

Optimisation du schéma à neuf points paramétré par un scalaire

Sommaire

3.1	Description du schéma 9P1s	62
3.2	Analyse de l'erreur en pression	66
3.2.1	Distribution angulaire	67
3.2.2	Minimisation de l'anisotropie	70
3.3	Analyse de l'erreur en saturation	71
3.3.1	Distribution angulaire	72
3.3.2	Minimisation de l'anisotropie	77
3.4	Résultats numériques	80
3.4.1	Cas radial	81
3.4.2	Cas à 5 puits	81
3.4.3	Cas digitations	84

Conçu dans les années 1980 par les ingénieurs du pétrole, le schéma à neuf points est un palliatif pragmatique contre l'effet d'orientation du schéma 5P en maillage rectangulaire. En §3.1, son idée de base est rappelée en mettant l'accent sur le paramètre scalaire qui confère au schéma l'acronyme 9P1s et qui sera optimalement ajusté par la suite.

La stratégie préconisée pour l'optimisation par rapport au paramètre s'appuie sur une quantification de l'anisotropie via une distribution angulaire de l'erreur. Appliquée au laplacien pur en pression en §3.2, cette démarche fournit une justification rigoureuse à la valeur heuristiquement recommandée par de nombreux auteurs [36, 98].

Appliquée à l'équation en saturation, ce qui est plus pertinent, cette démarche conduit en §3.3 à un problème de minimisation plus ardu, mais dont il est facile de déterminer une solution approchée. La valeur « sous-optimale » du paramètre coïncide alors avec celle obtenue par [43, 53] en maillage carré au moyen d'une autre méthode. Les résultats numériques de §3.4 témoignent de l'amélioration progressive des fronts pour des maillages dont le rapport des pas d'espace demeure proche de 1.

3.1 Description du schéma 9P1s

Cette section introduit une famille de schémas numériques sur maillage cartésien se rapprochant de ceux considérés dans les années 80 [85,98] dans lesquels des mailles diagonales sont utilisées en plus des premières voisines (figure 3.1, à droite). Ce schéma, appelé *schéma 9P1s*, nécessite un paramètre global permettant de donner plus ou moins d'importance aux mailles supplémentaires.

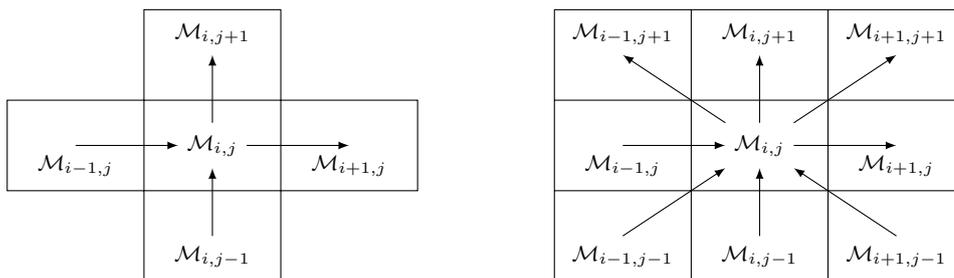


FIGURE 3.1 – Stencil des schémas 5P (à gauche) et 9P1s (à droite). Les flèches montrent le sens conventionnel des flux positifs.

Construction sur le laplacien

Pour comprendre l'idée du schéma 9P1s, l'équation suivante est tout d'abord considérée

$$-\Delta p^{n+1} = q^{n+1}.$$

Le schéma 9P1s se construit via les opérateurs 1-D du laplacien discret par direction

$$\begin{aligned} (-\Delta_h^H p)_{i,j}^{n+1} &= \frac{-p_{i-1,j}^{n+1} + 2p_{i,j}^{n+1} - p_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2}, \\ (-\Delta_h^V p)_{i,j}^{n+1} &= \frac{-p_{i,j-1}^{n+1} + 2p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2}. \end{aligned}$$

où H correspond à « horizontal » et V à « vertical ». Afin de parvenir à la discrétisation par différences finies du laplacien en 2-D, la combinaison suggérée pour créer le schéma 9P1s est

$$\begin{aligned} (-\Delta_h^\theta p)_{i,j}^{n+1} &= \theta(-\Delta_h^H p)_{i,j+1}^{n+1} + (1-2\theta)(-\Delta_h^H p)_{i,j}^{n+1} + \theta(-\Delta_h^H p)_{i,j-1}^{n+1} \\ &\quad + \theta(-\Delta_h^V p)_{i+1,j}^{n+1} + (1-2\theta)(-\Delta_h^V p)_{i,j}^{n+1} + \theta(-\Delta_h^V p)_{i-1,j}^{n+1}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

le paramètre θ devant appartenir à l'intervalle $[0, 1/2]$ afin d'obtenir une combinaison convexe. Ainsi, les mailles diagonales vont apparaître lors du calcul par l'intermédiaire des laplaciens sur les mailles $\mathcal{M}_{i+1,j}$, $\mathcal{M}_{i-1,j}$, $\mathcal{M}_{i,j+1}$ et $\mathcal{M}_{i,j-1}$. Le paramètre θ a comme rôle de donner plus ou moins d'importance aux mailles diagonales. De ce fait, il change la distribution spatiale de l'erreur mais ne va pas augmenter l'ordre d'approximation de la

discrétisation. Le laplacien obtenu est

$$\begin{aligned}
 (-\Delta_h^\theta p)_{i,j}^{n+1} &= -\alpha p_{i-1,j+1}^{n+1} - \beta_V p_{i,j+1}^{n+1} - \alpha p_{i+1,j+1}^{n+1} \\
 &\quad - \beta_H p_{i-1,j}^{n+1} + (2\beta_H + 2\beta_V + 4\alpha) p_{i,j}^{n+1} - \beta_H p_{i+1,j}^{n+1} \\
 &\quad - \alpha p_{i-1,j-1}^{n+1} - \beta_V p_{i,j-1}^{n+1} - \alpha p_{i+1,j-1}^{n+1}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

où les coefficients sont

$$\alpha = \theta \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right), \quad \beta_H = \frac{1-2\theta}{\Delta x^2} - \frac{2\theta}{\Delta y^2}, \quad \text{et} \quad \beta_V = \frac{1-2\theta}{\Delta y^2} - \frac{2\theta}{\Delta x^2}.$$

Proposition 3.1. *Sous la condition*

$$\theta < \frac{\min\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta x}{\Delta y}\right)}{2\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta y}\right)}, \tag{3.3}$$

le laplacien discret (3.2) possède la structure monotone suivante :

- l'élément diagonal $2\beta_H + 2\beta_V + 4\alpha$ est strictement positif ;
- les éléments extra-diagonaux $-\alpha$, $-\beta_V$, $-\beta_H$ sont négatifs ;
- la somme des éléments d'une ligne est nulle.

REMARQUE 3.1. Le second membre de (3.3) est toujours inférieur à $1/4$. Cette hypothèse est plus forte que la condition $\theta < 1/2$ obtenue lors de l'écriture du laplacien sous forme d'une combinaison linéaire. \square

REMARQUE 3.2. Le schéma 5P est obtenu pour une valeur de $\theta = 0$ tandis que la valeur $\theta = 1/12$ coïncide avec le schéma à 9 points de Ding [36] en maillage rectangulaire et celui de Yanosik en maillage carré [98]. En prenant $\theta = 1/6$, on retombe sur la méthode des éléments finis Q_1 en maillages rectangulaires. \square

L'équation (3.2) peut se réécrire à l'aide des différences de pression entre deux mailles par

$$\begin{aligned}
 (-\Delta_h^\theta p)_{i,j}^{n+1} &= \beta_H (p_{i,j}^{n+1} - p_{i+1,j}^{n+1}) + \beta_H (p_{i-1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}) \\
 &\quad + \beta_V (p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j+1}^{n+1}) + \beta_V (p_{i,j-1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}) \\
 &\quad + \alpha (p_{i,j}^{n+1} - p_{i+1,j+1}^{n+1}) - \alpha (p_{i-1,j-1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}) \\
 &\quad + \alpha (p_{i,j}^{n+1} - p_{i-1,j+1}^{n+1}) - \alpha (p_{i+1,j-1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}).
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Afin de se placer dans une vision volumes finis du schéma, il faut multiplier les deux membres de (3.4) par $\Delta x \Delta y$. Ainsi, le laplacien se discrétise en volumes finis par un bilan de huit flux (contrairement à quatre pour le schéma 5P)

$$\begin{aligned}
 \Delta x \Delta y (-\Delta_h^\theta p)_{i,j}^{n+1} &= F_{i+1/2,j}^\theta - F_{i-1/2,j}^\theta + F_{i,j+1/2}^\theta - F_{i,j-1/2}^\theta \\
 &\quad + F_{i+1/2,j+1/2}^{\nearrow\theta} - F_{i-1/2,j-1/2}^{\nearrow\theta} + F_{i-1/2,j+1/2}^{\nwarrow\theta} - F_{i+1/2,j-1/2}^{\nwarrow\theta}.
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 F_{i+1/2,j}^\theta &= \Delta x \Delta y \beta_H (p_{i,j}^{n+1} - p_{i+1,j}^{n+1}), & F_{i-1/2,j}^\theta &= \Delta x \Delta y \beta_H (p_{i-1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}), \\
 F_{i,j+1/2}^\theta &= \Delta x \Delta y \beta_V (p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j+1}^{n+1}), & F_{i,j-1/2}^\theta &= \Delta x \Delta y \beta_V (p_{i,j-1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}), \\
 F_{i+1/2,j+1/2}^{\nearrow\theta} &= \Delta x \Delta y \alpha (p_{i,j}^{n+1} - p_{i+1,j+1}^{n+1}), & F_{i-1/2,j-1/2}^{\nearrow\theta} &= \Delta x \Delta y \alpha (p_{i-1,j-1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}), \\
 F_{i-1/2,j+1/2}^{\nwarrow\theta} &= \Delta x \Delta y \alpha (p_{i,j}^{n+1} - p_{i-1,j+1}^{n+1}), & F_{i+1/2,j-1/2}^{\nwarrow\theta} &= \Delta x \Delta y \alpha (p_{i+1,j-1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}).
 \end{aligned}$$

Résolution de l'équation en pression

Le passage du laplacien vers le système (2.4), (2.9), (2.11) est relativement aisé. Il suffit en effet de reprendre les flux précédemment détaillés en multipliant par les termes $\kappa\lambda(s)$. Ainsi, l'équation en pression (2.4b) est discrétisée par

$$\begin{aligned}
 &F_{i+1/2,j}^\theta - F_{i-1/2,j}^\theta + F_{i,j+1/2}^\theta - F_{i,j-1/2}^\theta \\
 &+ F_{i+1/2,j+1/2}^{\nearrow\theta} - F_{i-1/2,j-1/2}^{\nearrow\theta} + F_{i-1/2,j+1/2}^{\nwarrow\theta} - F_{i+1/2,j-1/2}^{\nwarrow\theta} = \Delta x \Delta y q_{i,j}^{n+1}, \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

avec les flux directs

$$F_{i+1/2,j}^\theta = \kappa\lambda_{i+1/2,j}^n \left\{ \frac{\Delta y}{\Delta x} - 2\theta \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) \right\} (p_{i,j}^{n+1} - p_{i+1,j}^{n+1}), \quad (3.6a)$$

$$F_{i,j+1/2}^\theta = \kappa\lambda_{i,j+1/2}^n \left\{ \frac{\Delta x}{\Delta y} - 2\theta \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) \right\} (p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j+1}^{n+1}) \quad (3.6b)$$

et les flux diagonaux

$$F_{i+1/2,j+1/2}^{\nearrow\theta} = \kappa\lambda_{i+1/2,j+1/2}^n \left\{ \theta \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) \right\} (p_{i,j}^{n+1} - p_{i+1,j+1}^{n+1}), \quad (3.6c)$$

$$F_{i-1/2,j+1/2}^{\nwarrow\theta} = \kappa\lambda_{i-1/2,j+1/2}^n \left\{ \theta \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) \right\} (p_{i,j}^{n+1} - p_{i-1,j+1}^{n+1}). \quad (3.6d)$$

La mobilité par interface est calculée comme pour le schéma 5P, soit par moyenne harmonique (2.52), soit par décentrage simple amont (2.53) entre les mailles voisines de l'interface.

Ces définitions sont valables pour les arêtes intérieures. Lors d'un calcul sur le bord du domaine, les flux diagonaux ne sont pas pris en compte. Les coefficients de combinaison linéaire en sont alors impactés. Les flux horizontaux sur le bord gauche correspondent à ceux du schéma 5P (équation (2.54)) et les flux verticaux en sont modifiés de la manière suivante :

$$F_{1,j-1/2}^\theta = \kappa\lambda_{1,j-1/2}^n \left\{ \frac{\Delta x}{\Delta y} - \theta \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) \right\} (p_{1,j-1}^{n+1} - p_{1,j}^{n+1}), \quad (3.7a)$$

$$F_{1,j+1/2}^\theta = \kappa\lambda_{1,j+1/2}^n \left\{ \frac{\Delta x}{\Delta y} - \theta \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) \right\} (p_{1,j}^{n+1} - p_{1,j+1}^{n+1}). \quad (3.7b)$$

Il en va de même pour les flux horizontaux sur le bord droit $F_{N_x+1/2,j}^\theta$ ainsi que les flux $F_{N_x,j-1/2}^\theta$ et $F_{N_x,j+1/2}^\theta$. Les flux verticaux sur le bord inférieur se calculent comme en (2.55)

et les flux horizontaux $F_{i-1/2,1}^\theta$ et $F_{i+1/2,1}^\theta$ sont donnés par

$$F_{i-1/2,1}^\theta = \kappa \lambda_{i-1/2,1}^n \left\{ \frac{\Delta y}{\Delta x} - \theta \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) \right\} (p_{i,1}^{n+1} - p_{i+1,1}^{n+1}), \quad (3.8a)$$

$$F_{i+1/2,1}^\theta = \kappa \lambda_{i+1/2,1}^n \left\{ \frac{\Delta y}{\Delta x} - \theta \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) \right\} (p_{i,1}^{n+1} - p_{i+1,1}^{n+1}). \quad (3.8b)$$

Les flux au bord supérieur $F_{i,N_y+1/2}^\theta$ ainsi que les flux $F_{i-1/2,N_y}^\theta$ et $F_{i+1/2,N_y}^\theta$ s'écrivent de manière analogue.

Les bilans discrets (3.5) avec les flux (3.6), (2.54), (3.7), (2.55), (3.8) assemblés sur tout le domaine forment un système linéaire de la forme

$$\mathbf{A}^n \mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{b}^{n+1},$$

où \mathbf{A}^n désigne une matrice $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ symétrique, définie positive tant que $|\Gamma_D| > 0$, \mathbf{p}^{n+1} est un vecteur de taille \mathcal{N} contenant les pressions des mailles à déterminer et \mathbf{b}^{n+1} est un vecteur regroupant les conditions aux limites ainsi que les termes sources.

REMARQUE 3.3. La matrice \mathbf{A}^n de ce système est moins creuse que celle apparaissant dans (2.56) du fait des contributions des mailles diagonales. La résolution de ce système peut alors être plus coûteuse en temps et en mémoire. \square

Résolution de l'équation en saturation

Une fois les pressions déterminées, les flux F^θ apparaissant dans (3.5) peuvent être calculés afin de les réutiliser dans l'étape suivante.

L'équation en saturation (2.4c) est discrétisée de manière similaire à l'équation en pression en faisant intervenir huit flux tels que

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \phi \frac{s_{i,j}^{n+1} - s_{i,j}^n}{\Delta t^n} &+ (f(s)F^\theta)_{i+1/2,j} - (f(s)F^\theta)_{i-1/2,j} \\ &+ (f(s)F^\theta)_{i,j+1/2} - (f(s)F^\theta)_{i,j-1/2} \\ &+ (f(s)F^{\nearrow\theta})_{i+1/2,j+1/2} - (f(s)F^{\nearrow\theta})_{i-1/2,j-1/2} \\ &+ (f(s)F^{\nwarrow\theta})_{i-1/2,j+1/2} - (f(s)F^{\nwarrow\theta})_{i+1/2,j-1/2} = \Delta x \Delta y q_{w;i,j}^{n+1}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

avec

$$(f(s)F^\theta)_{i+1/2,j} = f(s_{i,j}^n) [F_{i+1/2,j}^\theta]^+ + f(s_{i+1,j}^n) [F_{i+1/2,j}^\theta]^-, \quad (3.10a)$$

$$(f(s)F^\theta)_{i,j+1/2} = f(s_{i,j}^n) [F_{i,j+1/2}^\theta]^+ + f(s_{i,j+1}^n) [F_{i,j+1/2}^\theta]^-, \quad (3.10b)$$

$$(f(s)F^{\nearrow\theta})_{i+1/2,j+1/2} = f(s_{i,j}^n) [F_{i+1/2,j+1/2}^{\nearrow\theta}]^+ + f(s_{i+1,j+1}^n) [F_{i+1/2,j+1/2}^{\nearrow\theta}]^-, \quad (3.10c)$$

$$(f(s)F^{\nwarrow\theta})_{i-1/2,j+1/2} = f(s_{i,j}^n) [F_{i-1/2,j+1/2}^{\nwarrow\theta}]^+ + f(s_{i-1,j+1}^n) [F_{i-1/2,j+1/2}^{\nwarrow\theta}]^-, \quad (3.10d)$$

où

$$[F]^+ = \max(0, F), \quad [F]^- = \min(0, F)$$

désignent les parties positive et négative d'un nombre réel $F \in \mathbb{R}$.

Comme les flux de bords dérivent du schéma 5P, il en va de même pour leur prise en compte dans l'équation en saturation. Les formules de condition d'entrée de l'eau (2.60) sont réutilisées.

Étant explicite, la discrétisation de l'équation en saturation nécessite le calcul d'une condition CFL [32] de sorte que le pas de temps Δt^n ne soit pas pris trop grand et alors garantir la stabilité du schéma.

La quantité $\rangle\sigma F\langle_{i,j}$ donnée en (2.62), est adaptée ici pour le schéma 9P1s. En reprenant les définitions (2.61), celle-ci est écrite en chaque maille $\mathcal{M}_{i,j}$ par

$$\begin{aligned} \rangle\sigma F\langle_{i,j} &= \sigma_{i-1/2,j}[F_{i-1/2,j}^\theta]^+ - \sigma_{i+1/2,j}[F_{i+1/2,j}^\theta]^- \\ &\quad + \sigma_{i,j-1/2}[F_{i,j-1/2}^\theta]^+ - \sigma_{i,j+1/2}[F_{i,j+1/2}^\theta]^- \\ &\quad + \sigma_{i-1/2,j-1/2}[F_{i-1/2,j-1/2}^{\nearrow\theta}]^+ - \sigma_{i+1/2,j+1/2}[F_{i+1/2,j+1/2}^{\nearrow\theta}]^- \\ &\quad + \sigma_{i+1/2,j-1/2}[F_{i+1/2,j-1/2}^{\nwarrow\theta}]^+ - \sigma_{i-1/2,j+1/2}[F_{i-1/2,j+1/2}^{\nwarrow\theta}]^-. \end{aligned}$$

Cette quantité est positive et correspond aux flux entrants dans la maille $\mathcal{M}_{i,j}$.

Proposition 3.2. *Sous la condition*

$$\frac{\Delta t^n}{\phi \Delta x \Delta y} \max_{\substack{1 \leq i \leq N_x \\ 1 \leq j \leq N_y}} \rangle\sigma F\langle_{i,j} \leq 1 \quad (3.11)$$

et en l'absence de termes sources ($q^{n+1} = q_w^{n+1} = 0$), le schéma (3.9), (2.60) satisfait le principe du maximum, c'est-à-dire que $s_{i,j}^{n+1}$ est une combinaison convexe de $s_{i,j}^n$ et des saturations des huit mailles voisines au temps n .

DÉMONSTRATION. La preuve est semblable à celle fournie pour le schéma 5P. \square

Les termes sources de type (2.8) sont discrétisés de façon identique au schéma 5P en utilisant (2.68).

3.2 Analyse de l'erreur en pression

Dans cette section, la méthodologie pour ajuster θ de manière « optimale » est introduite en se focalisant exclusivement sur l'équation $-\Delta p^{n+1} = q^{n+1}$, à l'instar de Shubin et Bell [87] et de Ding [36]. Cela est certes critiquable, mais permet de présenter la démarche dans un cadre simple et de comparer le résultat avec les valeurs « classiques » pour θ . La vraie valeur optimale de θ sera établie en §3.3, lorsqu'on transposera les calculs à l'équation en saturation.

L'argument classique en faveur de la valeur $\theta = 1/12$ en maillage carré [36, 98] repose sur l'observation suivante.

Théorème 3.1. *Si p est une fonction régulière en \mathbf{x} , alors pour Δx et Δy suffisamment petits, il vient*

$$\begin{aligned} (-\Delta_h^\theta p)_{i,j}^{n+1} &= (-\Delta p)(\mathbf{x}_{i,j}) - \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 p}{\partial x^4}(\mathbf{x}_{i,j}) - \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 p}{\partial y^4}(\mathbf{x}_{i,j}) - \theta(\Delta x^2 + \Delta y^2) \frac{\partial^4 p}{\partial x^2 \partial y^2}(\mathbf{x}_{i,j}) \\ &\quad + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta y^4). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'effectuer les développements limités au point $\mathbf{x}_{i,j}$ sur l'équation (3.1). \square

Dans le cas particulier où $\Delta x = \Delta y = h$, le résultat du Théorème 3.1 devient

$$(-\Delta_h^\theta p)_{i,j}^{n+1} = (-\Delta p)(\mathbf{x}_{i,j}) - \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 p}{\partial x^4}(\mathbf{x}_{i,j}) + \frac{\partial^4 p}{\partial y^4}(\mathbf{x}_{i,j}) + 24\theta \frac{\partial^4 p}{\partial x^2 \partial y^2}(\mathbf{x}_{i,j}) \right) + \mathcal{O}(h^4).$$

En choisissant $\theta = 1/12$, on peut faire coïncider le facteur de $h^2/12$ avec un bilaplacien, c'est-à-dire

$$(-\Delta_h^\theta p)_{i,j}^{n+1} = (-\Delta p)(\mathbf{x}_{i,j}) - \frac{h^2}{12} \Delta \Delta p(\mathbf{x}_{i,j}) + \mathcal{O}(h^4).$$

Si la pression p est à symétrie radiale, i.e. $p = p(r)$, Δp l'est aussi et $\Delta \Delta p$ le sera également. L'erreur commise entre $(-\Delta_h^\theta p)_{i,j}^{n+1}$ et $(-\Delta p)(\mathbf{x}_{i,j})$ sera alors radiale et l'effet d'orientation de maillage sera réduit avec un comportement isotrope de cette erreur.

Notre objectif est de montrer qu'en maillage rectangulaire ($\Delta x \neq \Delta y$), la valeur $\theta = 1/12$ reste la « meilleure » possible en un sens que nous allons préciser.

3.2.1 Distribution angulaire

À chaque direction dans le plan, nous allons associer une quantité mesurant l'erreur du schéma le long de cette direction. Pour cela, nous faisons appel à l'analyse de Fourier [95]. Les pressions sur le maillage sont écrites sous la forme

$$p_{i,j} = e^{I(ik\Delta x + j\ell\Delta y)}, \quad (3.12)$$

où I représente le nombre imaginaire tel que $I^2 = -1$ et $\mathbf{k} = {}^t(k, \ell) \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur d'ondes. L'idée est d'envoyer cette onde plane sur le laplacien et sur sa discrétisation de sorte à obtenir les relations suivantes

$$(-\Delta p)_{i,j} = \mathcal{F}[-\Delta](\mathbf{k}) p_{i,j} \quad \text{et} \quad (-\Delta_h^\theta p)_{i,j} = \mathcal{F}[-\Delta_h^\theta](\mathbf{k}) p_{i,j}.$$

Les quantités $\mathcal{F}[-\Delta](\mathbf{k})$ et $\mathcal{F}[-\Delta_h^\theta](\mathbf{k})$ ne dépendent pas de (i, j) et sont nommées respectivement *symbole exact* et *symbole approché* du laplacien. L'erreur entre ces deux symboles est définie par

$$\mathcal{E}_{\Delta x, \Delta y}^\theta(\mathbf{k}) = \mathcal{F}[-\Delta](\mathbf{k}) - \mathcal{F}[-\Delta_h^\theta](\mathbf{k}).$$

Cette erreur va être calculée en deux temps.

Lemme 3.1. *Pour Δx et Δy suffisamment petits, l'erreur du schéma 9P1s sur le laplacien est*

$$\mathcal{E}_{\Delta x, \Delta y}^\theta(\mathbf{k}) = - \left[\frac{1}{12} \Delta x^2 k^4 + \frac{1}{12} \Delta y^2 \ell^4 + \theta(\Delta x^2 + \Delta y^2) \ell^2 k^2 \right] + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta y^4). \quad (3.13)$$

DÉMONSTRATION. Le symbole exact du laplacien est

$$\mathcal{F}[-\Delta](\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|^2 = k^2 + \ell^2. \quad (3.14)$$

En remplaçant chaque terme $p_{i\pm 1, j\pm 1}$ par sa transformée inverse de Fourier via (3.12), la nouvelle expression de la discrétisation du laplacien en 2-D $(-\Delta_h^\theta)_{i,j}$, décrite avec la formule (3.1) est

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[-\Delta_h^\theta](\mathbf{k}) &= \left(\frac{-e^{-Ik\Delta x} + 2 - e^{Ik\Delta x}}{\Delta x^2} e^{I\ell\Delta y} + \frac{-e^{I\ell\Delta y} + 2 - e^{-I\ell\Delta y}}{\Delta y^2} e^{-Ik\Delta x} \right) \times \theta \\ &+ \left(\frac{-e^{-Ik\Delta x} + 2 - e^{Ik\Delta x}}{\Delta x^2} + \frac{-e^{I\ell\Delta y} + 2 - e^{-I\ell\Delta y}}{\Delta y^2} \right) \times (1 - 2\theta) \\ &+ \left(\frac{-e^{-Ik\Delta x} + 2 - e^{Ik\Delta x}}{\Delta x^2} e^{-I\ell\Delta y} + \frac{-e^{I\ell\Delta y} + 2 - e^{-I\ell\Delta y}}{\Delta y^2} e^{Ik\Delta x} \right) \times \theta. \end{aligned}$$

Sachant que

$$-e^{-Ik\Delta x} + 2 - e^{Ik\Delta x} = 4 \sin^2 \left(\frac{k\Delta x}{2} \right), \quad (3.15a)$$

$$-e^{-I\ell\Delta y} + 2 - e^{I\ell\Delta y} = 4 \sin^2 \left(\frac{\ell\Delta y}{2} \right), \quad (3.15b)$$

le symbole approché du laplacien s'écrit alors

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[-\Delta_h^\theta](\mathbf{k}) &= \left(4 \sin^2 \left(\frac{k\Delta x}{2} \right) \frac{e^{I\ell\Delta y}}{\Delta x^2} + 4 \sin^2 \left(\frac{\ell\Delta y}{2} \right) \frac{e^{-Ik\Delta x}}{\Delta y^2} \right) \times \theta \\ &+ \left(4 \sin^2 \left(\frac{k\Delta x}{2} \right) \frac{1}{\Delta x^2} + 4 \sin^2 \left(\frac{\ell\Delta y}{2} \right) \frac{1}{\Delta y^2} \right) \times (1 - 2\theta) \\ &+ \left(4 \sin^2 \left(\frac{k\Delta x}{2} \right) \frac{e^{-I\ell\Delta y}}{\Delta x^2} + 4 \sin^2 \left(\frac{\ell\Delta y}{2} \right) \frac{e^{Ik\Delta x}}{\Delta y^2} \right) \times \theta. \end{aligned}$$

En rassemblant les termes en Δx et ceux en Δy , le résultat suivant est obtenu

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[-\Delta_h^\theta](\mathbf{k}) &= 4 \sin^2 \left(\frac{k\Delta x}{2} \right) \frac{\theta e^{I\ell\Delta y} + (1 - 2\theta) + \theta e^{-I\ell\Delta y}}{\Delta x^2} \\ &+ 4 \sin^2 \left(\frac{\ell\Delta y}{2} \right) \frac{\theta e^{Ik\Delta x} + (1 - 2\theta) + \theta e^{-Ik\Delta x}}{\Delta y^2}. \end{aligned}$$

En utilisant (3.15), l'expression se réduit à

$$\mathcal{F}[-\Delta_h^\theta](\mathbf{k}) = 4 \sin^2 \left(\frac{k\Delta x}{2} \right) \frac{1 - 4\theta \sin^2 \left(\frac{\ell\Delta y}{2} \right)}{\Delta x^2} + 4 \sin^2 \left(\frac{\ell\Delta y}{2} \right) \frac{1 - 4\theta \sin^2 \left(\frac{k\Delta x}{2} \right)}{\Delta y^2}.$$

Sous les hypothèses $|k|\Delta x \ll 1$ et $|\ell\Delta y| \ll 1$, le développement limité du \sin^2

$$\frac{\sin^2 X}{X^2} = 1 - \frac{X^2}{3} + \mathcal{O}(X^4) \quad (3.16)$$

amène à

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[-\Delta_h^\theta](\mathbf{k}) &= \frac{4}{\Delta x^2} \left[\left(\frac{k\Delta x}{2} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{k\Delta x}{2} \right)^4 \right] \left[1 - 4\theta \left(\frac{\ell\Delta y}{2} \right)^2 \right] \\ &+ \frac{4}{\Delta y^2} \left[\left(\frac{\ell\Delta y}{2} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\ell\Delta y}{2} \right)^4 \right] \left[1 - 4\theta \left(\frac{k\Delta x}{2} \right)^2 \right] + \mathcal{O}(\Delta x^6, \Delta y^6) \\ &= \frac{4}{\Delta x^2} \left(\frac{k\Delta x}{2} \right)^2 + \frac{4}{\Delta y^2} \left(\frac{\ell\Delta y}{2} \right)^2 + \frac{4}{\Delta x^2} \left[-\frac{1}{3} \left(\frac{k\Delta x}{2} \right)^4 - 4\theta \left(\frac{k\Delta x}{2} \right)^2 \left(\frac{\ell\Delta y}{2} \right)^2 \right] \\ &+ \frac{4}{\Delta y^2} \left[-\frac{1}{3} \left(\frac{\ell\Delta y}{2} \right)^4 - 4\theta \left(\frac{k\Delta x}{2} \right)^2 \left(\frac{\ell\Delta y}{2} \right)^2 \right] + \mathcal{O}(\Delta x^6, \Delta y^6). \end{aligned}$$

Finalement, le symbole approché du laplacien en 2-D est

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[-\Delta_h^\theta](\mathbf{k}) &= k^2 + \ell^2 - \left[\frac{1}{12} \Delta x^2 k^4 + \frac{1}{12} \Delta y^2 \ell^4 + \theta (\Delta x^2 + \Delta y^2) \ell^2 k^2 \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta y^4). \end{aligned} \quad (3.17)$$

L'erreur voulue correspond alors à la différence entre (3.14) et (3.17). \square

REMARQUE 3.4. Il est à noter que l'erreur $\mathcal{E}_{\Delta x, \Delta y}^\theta$ ne dépend pas seulement du pas de maillage Δx et Δy et du paramètre θ mais également du vecteur d'onde \mathbf{k} . \square

Afin de mettre en évidence l'influence de l'angle formé par le vecteur d'onde $\mathbf{k} = {}^t(k, \ell)$ avec les axes, on introduit les coordonnées polaires. Le vecteur d'onde s'écrit

$$\begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} = |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

De plus, on pose

$$S = \sin^2 \varphi. \quad (3.19)$$

Théorème 3.2. *Pour Δx et Δy suffisamment petits, l'erreur sur le laplacien du schéma 9P1s s'écrit*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\Delta x, \Delta y}^\theta(\mathbf{k}) &= -|\mathbf{k}|^4 \left[S^2 \left\{ \frac{1}{12} - \theta \right\} (\Delta x^2 + \Delta y^2) \right. \\ &\quad \left. + S \left\{ -\frac{1}{6} \Delta x^2 + \theta (\Delta x^2 + \Delta y^2) \right\} + \frac{\Delta x^2}{12} \right] + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta y^4). \end{aligned} \quad (3.20)$$

DÉMONSTRATION. En utilisant le changement de variables (3.18), l'erreur (3.13) devient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\Delta x, \Delta y}^\theta(\mathbf{k}) &= -|\mathbf{k}|^4 \left[\frac{1}{12} \{ \Delta x^2 \cos^4 \varphi + \Delta y^2 \sin^4 \varphi \} + \theta (\Delta x^2 + \Delta y^2) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta y^4). \end{aligned}$$

Comme $S = \sin^2 \varphi$, il vient $1 - S = \cos^2 \varphi$. En reportant dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\Delta x, \Delta y}^\theta(\mathbf{k}) &= -|\mathbf{k}|^4 \left[\frac{1}{12} \{ \Delta x^2 (1 - S)^2 + \Delta y^2 S^2 \} + \theta (\Delta x^2 + \Delta y^2) (1 - S) S \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta y^4). \end{aligned}$$

Finalement, en développant $(1 - S)^2$ et en réarrangeant selon les puissances de S , le résultat annoncé est obtenu. \square

Dans le Lemme 3.2, la quantité $\mathcal{E}_{\Delta x, \Delta y}^\theta(\mathbf{k})$ est, à une erreur d'onde 4 près, le produit de $|\mathbf{k}|^4$ et d'un facteur ne dépendant que de $S = \sin^2 \varphi$. Cela amène à définir ce dernier comme l'erreur angulaire du schéma.

Définition 3.1. *La quantité*

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_{\Delta x, \Delta y}^{\theta}(S) &= S^2 \left\{ \left(\frac{1}{12} - \theta \right) (\Delta x^2 + \Delta y^2) \right\} \\ &+ S \left\{ -\frac{1}{6} \Delta x^2 + \theta (\Delta x^2 + \Delta y^2) \right\} + \frac{\Delta x^2}{12} \end{aligned} \quad (3.21)$$

est appelée erreur angulaire en pression du schéma 9P1s.

On remarque que, pour tout $\theta \in [0, 1/2]$,

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\Delta x, \Delta y}^{\theta}(S=0) = \frac{\Delta x^2}{12}, \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{E}}_{\Delta x, \Delta y}^{\theta}(S=1) = \frac{\Delta y^2}{12}.$$

Autrement dit, l'erreur angulaire dans les directions $S=0$ et $S=1$ ne peut pas être modifiée par le paramètre θ . En revanche, ce dernier peut modifier l'erreur $\tilde{\mathcal{E}}_{\Delta x, \Delta y}^{\theta}(S)$ pour $S \notin \{0, 1\}$ afin que la fonction $\tilde{\mathcal{E}}_{\Delta x, \Delta y}^{\theta}(\cdot)$ s'approche au mieux d'une autre, considérée comme référence.

3.2.2 Minimisation de l'anisotropie

Pour définir cette référence idéale, on se pose la question suivante : parmi toutes les fonctions $\tilde{\mathcal{E}} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulières et vérifiant les conditions

$$\tilde{\mathcal{E}}(0) = \frac{\Delta x^2}{12}, \quad \tilde{\mathcal{E}}(1) = \frac{\Delta y^2}{12}, \quad (3.22)$$

laquelle est la « moins anisotrope » possible ? Intuitivement, on voudrait sélectionner celle qui « varie le moins possible » par rapport à S . La notion retenue ici pour cela est la suivante.

Définition 3.2. *Parmi toutes les fonctions $\tilde{\mathcal{E}} \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R})$ vérifiant (3.22), celle qui réalise*

$$\min_{\tilde{\mathcal{E}}} \int_0^1 |\tilde{\mathcal{E}}'(S)|^2 dS$$

est appelée erreur angulaire la moins anisotrope.

La fonctionnelle $\tilde{\mathcal{E}} \mapsto \int_0^1 |\tilde{\mathcal{E}}'(S)|^2 dS$ pénalise en effet les variations de $\tilde{\mathcal{E}}$ par rapport à S . La Définition 3.2 est, bien entendu, un choix parmi d'autres, mais a le mérite de faciliter le calcul de la solution du problème de minimisation.

Lemme 3.2. *La solution du problème*

$$\min_{\tilde{\mathcal{E}} \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R})} \int_0^1 |\tilde{\mathcal{E}}'(S)|^2 dS$$

sous les contraintes (3.22) est donnée par la fonction affine

$$\tilde{\mathcal{E}}^*(S) = \frac{1}{12} [(\Delta y^2 - \Delta x^2)S + \Delta x^2].$$

DÉMONSTRATION. La condition d'Euler-Lagrange [13] assurant l'optimalité de $\tilde{\mathcal{E}}^*$ s'écrit

$$-2\tilde{\mathcal{E}}'' = 0.$$

Cela implique que $\tilde{\mathcal{E}}$ est affine en S . En tenant compte des conditions (3.22), le résultat annoncé est obtenu. \square

Le but de l'étude est maintenant de choisir le paramètre θ de sorte que la distribution angulaire $\tilde{\mathcal{E}}_{\Delta x, \Delta y}^\theta$ soit la plus proche de la référence la moins anisotrope $\tilde{\mathcal{E}}^*$. Il est proposé par conséquent de prendre

$$\begin{aligned} \theta^* &= \arg \min_{\theta} \|\tilde{\mathcal{E}}_{\Delta x, \Delta y}^\theta - \tilde{\mathcal{E}}^*\|_{L^2([0,1])} \\ &= \arg \min_{\theta} \int_0^1 |\tilde{\mathcal{E}}_{\Delta x, \Delta y}^\theta(S) - \tilde{\mathcal{E}}^*(S)|^2 dS. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Théorème 3.3. *La valeur optimale définie par (3.23) est donnée par*

$$\theta^* = \frac{1}{12}.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que pour $\theta = \theta^*$, le coefficient du terme quadratique en S^2 s'annule et

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\Delta x, \Delta y}^{\theta^*}(S) = \tilde{\mathcal{E}}^*(S)$$

pour tout $S \in [0, 1]$. Cela entraîne

$$\int_0^1 |\tilde{\mathcal{E}}_{\Delta x, \Delta y}^{\theta^*}(S) - \tilde{\mathcal{E}}^*(S)|^2 dS = 0,$$

d'où la minimalité de θ^* . Par ailleurs, il est facile de vérifier que la fonction

$$\theta \mapsto \int_0^1 |\tilde{\mathcal{E}}_{\Delta x, \Delta y}^\theta(S) - \tilde{\mathcal{E}}^*(S)|^2 dS$$

est quadratique et strictement convexe en θ , d'où l'unicité du minimum. \square

Nous avons ainsi apporté une justification théorique au choix $\theta = 1/12$ en tant que paramètre « optimal » vis-à-vis de l'anisotropie de l'équation $-\Delta p^{n+1} = q^{n+1}$. Sur la figure 3.2 sont tracées quelques distributions angulaires $S \mapsto \tilde{\mathcal{E}}_{\Delta x, \Delta y}^\theta(S)$ pour différentes valeurs de θ . Pour un maillage carré ($\Delta x = \Delta y = h$), la distribution optimale $\tilde{\mathcal{E}}_{h,h}^{\theta^*}$ est une droite horizontale, ce qui correspond à un comportement parfaitement isotrope. Pour un maillage rectangulaire ($\Delta x \neq \Delta y$), la distribution angulaire optimale $\tilde{\mathcal{E}}_{\Delta x, \Delta y}^{\theta^*}$ demeure une droite qui est maintenant inclinée. De plus, les courbes correspondant au schéma 5P ($\theta = 0$), en rouge, sont bien éloignées des courbes optimales ($\theta = \theta^*$) en vert.

3.3 Analyse de l'erreur en saturation

Comme cela a déjà été mentionné, l'erreur pertinente à étudier est celle sur l'équation en saturation, car c'est la quantité que les ingénieurs visualisent et pour laquelle ils souhaitent corriger l'effet d'orientation. À notre connaissance, seuls Eymard et al. [43] s'y sont intéressés et ont proposé une telle analyse en maillage carré. Nous allons effectuer sur la saturation une analyse d'erreur semblable à celle déjà vue sur l'équation $-\Delta p^{n+1} = q^{n+1}$.

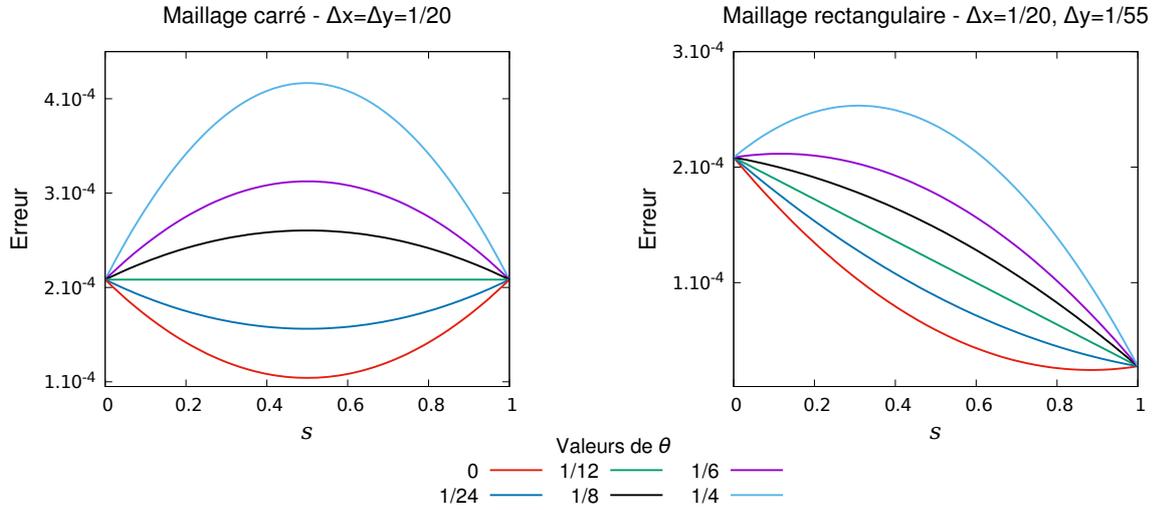


FIGURE 3.2 – Erreur angulaire (3.21) selon différentes valeurs de θ - Mailles carrées (à gauche) et rectangulaires (à droite).

3.3.1 Distribution angulaire

L'analyse qui suit porte sur l'équation en saturation avec un flux fractionnaire linéaire $f(s) = s$ et avec une vitesse notée $\mathbf{u} = {}^t(a, b)$, où a et b sont positifs. De plus, des propriétés physiques sont considérées telles que $\phi = 1$ et $\kappa\lambda = 1$. Ces hypothèses permettent d'appliquer la méthode de Fourier à l'équation en saturation discrétisée par le schéma 9P1s. Grâce aux hypothèses et sans termes sources, l'équation semi-discrète en saturation (2.4c) s'écrit

$$\partial_t s_{i,j} + ((\mathbf{u} \cdot \nabla s)_h^\theta)_{i,j} = 0.$$

De manière analogue à la partie précédente, les saturations sur le maillage sont écrites sous la forme

$$s_{i,j} = e^{I(ik\Delta x + j\ell\Delta y)}, \quad (3.24)$$

où $\mathbf{k} = {}^t(k, \ell)$ est le vecteur d'onde de sorte à pouvoir s'intéresser aux relations suivantes

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla s)_{i,j} = \mathcal{F}[\mathbf{u} \cdot \nabla](\mathbf{k}) s_{i,j} \quad \text{et} \quad ((\mathbf{u} \cdot \nabla s)_h^\theta)_{i,j} = \mathcal{F}[(\mathbf{u} \cdot \nabla)_h^\theta](\mathbf{k}) s_{i,j}.$$

L'étude va alors porter sur l'erreur définie par la différence entre le symbole approché et le symbole exact de l'opérateur spatial

$$\mathcal{E}^\theta(\mathbf{k}, \mathbf{u}) = \mathcal{F}[(\mathbf{u} \cdot \nabla)_h^\theta](\mathbf{k}) - \mathcal{F}[\mathbf{u} \cdot \nabla](\mathbf{k}).$$

Soient les changements de variables suivants

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = |\mathbf{u}| \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} = |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

où la différence entre les deux angles sera notée $\Omega = \varphi - \gamma$ et avec la quantité

$$\gamma^* = \arctan \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

désignant un angle limite.

Théorème 3.4. *Pour Δx et Δy suffisamment petits, l'erreur d'approximation de l'équation en saturation par le schéma 9P1s est*

$$\mathcal{E}^\theta(\mathbf{k}, \mathbf{u}) = |\mathbf{k}|^2 |\mathbf{u}| \begin{pmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}^\theta(\gamma) & \tilde{B}^\theta(\gamma) \\ \tilde{B}^\theta(\gamma) & \tilde{C}^\theta(\gamma) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (3.26)$$

avec si $\gamma \leq \gamma^*$,

$$\tilde{A}^\theta(\gamma) = \frac{\Delta x}{2} \cos^3 \gamma + 3\Delta y \theta \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) \cos \gamma \sin^2 \gamma + \frac{\Delta y}{2} \left\{ 1 - 2\theta \left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \right) \right\} \sin^3 \gamma, \quad (3.27a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}^\theta(\gamma) &= \left\{ 2\Delta y \theta \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) - \frac{\Delta x}{2} \right\} \cos^2 \gamma \sin \gamma \\ &\quad + \frac{\Delta y}{2} \left\{ 1 - 2\theta \left(\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + 1 \right) \right\} \cos \gamma \sin^2 \gamma - \Delta y \theta \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) \sin^3 \gamma, \end{aligned} \quad (3.27b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}^\theta(\gamma) &= \left\{ \frac{\Delta x}{2} - 2\Delta y \theta \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) \right\} \cos \gamma \sin^2 \gamma \\ &\quad + \frac{\Delta y}{2} \left\{ 1 - 2\theta \left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \right) \right\} \cos^2 \gamma \sin \gamma + \Delta y \theta \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) \cos^3 \gamma \end{aligned} \quad (3.27c)$$

et si $\gamma \geq \gamma^*$,

$$\tilde{A}^\theta(\gamma) = \frac{\Delta x}{2} \left\{ 1 - 2\theta \left(1 + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \right) \right\} \cos^3 \gamma + 3\Delta x \theta \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \cos^2 \gamma \sin \gamma + \frac{\Delta y}{2} \sin^3 \gamma, \quad (3.27d)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}^\theta(\gamma) &= \Delta x \theta \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \cos^3 \gamma - \frac{\Delta x}{2} \left\{ 1 - 2\theta \left(1 + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \right) \right\} \cos^2 \gamma \sin \gamma \\ &\quad + \left\{ \frac{\Delta y}{2} - 2\Delta x \theta \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \right\} \cos \gamma \sin^2 \gamma, \end{aligned} \quad (3.27e)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}^\theta(\gamma) &= \left\{ \frac{\Delta y}{2} - 2\Delta x \theta \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \right\} \cos^2 \gamma \sin \gamma \\ &\quad + \frac{\Delta x}{2} \left\{ 1 - 2\theta \left(1 + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \right) \right\} \cos \gamma \sin^2 \gamma + \Delta x \theta \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \sin^3 \gamma. \end{aligned} \quad (3.27f)$$

DÉMONSTRATION. Le symbole exact s'écrit

$$\mathcal{F}[\mathbf{u} \cdot \nabla](\mathbf{k}) = I\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = I(ak + b\ell). \quad (3.28)$$

Un premier cas est d'abord étudié : celui tel que $a\Delta x - b\Delta y \geq 0$, ou de manière équivalente $\gamma \leq \gamma^*$. Cette condition est nécessaire afin de pouvoir déterminer précisément les décentresments des saturations dans l'équation en saturation (3.9) discrétisée par le schéma 9P1s. En s'aidant des transformées inverses de Fourier (3.24), la partie spatiale de l'équation discrétisée devient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[(\mathbf{u} \cdot \nabla)_h^\theta](\mathbf{k}) &= \left\{ (1 - 2\theta) \frac{\Delta y}{\Delta x} - 2\theta \frac{\Delta x}{\Delta y} \right\} \frac{a\Delta x}{\Delta x \Delta y} (1 - e^{-Ik\Delta x}) \\ &+ \left\{ (1 - 2\theta) \frac{\Delta x}{\Delta y} - 2\theta \frac{\Delta y}{\Delta x} \right\} \frac{b\Delta y}{\Delta x \Delta y} (1 - e^{-I\ell\Delta y}) \\ &+ \theta \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \frac{a\Delta x + b\Delta y}{\Delta x \Delta y} (1 - e^{I(-k\Delta x - \ell\Delta y)}) \\ &+ \theta \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \frac{a\Delta x - b\Delta y}{\Delta x \Delta y} (1 - e^{I(-k\Delta x + \ell\Delta y)}). \end{aligned}$$

Sous les hypothèses $|k|\Delta x \ll 1$ et $|\ell|\Delta y \ll 1$, les développements limités de l'exponentielle permettent la poursuite des calculs du symbole approché

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[(\mathbf{u} \cdot \nabla)_h^\theta](\mathbf{k}) &= I(ka + \ell b) + \frac{k^2\Delta x}{2}a + k\ell\Delta y 2b\theta \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \\ &+ \frac{\ell^2\Delta y}{2} \left[b \left\{ 1 - 2\theta \left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \right) \right\} + 2a\theta \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \right] + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Ainsi, l'erreur entre les deux symboles (3.29) et (3.28) est

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\theta(\mathbf{k}, \mathbf{u}) &= \frac{k^2\Delta x}{2}a + k\ell\Delta y 2b\theta \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \\ &+ \frac{\ell^2\Delta y}{2} \left[b \left\{ 1 - 2\theta \left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \right) \right\} + 2a\theta \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \right] + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2). \end{aligned}$$

En utilisant les changements de variables (3.25), cette erreur se réécrit sous la forme matricielle suivante

$$\mathcal{E}^\theta(\mathbf{k}, \mathbf{u}) = |\mathbf{k}|^2 |\mathbf{u}| \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A^\theta(\gamma) & B^\theta(\gamma) \\ B^\theta(\gamma) & C^\theta(\gamma) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (3.30)$$

avec

$$A^\theta(\gamma) = \frac{\Delta x}{2} \cos \gamma, \quad (3.31a)$$

$$B^\theta(\gamma) = \Delta y \theta \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \sin \gamma, \quad (3.31b)$$

$$C^\theta(\gamma) = \frac{\Delta y}{2} \left\{ \left[1 - 2\theta \left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \right) \right] \sin \gamma + 2\theta \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \cos \gamma \right\}. \quad (3.31c)$$

Comme $\varphi = \Omega + \gamma$, les formules de passage d'un angle à l'autre sont utilisées

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le résultat (3.26) est retrouvé en utilisant (3.30) et ces formules de passage afin de faire apparaître

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^\theta(\gamma) & \tilde{B}^\theta(\gamma) \\ \tilde{B}^\theta(\gamma) & \tilde{C}^\theta(\gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^\theta(\gamma) & B^\theta(\gamma) \\ B^\theta(\gamma) & C^\theta(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}.$$

Pour le cas $a\Delta x - b\Delta y \leq 0$, c'est-à-dire $\gamma \geq \gamma^*$, la démonstration est similaire, seul un décentrage de saturation change. \square

REMARQUE 3.5. Ces trois erreurs ont une signification : \tilde{A}^θ , appelée *erreur longitudinale*, donne le comportement radial de la matrice de diffusion (cela correspond au cas où \mathbf{u} est orienté dans la même direction que \mathbf{k}), \tilde{C}^θ correspond au comportement *transverse* (le vecteur \mathbf{u} et le vecteur \mathbf{k} sont perpendiculaires) et \tilde{B}^θ sera par la suite dénommé par *l'erreur en terme croisé*. \square

REMARQUE 3.6. La discrétisation de l'équation en saturation (3.9) est une approximation du second ordre de l'équation équivalente suivante

$$\phi \partial_t s + \operatorname{div}(f(s)\mathbf{u}) = (r^{-1}\partial_r(r\cdot), r^{-1}\partial_\gamma) \left\{ f'(s) \mathbf{D}^\theta(\gamma) \begin{pmatrix} \partial_r \\ r^{-1}\partial_\gamma \end{pmatrix} s \right\}$$

avec la même matrice de diffusion

$$\mathbf{D}^\theta(\gamma) = \begin{bmatrix} \tilde{A}^\theta(\gamma) & \tilde{B}^\theta(\gamma) \\ \tilde{B}^\theta(\gamma) & \tilde{C}^\theta(\gamma) \end{bmatrix}.$$

Cette approche, menant au même résultat que l'analyse de Fourier, est réalisée avec des développements limités en coordonnées polaires et avec $\mathbf{u} = \frac{1}{2\pi r} \mathbf{e}_r$. \square

Les expressions (3.27) sont représentées sur la figure 3.3 en fonction de la variable $S = \sin^2 \gamma$ aussi bien en maillage carré qu'en maillage rectangulaire. La valeur $\theta = 1/12$ trouvée pour l'équation en pression (courbe noire) ne donne pas une droite même si l'erreur est presque isotrope en maillage carré sur l'erreur longitudinale et en terme croisé. Ainsi, cette valeur ne correspond pas au paramètre optimal pour l'équation en saturation. Contrairement à l'erreur longitudinale et à l'erreur en terme croisé, l'erreur transverse est plus sensible à la variation du paramètre θ avec notamment des valeurs en 0 et 1 dépendant du paramètre θ .

Définition 3.3. La quantité \tilde{A}^θ , vue comme une fonction de $S = \sin^2 \gamma$, est appelée *erreur angulaire en saturation du schéma 9P1s*.

La raison pour laquelle nous avons choisi \tilde{A}^θ comme erreur angulaire est qu'elle représente la composante radiale de l'action longitudinale ($\Omega = 0$) de la matrice de diffusion

$$\mathbf{D}^\theta(\gamma) = \begin{bmatrix} \tilde{A}^\theta(\gamma) & \tilde{B}^\theta(\gamma) \\ \tilde{B}^\theta(\gamma) & \tilde{C}^\theta(\gamma) \end{bmatrix}.$$

Réécrivons \tilde{A}^θ explicitement en fonction de S . Soit

$$S^* = \sin^2 \gamma^* = \frac{\tan^2 \gamma^*}{1 + \tan^2 \gamma^*} = \frac{\Delta x^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

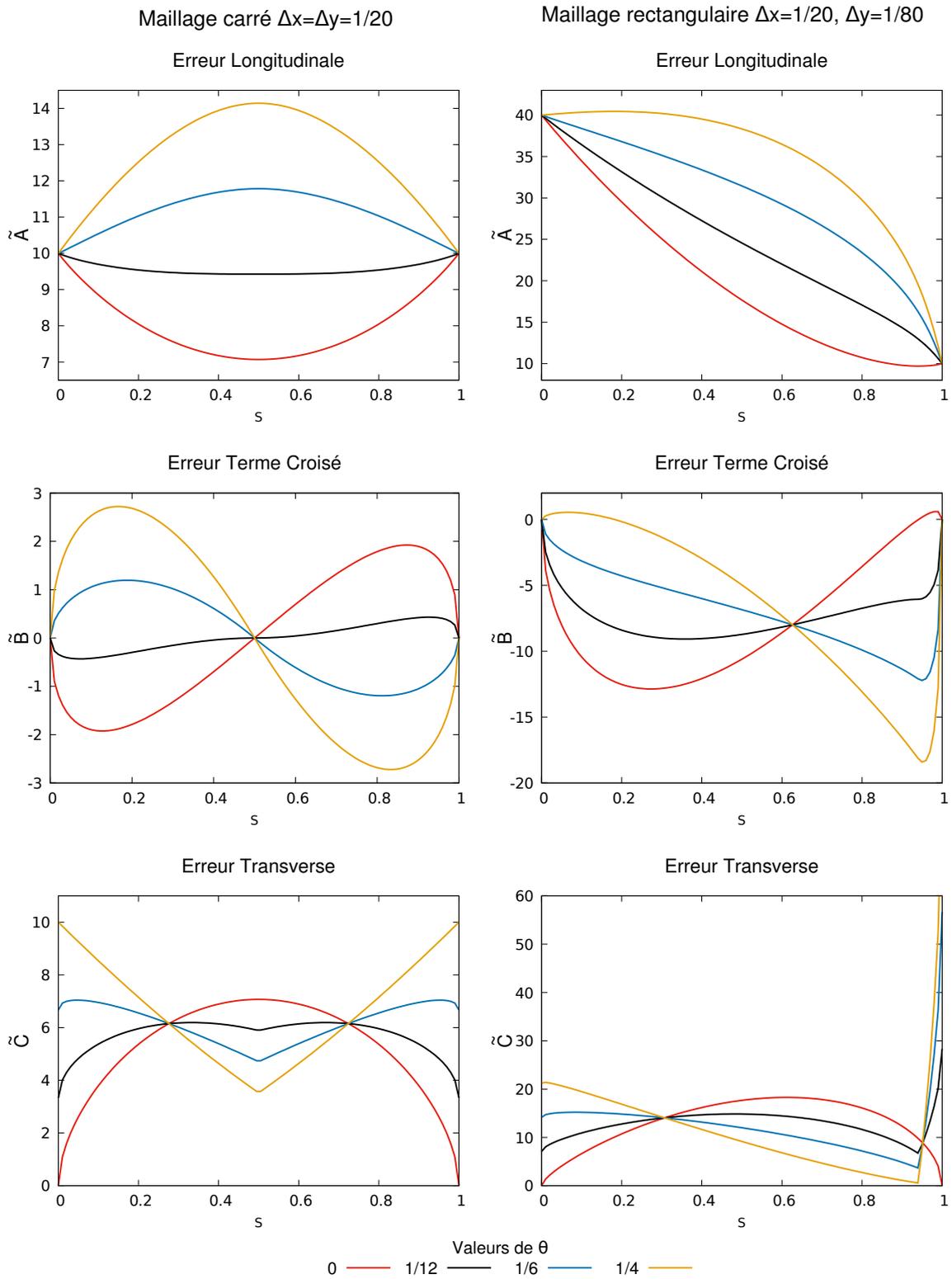


FIGURE 3.3 – Erreurs longitudinales, termes croisés et transverses pour des maillages carrés et rectangulaires selon différentes valeurs du paramètre θ .

Alors, si $S \leq S^*$,

$$\begin{aligned}\tilde{A}^\theta(S) &= \frac{\Delta x}{2}(1-S)^{3/2} + \frac{\Delta y}{2} \left[1 - 2\theta \left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \right) \right] S^{3/2} \\ &\quad + 3\Delta y\theta \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) (1-S)^{1/2}S,\end{aligned}$$

et si $S \geq S^*$,

$$\begin{aligned}\tilde{A}^\theta(S) &= \frac{\Delta y}{2}S^{3/2} + \frac{\Delta x}{2} \left[1 - 2\theta \left(1 + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \right) \right] (1-S)^{3/2} \\ &\quad + 3\Delta x\theta \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) (1-S)S^{1/2}.\end{aligned}$$

On remarque que, pour tout $\theta \in [0, 1]$,

$$\tilde{A}^\theta(S=0) = \frac{\Delta x}{2}, \quad \text{et} \quad \tilde{A}^\theta(S=1) = \frac{\Delta y}{2}. \quad (3.32)$$

Autrement dit, l'erreur angulaire en saturation dans les directions $S=0$ et $S=1$ ne peut pas être affectée par le paramètre θ . Par contre, celui-ci peut changer le comportement de $\tilde{A}^\theta(S)$ pour $S \notin \{0, 1\}$, pour que la fonction $\tilde{A}^\theta(\cdot)$ s'approche au mieux d'une autre, considérée comme référence.

3.3.2 Minimisation de l'anisotropie

Comme en §3.2.2 pour la pression, cette référence idéale est censée refléter la distribution d'erreur la « moins anisotrope » sous les conditions (3.32).

Définition 3.4. Parmi toutes les fonctions $\tilde{A} \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R})$ vérifiant (3.32), celle qui réalise

$$\min_{\tilde{A}} \int_0^1 |\tilde{A}'(S)|^2 dS$$

est appelée *erreur angulaire la moins anisotrope en saturation*.

La seule fonction \tilde{A} satisfaisant cette définition est la suivante.

Lemme 3.3. La solution du problème

$$\min_{\tilde{A} \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R})} \int_0^1 |\tilde{A}'(S)|^2 dS$$

sous les contraintes (3.32) est donnée par la fonction affine

$$\tilde{A}^*(S) = \frac{\Delta y}{2}S + \frac{\Delta x}{2}(1-S). \quad (3.33)$$

DÉMONSTRATION. Similaire à celle du Lemme 3.2. □

Le but du jeu est maintenant de choisir le paramètre θ de sorte que la distribution angulaire \tilde{A}^θ soit la plus proche possible de la référence la moins anisotrope \tilde{A}^* . Comme avant, il est préconisé de prendre

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} \int_0^1 |\tilde{A}^\theta(S) - \tilde{A}^*(S)|^2 dS. \quad (3.34)$$

Théorème 3.5. *L'unique minimiseur de (3.34) est*

$$\theta^* = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\int_0^1 U(S)V(S)dS}{\int_0^1 |U(S)|^2 dS} \right\} \quad (3.35)$$

où

$$U(S) = \begin{cases} \Delta y \left[3 \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) (1-S)^{1/2} S - \left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \right) S^{3/2} \right] & \text{si } S \leq S^*, \\ \Delta x \left[3 \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) (1-S)S^{1/2} - \left(1 + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \right) (1-S)^{3/2} \right] & \text{si } S \geq S^* \end{cases}$$

et

$$V(S) = \frac{\Delta x}{2} [(1-S) - (1-S)^{3/2}] + \frac{\Delta y}{2} [S - S^{3/2}].$$

DÉMONSTRATION. En élevant au carré l'identité

$$\tilde{A}^\theta(S) - \tilde{A}^*(S) = \theta U(S) - V(S)$$

et en intégrant sur $[0, 1]$, il vient

$$\int_0^1 |\tilde{A}^\theta(S) - \tilde{A}^*(S)|^2 dS = \theta^2 \int_0^1 |U(S)|^2 dS - 2\theta \int_0^1 U(S)V(S)dS + \int_0^1 |V(S)|^2 dS. \quad (3.36)$$

Pour minimiser cette fonction quadratique convexe en θ sur $[0, 1/2]$, on peut minimiser d'abord sur \mathbb{R} puis projeter la solution sur l'intervalle. Sur \mathbb{R} , la fonction (3.36) atteint manifestement son minimum en

$$\theta^\# = \frac{\int_0^1 U(S)V(S)dS}{\int_0^1 |U(S)|^2 dS}.$$

Or, on vérifie aisément que $U(S) \geq 0$ et $V(S) \geq 0$ pour $S \in [0, 1]$. Par conséquent, $\theta^\# \geq 0$, et la seule projection à faire est $\theta^* = \min\{1/2, \theta^\#\}$. \square

Malheureusement, la formule (3.35) pour la valeur du paramètre optimal θ^* est trop complexe à implémenter en pratique. Aussi, il est proposé ici une valeur sous-optimale θ^b qui est beaucoup plus rapide à évaluer. Cette valeur θ^b est définie par

$$\tilde{A}^{\theta^b}(S^*) = \tilde{A}^*(S^*). \quad (3.37)$$

En d'autres termes, la distribution d'erreur angulaire \tilde{A}^{θ^b} doit coïncider en $S = S^*$ avec la distribution de référence, en plus des points $S = 0$ et $S = 1$.

Théorème 3.6. *Le paramètre sous-optimal au problème ci-dessus est*

$$\theta^b = \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta x + \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} - 1 \right).$$

DÉMONSTRATION. L'équation de la droite idéale (3.33) au point de transition S^* s'écrit

$$\tilde{A}^*(S^*) = \frac{\Delta y}{2} S^* + \frac{\Delta x}{2} (1 - S^*). \quad (3.38)$$

Comme $\gamma^* = \arctan \frac{\Delta x}{\Delta y}$, la valeur du point de transition en S vaut

$$S^* = \sin^2 \gamma^* = \frac{\Delta x^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

L'équation (3.38) devient alors

$$\tilde{A}^*(S^*) = \frac{\Delta y}{2} \frac{\Delta x^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

ce qui donne aussi

$$\tilde{A}^*(S^*) = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \frac{\Delta x + \Delta y}{2}.$$

Ainsi, la valeur de \tilde{A}^θ en S^* est

$$\tilde{A}^\theta(S^*) = \frac{1 + 4\theta^b}{2} \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}.$$

La valeur du paramètre θ^b cherchée est telle que $\tilde{A}^*(S^*) = \tilde{A}^{\theta^b}(S^*)$, soit

$$\frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \frac{\Delta x + \Delta y}{2} = \frac{1 + 4\theta^b}{2} \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}.$$

Certaines simplifications par $\Delta x \Delta y$ et $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ peuvent se faire pour obtenir

$$\frac{1 + 4\theta^b}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\Delta x + \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

ce qui équivaut à

$$1 + 4\theta^b = \frac{\Delta x + \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

pour aboutir finalement à la valeur donnée dans le Théorème 3.6. \square

REMARQUE 3.7. Cette valeur dépend des pas de maillage Δx et Δy . Dans le cas d'un maillage carré, elle dégénère en

$$\theta^b = \frac{\sqrt{2} - 1}{4},$$

qui avait été établie par Eymard, Masson et Guichard dans [43]. Cependant, ces auteurs avaient gardé le schéma 5P en pression, qu'ils avaient reformulé algébriquement afin de faire intervenir les mailles diagonales (dont la contribution globale en pression est nulle) et de modifier le schéma de transport en saturation. Leur méthode consistait alors à égaler la matrice de diffusion en $\gamma = 0$ et $\gamma = \pi/4$, c'est-à-dire $\mathbf{D}^\theta(0) = \mathbf{D}^\theta(\pi/4)$. \square

REMARQUE 3.8. Uniquement pour la valeur θ^b , la propriété d'invariance suivante est vérifiée par le schéma 9P1s :

$$\text{Pour tout } 0 \leq \gamma \leq \pi/4, \text{ on a } \mathbf{D}^{\theta^b}(\gamma) = \mathbf{D}^{\theta^b}(\gamma + \pi/4).$$

Il s'agit d'une propriété plus forte que celle requise par Eymard et al. [43]. □

REMARQUE 3.9. Toujours pour $\Delta x = \Delta y$, on a

$$\theta^* = 0.1058 \quad \text{et} \quad \theta^b = 0.1035.$$

Ces deux valeurs sont relativement proches. La différence existante ne change pas beaucoup les résultats d'un point de vue numérique. □

Sur la figure 3.4 est représentée l'erreur longitudinale \tilde{A}^θ pour différentes valeurs de θ et pour différents rapports de mailles. La courbe verte correspond à l'erreur isotrope (3.33) tandis qu'en jaune est tracée l'erreur avec le paramètre sous-optimal θ^b . Quelque soit le rapport de mailles, la courbe jaune est nettement plus proche de la droite isotrope. Le point de transition S^* a une influence sur la courbe de l'erreur longitudinale ; en effet, il dépend du rapport de mailles $\Delta x/\Delta y$. L'intersection entre l'erreur isotrope et l'erreur longitudinale en est affectée : le point de transition est plus petit pour des rapports de mailles inférieurs à 1 (à gauche) et se rapproche de 1 pour des rapports de mailles supérieurs à 1 (à droite).

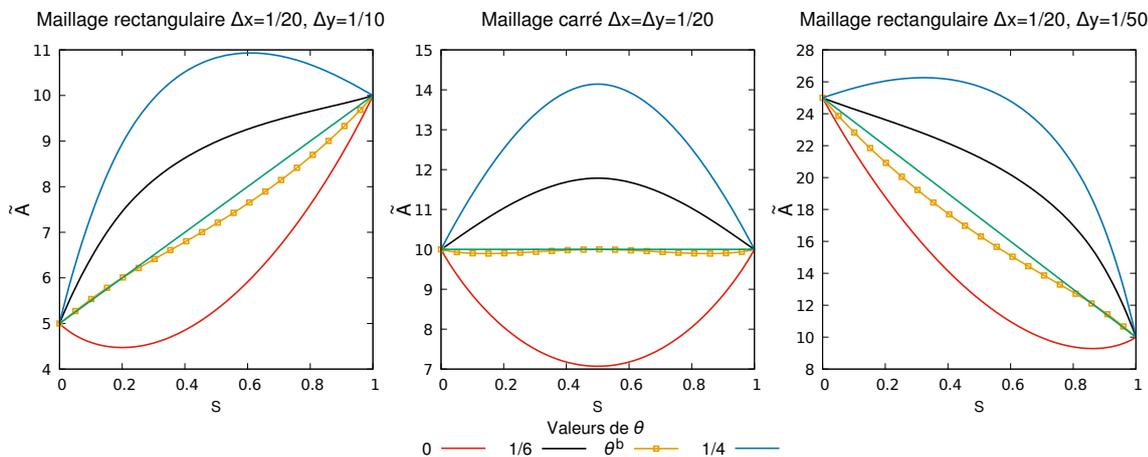


FIGURE 3.4 – Distribution angulaire longitudinale avec plusieurs paramètres θ utilisés dans le schéma 9P1s.

3.4 Résultats numériques

Suite à ces différents calculs de minimisation, plusieurs valeurs optimales de paramètre θ ont été explicitées. Les solutions changeant peu d'une valeur à l'autre de θ , les résultats présentés ici n'utilisent que le paramètre sous-optimal pour l'équation en saturation θ^b .

3.4.1 Cas radial

Le cas test radial avec un unique puits central, expliqué §2.4.1, est repris ici. En résolvant le problème (2.69) avec le schéma 9P1s, les résultats obtenus sont présentés sur la figure 3.5. Ils sont très bons en maillage carré, à gauche sur la figure. L'erreur en pression est minimale et cela se reflète sur la solution en saturation. Comparés aux résultats obtenus avec le schéma 5P (figure 2.15), l'amélioration est tout de suite visible car les pics dans les directions principales ont disparu et la solution est bien radiale. Cependant, lorsque le maillage reste cartésien mais avec des mailles rectangulaires (à droite sur la figure 3.5), la solution devient de plus en plus ovale. L'effet de maillage existe à nouveau, sous un aspect différent que celui constaté avec le schéma 5P, car l'erreur n'est pas commise sur la direction verticale mais uniquement sur la direction horizontale. Cet étirement de la solution est provoqué par le fait que les mailles sont plus allongées que hautes en maillage rectangulaire.

Cette déformation se distingue d'autant plus en regardant les profils de pression et de saturation (figures 3.6 et 3.7). En maillage carré, aucune différence n'est discernable entre les profils médians et diagonaux que ce soit pour la pression ou pour la saturation. Or, dès que les mailles s'allongent dans la direction horizontale (figure 3.7), l'effet d'orientation de maillage réapparaît, notamment sur l'axe médian horizontal (en bleu) dont le front est plus avancé que celui de l'axe médian vertical (en jaune).

Cette différence de répartition peut être due au fait qu'un seul paramètre est utilisé pour tout le maillage et dans toutes les directions. En effet, le paramètre du schéma est fixe et ne s'adapte pas au maillage, que ce soit en terme de mailles rectangulaires ou si le maillage est irrégulier.

3.4.2 Cas à 5 puits

Le cas étudié ici est celui où il y a cinq puits (voir section 2.4.2) et montrant l'influence de l'orientation du maillage. Sur la figure 3.8, l'utilisation du schéma 9P1s a sensiblement réduit l'effet de l'orientation de maillage puisque les solutions obtenues sont presque identiques sur les deux maillages. Là encore, comparé au schéma 5P figure 2.21, l'amélioration est grande : les écoulements sont symétriques par rapport aux puits et non par rapport au maillage puisqu'aucune direction privilégiée n'est visualisée.

Les courbes de percées d'eau au cours du temps sont représentées sur la figure 3.9. Même si les débits diffèrent légèrement, les puits du maillage diagonal produisent au même instant que les puits du maillage parallèle. Aucun puits, et par là même aucun axe, n'est privilégié par le schéma 9P1s. Ce résultat est intéressant pour les ingénieurs puisqu'il permet de prédire efficacement la durée de production d'huile et de connaître l'instant de percée d'eau.

Cela vient renforcer les conclusions déjà encourageantes vues précédemment lors du cas radial. Lorsque le maillage est composé de mailles carrées, le schéma 9P1s avec le paramètre θ^b est nettement plus efficace que le schéma 5P. Même en changeant de valeur de paramètre, les résultats sur ce cas test sont très bons et donnent des solutions semblables sans effet de maillage.

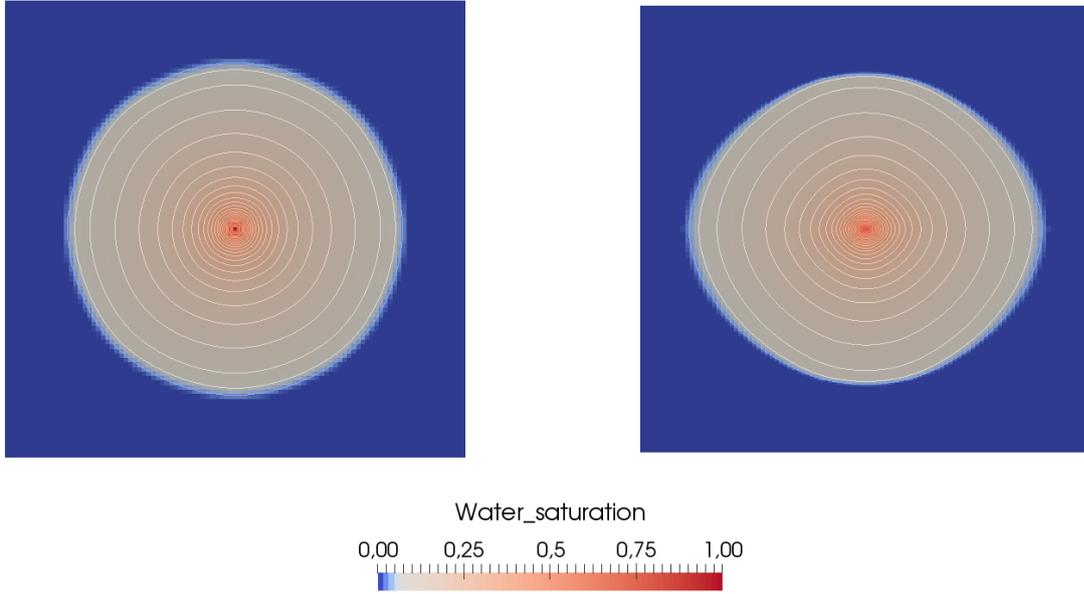


FIGURE 3.5 – Champs de saturation au temps $T = 0.05s$ obtenu sur maillage carré (à gauche) et sur maillage rectangulaire (à droite) avec le schéma 9P1s pour $M = 200$.

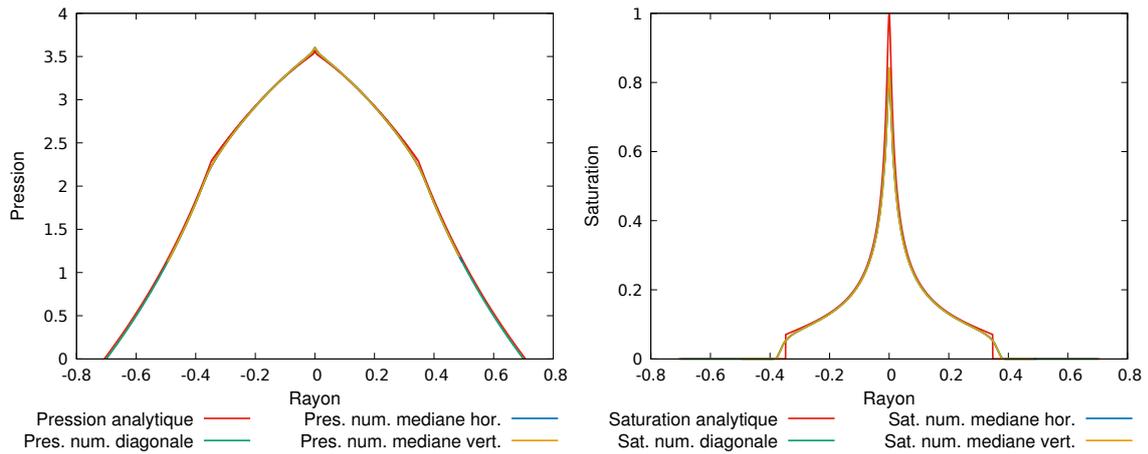


FIGURE 3.6 – Coupes selon différentes directions en pression (à gauche) et en saturation (à droite) de la solution obtenue avec le schéma 9P1s pour $M = 200$ en maillage carré 101×101 .

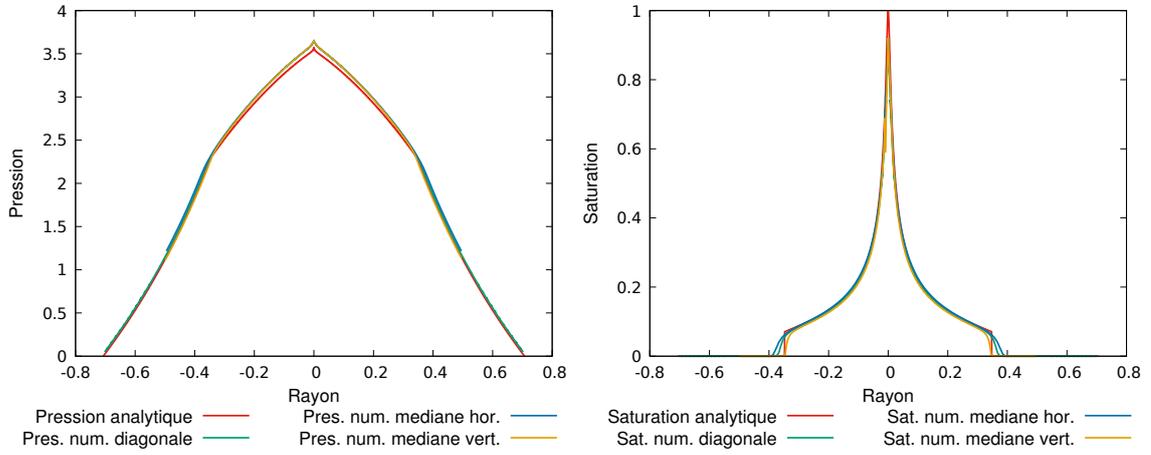


FIGURE 3.7 – Coupes selon différentes directions en pression (à gauche) et en saturation (à droite) de la solution obtenue avec le schéma 9P1s pour $M = 200$ en maillage rectangulaire 101×301 .

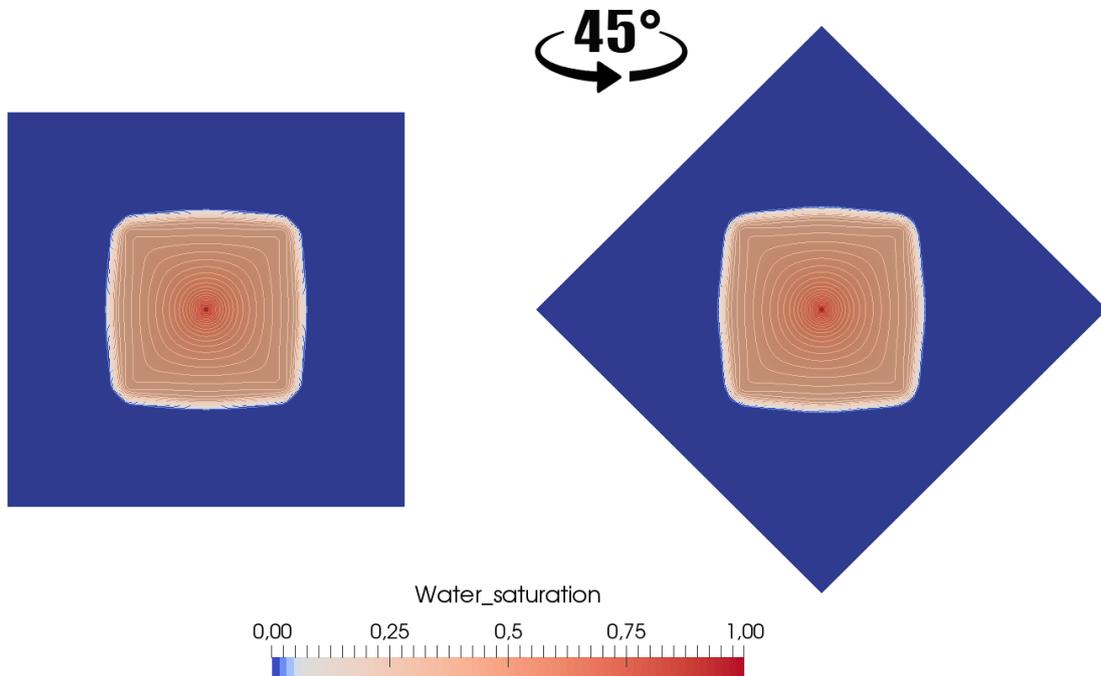


FIGURE 3.8 – Champs de saturation au temps $T = 200$ jours pour $M = 100$, obtenu avec le schéma 9P1s en maillage diagonal (à gauche) et maillage parallèle (à droite).

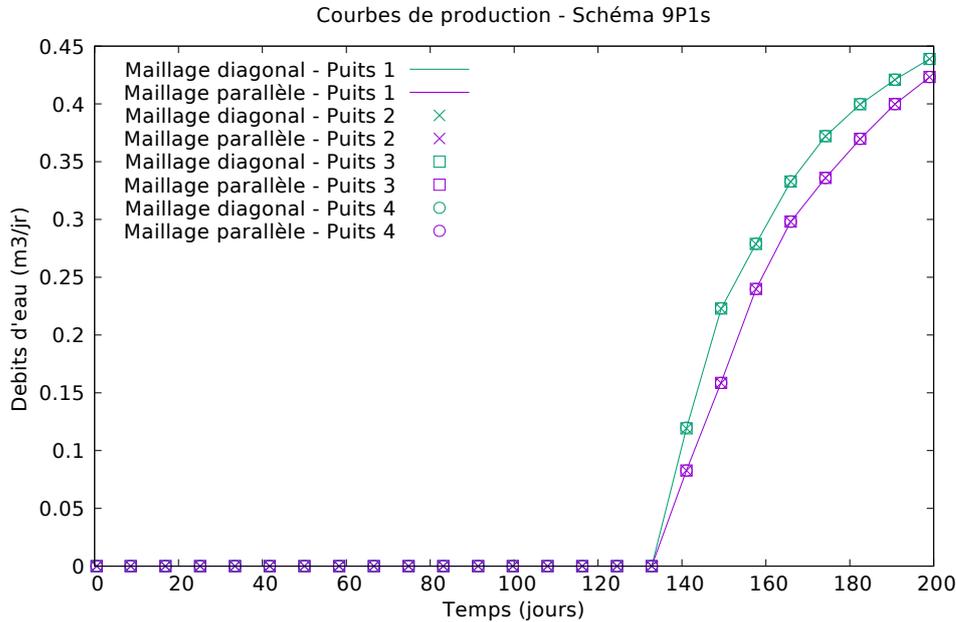


FIGURE 3.9 – Courbes de production d’eau au cours du temps aux puits producteurs pour $M = 100$ en maillages diagonal et parallèle avec le schéma 9P1s.

3.4.3 Cas digitations

Ce cas test des digitations, détaillé au §2.4.3, permet de mettre en évidence le caractère instable de la solution avec la formation de digitations au cours du temps. Les résultats de cette simulation obtenus avec le schéma 9P1s sont représentés sur la figure 3.10. Contrairement au schéma précédent, les digitations ici n’apparaissent plus au cours du temps; le front est stable et ne se déforme pas au cours de la simulation. Les instabilités sont « contrôlées » par ce schéma et non développées comme elles l’étaient avec le schéma 5P (figure 2.23). Le schéma 9P1s limite ainsi la propagation des digitations au cours du temps, phénomène pourtant instable pour un rapport de mobilités défavorable.

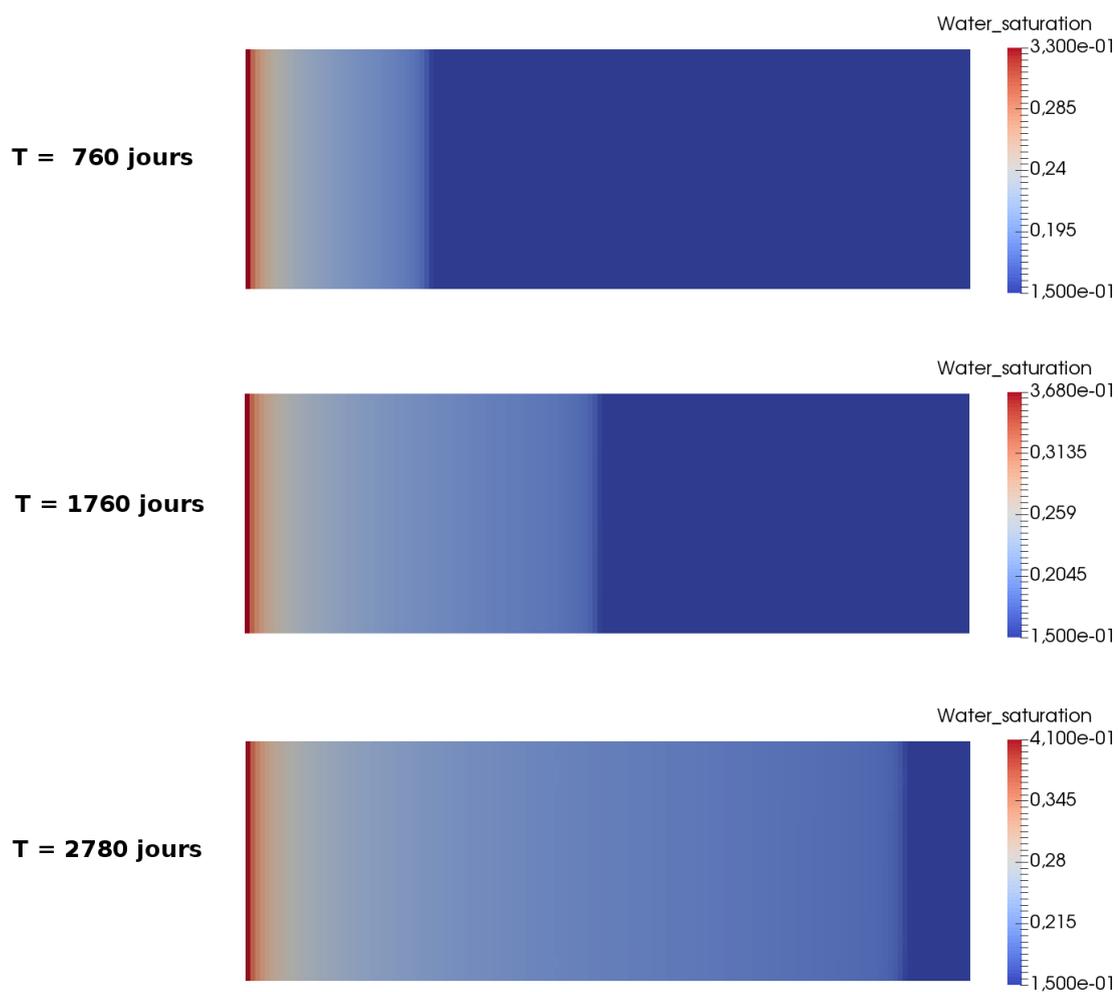


FIGURE 3.10 – Champ de saturation à différents temps de simulation pour le cas digitations avec le schéma 9P1s.