad \sum_{n=1}^L n_i^* = (1 - \alpha)n, \quad (4.8)$$

$$E_i^* = \frac{E}{L}, \quad (4.9)$$

En remplaçant $D(p) = A - \gamma p$ dans la dernière équation du système (4.3), le prix à l'équilibre rapide est donné par :

$$p^* = \frac{A - QnE}{\gamma}. \quad (4.10)$$

où $Q = q(1 - \alpha)/L$ est le paramètre global de capturabilité.

Le modèle agrégé est obtenu en remplaçant les équilibres rapides et stables du prix (eq 4.10), des poissons (eqs. 4.7 et 4.8) et des bateaux (eq. 4.9) dans le système complet (eq. 4.3) et en ajoutant les $L + 1$ équations des poissons et L équations des bateaux. Cela conduit au modèle suivant structurellement stable (voir Appendix 4.1.4.2) :

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = rn \left(1 - \frac{n}{K}\right) - QnE, \\ \frac{dE}{dt} = \left(-c + \frac{A - QnE}{\gamma} Qn\right) E, \end{cases} \quad (4.11)$$

où $r = \alpha r_s + (1 - \alpha)r_1$ est le taux global de croissance .

4.1.2.2 Equilibres et analyse de stabilité locale

Les n -isoclines sont : $n = 0$ et $E = \frac{r}{Q} \left(1 - \frac{n}{K}\right)$ et E -isoclines sont : $E = 0$ et $E = \frac{\gamma}{Qn} \left(\frac{A}{\gamma} - \frac{c}{Qn}\right)$. Nous obtenons les équilibres $(K; 0)$, $(0; 0)$ et des équilibres intérieurs $(\bar{n}; \bar{E})$ solutions de :

$$\begin{cases} E = \frac{r}{Q} \left(1 - \frac{n}{K}\right), \\ E = \frac{\gamma}{Qn} \left(\frac{A}{\gamma} - \frac{c}{Qn}\right), \end{cases} \quad (4.12)$$

Les solutions du système (4.12) sont obtenues en résolvant une équation en n de degré trois. On peut avoir un à trois équilibres dans le cadran positif que nous notons $(\bar{n}_1; \bar{E}_1)$, $(\bar{n}_2; \bar{E}_2)$ et $(\bar{n}_3; \bar{E}_3)$ (où quelquefois $(\bar{n}; \bar{E})$ d'une manière générale). Nous faisons maintenant l'analyse de la stabilité locale de ces points d'équilibre. Nous déterminons la matrice jacobienne pour les différents équilibres du système (4.11) et nous déterminons la stabilité à partir du déterminant et de la trace :

— $E_0 = (0; 0)$:

$$J(0; 0) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

$\det J(0; 0) = -rc$, d'où le point d'équilibre $(0; 0)$ est toujours un point selle .

— $E_K = (K; 0)$

$$J(K; 0) = \begin{bmatrix} -r & -QK \\ 0 & -c + \frac{AQK}{\gamma} \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

On a deux valeurs propres définies par : $\lambda = -r$ et $\lambda = -c + \frac{AQK}{\gamma}$.

Si $c > \frac{AQK}{\gamma}$ alors $(K; 0)$ est un équilibre stable, sinon on a un point selle.

— Equilibre non-trivial : On note dans le cas général (\bar{n}, \bar{E}) ces équilibres. La matrice jacobienne est donnée par :

$$J(\bar{n}; \bar{E}) = \begin{bmatrix} -\frac{r}{K}\bar{n} & -Q\bar{n} \\ \frac{Q\bar{E}}{\gamma}(A - 2Q\bar{n}\bar{E}) & -\frac{Q^2\bar{n}^2\bar{E}}{\gamma} \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

La trace et le déterminant de la matrice Jacobienne au point d'équilibre $(\bar{n}; \bar{E})$ sont respectivement données par :

$$\begin{aligned} Tr J(\bar{n}; \bar{E}) &= -\frac{r}{K}\bar{n} - \frac{Q^2\bar{n}^2\bar{E}}{\gamma} < 0, \\ \det J(\bar{n}; \bar{E}) &= \frac{Q^2\bar{n}\bar{E}}{\gamma} \left(\frac{3r}{K}\bar{n}^2 - 2\bar{n}r + A \right). \end{aligned}$$

Le signe de $\det J(n^*; E^*)$ est du même signe que $\Psi(\bar{n})$, où $\Psi(\bar{n}) = \frac{3r}{K}\bar{n}^2 - 2\bar{n}r + A$. L'étude complète de l'existence et la stabilité est faite en Appendice 4.1.4.3 et peut être résumée en deux cas :

Cas 1 : $r < \frac{3A}{K}$. Le signe de Ψ ne change pas et est toujours positif, et ensuite $\det J(\bar{n}; \bar{E}) > 0$. Ce qui nous amène à considérer deux sous cas :

(a) $\frac{A}{\gamma}QK < c$: Dans ce cas, il n'y a pas d'équilibre non trivial positif et $(K, 0)$ est un équilibre localement asymptotiquement stable. Cela peut être interprété comme un cas où aucune pêche rentable n'est possible : avec un stock de poissons et un prix maximum (A/γ) , le revenu $\frac{A}{\gamma}QK$ est inférieur au coût c . Les coûts de la pêche sont trop forts.

(b) $\frac{A}{\gamma}QK > c$: dans ce cas, il y a un point d'équilibre stable dans le quadrant positif et $(K; 0)$ est un point selle.

Cas 2 : Si $r > \frac{3A}{K}$ il peut y avoir un à trois équilibres stables $(\bar{n}_1; \bar{E}_1)$, $(\bar{n}_2; \bar{E}_2)$ et $(\bar{n}_3; \bar{E}_3)$ dans le quadrant positif. Dans ce dernier cas, l'équilibre du milieu $(\bar{n}_2; \bar{E}_2)$ est un point selle tandis que les deux autres sont stables. Ce cas est illustré sur la Figure 4.1.

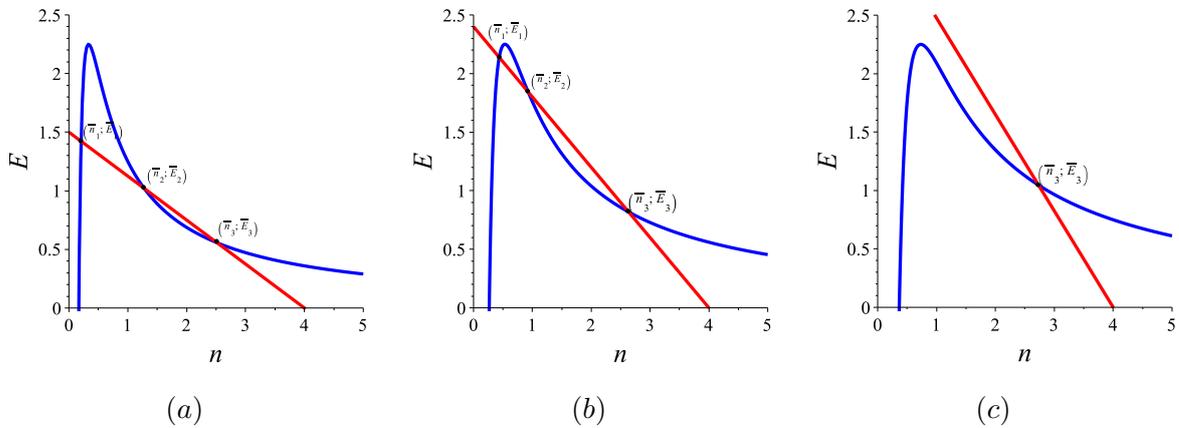


FIGURE 4.1 – Les équilibres (\bar{n}_i, \bar{E}_i) pour différents nombres de FADs L : (a) $L = 5$, (b) $L = 8$ et (c) $L = 11$. Les équilibres se trouvent à l'intersection des deux courbes de l'équation 4.12, représentées en noir et gris. Les valeurs des paramètres sont $r = 3$, $A = 3$, $q = 11.11$, $c = 1$, $K = 4$, $\gamma = 1$ et $\alpha = 0.1$.

4.1.3 Discussion du modèle

Dans cette section, nous analysons les résultats et nous nous focalisons sur l'analyse de la capture. La capture totale est donnée par :

$$\bar{Y} = Q\bar{n}\bar{E}.$$

Les valeurs de \bar{n}_i et \bar{E}_i sont solutions d'une équation du troisième degré dérivée du système (4.12). Ils sont représentés graphiquement sur la figure 4.1. Les valeurs des captures à l'équilibre sont représentées sur la Figure 4.2, et dépendent de L . La Figure 4.1 montre les équilibres dans le plan de phase (n, E) pour différentes valeurs de L . Des Figures 4.1 et 4.2, nous déterminons que pour un faible nombre de sites, on peut obtenir deux points d'équilibre stables : (\bar{n}_1, \bar{E}_1) et (\bar{n}_3, \bar{E}_3) qui sont respectivement *l'équilibre de surexploitation* et *l'équilibre de pêche durable*. L'équilibre (\bar{n}_1, \bar{E}_1) correspond à une pêche de surexploitation, avec un faible stock de poissons, un important effort de pêche et une faible capture. Dans le cas contraire, l'équilibre (\bar{n}_3, \bar{E}_3) correspond à un faible effort de pêche, résultant d'un grand stock, et à la fin, d'une importante capture totale. Le premier équilibre peut être considéré comme une exploitation industrielle tandis le dernier point d'équilibre correspondrait à une pêche locale artisanale ou à une pêche de développement durable. L'équilibre (\bar{n}_2, \bar{E}_2) est un point selle, de sorte qu'il existe une séparatrice qui divise l'espace (n, E) en deux domaines dans lesquels les trajectoires tendent vers le même équilibre.

La Figure 4.2 montre que lorsque le nombre de sites L augmente, la capture totale à l'équilibre de surexploitation augmente. Dans le même temps, la capture totale à l'équilibre de pêche durable décroît. Ceci apparaît aussi sur la Figure 4.1 : quand L augmente, la pente de la ligne droite augmente ; (\bar{n}_1, \bar{E}_1) et (\bar{n}_2, \bar{E}_2) éventuellement disparaissent autour du maximum de la courbe noire. Si L diminue à nouveau en repassant par le seuil L_t (autour de 9 avec l'ensemble des paramètres choisis), les équilibres (\bar{n}_1, \bar{E}_1) et (\bar{n}_2, \bar{E}_2) réapparaissent, correspondant à une bifurcation selle-noeud.

Quand les pêcheries présentent des caractéristiques de surexploitation on déduit du système mathématique qu'il n'est pas possible de passer à une pêche durable naturellement. Dans le modèle mathématique, une perturbation majeure du système est nécessaire dans le but de créer une trajectoire traversant la séparatrice et qui entre dans le bassin d'attraction de l'autre équilibre. Cependant, on peut souhaiter atteindre un état durable car il permet de maintenir le stock de poissons loin de l'extinction. Supposons que le système de pêcheries se trouve initialement dans un état de surexploitation. Il faut augmenter le nombre de sites au delà du seuil critique L_t . La capture totale augmentera dans un premier temps, ensuite l'équilibre de surexploitation disparaîtra, laissant l'équilibre durable \bar{E}_2 comme le seul équilibre stable dans le quadrant positif. Lorsque l'équilibre durable est atteint, la diminution progressive de L augmentera la capture totale tout en gardant le système à l'équilibre durable, même si l'équilibre de

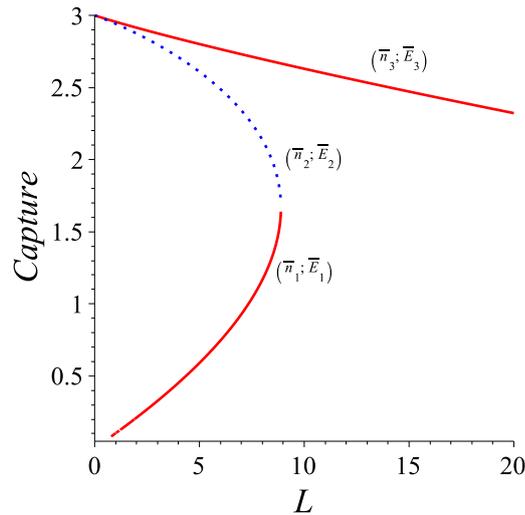


FIGURE 4.2 – La capture totale correspondante respectivement à l'équilibre $(\bar{n}_1; \bar{E}_1)$, $(\bar{n}_2; \bar{E}_2)$ et $(\bar{n}_3; \bar{E}_3)$, en fonction du nombre de sites. La ligne continue en rouge représente les équilibres stables $((\bar{n}_1; \bar{E}_1)$ et $(\bar{n}_3; \bar{E}_3)$), tandis que la ligne en pointillé représente l'équilibre instable $(\bar{n}_2; \bar{E}_2)$. Les valeurs des paramètres sont $r = 3$, $A = 3$, $q = 11.11$, $c = 1$, $K = 4$, $\gamma = 1$ et $\alpha = 0.1$. Le paramètre L est supposé être un nombre entier. Cependant, les courbes sont représentées sous forme de valeurs continues pour une meilleure compréhension de leur variations.

surexploitation réapparaît. La Figure 4.3 illustre ce comportement : Entre $t = 0$ et $t = 15$, $L = 5$ et le système tend vers l'équilibre de surexploitation. Entre $t = 15$ et $t = 25$, le nombre de FADs L est augmenté jusqu'à 11. Le système tend vers l'équilibre durable, qui est à ce moment le seul équilibre positif. Après $t = 25$, le nombre de DCPs est réduit à 5. Le système reste toujours sur l'équilibre durable. A ce moment, l'équilibre de surexploitation réapparaît mais ne peut être atteint à partir de l'état actuel. A la fin de la simulation, le nombre de FADs est le même qu'au début, mais le système a basculé du bassin d'attraction de l'équilibre de surexploitation à celui de l'équilibre durable .

4.1.4 Appendice : modèle de pêche multi-site

4.1.4.1 Calcul de l'équilibre rapide

On note que $n(t)$ et $E(t)$, les variables globales, sont des constantes à l'échelle de temps rapide correspondant à la migration des poissons et au mouvement des bateaux.. Les équilibres rapides sont solutions du système suivant :

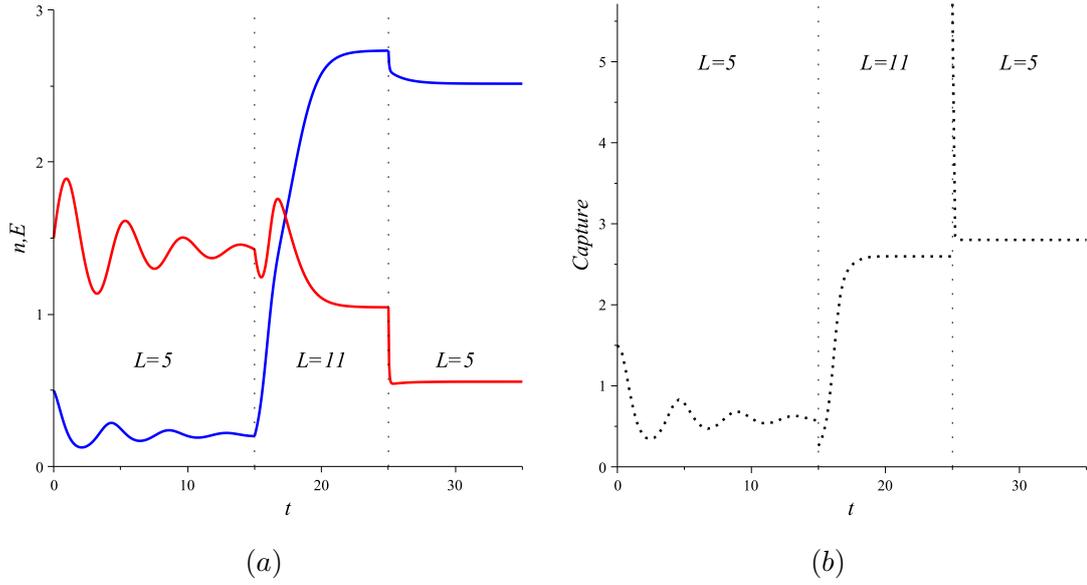


FIGURE 4.3 – Dynamique obtenue en modifiant le nombre de FADs : (a) Densités des poissons n (ligne en bleu) et effort de pêche E (en rouge), (b) capture totale en fonction du temps. Entre $t = 0$ et $t = 15$, $L = 5$, entre $t = 15$ et $t = 25$, $L = 11$; pour $t > 25$, $L = 5$.

$$\sum_{i=1}^L m_{si}n_i - \sum_{i=1}^L m_{is}n_s = 0, \quad (4.16)$$

$$m_{is}n_s - m_{si}n_i = 0, \quad (4.17)$$

$$\beta_{i,i-1}E_{i-1} + \beta_{i,i+1}E_{i+1} - (\beta_{i-1,i} + \beta_{i+1,i})E_i = 0, \quad (4.18)$$

$$D(p) - q \sum_{i=1}^L n_i^* E_i^* = 0. \quad (4.19)$$

Puisque $m_{is} = \frac{m_0}{k_s}$ et $m_{si} = \frac{m_0}{k_i}$ en remplaçant m_{is} et m_{si} dans l'équation (4.17) nous avons

$$n_i^* = \frac{k_i}{k_s} n_s^*, \quad (4.20)$$

Puisque $n = \sum_{i=1}^L n_i^* + n_s^* \Rightarrow n = \sum_{i=1}^L \frac{k_i}{k_s} n_s^* + n_s^* \Rightarrow n = \frac{n_s^*}{k_s} \left(\sum_{i=1}^L k_i + k_s \right)$ nous obtenons :

$$n_s^* = \frac{k_s}{K} n \quad \text{et} \quad n_i^* = \frac{k_i}{K} n,$$

L'équation (4.18) stipule que $\beta_{1,2}E_2 = \beta_{2,1}E_1$. Comme les taux de mouvement des bateaux sont supposés symétriques, $\beta_{1,2} = \beta_{2,1}$ par conséquent, $E_1 = E_2$ à l'équilibre. Puis par une simple récurrence on montre que $\forall i, E_i = E_{i+1}$. Ce qui nous permet d'obtenir $\forall i \in \{1, \dots, L\}$ $E_i^* = E_1^*$. Ainsi, avec $E = \sum_{i=1}^L E_i^*$ on obtient le résultat suivant

$$E_i^* = \frac{E}{L}$$

De l'équation (4.19), nous déduisons que

$$D(p) = q \sum_{i=1}^L \frac{k_i}{K} n \frac{E}{L}, \quad (4.21)$$

$$= q(1 - \alpha)n \frac{E}{L}, \quad (4.22)$$

$$= QnE. \quad (4.23)$$

où $Q = q(1 - \alpha)/L$.

Puisque $D(p) = A - \gamma p$, à l'équilibre rapide, nous avons

$$p^* = p^*(n, E) = \frac{A - QnE}{\gamma}. \quad (4.24)$$

4.1.4.2 Dérivation du modèle agrégé

Nous remplaçons les équilibres rapides calculés dans la section précédente et nous obtenons le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dn_s}{d\tau} &= \varepsilon r_s n_s^* \left(1 - \frac{n_s^*}{k_s}\right), \\ \frac{dn_i}{d\tau} &= \varepsilon \left(r_1 n_i^* \left(1 - \frac{n_i^*}{k_i}\right) - q n_i^* E_i^* \right), \\ \frac{dE_i}{d\tau} &= \varepsilon (-c + p^* q n_i^*) E_i^*. \end{aligned}$$

Puisque $n = \sum_{i=1}^L n_i + n_s$ nous avons $\frac{dn}{d\tau} = \sum_{i=1}^L \frac{dn_i}{d\tau} + \frac{dn_s}{d\tau}$. Nous faisons un changement d'échelle de temps $t = \varepsilon \tau$. A l'échelle de temps lente l'équation régissant le stock total de poissons est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= r_s n_s^* \left(1 - \frac{n_s^*}{k_s}\right) + r_1 \sum_{i=1}^L n_i^* \left(1 - \frac{n_i^*}{k_i}\right) - q \sum_{i=1}^L n_i^* E_i^* \\ &= r_s \alpha n \left(1 - \frac{n}{K}\right) + r_1 (1 - \alpha) n \left(1 - \frac{n}{K}\right) - \frac{q(1 - \alpha)}{L} n E \\ &= n \left(1 - \frac{n}{K}\right) (\alpha r_s + (1 - \alpha) r_1) - \frac{q(1 - \alpha)}{L} n E. \end{aligned}$$

Et on note par $r = \alpha r_s + (1 - \alpha) r_1$ et $Q = \frac{q(1 - \alpha)}{L}$. A l'échelle de temps lente, l'équation pour le stock de poissons s'écrit finalement :

$$\frac{dn}{dt} = rn \left(1 - \frac{n}{K}\right) - QnE.$$

De même l'équation régissant l'effort de pêche total E à l'échelle de temps lente est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \sum_{i=1}^L \frac{dE_i}{dt} = \sum_{i=1}^L (-cE_i^* + p^* q n_i^* E_i^*) \\ &= -c \sum_{i=1}^L E_i^* + p^* q \sum_{i=1}^L n_i^* E_i^* \\ &= \left(-c + p^* \frac{q(1-\alpha)}{L} n \right) E \\ &= (-c + p^* Qn) E \end{aligned}$$

A l'échelle de temps lente nous avons enfin :

$$\frac{dE}{dt} = (-c + p^* Qn) E.$$

où p^* dépend de n et E et est donné par l'équation (4.24).

4.1.4.3 Analyse de l'équilibre non-trivial

Le système d'équations (4.12) implique que les valeurs de \bar{n} à l'équilibre sont les racines de l'équation du troisième degré suivante :

$$C(n) = \frac{r}{K} \bar{n}^3 - r \bar{n}^2 + A \bar{n} - \frac{\gamma c}{Q}, \quad (4.25)$$

i.e $C(\bar{n}) = 0$. Les dérivée première et seconde de la fonction C sont données par :

$$\begin{aligned} C'(n) &= \frac{3r}{K} n^2 - 2rn + A = \Psi(n), \\ C''(n) &= \frac{6r}{K} n - 2r = \Psi'(n). \end{aligned}$$

Remarquons que $C'(\bar{n})$ et $\det J(\bar{n}; \bar{E})$ ont le même signe. La description de Ψ nous donne une parabole qui atteint son minimum pour $n = K/3$. Sa valeur minimale est $A - rK/3$, il est donc possible de distinguer deux cas :

— $r < \frac{3A}{K}$: C' est toujours positif. La fonction C est croissante, et $C(K) = AK - \frac{\gamma c}{Q}$. En fonction du signe de $C(K)$, il y a deux cas :

(a) $\frac{AKQ}{\gamma} < c$: $c(K) < 0$ et $c(\bar{n}) = 0$ implique que $n > K$. Ensuite l'équation (4.12) implique que pour $\bar{E} < 0$ il n'y a pas d'équilibre positif.

(b) $c > \frac{AKQ}{\gamma}$: $c(K) > 0$ et $c(\bar{n}) = 0$ implique que $n < K$. Il existe un équilibre positif $(\bar{n}; \bar{E})$. $\Psi(\bar{n}) > 0$, ainsi $\det J(\bar{n}; \bar{E}) > 0$, en conséquence $(\bar{n}; \bar{E})$ est un équilibre stable.

— $r > \frac{3A}{K}$: C' (ou Ψ) a deux racines n_1 et n_2 données par :

$$0 < n_1 = \frac{K}{3} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3A}{Kr}} \right) < \frac{K}{3} < n_2 = \frac{K}{3} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{3A}{Kr}} \right) < K$$

Le tableau de variation suivant résume les cas possibles :

n	0	n_1	n_2	$+\infty$	
$\Psi(n)$	+	0	-	0	+
$C(n)$	$-\frac{\gamma c}{Q}$	$C(n_1)$	$C(n_2)$	$+\infty$	

En rappelant que $\det J(\bar{n}; \bar{E})$ et $\Psi(\bar{n})$ ont le même signe, nous distinguons trois sous cas :

(a) $C(n_1) < 0$: il y a un unique point d'équilibre positif $(\bar{n}_3; \bar{E}_3)$. Puisque $\bar{n}_3 > n_2$, $\Psi(\bar{n}_3) > 0$, il est donc stable.

(b) $C(n_2) > 0$: il y a un unique équilibre positif $(\bar{n}_1; \bar{E}_1)$. Puisque $\bar{n}_1 > n_1$, $\Psi(\bar{n}_1) > 0$, il est aussi stable.

(c) $C(n_1) > 0$ et $C(n_2) < 0$: il y a trois points d'équilibre positifs $(\bar{n}_1; \bar{E}_1)$, $(\bar{n}_2; \bar{E}_2)$ et $(\bar{n}_3; \bar{E}_3)$. Ils satisfont aux inégalités $\bar{n}_1 < n_1 < \bar{n}_2 < n_2 < \bar{n}_3$, ainsi $(\bar{n}_1; \bar{E}_1)$, et $(\bar{n}_3; \bar{E}_3)$ sont stables tandis $(\bar{n}_2; \bar{E}_2)$ est un point selle.

4.1.5 Conclusion

Le modèle présenté dans cette partie comprend deux aspects importants de pêcheries qui sont souvent négligés : l'utilisation des dispositifs à concentration de poissons et un prix variable dépendant de l'offre et de la demande. La méthode d'agrégation des variables nous a permis de démontrer qu'il existe aussi bien un équilibre de surexploitation qu'un équilibre de pêche durable, et qu'il était possible de définir une stratégie basée sur le nombre de DCPs pour passer d'un état correspondant à la surexploitation à un autre de pêche durable. De nos jours, beaucoup de pêcheries utilisant les DCPs sont surexploitées et les objets flottants déployés sont installés en grand nombre de manière anarchique sans réglementation, voir [25]. Ceci correspond à un état du modèle correspondant à celui de surexploitation, $(n_1^*; E_1^*)$. Dans beaucoup de pêcheries, de plus en plus de DCPs sont installés. Le modèle présenté ici suggère que lorsque le nombre de DCPs devient supérieur au seuil correspondant au paramètre L_t , le système va passer de la surexploitation à la pêche durable et restera dans cet état durable même si L continue de croître. Notre modèle suggère que si les instituts de recherche ou les organisations gouvernementales en charge de la gestion de la pêche sur les DCPs souhaitent maintenir la

pêche dans un état durable, ils devraient recommander dans un premier temps d'augmenter le nombre de FADs pour passer de la surexploitation à une pêcherie durable. Ensuite et de manière progressive il faudrait diminuer le nombre de DCPs afin de rester sur cet équilibre durable et d'accroître la capture totale (voir figure 4.2). Atteindre l'exploitation durable conduirait à des stocks de poissons élevés qui fourniraient un bénéfice économique plus élevé, tout en maintenant les stocks à des niveaux de biomasse suffisamment élevés pour éviter une extinction pouvant résulter d'évènements climatiques aléatoires pouvant être défavorables à la démographie des poissons [17].

4.2 Etude de l'équation du prix du marché

4.2.1 Introduction

Dans cette partie, nous revenons à un modèle avec un seul site et sans échelle de temps. Nous considérons donc que tous les processus se déroulent à la même échelle de temps. Le point principal dans cette partie est d'ajouter une équation supplémentaire pour le prix du marché au modèle de pêche classique. Nous faisons deux principales hypothèses : la fonction de demande est linéaire comme dans [40] c'est à dire fonction du prix du marché avec une valeur maximale A .

Dans [7], la fonction de demande $D(p)$ a été considérée comme une fonction monotone linéaire décroissante du prix p avec une pente égale à -1 , à savoir $D(p) = A - p$ où A est la demande maximale. Dans le présent travail, nous considérons un cas plus général avec une pente $-\alpha$, i.e. $D(p) = A - \alpha p$. L'étude indique que le paramètre α joue un rôle important dans la dynamique du système. Nous étendons également le modèle à de nouveaux cas tels qu'une population de poissons structurée en classe d'âge et pour une pêcherie avec stockage de la ressource.

4.2.2 Présentation du modèle mathématique de pêcherie avec prix variable de la ressource

Nous considérons une pêcherie le long d'une côte et nous considérons cette côte comme étant un simple et unique site. Soit $n(t)$ le stock de poissons et $E(t)$ l'effort de pêche total au temps t . Le système suivant décrit l'évolution dans le temps de la pêcherie

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = rn \left(1 - \frac{n}{k}\right) - qnE, \\ \frac{dE}{dt} = pqnE - cE, \\ \frac{dp}{dt} = \varphi(D(p) - qnE). \end{cases} \quad (4.26)$$

La croissance de la population se fait de manière logistique où $r > 0$ est le taux de croissance des poissons et $k > 0$ la capacité limite du milieu. Pour la capture, nous utilisons une fonction de Schaefer classique où q est la capturabilité par unité d'effort de pêche, $c > 0$ représente le coût de maintenance par unité d'effort de pêche. La troisième équation décrit l'évolution du prix du

marché, qui augmente quand la demande est supérieure à l'offre, suivant la théorie économique comme développée dans l'article [71]. On considère dans ce cas que la fonction demande qui est supposée être une fonction linéaire décroissante du prix est donnée par : $D(p) = A - \alpha p(t)$, où A est une constante positive qui représente la demande maximale, et $\alpha > 0$ et $\varphi > 0$ deux constantes qui représentent respectivement la sensibilité de la demande par rapport au prix ainsi que la vitesse d'ajustement du prix sur le marché qui reflète la concurrence sur le marché (c'est la flexibilité parfaite du prix) .

4.2.2.1 Existence d'équilibres

Le modèle (4.26) présente les isoclines suivantes :

- Les n -isoclines correspondent à $n = 0$ et $E = \frac{r}{q} \left(1 - \frac{n}{k}\right)$;
- Les E -isoclines correspondent à $E = 0$ et $n = \frac{c}{pq}$;
- Les p -isoclines correspondent à $p = \frac{A - qnE}{\alpha}$.

Nous déterminons trois sortes d'équilibre à partir de ces isoclines : l'équilibre $\xi_0 = (0 ; 0 ; p = \frac{A}{\alpha})$, qui correspond à l'extinction de la population de poissons ; L'équilibre $\xi_k = (k ; 0 ; p = \frac{A}{\alpha})$, qui est obtenu quand il n'y a pas d'effort de pêche et que le stock tend naturellement vers sa capacité limite ; et un équilibre non trivial sous la forme générale $\xi^* = (n^* ; E^* ; p^*)$, où $n^* = \frac{c}{p^*q}$ et $E^* = \frac{r}{q} \left(1 - \frac{c}{p^*qk}\right)$ qui tous deux dépendent du prix p^* .

La troisième équation montre que l'équilibre non-trivial vérifie :

$$D(p^*) = \frac{rc}{p^*q} \left(1 - \frac{c}{p^*qk}\right). \quad (4.27)$$

L'équation (4.27) est appelée l'Equation du Prix du Marché traduit en anglais par : the Market Price Equation (ou MPE). Il peut y avoir jusqu'à trois points d'équilibre non-triviaux et positifs (Voir appendice A).

Théorème 4.2.1. *Suivant la valeur de α et de $rk/3$, nous avons les cas suivants :*

- Si $\alpha > qkA/c$, il n'y a pas d'équilibre non-trivial dans le quadrant positif.
- Si $\alpha < qkA/c$: si $kr < 3A$, il y a exactement un équilibre dans le quadrant positif. Si $kr > 3A$, Il existe deux constantes réelles α^- et α^+ qui délimitent trois domaines :
 1. $\alpha < \alpha^-$: il y a un seul équilibre dans le quadrant positif ;
 2. $\alpha^- < \alpha < \alpha^+$: il y a trois équilibres dans le quadrant positif ;
 3. $\alpha^+ < \alpha$: il y a un seul équilibre dans le quadrant positif.

La preuve est détaillée au niveau de l'appendice A.

4.2.2.2 Analyse de la stabilité locale

La matrice jacobienne associée au système (4.26) est donnée par :

$$J = \begin{bmatrix} r(1 - \frac{2n}{k}) - qE & -qn & 0 \\ pqE & pqn - c & qnE \\ -\varphi qE & -\varphi qn & -\varphi\alpha \end{bmatrix}.$$

Nous allons déterminer la stabilité locale de chaque point d'équilibre.

1. Pour $\xi_0 = (0; 0; \frac{A}{\alpha})$, alors la nouvelle matrice jacobienne est la suivante :

$$J_0 = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi\alpha \end{bmatrix},$$

J_0 a une valeur propre positive et deux valeurs propres négatives. L'équilibre ξ_0 est un point selle (toujours instable).

2. $\xi_k = (k; 0; \frac{A}{\alpha})$, la matrice jacobienne est donnée par :

$$J_k = \begin{bmatrix} -r & -qk & 0 \\ 0 & \frac{Aqk}{\alpha} - c & 0 \\ 0 & -\varphi qk & -\varphi\alpha \end{bmatrix},$$

- Si $\alpha > qkA/c$, ξ_k est un équilibre stable ;
- Si $\alpha < qkA/c$, alors ξ_k est un point selle donc instable .

3. A l'équilibre non trivial ξ^* , la jacobienne est donnée par :

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{rn^*}{k} & -qn^* & 0 \\ pqE^* & 0 & qn^*E^* \\ -\varphi qE^* & -\varphi qn^* & -\varphi\alpha \end{bmatrix},$$

Considérons les notations suivantes $p^+ = \frac{kr + \sqrt{rk(rk-3A)^3}}{Aq}c$ et $p^- = \frac{kr - \sqrt{rk(rk-3A)^3}}{Aq}c$.

Propriété 4.2.1. *Si $A > rk/3$, l'équilibre non-trivial ξ_k est localement asymptotiquement stable. Si $A < rk/3$, un point d'équilibre non-trivial ξ^* dans le quadrant positif est localement asymptotiquement stable si et seulement si $p^* < p^-$ ou $p^* > p^+$.*

La preuve de cette propriété est donnée dans l'appendice B. Il vient que p^- (resp. p^+) est une racine double du polynôme P_{α^+} (resp. P_{α^-}). (Voir appendice B).

4.2.2.3 Typologie de la dynamique

Propriété 4.2.2. *Il existe un ensemble borné Ω_{∞}^{++} tel que toute trajectoire issue du quadrant positif admet un ω -limite dans Ω_{∞}^{++} .*

Démonstration. La preuve est détaillée dans l'appendice C.

Nous introduisons une fonction de Lyapunov V et nous divisons l'espace en deux parties : un ensemble Ω sur lequel V admet un maximum (voir lemme 4.2.1 et 4.2.2) et son complémentaire, sur lequel $\dot{V} \leq 0$. De ces deux ensembles, nous définissons un nouvel ensemble Ω_∞ qui inclut Ω et qui est invariant selon la théorie de Lyapunov (lemme 4.2.3). De plus, aucune trajectoire de Ω_∞^+ ne rentre dans l'intersection de Ω_∞ avec l'ensemble défini par $p \geq 0$ (lemme 4.2.3 encore). Finalement, nous montrons que pour aucune condition initiale dans Ω_∞^+ , la trajectoire reste bornée dans l'ensemble compact Ω_∞^{++} , ce qui termine la preuve. \square

Ce théorème implique que toutes les trajectoires rentrent dans l'ensemble compact Ω_∞^{++} , ce qui signifie qu'elles sont positivement bornées dans un domaine contenant les différents équilibres.

Nous allons résumer maintenant les différents cas qui peuvent être obtenus à l'intérieur de ce domaine.

- Cas 1 : $\alpha > qkA/c$: Il y a un point selle (ξ_0) et un équilibre stable (ξ_k). Quand $\alpha > qkA/c$, il n'y a pas d'équilibre non-trivial, et le système tend vers l'équilibre ξ_k , qui correspond à une population de poissons avec une capacité limite et aucune activité de pêche. La demande décroît trop vite avec le prix, et la pêche n'est pas rentable. Le cas est illustré sur la Figure 4.4.

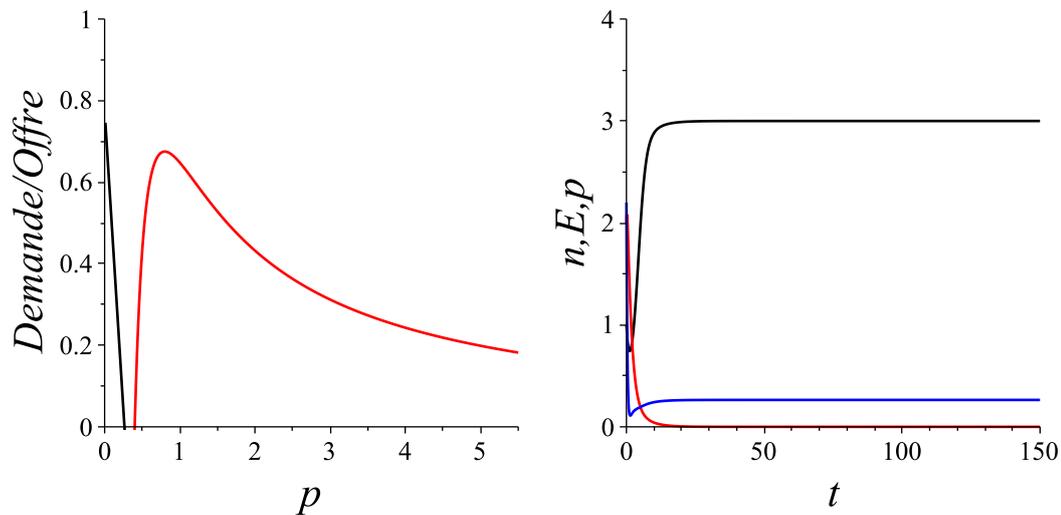


FIGURE 4.4 – $\alpha > qkA/c$. *A gauche* : La demande (en noire) et l'offre ($f(p)$) pour $n = c/pq$ et $E = r(1 - c/pqk)/q$ (rouge) dépendant de p . Les deux courbes ne se croisent pas, en conséquence il n'y a pas d'équilibre non-trivial dans le quadrant positif. *A droite* : l'évolution dans le temps de la dynamique : le stock de poissons (en noir), l'effort de pêche (en rouge) et le prix (en bleue).

- Cas 2 : $\alpha < qkA/c$: l'équilibre ξ_k est instable. Il existe au moins un équilibre dans le quadrant positif. il y a deux sous-cas :

1. $A > rk/3$: il y a un seul équilibre dans le quadrant positif, qui est localement asymp-

totiquement stable. La dynamique est représentée sur la Figure 4.5.

2. $A < rk/3$: Il peut y avoir de un à trois équilibres dans le quadrant positif, dépendant de la valeur de α . Le cas où nous avons trois équilibres est représenté sur la Figure 4.6, tandis que le cas avec un équilibre, qui est similaire au cas précédent, n'est pas représenté.

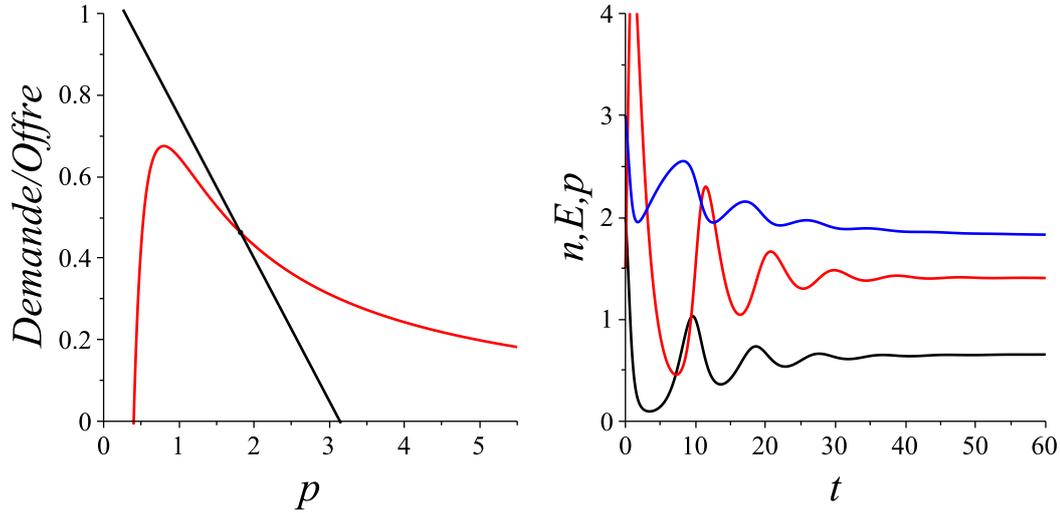


FIGURE 4.5 – $\alpha < qkA/c$ et $A > rk/3$. *A gauche* : la demande (en noire) et l'offre (en rouge) ($f(p)$) pour $n = c/pq$ et $E = r(1 - c/pqk)/q$, dépendant de p . Les deux courbes se croisent au point p^* , correspondant à l'équilibre ξ^* . *A droite* : l'évolution dans le temps de la dynamique : le stock de poissons (en noir), l'effort de pêche (en rouge) et le prix (en bleu).

Le portrait de phase dans le cas général (trois équilibres) est représenté sur la Figure 4.7.

4.2.2.4 Comparaison du prix du poisson dans le cas des deux équilibres stables positifs

Dans cette section, nous nous focalisons sur le cas où on a trois équilibres dans le quadrant positif que nous notons ξ_1^* , ξ_2^* , ξ_3^* , avec $\xi_i^* = (n_i^*, E_i^*, p_i^*)$, et obtenu en augmentation de la valeur de p_i^* . Le point d'équilibre situé au milieu ξ_2^* ($p_1^* < p_2^* < p_3^*$) est un point selle tandis que les deux autres équilibres sont localement asymptotiquement stables. Puisque $\alpha > 0$, nous avons $n_3^* < n_1^*$. Par un simple calcul nous obtenons l'ensemble des inégalités suivantes :

$$\begin{cases} n_3^* < n_1^*, \\ E_3^* > E_1^*, \\ p_3^* > p_1^* \end{cases} \quad (4.28)$$

En d'autres termes, à l'équilibre, plus le stock de poissons est grand, plus est faible l'effort de pêche et le prix des poissons sur le marché. En conséquence, le modèle prédit que nous pouvons avoir deux types de pêcheries qui peuvent coexister :

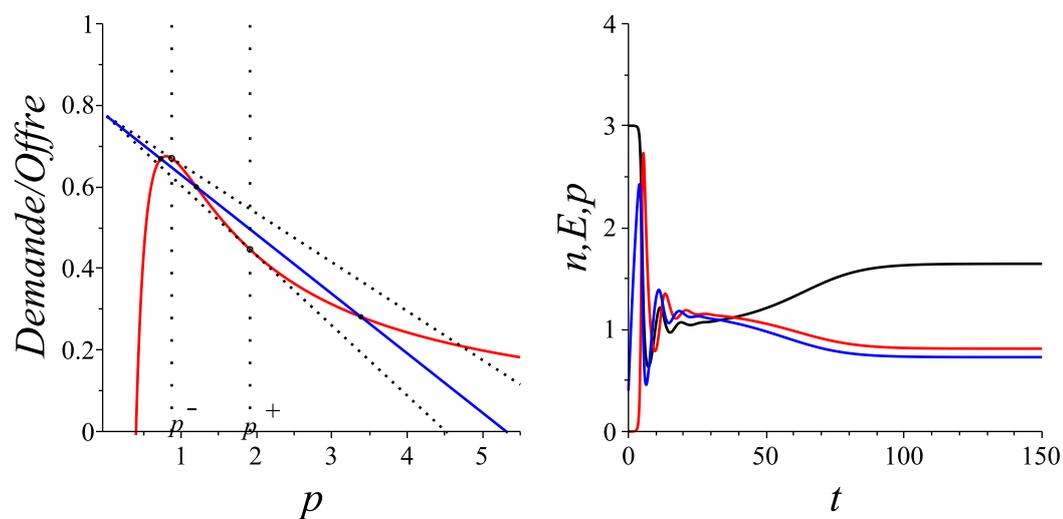


FIGURE 4.6 – $\alpha < qkA/c$ et $A < rk/3$. *A gauche* : la demande (en bleue) et l'offre (en rouge) ($f(p)$ pour $n = c/pq$ et $E = r(1 - c/pqk)/q$), dépendant de p . Les deux lignes obliques en pointillé représentent la demande pour α^- et α^+ . Entre ces deux lignes en pointillé, les deux courbes se coupent 3 fois, et seulement une fois à l'extérieur. Les lignes noires verticales en pointillé correspondent à $p = p^-$ et $p = p^+$. Quand $p^- < p^* < p^+$, l'équilibre ξ^* est instable, tandis qu'en dehors de cette zone, ξ^* est localement asymptotiquement stable. Si $\alpha > \alpha^+$ ou $\alpha < \alpha^-$, il y a un seul équilibre. La dynamique est similaire à celle décrite sur la Figure 4.5. *A droite* : l'évolution dans le temps de la dynamique : le stock de poissons (en noir) tendant vers sa capacité limite, l'effort de pêche (en rouge) et le prix (en bleue).

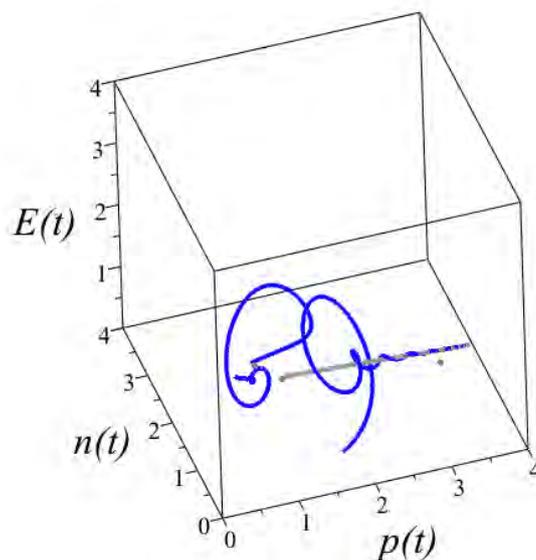


FIGURE 4.7 – $\alpha < qkA/c$ et $A < rk/3$. Portrait de phase de la dynamique. Les équilibres sont représentés par des points gris, et les hétéroclines par des courbes grises. Les courbes en bleu représentent les trajectoires qui tendent asymptotiquement vers un des deux équilibres localement asymptotiquement stable.

- Une pêcherie de surexploitation ξ_3^* : il y a un grand effort de pêche et une activité économique importante avec un prix satisfaisant [22]. Cependant, la ressource est maintenue à un niveau faible et en raison de certaines variations climatiques ou d'évènements extrêmes aléatoires, il y a un risque d'extinction de la ressource.
- Une pêcherie durable où pêcherie traditionnelle ξ_1^* : La pêcherie maintient le stock de poissons à un niveau souhaitable et important qui est loin de l'extinction. C'est un équilibre de pêcherie durable [22]. Les pêcheries artisanales correspondraient à un tel cas où la ressource n'est pas surexploitée et permet une activité locale de pêche. Cependant, il ne permet pas une activité économique importante et ne peut soutenir qu'un effort de pêche assez petit avec un prix du marché relativement bas. Ce modèle prédit que ces deux types de pêcheries peuvent coexister. Une question intéressante concerne la possibilité de contrôler le système et de basculer d'une situation de surexploitation à une pêcherie durable (artisanale). Nous avons déjà étudié cette question dans la première partie de ce chapitre.

4.2.3 Généralisation à un modèle de population structurée en classes d'âge

Le modèle suivant décrit l'évolution dans le temps d'une population structurée en deux classes d'âge, juvéniles (âge de classe 1) et une autre classe d'adultes reproducteurs (âge de

classe 2). Le modèle décrit est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = bn_2 - vn_1 - \mu_1 n_1, \\ \dot{n}_2 = vn_1 - \mu_2 n_2 - \beta n_2^2 - qn_2 E, \\ \dot{E} = E(pqn_2 - c), \\ \dot{p} = \varphi(D(p) - qn_2 E) \end{cases} \quad (4.29)$$

où b est le taux de reproduction des adultes, v le taux de vieillissement des juvéniles, μ_i est le taux de mortalité de la classe i . β est un paramètre de Verhulst pour les adultes en compétition pour une ressource. Les autres paramètres sont les mêmes que dans le modèle précédent.

Les E -isoclines sont $E = 0$ et $pqn_2 - c = 0$. Nous déduisons que $n_2^* = \frac{c}{pq}$, et ensuite que $n_1^* = \frac{bc}{pq(v+\mu_1)}$. Les p isoclines sont données par :

$$D(p) = qn_2^* E = vn_1^* - \mu_2 n_2^* - \beta n_2^{*2}$$

ou

$$D(p) = Rn_2^* \left(1 - \frac{n_2^*}{K}\right)$$

où $R = \frac{bv}{(v+\mu_1)} - \mu_2$ et $K = \frac{R}{\beta}$. En remplaçant la valeur de n_2^* dans l'expression de la fonction demande nous avons ensuite : $D(p) = \frac{Rc}{pq} \left(1 - \frac{c}{pqK}\right) = f(p)$ qui est la même MPE que précédemment (l'équation (4.27)) avec différentes valeurs de K et R .

4.2.4 Généralisation au modèle de Auger-Ducrot

Dans le modèle de Auger et Ducrot [6] nous ajoutons une équation pour prendre en compte le fait que les poissons peuvent être stockés pour ensuite être vendus. Par conséquent, nous considérons une nouvelle variable $S(t)$ qui est supposée représenter la quantité de poissons en stock à l'instant t . Cependant, dans le modèle de Auger-Ducrot, le prix était considérée comme une constante. Dans le modèle suivant, nous étendons les résultats dans le cas d'un prix variable. Le modèle considéré décrit est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{n} = rn\left(1 - \frac{n}{k}\right) - qnE, \\ \dot{E} = p(1 - \eta)qnE + p\sigma S - cE, \\ \dot{S} = \eta qnE - \sigma S, \\ \dot{p} = \varphi(D(p) - (1 - \eta)qnE - \sigma S) \end{cases} \quad (4.30)$$

où η est la proportion de la capture non vendue et stockée, tandis que $(1 - \eta)$ est la proportion immédiatement vendue sur le marché. Le paramètre σ est le taux de retour sur le marché des poissons stockés. $\dot{S} = 0$ implique $\eta qnE = \sigma S$. En substituant σS dans la deuxième équation pour $\dot{E} = 0$, nous avons $E(pqn - c) = 0$, en d'autres termes $n^* = \frac{c}{pq}$. Dans la quatrième équation, $\dot{p} = 0$ implique que $D(p) = qnE$. Ensuite la première équation donne $rn\left(1 - \frac{n}{k}\right) = qnE = D(p)$.

En remplaçant n^* par son expression, nous trouvons l'expression de la fonction demande comme suit : $D(p) = \frac{rc}{pq} \left(1 - \frac{c}{pqk}\right) = f(p)$ qui fournit la même MPE étudiée dans les sections précédentes.

4.2.5 Appendices

4.2.5.1 Appendice A : Domaines d'existence pour les équilibres non triviaux

Les équilibres non triviaux correspondent aux solutions de l'équation.

$$D(p^*) = qn^*E^* \quad (4.31)$$

qui peut être réécrite

$$A - \alpha p^* = f(p^*) \quad (4.32)$$

où $f(p) = \frac{rc}{pq} \left(1 - \frac{c}{pqk}\right)$. Les solutions correspondent aux racines du polynôme de troisième degré

$$P_\alpha(p) = p^3(\alpha q^2 k) - p^2(Aq^2 k) + p(rcqk) - rc^2 \quad (4.33)$$

Les deux coefficients consécutifs de P_α étant de signes opposés, les racines réelles sont toutes positives. Puisque $f(p) < 0$ et $A - \alpha p > 0$ quand $p < 0$, alors si p^* est une racine réelle de (4.33), elle vérifie $p^* > 0$. Si $pqk < c$, alors $E^* < 0$, l'équilibre n'est pas dans le quadrant positif. Si $p^*qk > c$, alors $n^* > 0$ et $E^* > 0$, l'équilibre est dans le quadrant positif.

Propriété 4.2.3. *Il y a une racine réelle ξ^* telle que $p^*qk < c$ si et seulement si $\alpha > qkA/c$. Si elle existe, elle est l'unique racine réelle de l'équation (4.33).*

Démonstration. Notons $D_0(p) = A - pqkA/c$. Si $\alpha \leq qkA/c$, pour $p < c/qk$, $D(p) > D(c/qk) > D_0(c/qk)$ parce que D est décroissante. Ensuite pour $p < c/qk$, $D(p) > 0$ et $f(p) < 0$. Il n'y a pas de racine p^* telle que $p^*qk < c$. D'autre part, si $\alpha > qkA/c$, nous avons $D(c/qk) < 0$. Nous avons les propriétés suivantes :

- $D(0) > 0 > \lim_{p \rightarrow 0} f(p)$;
- si $p > c/qk$, $D(p) < 0 < f(p)$;
- D est monotone décroissante, tandis que f est monotone croissante sur $(0, c/qk]$.

Nous déduisons qu'il existe un unique p^* qui vérifie $D(p) = f(p)$. Il vérifie également $p^* < c/qk$. □ □

Par conséquent, quand $\alpha > qkA/c$, il y n'y a pas d'équilibre non trivial dans le quadrant positif.

Nous déterminons maintenant les domaines d'existence des racines réelles du polynôme P_α :

Propriété 4.2.4. *Si $kr < 3A$, il y a toujours une racine réelle. Si $kr > 3A$, il y a trois domaines :*

- $\alpha < \alpha^-$: Il y a une et une seule racine réelle ;
- $\alpha^- < \alpha < \alpha^+$: il y a trois racines réelles ;
- $\alpha^+ < \alpha$: il y a une et seule racine réelle

α^- et α^+ correspondent aux valeurs pour lesquelles deux racines réelles fusionnent et disparaissent, et sont données par :

$$\alpha^- = q \frac{-2r^2k^2 + 9rAk - 2\sqrt{27kr\left(\frac{kr}{3} - A\right)^3}}{27rc} \quad (4.34)$$

$$\alpha^+ = q \frac{-2r^2k^2 + 9rAk + 2\sqrt{27kr\left(\frac{kr}{3} - A\right)^3}}{27rc} \quad (4.35)$$

Démonstration. Le discriminant Δ_α du polynôme P_α (4.33) est donné par

$$\Delta_\alpha = -\frac{R(P_\alpha, P'_\alpha)}{\alpha q^2 k} \quad (4.36)$$

où la résultante $R(P_\alpha, P'_\alpha)$ du polynôme P_α et sa dérivée polynomiale sont données par :

$$R(P_\alpha, P'_\alpha) = \frac{q^6 \alpha r c^2}{k^2} g(\alpha) \quad (4.37)$$

où $g(\alpha) = 27\alpha^2 r c^2 - 18\alpha q r c A k - q^2 A^2 k^2 r + 4q^2 A^3 k + 4r^2 c k^2 q \alpha$. g est un polynôme de degré 2 avec deux racines, α^- et α^+ .

- Si $kr < 3A$, g n'a pas de racines réelles. Nous déduisons que $\forall \alpha > 0, g > 0$, et $\Delta_\alpha < 0$. P_α a exactement une racine réelle.
- Si $kr > 3A$, pour $\alpha < \alpha^-$ ou $\alpha > \alpha^+$, $g(\alpha) < 0$. P_α admet exactement une racine réelle. Pour $\alpha^- < \alpha < \alpha^+$, $g(\alpha) > 0$. P_α admet exactement trois racines réelles. Pour $\alpha = \alpha^-$ ou $\alpha = \alpha^+$, $\Delta_\alpha = 0$, P_α admet des racines réelles avec un ordre de multiplicité supérieure à 1.

□

□

4.2.5.2 Appendice B : Stabilité locale de l'équilibre non-trivial

Notons $p^+ = \frac{kr + \sqrt{rk(rk-3A)^3}}{Akq} c$ et $p^- = \frac{kr - \sqrt{rk(rk-3A)^3}}{Akq} c$.

Propriété 4.2.5. Si $A > rk/3$, l'équilibre non-trivial ξ_k est localement asymptotiquement stable. Si $A < rk/3$, il existe un équilibre non-trivial ξ^* dans le quadrant positif qui est localement asymptotiquement stable si et seulement si $p^* < p^-$ ou $p^* > p^+$.

Démonstration. La matrice jacobienne du système correspondant à l'équilibre non-trivial est donnée par :

$$J^* = \begin{bmatrix} -\frac{rn^*}{k} & -qn^* & 0 \\ pqE^* & 0 & qn^*E^* \\ -\varphi qE^* & -\varphi qn^* & -\varphi\alpha \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Le polynôme caractéristique est :

$$\begin{aligned}\chi(\lambda) &= \det(J^* - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\frac{rn^*}{k} - \lambda & -qn^* & 0 \\ pqE^* & -\lambda & qn^*E^* \\ -\varphi qE^* & -\varphi qn^* & -\varphi\alpha - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - \lambda^2 \left(\varphi\alpha + \frac{r}{k}n^* \right) - \lambda \left(\varphi \frac{r\alpha}{k}n^* + \varphi q^2 n^{*2} E^* + pq^2 n^* E^* \right) \\ &\quad - \varphi q^2 n^* E^* \left(\frac{r}{k}n^{*2} + \alpha p - qn^* E^* \right)\end{aligned}$$

Nous déterminons maintenant la stabilité locale en utilisant le critère de Routh-Hurwitz .

Notons

$$\begin{cases} a_3 = 1 \\ a_2 = \varphi\alpha + \frac{r}{k}n^* \\ a_1 = \frac{r\alpha}{k}n^* + \varphi q^2 n^{*2} E^* + pq^2 n^* E^* \\ a_0 = \varphi q^2 n^* E^* \left(\frac{r}{k}n^{*2} + \alpha p - qn^* E^* \right) \end{cases} \quad (4.39)$$

L'équilibre ξ^* est stable si et seulement si (i) $a_i > 0$ pour $i \in \{0, \dots, 3\}$ et (ii) $a_2 a_1 > a_3 a_0$. Si ξ^* est dans le quadrant positif, les conditions $a_3 > 0, a_2 > 0, a_1 > 0$ sont toujours vérifiées. Nous déterminons si la condition (ii) est satisfait :

$$\begin{aligned}a_2 a_1 - a_3 a_0 &= \left(\varphi\alpha + \frac{r}{k}n^* \right) \left(\frac{r\alpha}{k}n^* + q^2 n^* E^* (\varphi n^* + p) \right) \\ &\quad - \varphi q^2 n^* E^* \left(\frac{r}{k}n^{*2} + \alpha p - qn^* E^* \right) \\ &= \left(\varphi\alpha + \frac{r}{k}n^* \right) \frac{r\alpha}{k}n^* + q^2 n^* E^* \left(\varphi^2 \alpha n^* + \varphi\alpha p + \varphi \frac{r}{k}n^{*2} + \frac{r}{k}n^* p \right) \\ &\quad - q^2 n^* E^* \left(\varphi \frac{r}{k}n^{*2} + \varphi\alpha p - \varphi qn^* E^* \right) \\ &= \left(\varphi\alpha + \frac{r}{k}n^* \right) \frac{r\alpha}{k}n^* + q^2 n^* E^* \left(\varphi^2 \alpha n^* + \frac{r}{k}n^* p + \varphi qn^* E^* \right) \\ &> 0\end{aligned}$$

Si ξ^* est dans le quadrant positif, la condition (ii) est toujours vérifiée. Nous déterminons maintenant le signe de a_0 . En remplaçant n^* and E^* par leur valeurs, nous obtenons

$$a_0 = \frac{\varphi r c (p^* q k - c) (\alpha q^2 k p^{*3} - r c q k p^* + 2 r c^2)}{p^{*3} q^3 k^2} \quad (4.40)$$

Puisque p^* est une racine du polynôme (4.33), nous avons

$$a_0 = \frac{\varphi r c (p^* q k - c) ((A q^2 k) p^{*2} - 2(r c q k) p^* + 3 r c^2)}{p^{*3} q^3 k^2} \quad (4.41)$$

Si $A > rk/3$, le polynôme $(Aq^2k)p^{*2} - 2(rcqk)p^* + 3rc^2$ n'a pas de racines réelles et est toujours positif. Si $A < rk/3$, le polynôme $(Aq^2k)p^{*2} - 2(rcqk)p^* + 3rc^2$ a deux racines réelles : p^- et p^+ . Puisque ξ^* est dans le quadrant positif, $p^* q k > c$. Nous déduisons que $a_0 > 0$ si et seulement si $p < p^-$ ou $p > p^+$. \square

Propriété 4.2.6. p^- (resp. p^+) est la racine double du polynôme P_{α^+} (resp. P_{α^-}).

Démonstration. Par la formule de Cardano, nous trouvons que la racine double du polynôme P_{α^+} est donnée par :

$$\frac{3c \left(r^2 k^2 - 3rAk - \sqrt{rk(rk - 3A)^3} \right)}{qk \left(9A^2 - 9rAk + 2r^2 k^2 - 2\sqrt{rk(rk - A)^3} \right)} \quad (4.42)$$

En simplifiant cette expression, nous obtenons que la racine double est égale à p^- . On obtient les mêmes résultats pour P_{α^-} et p^+ . \square \square

4.2.5.3 Appendice C : Attracteur borné

Nous montrons maintenant qu'il existe un ensemble borné dans lequel toute trajectoire qui est issue du quadrant positif y reste. Il est clair que l'ensemble Ω_0 de l'espace des phases (n, E, p) défini par

$$\Omega_0 = \{(n, E, p) \mid 0 \leq n \leq k, p \leq A/\alpha\} \quad (4.43)$$

est un ensemble invariant pour le système (4.26). En outre toute trajectoire qui est issue du quadrant positif a son ω -limite dans Ω_0 .

Considérons la fonction de Lyapunov définie pour $n \in \mathbb{R}_+^*$, $E \in \mathbb{R}_+^*$, $p \in \mathbb{R}$:

$$V(n, E, p) = pqn + qE - c \ln n - r \left(1 - \frac{n}{k} - \frac{\alpha\varphi}{r} \right) \ln E \quad (4.44)$$

Suivant les trajectoires du système (4.26), nous avons

$$\dot{V}(n, E, p) = -\alpha\varphi c + n \left(\varphi q A + \frac{r}{k} \left(r \left(1 - \frac{n}{k} \right) - qE \right) \ln E - \varphi q^2 n E \right) \quad (4.45)$$

Notons que $\dot{V}(n, E, p)$ ne dépend pas de p .

Lemme 4.2.1. L'ensemble $\Omega = \{(n, E, p) \mid (n, E, p) \in \Omega_0, \dot{V}(n, E, p) \geq 0\}$ est inclus dans l'ensemble $\Sigma \times (-\infty, A/\alpha]$, où Σ est un sous ensemble compact de $(0, k] \times \mathbb{R}_+^* \cup \{(k, 0)\}$.

Démonstration. Pour $E > 1$, $\dot{V}(n, E, p) < n \left(\varphi q A + \frac{r}{k} (r - qE) \ln E \right)$. Le terme à droite tend vers $-\infty$ quand E tend vers $+\infty$. On note

$$\Sigma_0 = \{(n, E) \mid 0 \leq n \leq k, E_{min} \leq E\} \quad (4.46)$$

où E_{min} est tel que $(\varphi q A + \frac{r}{k} (r - qE_{min}) \ln E_{min}) < 0$. Nous déduisons que

$$\forall (n, E) \in \Sigma_0 \implies \dot{V}(n, E, p) < 0 \quad (4.47)$$

Pour $E < 1$, $\dot{V}(n, E, p) < n \left(\varphi q A + \frac{r}{k} \left(r \left(1 - \frac{n}{k} \right) - qE \right) \ln E \right)$. Nous avons

$$n < f(E) \implies \dot{V}(n, E, p) < 0 \quad (4.48)$$

où $f(E) = \frac{k^2 \varphi q A}{r^2 \ln E} + \frac{k(r-qE)}{r}$. Il est facile de voir que f est définie sur $]0, 1[$ et décroît de manière monotone avec $\lim_{E \rightarrow 0} f(E) = k$ et $\lim_{E \rightarrow 1} f(E) = -\infty$. On note également $\Sigma_1 = \{(n, E) \mid 0 \leq n \leq k, 0 \leq E < f^{-1}(n)\}$. L'équation (4.48) est donnée par :

$$(n, E) \in \Sigma_1 \implies \dot{V}(n, E, p) < 0 \quad (4.49)$$

Considérons $E'_{min} = f^{-1}(k/2)$. Sur l'ensemble compact $[0, k/2] \times [E'_{min}, E_{min}]$, le terme $\varphi q A + \frac{r}{k} (r(1 - \frac{n}{k}) - qE) \ln E - \varphi q^2 n E$ admet un maximum M .

Notons $\Sigma_2 = [0, \alpha \varphi c / M] \times [E'_{min}, E_{min}]$. De l'équation (4.45), déduisons que :

$$(n, E) \in \Sigma_2 \implies \dot{V}(n, E, p) < 0 \quad (4.50)$$

Nous définissons maintenant $\Sigma = ([0, k] \times \mathbb{R}^+) \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2)$. Σ , Σ_0 , Σ_1 et Σ_2 sont représentés sur la Figure 4.8. Σ est un sous ensemble compact de $(0, k] \times \mathbb{R}_+^* \cup \{(k, 0)\}$. En outre, $\dot{V}(n, E, p) \geq 0 \implies (n, E) \in \Sigma$. Nous déduisons que Ω est inclus dans $\Sigma \times (-\infty, A/\alpha]$.

□

□

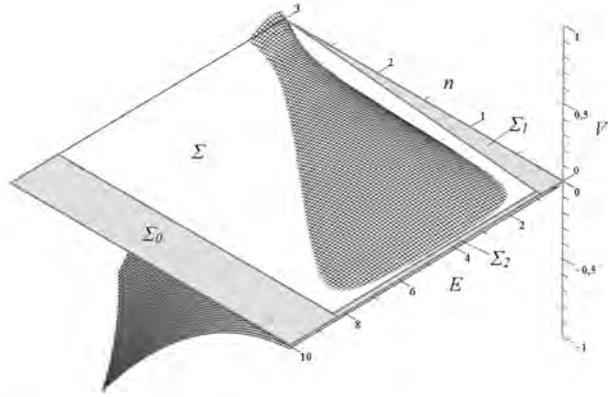


FIGURE 4.8 – $\dot{V}(n, E)$ (surface noire). La partie blanche du plan $\dot{V} = 0$ représente l'ensemble compact qui englobe l'ensemble $\{(n, E) \mid \dot{V} > 0\}$. Les ensembles Σ et Σ_i pour $i = 0 \dots 2$ sont représentés en zones grises. Les paramètres sont $r = 0.9$, $k = 3$, $q = 0.1$, $c = 2$, $A = 2$, $\alpha = 0.1$ et $\varphi = 0.1$.

Lemme 4.2.2. Dans l'ensemble Ω , V admet un maximum V_0 .

Démonstration. Puisque Σ est un ensemble compact, $V(n, E, A/\alpha)$ admet un maximum V_0 sur Σ . De l'équation (4.44), nous déduisons que $\forall (n, E, p) \in \Omega$, $V(n, E, p) \leq V(n, E, \alpha, p)$, d'où le résultat. \square \square

Soit $V'_0 \geq V_0$, $\Omega_\infty = \{(n, E, p) \mid V(n, E, p) \leq V'_0\}$, et $\Omega_\infty^+ = \{(n, E, p) \mid (n, E, p) \in \Omega_\infty, p \geq 0\}$. Nous considérons maintenant le flot ϕ associé au système (4.26).

Lemme 4.2.3. Ω_∞ est invariant et pour tout $(n, E, p) \in \Omega_0$, il existe $t \geq 0$ tel que $\phi_t(n, E, p) \in \Omega_\infty^+$.

Démonstration. Pour $(n, E, p) \in \Omega_0 \setminus \Omega_\infty$, $V(n, E, p) > V_0$ et $\dot{V}(n, E, p) < 0$, ce qui signifie que Ω_∞ est invariant. En outre, il est clair que $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\phi_t(n, E, p)) \leq V_0$, ce qui signifie qu'il existe t_0 tel que $\phi_{t_0}(n, E, p) \in \Omega_\infty$.

Nous montrons maintenant qu'il existe t'_0 tel que $\phi_{t'_0}(n, E, p) \in \Omega_\infty^+$. Du système (4.26), nous déduisons que si $p < 0$, $\dot{E} \leq -cE$, et si $p < 0$ et $E < A/(2kq)$, $\dot{p} > A/2$. Considérons $(n, E, p) \in \Omega_\infty$, et la solution $(n(t), E(t), p(t)) = \phi_t(n, E, p)$. Nous supposons $\forall t > 0$, $p(t) < 0$. Il existe t_1 tel que $\forall t > t_1$, $E(t_1) < A/(2kq)$. Ensuite pour $t > t_1$, $\dot{p}(t) > A/2$, et $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) > 0$, d'où on a une contradiction. Nous déduisons qu'il existe $t'_0 \geq 0$ tel que $p \geq 0$. Puisque $(n, E, p) \in \Omega_\infty$ et Ω_∞ est invariant, $\phi_{t'_0}(n, E, p) \in \Omega_\infty^+$, ce qui termine la preuve. \square \square

Propriété 4.2.7. Il existe un ensemble invariant Ω_∞^{++} inclus dans Ω_0 qui est invariant et tel que $\forall (n, E, p), \{t \geq 0 \mid \{\phi_t(n, E, p)\} \cap \Omega_\infty^{++} \neq \emptyset\}$.

Démonstration. Il est facile de déduire de l'équation précédente (4.44) que Ω_∞^+ est un ensemble compact. Ceci est illustré sur la figure (4.9).

Notons $E_M = \max\{E \mid (n, E, 0) \in \Omega_\infty\}$.

Pour $(n, E, p) \in \Omega_\infty^+$, nous considérons la solution $(n(t), E(t), p(t)) = \phi_t(n, E, p)$. Définissons $t_m = \inf\{t > 0 \mid p(t) < 0\}$ et $t_M = \inf\{t > t_m \mid p(t) > 0\}$ (t_m et t_M peut être égale à $+\infty$). Si $t_m = +\infty$, on note $p_{inf}(n, E, p) = 0$, ou on note encore $p_{inf}(n, E) = \inf_{t \in (t_m, t_M)} p(t)$. Cela représente la valeur minimale de p qui est atteinte à la rencontre avec le plan $p = 0$ avant de revenir à Ω_∞^+ . Si $t_m < +\infty$, alors $\dot{p}(t_m) \leq 0$. Pour tout $t \in (t_m, t_M)$, $\dot{E}(t) \leq -cE(t)$, et ainsi $E(t) \leq E(t_m)e^{-ct} \leq E_M e^{-ct}$. Ensuite nous avons $\dot{p}(t) \geq A - qkE(t) \geq A - qkE_M e^{-ct}$. Nous en déduisons que $p(t)$ atteint son minimum avant $t' = \ln(A/qkE_M)/c$. Si nous notons par $p_m = \int_0^{t'} (A - qkE_M e^{-ct}) dt$, alors $p_{inf}(n, E, p) \geq p_m$.

Nous définissons maintenant $\Omega_\infty^{++} = \{(n, E, p) \in \Omega_\infty \mid p \geq p_m\}$. Il est clair que Ω_∞^{++} est borné, et de la preuve précédente, nous déduisons qu'il est invariant. Puisque Ω_∞^+ est inclus dans Ω_∞^{++} , nous déduisons du lemme (??) que : $\forall (n, E, p), \{t \geq 0 \mid \{\phi_t(n, E, p)\} \cap \Omega_\infty^{++} \neq \emptyset\}$. \square \square

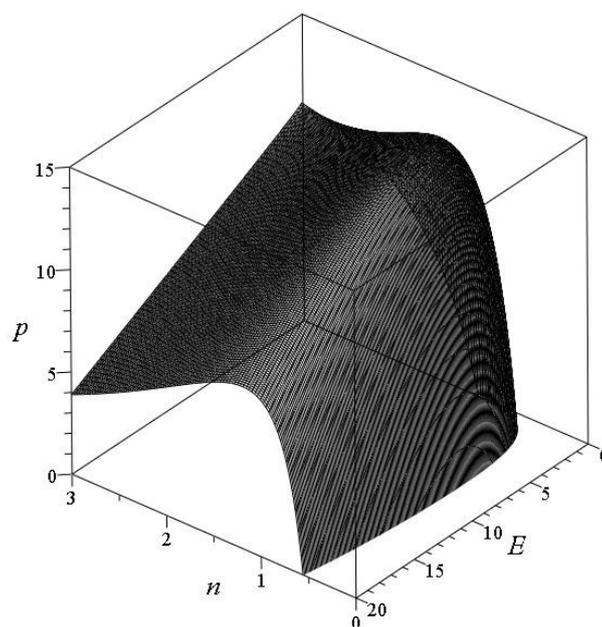


FIGURE 4.9 – Sur la surface dessinée, $V(n, E, p)$ est constant. L'espace sous la surface correspond à Ω_∞ . L'ensemble compact Ω_∞^+ correspond à l'espace situé sous la surface et sur le plan $p = 0$. Les paramètres sont $r = 0.9$, $k = 3$, $q = 0.1$, $c = 2$, $A = 2$, $\alpha = 0.1$ et $\varphi = 0.1$.

4.2.6 Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté un modèle de pêcherie bioéconomique dans lequel le prix de la ressource n'était pas une constante, mais variait sous l'effet de la différence entre la demande et l'offre. Par conséquent, nous étudions un modèle en dimension 3 que nous avons étudié analytiquement. Nos résultats ont montré qu'en tenant compte de la variation du prix nous avons des conséquences importantes. L'analyse du modèle montre que, selon les valeurs de la sensibilité de la demande par rapport au prix, un, deux, ou trois équilibres positifs peuvent coexister. Dans le cas des trois points d'équilibre, il y a coexistence de deux pêcheries : une pêcherie de développement durable ou artisanale avec une densité assez grande de poissons loin de l'extinction, et une pêcherie de surexploitation avec une densité très faible de la ressource et un important effort de pêche.

Il y a des raisons de penser que le dernier cas avec trois équilibres positifs peut être observé dans certaines pêcheries commerciales. Les ressources qui, dans le passé ont été très abondantes sont maintenant surexploitées ce qui risque d'entraîner un effondrement irréversible [27]. En guise d'exemple, dans les pêcheries sénégalaises, nous observons que le thiof qui est une espèce très appréciée des sénégalais est en situation de surexploitation depuis des années [68]. Aujourd'hui, la ressource devient très rare et le prix a beaucoup augmenté. Par conséquent, l'exemple du thiof pourrait correspondre à notre modèle dans le cas de surexploitation trouvé lorsque les trois équilibres peuvent coexister.

Dans notre travail, nous avons également étendu notre modèle de pêche à prix variable à un ensemble de modèles, tels que les modèles de populations structurées en classes d'âge ou des pêcheries avec stockage de la ressource. Nos résultats montrent que la MPE obtenue peut être généralisée à différents types de modèles de pêche présentant les mêmes typologies aussi bien d'équilibres que de dynamique. Nos résultats préliminaires ont montré que la MPE pourrait également être étendue à des fonctions de capture plus générales différentes de la fonction de Schaefer que nous avons utilisée ici, par exemple des captures avec une saturation à grande densité de poissons, par exemple une fonction de Holling de type II.

Chapitre 5

Conclusion générale et perspectives

Dans le cadre du travail de cette thèse, deux grands problèmes ont été traités, à savoir d'une part l'estimation de la position des DCPs et le contrôle de la taille des stocks de populations de poissons dont la dynamique est décrite par un modèle de pêche multi-site et d'autre part l'augmentation du nombre de sites pour passer de la surexploitation à la pêche durable. Comme nous l'avons mentionné dans notre introduction, ces questions sont motivées par la nécessité de doter les décideurs politiques et économiques de recommandations scientifiques pour une bonne gestion des ressources halieutiques qui sont de nos jours surexploitées. Pour trouver des réponses aux questions que nous nous sommes posées, nous avons considéré des techniques bien connues du domaine de la pêche : les Dispositifs de concentration de poissons (DCPs) communément appelés en anglais FADs (Fish Aggregating Devices).

Dans le chapitre 2, nous nous sommes intéressés à un modèle multisite et nous nous sommes focalisés sur le placement géométrique des pièges. Dans une expression générale des variables de contrôle établies dans le but de suivre la population de poissons des ressources considérées, nous obtenons une condition nécessaire et suffisante pour obtenir une évolution stable de la ressource sur un intervalle donné.

Dans le chapitre 3, nous avons présenté des modèles de pêche bioéconomique dans lesquels le prix de la ressource n'était pas une constante, mais variait par rapport à la différence entre la demande et l'offre. L'analyse des modèles montre que, selon les valeurs du paramètre α , un, deux, ou trois équilibres positifs peuvent coexister. Dans le cas des trois points d'équilibre, il y a coexistence de deux pêcheries : une pêche durable ou artisanale avec une densité de poissons loin de l'extinction, et une pêche de surexploitation avec une densité très faible de la ressource et un important effort de pêche. On a aussi montré qu'il était possible de définir une stratégie basée sur le nombre de DCPs pour passer d'un état correspondant à la surexploitation

à un autre de pêche durable.

Dans un second volet nous avons présenté un modèle sans échelle de temps qui a abouti une équation que nous avons appelé : “ EQUATION DU PRIX DU MARCHE ” basée sur la variation du paramètre α nous donnant un à trois équilibres avec des prix différents et en conséquence des marchés différents. Nous l’avons ensuite généralisé à un modèle avec deux classes d’âge et à un modèle de stockage des poissons pour une vente future. Nos résultats ont montré que nous retrouvons les mêmes caractéristiques de l’Equation du Prix du Marché dans la généralisation des deux modèles.

Bien que les objectifs que nous nous sommes fixés dans l’introduction aient été atteints, les travaux effectués dans cette thèse gagneraient à être développés davantage pour une prise en compte d’autres considérations qui sont d’actualité dans la gestion des pêcheries. Dans un premier temps, il serait très intéressant d’appliquer les résultats obtenus à des cas réels, comme la pêche du “ Thiof ”. Ce poisson très apprécié au Sénégal est considéré comme le *roi des poissons*. Il y a actuellement des signes de surexploitation et de nouveaux règlements, sont nécessaires. Il pourrait être intéressant de réglementer la pêche de thiof afin de mieux contrôler les captures. Nous prévoyons de confronter nos modèles aux données disponibles au CRODT notamment sur le thiof. Notre modèle pourrait aussi inclure une description fine de la géographie de l’environnement (ligne de côte) ainsi que certaines réalités socio-économiques (mouvement détaillé des bateaux en fonction des habitudes de pêche et l’emplacement des ports, de la disponibilité et de gestion du personnel ...).

Le modèle multisite présenté a été écrit dans un cadre général, sans aucun comportement spécifique pour les poissons ou les bateaux. Dans le modèle actuel, on a supposé que le mouvement des bateaux était symétrique, ce qui est vrai quand les taux de déplacement des bateaux sont influencés par la distance entre deux sites. En réalité, le mouvement des bateaux peut également être influencé par plusieurs facteurs tels que la densité de poissons sur un endroit donné, mais aussi l’emplacement portuaire, la météorologie, les courants océaniques. De même, le mouvement des poissons peut aussi dépendre de la géographie, des courants océaniques, des marées, etc. En conséquence, afin d’étendre les résultats à un cas particulier, il convient de déterminer avec soin si les hypothèses formulées dans ce modèle sont toujours valables.

Dans un second temps il serait également important de prendre en compte le caractère hétérogène de la pêche, tel que les Aires Marines Protégées (AMP) [12], les dispositifs de concentration de poissons [61, 62], les récifs artificiels [60]. Au Sénégal il y a cinq AMPs qui ont été récemment créés et il ne fait aucun doute que cela aura des conséquences importantes sur la dynamique de la pêche. Par conséquent il est important de traiter des modèles de pêche multi-site [7, 50].

Nous projettons dans l'avenir de développer dans un premier temps des modèles prenant en compte l'hétérogénéité spatiale couplée à une dynamique de prix variable dans un modèle bioéconomique. Ensuite considérer le coût par unité d'effort de pêche comme étant une variable dépendant du temps et est aussi fonction de la densité de la ressource, de l'effort de pêche et la position des sites c'est à dire $c(t, E, n, M_i)$. Puisque la condition d'optimalité dans le cas où les taux de déplacement des poissons m_{ij} et des bateaux k_{ij} dépendent des poissons nous projettons avec la théorie hamiltonienne prouver que nous obtenons un invariant dans le cas de deux et trois sites et essayer de le généraliser dans le cas de L sites. Un point extrêmement important est de pouvoir cumuler les résultats obtenus dans les deux parties c'est à dire tout en gérant l'état de sur-exploitation à une pêcherie durable en augmentant le nombre de sites et définir également une position optimale des FADs pour réduire les coûts.

Bibliographie

- [1] Alexeev.V, Galeev.E, Tikhomirov.V. *Recueil de problèmes d'optimisation*. ed Mir (1987).
- [2] Arnold.V.I. *Equations différentielles ordinaires*.Editions Mir, (1974).
- [3] Arnold.V. I, *Ordinary Differential Equations*,MIT Press, (1978)
- [4] Auger. P, Bravo de la Parra. R, Poggiale. J.C, Sanchez. E, Nguyen-Huu.T. *Aggregation of variables and applications to population dynamics. In Structured population models in biology and epidemiology*. Lecture notes in mathematics. Vol. 1936. Edited by P. Magal and S. Ruan. Mathematical Biosciences Subseries, Springer, Berlin., 209–263.(2008).
- [5] Auger P, Bravo de la Parra.R Methods of aggregation of variables in population dynamics. C R Acad Sci 323 :665-674.(2000).
- [6] Auger P, Ducrot A. A model of fishery with fish stock involving delay equations. Philos T R Soc A 367 :4907-4922.(2009).
- [7] Auger P, Lett C, Moussaoui A, Pioch.S, *Optimal number of sites in artificial pelagic multi-site fisheries*. Can J Fish Aquat Sci 67 :296-303. (2010).
- [8] Auger. P, Mchich. R, Raïssi.N, Kooi. B. *Effects of market price on the dynamics of a spatial fishery model : Over-exploited fishery/traditional fishery*. Ecol. Complex., 7 , No. 1, 13 – 20. doi :10.1016/j. ecocon.2009.03.005,(2009).
- [9] Auger.P , Poggiale. J.C.. *Emergence of population growth models : fast migration and slow growth*. J. Theor. Biol., 182 , No. 2, 99–108. doi :10.1006/jtbi.1996.0145. PMID :8944142.(1996)
- [10] Auger. P, Roussarie. R. *Complex ecological models with simple dynamics : from individuals to population*. Acta Biotheor., 42 , No. 2-3, 111–136. doi :10.1007/BF00709485.(1994)
- [11] Berger.M, Gostiaux.B, *Géométrie Différentielle*, Armand Colin, Paris (1972).
- [12] Boudouresque CF, Gadiou G, Le Direac'h L *Marine protected Areas : a tool for costal areas management*. In : Levner E, Linkov I, Proth JM (eds) Strategic Management of marine Ecosystems, Springer, Dordrecht, 29-52.(2005).
- [13] Barbier.E.B, Barbier.I. x, Sathirathai.S. *Do open access conditions affect the valuation of an externality? Estimating the welfare effects of mangrove-fishery linkages*. Env. Resour. Econ., , 343–367,21 (2002).

- [14] Boscain.Ugo, SISSA, via Beirut 2-4 34014 Trieste, Italy.
Benedetto Piccoli, IAC-CNR, viale Del Policlinico 137, 00161 Roma, Italy *A short Introduction to optimal control*
- [15] Cantat.S, *Théorème de Poincaré-Bendixson* Le journal de maths des élèves, Volume 1, No. 3
- [16] CARO.F et POPIER. A. *Stabilité des équilibres. Exemples*, (1995).
- [17] Clark.C.W. *Mathematical Bioeconomics : The Optimal Management of Renewable Resources*. 2nd ed. Wiley, New York, 1990.
- [18] Coron.J.M. *Control and nonlinearity* American Mathematical Society, 2007
- [19] Dagorn.L, Holland.K.N, Itano.D.G. *Behavior of yellowfin (Thunnus albacares) and bigeye (T. obesus) tuna in a network of fish aggregating devices (FADs)*. Mar. Biol. (Berl.), 151(2) 595–606. doi :10.1007/s00227-006-0511-1.(2007) .
- [20] De Lara M, Doyen L *Sustainable Management of renewable resources : Mathematical Models and Methods*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.(2008).
- [21] Demailly.J.P. *Analyse numérique et équations différentielles*. Collection Grenoble sciences. EDP sciences, 2006.
- [22] Ekouala L Le développement durable et le secteur des pêches et de l'aquaculture au Gabon : une étude de la gestion durable des ressources halieutiques et de leur écosystème dans les provinces de l'Estuaire et de l'Ogoué Maritime. PhD Thesis, Université du Littoral Côte d'Opale.(2013).
- [23] Evans.L.C *An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory, Version 2.0*
- [24] Fonteneau.A, Ariz.J, Gaertner.D, Nordstrom.T, Pallares.P. *Observed changes in the species composition of tuna schools in the Gulf of Guinea between 1981 and 1999, in relation with the fish aggregating device fishery*. Aquat. Living Resour. 13 .253–257. doi :10.1016/S0990-7440(00)01054-8.(2000) .
- [25] Food and Agriculture Organization of the United Nations (FAO). *Fishing Technology Equipments Fish Aggregating Device (FAD)*. Fisheries and Aquaculture Department.
- [26] Gilmore.R, These 2008 Université Bourgogne. Wily *Lie groups, Lie algebras, and some of their applications*(1974)
- [27] Gueye, AL La pêche sénégalaise ; crise et changement de perspective. Maitrise professionnalisée de gestion des entreprises et des organisations. Direction des pêches maritimes.(2005).
- [28] Herbin.R. *Cours d'Analyse Numérique*. Licence de mathématiques. Université Aix Marseille.(Décembre 2012).
- [29] Hirsch ,Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Armand Colin, Academic Press, 1974.

- [30] Hirsch.M.W and Smale.S. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press : New-York, 1974.
- [31] Iwasa.Y, Andreasen.V, Levin.S.A. *Aggregation in model ecosystems. I. Perfect aggregation*. Ecol. Model., 37 , 287–302.(1987).
- [32] Iwasa.Y, Levin.S.A, Andreasen.V. *Aggregation in model ecosystems. II. Approximate aggregation*. IMA J. Math. Appl. Med. Biol, 1–23,6 (1989).
- [33] Irwin.M.C, *Smooth Dynamical Systems*, Armand Colin, Academic Press, 2ème édition, 1987.
- [34] Jamet.J et Lagoin.Y, *Manuel d’instruction et de perfectionnement des agents des services des pêches maritimes des pays tropicaux*. Océanographie Appliquée aux pêches, Tome I, 300 p, 1981.
- [35] Jurdjevic.V, *Geometric Control Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 51, Cambridge university press, 1997.
- [36] Kakimoto.H. *Artificial fishing reef studies and effects*. Japanese Institute of Technology on Fishing Ports, Grounds and Communities (JIFIC), 2, 150–178.(2004).
- [37] Kontz.Cyrill.
These. Université Bourbogne. *Contrôle optimal de la dynamique dissipative de systèmes quantitatives*2008.
- [38] Kritzer.J.P, Sale. P.F. *Metapopulation ecology in the sea : from Levinsà model to marine ecology and fisheries science* Fish. 5, 131–140. (2004).
- [39] Kumoro.L. *Notes on the use of FADs in the Papua New Guinea purse seine fishery*. Papua New Guinea National Fisheries Authority, Port Moresby, Papua New Guinea, 2003.
- [40] Lafrance.J.T. *Linear demand functions in theory and practice*. J. Econ. Theory, 37 , 147–166.(1985).
- [41] Lan.C.H, Hsui.C.Y. *The deployment of artificial reef ecosystem : modelling, simulation and application*. Simul. Model. Pract. Theory, 14, No. 5, 663–675. doi :10.1016/j.simpat.2005.10. 011. (2006).
- [42] Lee.E. B, Markus.L, *Foundations of Optimal Control Theory*, John Wiley and Sons, New-York (1967).
- [43] Levin.S.A, Pacala.S. *Theories of simplification and scaling of spatially distributed processes*, in : D. Tilman, P. Kareiva (Eds.), *Spatial Ecology : The Role of Space in Population Dynamics and Interspecific Interactions*, Princeton University, 1997.
- [44] Lobry.C. *Contrôlabilité des systèmes non linéaires*, in *Outils et Modèles Mathématiques pour l’Automatique, l’Analyse de Systèmes et le Traitement du Signal*, vol. 1, éditions du CNRS , 187-214.1981.

- [45] Ly.S, Mansal F, Balde M, Nguyen Huu Tri, Auger P. *A model of a multi-site fishery with variable price : from over-exploitation to sustainable fisheries*. Mathematical Modelling of Natural Phenomena, 8 (6), p. 130-142. ISSN 0973-5348, 2013.
- [46] Mansal.F, Nguyen Huu.Tri, Balde.M, Auger.P. *A Mathematical Model of a Fishery with Variable Market Price : Sustainable Fishery/Over-exploitation*. Acta Biotheor (2014) 62 :305-323 DOI 10.1007/s10441-014-9227-7.
- [47] Mansal F. *Principe du maximum de Pontryagin : Application à la chimiothérapie du cancer* . Mémoire de master II de Mathématiques Appliquées, Mars 2011.
- [48] Meuriot E Les modèles bio-économiques d'exploitation des pêcheries. Démarches et enseignements. Rapports économiques et juridiques de l'IFREMER N° 4. (1987) .
- [49] Moreno.G, Dagorn.L, Sancho.G, Itano.D. *Fish behaviour from fishers' knowledge : the case study of tropical tuna around Drifting Fish Aggregating Devices (DFADs)* Can. J. Fish. Aquat. Sci. 64(11) 1517–1528. doi :10.1139/F07-113.(2007).
- [50] Moussaoui A, Auger P, Lett C *Optimal number of sites in multi-site fisheries with fish stock dependent migrations*. Math Biosci Eng 8 :769-783. (2011).
- [51] Ohta.I, Kakuma.S.*Periodic behavior and residence time of yellowfin and bigeye tuna associated with fish aggregating devices around Okinawa Islands, as identified with automated listening stations*. Mar. Biol. (Berl.), 146(3), 581–594. doi :10.1007/s00227-004-1456-x. (2005).
- [52] Petit.N, Rouchon.P. *Automatique Dynamique et contrôle des systèmes*. CAS - Centre Automatique et Systèmes Unité Mathématiques et Systèmes 2009.
- [53] Pontryagin.L.S and al.
Mathematical theory of optimal processes Eds Mir Moscou, page 504, 1974.
- [54] Pontryagin.L. S , Boltyanski.V. G , Gamkrelidze.R. V, and Mischenko.E. F
The mathematical theory of optimal processes Interscience Publishers New York, 1962.
- [55] PNUE, Mers régionales, OMI(Organisation Maritime Internationale) *Directives pour l'implantation de récifs artificiels* Publié en 2009 par l'Organisation maritime internationale 4 Albert Embankment, Londres SE1 7SR
- [56] Trelat.Emmanuel. *Contrôle Optimal* Notes de cours Master de Mathématiques, Université d'Orleans 2007/2008.
- [57] Trelat.Emmanuel. *Contrôle Optimal : Theory et applications* Vuilbert 2005.
- [58] Sontag.E. *Mathematical control theory* Deterministic Finite dimensional Systems-Second Edition, Springer(1998)
- [59] Sanchirico.J.N, Wilen.J.E. *Bioeconomics of spatial exploitation in a patchy environment* J. Environ. Econ. Manag. 37, 129–150. (1999).

- [60] Randall, J.E. An analysis of the fish populations of artificial and natural reefs in the virgin islands. *Carib J Sci* 3(1) :31-47. (1963)
- [61] Robert M, Dagorn L, Filmalter JD, Deneubourg JL, Itano D, Holland K, Intra-individual behavioral variability displayed by tuna at fish aggregating devices (FADs). *Mar Ecol-Prog Ser*, in press.(2013)
- [62] Robert M, Dagorn L, Lopez J, Moreno G, Deneubourg JLA Does social behavior influence the dynamics of aggregations formed by tropical tunas around floating objects? An experimental approach. *J Exp Mar Biol Ecol* 440 :238-243.(2013)
- [63] Robert.M, Dagorn.L, Lopez.J, Moreno.G, Deneubourg.J.L.A. *Does social behavior influence the dynamics of aggregations formed by tropical tunas around floating objects? An experimental approach* *J. Exp. Mar. Biol. Ecol.*, 440, 238–243. (2013)
- [64] Riggio, Badalamenti.S, F et Dèanna, G. *Artificial reefs in Sicily : an overview. pp 65-73. In Jensen et al. (eds) Artificial reefs in European Seas. Kluwer Academic Publishers. 508 pp.*(2000)
- [65] Schaefer.M.B, *Some considerations of population dynamics and economics in relation to the management of the commercial marine fisheries.* *J. Fish. Res. Board Canada* 14 , 669-681.(1957)
- [66] Smith VL , Economics of production from natural resources. *Am Econ Rev* 58(3) :409-431.(1968)
- [67] Smith, VL, On models of commercial fishing. *J Political Economy* 77(2) :181-198.(1969)
- [68] Sow FN, Thiam N, Samb B Diagnostic de l'état d'exploitation du stock de mérrou *Epinephelus aeneus*(Geoffroy St. Hilaire, 1809) au Sénégal par l'utilisation des fréquences des tailles. *J Sci Hal Aquat* 3 :82-88.(2011)
- [69] SY, Alassane, *Numerical control of an discrete phase transition model : the monopole problem.* *Mathematical control and related fields.* doi :10.3934/mcrf.2012.1.21. (March 2012)
- [70] Touzeau S, Modèles de contrôle en gestion des pêches. PhD Thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis.(1997)
- [71] Walras.L, *Elément d'économie Politique Pure.* Corbaz, Lausanne, 1874.
- [72] Western and Central Pacific Fisheries Commission (WCPFC). Paragraph 24 of CMM 2008-01 FAD management and monitoring. Fifth regular session, Technical and Compliance Committee. WCPFC-TCC5-2009/22 (2009).