

---

# Observation pour les systèmes non linéaires avec estimation des paramètres

## Sommaire

---

5.1	Introduction . . . . .	97
5.2	Formulation du problème . . . . .	98
5.3	Observabilité et identifiabilité . . . . .	99
5.4	Estimateur en temps fini . . . . .	103
5.5	Exemple illustratif . . . . .	105
5.6	Conclusion . . . . .	111

---

## 5.1 Introduction

On ne peut pas parler de la non linéarité sans comprendre ce que l'on attend par la linéarité. En effet, dans les chapitres précédents, nous avons présenté des résultats obtenus pour des systèmes dynamiques linéaires. On définit la linéarité par deux propriétés fondamentales et coexistantes qui sont la proportionnalité et l'additivité. Selon les mathématiciens, par exemple un polynôme est dit linéaire s'il est strictement de degré 1. Mais qu'il y ait des formules mathématiques caractérisant un processus ou non, s'il l'on peut lui appliquer à la fois la proportionnalité et l'additivité entre les causes et leurs effets, alors on peut dire que l'on est dans un domaine linéaire.

En revanche, il existe plusieurs exemples de systèmes dynamiques qui échappent à cette propriété de proportionnalité entre les causes et leurs effets. Si l'on prend par exemple l'énergie libérée lors d'un choc entre deux véhicules, les dégâts qui s'en suivent sont énormes et ne sont pas proportionnels à la vitesse des deux véhicules mais au carré de ces vitesses. D'autres exemples d'une forte non linéarité sont les effets de seuil. Un système est donc considéré comme étant non linéaire s'il ne possède pas les propriétés d'un système linéaire, c'est-à-dire les propriétés de proportionnalité et d'additivité.

Les systèmes non linéaires peuvent être regroupés en plusieurs classes (systèmes non linéaires affines, systèmes dynamiques incertains, systèmes chaotiques, ...). Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux réseaux de systèmes dynamiques non linéaires et plus précisément aux réseaux de systèmes dynamiques avec des paramètres inconnus.

## 5.2 Formulation du problème

Dans cette partie, nous considérons un réseau de  $k$  sous-systèmes dynamiques, ( $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ ) avec des paramètres d'interconnexions constants mais inconnus. On suppose que chaque sous-système  $\Sigma_i$  pour  $1 \leq i \leq k$  impliqué dans le réseau est de la forme suivante :

$$\Sigma_i : \begin{cases} \dot{x}_i = \bar{f}_i(x_i) + \sum_{j=1}^{q_i} \varphi_{i,j}(x_j) \theta_{i,j} \\ \dot{\theta}_i = 0 \\ y_i = \bar{h}_i(x_i) \end{cases} \quad (5.1)$$

où  $x_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i})^T \in \mathbb{R}^{n_i}$  représente l'état du sous système  $\Sigma_i$  et  $y_i = (y_{i,1}, \dots, y_{i,p_i})^T \in \mathbb{R}^{p_i}$  sa sortie. Le vecteur des paramètres  $\theta_i = (\theta_{i,1}, \dots, \theta_{i,q_i})^T \in \mathbb{R}^{q_i}$  représente les coefficients d'interconnexion **constants mais inconnus** réalisant l'interconnexion topologique entre différents sous systèmes du réseau. Le vecteur des fonctions  $\varphi_{i,j}(x_j) = (\varphi_{i,j}^1(x_j), \dots, \varphi_{i,j}^{n_i}(x_j))^T \in \mathbb{R}^{n_i}$  représente les informations qu'un sous système  $\Sigma_j$  injecte dans le sous système  $\Sigma_i$  via la connexion réalisée par  $\theta_i$ . Donc, la matrice des fonctions  $\varphi_i(x) = (\varphi_{i,1}^T(x_1), \dots, \varphi_{i,q_i}^T(x_{q_i}))^T \in \mathbb{R}^{n_i \times q_i}$  représente l'ensemble des informations injectées par le réseau dans le sous système  $\Sigma_i$ .

Pour plus de simplicité, notons  $n = \sum_{i=1}^k n_i$ ,  $p = \sum_{i=1}^k p_i$  et  $q = \sum_{i=1}^k q_i$ . Définissons  $x = (x_1^T, \dots, x_k^T)^T \in \mathbb{R}^n$  et  $y = (y_1^T, \dots, y_k^T)^T \in \mathbb{R}^p$  et  $\theta = (\theta_1^T, \dots, \theta_k^T)^T \in \mathbb{R}^q$ . Nous pouvons alors écrire le modèle du réseau entier sous la forme compacte suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{f}(x) + \varphi(x)\theta \\ \dot{\theta} = 0 \\ y = \bar{h}(x) \end{cases} \quad (5.2)$$

où  $\bar{f}(x) = \begin{pmatrix} \bar{f}_1(x_1) \\ \vdots \\ \bar{f}_k(x_k) \end{pmatrix}$ ,  $\bar{h}(x) = \begin{pmatrix} \bar{h}_1(x_1) \\ \vdots \\ \bar{h}_k(x_k) \end{pmatrix}$ , et  $\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \varphi_k(x) \end{pmatrix}$ . Tant que les paramètres d'interconnexion dans le réseau étudié sont constants, le paramètre inconnu mais constant  $\theta$  peut être traité comme une variable d'état additionnelle. Pour cela, notons  $\xi = \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$ . Le système (5.2) peut donc être réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = f(\xi) \\ y = h(\xi) \\ z = P\xi \end{cases} \quad (5.3)$$

où  $\xi \in \mathbb{R}^{n+q}$ ,  $f(\xi) = \bar{f}(x) + \varphi(x)\theta$ ,  $h(\xi) = \bar{h}(x)$ . Le vecteur  $z \in \mathbb{R}^{\gamma}$  représente les variables à identifier et  $P \in \mathbb{R}^{\gamma \times (n+q)}$  est une matrice constante introduite pour simplifier la présentation de l'observabilité des états et l'identifiabilité paramétrique ci-après.

Selon les différents choix de la valeur de la matrice  $P$ , l'estimation de  $z$  peut être interprété des manières suivantes :

- L'estimation de  $z$  est équivalente à l'estimation de  $x$  dans (5.2). Dans ce cas, nous avons  $P = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times q} \end{bmatrix}$ .
- L'estimation de  $z$  est équivalente à l'identification du paramètre  $\theta$  dans (5.2). Dans ce cas, on fixe  $P = \begin{bmatrix} 0_{q \times n} & I_q \end{bmatrix}$ .
- L'estimation de  $z$  est équivalente à l'estimation simultanée de  $x$  et de  $\theta$  dans (5.2). Dans ce cas, il est nécessaire que  $P = I_{n+q}$ .

A partir de l'explication précédente, en introduisant la variable  $z$ , l'estimation de l'état  $x$  et/ou du paramètre inconnu  $\theta$  dans (5.2) peut être représentée par l'observabilité (totale ou partielle) de  $z$  dans (5.3). De plus, en définissant différentes valeurs de  $P$ , nous pouvons avoir une observabilité partielle de  $x$  ou une identifiabilité partielle de  $\theta$  (dans l'exemple illustratif de cette partie, l'identifiabilité paramétrique est partielle).

L'objectif principal de notre investigation est d'étudier l'identifiabilité des paramètres inconnus d'interconnexion afin de déterminer la topologie du réseau de systèmes dynamiques. Cela revient à identifier des paramètres inconnus du système (5.2).

### 5.3 Observabilité et identifiabilité

Étant donné que les paramètres constants peuvent être considérés comme des variables d'état supplémentaires avec une dynamique nulle, cela implique que l'identifiabilité des paramètres est en quelque sorte liée à l'observabilité des états. Par conséquent, nous rappelons ci-après les définitions bien connues sur l'observabilité algébrique (pour l'état  $x$  dans (5.2)) et sur l'identifiabilité algébrique (pour les paramètres  $\theta$  dans (5.2)).

**Définition 5.1.** (*Observabilité et identifiabilité*) [FLIESS et al., 1998; XIA et al., 2003]. Pour le système (5.2), l'état  $x$  est considéré comme étant algébriquement observable s'il existe un entier positif  $k$  et une fonction méromorphe  $\eta$  tels que  $x = \eta(y, \dot{y}, \dots, y^{(k)})$  où  $y, \dot{y}, \dots, y^{(k)}$  sont des dérivées de la sortie correspondante  $y$ .

Pour le même système (5.3),  $\theta$  est considéré comme étant algébriquement identifiable s'il existe un instant  $T > 0$ , un entier naturel  $k$  et une fonction méromorphe  $\Phi$  telle que

$$\Phi(\theta, y, \dot{y}, \dots, y^{(k)}) = 0 \quad (5.4)$$

et

$$\text{rang} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = q \quad (5.5)$$

est continue sur  $[0, T]$ , pour tout  $(\theta, y, \dot{y}, \dots, y^{(k)})$ .

**Remarque 5.1.** On peut constater que si les relations (5.4) et (5.5) sont satisfaites, alors d'après le théorème des fonctions implicites, il existe (localement) une fonction  $\bar{\Phi}$  telle que

$$\theta = \bar{\Phi}(y, \dot{y}, \dots, y^{(k)})$$

qui est similaire à la définition de l'observabilité algébrique donnée dans la Définition 5.1.

Avec la forme compacte déduite (5.3), la section suivante traitera des conditions qui garantissent la possibilité d'identifier les paramètres constants inconnus. Dans la littérature, on peut trouver des résultats obtenus par Xia et al dans [XIA et al., 2003] pour les mêmes classes de systèmes dynamiques (5.3). Pour rappeler quelques points essentiels de ces résultats, notons  $\mathcal{Y} = \text{span}\{dy, d\dot{y}, \dots, dy^{(l)}\}$ ,  $l \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{X} = \text{span}\{dx\}$  et  $\Theta = \text{span}\{d\theta\}$ . Le théorème suivant est vérifié.

**Théorème 5.1.** [XIA et al., 2003] Le système (5.2) est algébriquement identifiable si et seulement si  $\Theta \subset \mathcal{Y}$ .  $\diamond$

Pour ce faire, on définit pour (5.3) ce qu'on nomme les "indices d'observabilité". Définissons

$$\mathcal{F}_l = \mathcal{X} \cap \text{span}\{dy, d\dot{y}, \dots, dy^{(l-1)}\}$$

pour  $l \in \mathbb{N}$ . Il a été montré dans [KRENER et al., 1985] que  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n$ . Définissons alors  $d_1 = \text{rank} \mathcal{F}_1$  et  $d_l = \text{rank} \mathcal{F}_l - \text{rank} \mathcal{F}_{l-1}$  pour  $l = 1, \dots, n$ . Nous avons la définition suivante des indices d'observabilité.

**Définition 5.2.** (Indices d'observabilité)[KRENER et al., 1985] La liste des entiers naturels  $(v_1, \dots, v_p)$  appelé indices d'observabilité pour le système (5.3) est définie telle que

$$v_i = \max\{d_l \geq i, 1 \leq i \leq l\}.$$

Si nécessaire, il faut réordonner les composants des sorties de telle façon que :

$$\text{rang} \frac{\partial (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})^T}{\partial x} = v_1 + v_2 + \dots + v_p. \quad (5.6)$$

Avec la définition des indices d'observabilité, on peut alors définir pour le système (5.3), la matrice  $d\Omega$  comme suit :

$$d\Omega = \frac{\partial [h_1, L_f h_1, \dots, L_f^{v_1-1} h_1, \dots, h_p, \dots, L_f^{v_p-1} h_p]^T}{\partial \xi} \quad (5.7)$$

Nous avons alors le résultat suivant.

**Théorème 5.2.** *Le vecteur des paramètres  $\theta$  du système (5.2) est identifiable (ou de manière équivalente  $z$  du système (5.3) est observable) si  $\text{rang } d\Omega = n + q$ .  $\diamond$*

Le théorème ci-dessus est assez simple et énonce une condition très forte sur l'identification des paramètres, qui exige que tous les états soient également observables. Il convient de noter qu'en général, l'identifiabilité des paramètres ne dépend pas de l'observabilité de l'état. En d'autres termes, certains paramètres peuvent être identifiables même si tous les états du système ne sont pas observables. Un exemple simple est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \theta \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (5.8)$$

Il semble évident que  $\theta$  dans l'exemple précédent est localement identifiable (dépendant seulement de l'état  $x_1$ , ce qui donne  $\dot{y} = y\theta$ ), alors que l'état  $x_2$  n'est pas observable. Ce petit exemple montre également que l'identifiabilité des paramètres ne dépend que de l'état **partiellement observable** impliqué dans l'équation paramétrique finalement déduite.

Une méthode d'identification proposée dans [XIA et al., 2003] consiste à éliminer premièrement les états  $x$  à travers les propriétés d'observabilité du système.

Cette méthode fonctionne mais nécessite de calculer par avance, les dérivées d'ordre supérieur des sorties qui peuvent ne pas être utilisées ultérieurement. Cela peut rapidement devenir difficile voire très compliqué surtout si le système étudié a des paramètres non identifiables.

Dans le but d'optimiser les résultats obtenus dans [XIA et al., 2003], nous allons proposer dans ce qui suit, un nouvel algorithme, qui sera plus efficace et facile à appliquer. Contrairement à la méthode proposée dans [XIA et al., 2003], dans ce nouvel algorithme, il ne sera pas nécessaire de calculer à l'avance les dérivées d'ordre supérieur des sorties mais nous procéderons par itération.

Pour tout entier  $b_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ ,

$$\omega = \{h_1, \dots, L_f^{b_1} h_1, \dots, h_p, \dots, L_f^{b_p} h_p\}.$$

Notons  $\Xi = \{\mathcal{X} + \Theta\}$  et

$$\mathcal{F} = \Xi \cap \text{span}_\omega \{d\omega\}$$

alors l'algorithme suivant est proposé pour assouplir la condition relativement forte énoncée dans le Théorème 5.2.

### Algorithme 5.1.

1. *Initialisation :*

- $b_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, p$ ;
- $\omega_0 = \{\omega_{1,0}, \dots, \omega_{p,0}\}$  avec  $\omega_{j,0} = \{h_j\}$ ;
- $\mathcal{F}_0 = \{\mathcal{F}_{1,0}, \dots, \mathcal{F}_{p,0}\} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_0} \{d\omega_0\}$  avec  $\mathcal{F}_{j,0} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{j,0}} \{d\omega_{j,0}\}$ ;
- $i = 1$ .

2. Itération  $i$  : Calculer  $\mathcal{L}_i = \text{span}_{\omega_{i-1}}\{d\omega_{i-1}\}$
3. Calculer  $\partial\Omega_i = \frac{\partial\omega_{i-1}^T}{\partial\xi}$  et pour la matrice  $P$  donnée, déterminer la matrice  $\mathcal{K}_i(\xi)$  telle que  $P = \mathcal{K}_i(\xi)\partial\Omega_i$ . Alors, notons  $\mathcal{K}_i^j(\xi)$ , la  $j$ ème ligne de la matrice  $\mathcal{K}_i(\xi)$ ;
4. Vérifier :
  - si tous les  $\mathcal{K}_i^j(\xi) \notin \mathcal{L}_i$ , alors aller à l'étape 5;
  - Autrement, aller à l'étape 8;
5. Calculer :
  - $\omega_i = \{\omega_{1,i}, \dots, \omega_{p,i}\}$  avec  $\omega_{j,i} = \{h_j, \dots, h_j^{(b_j+1)}\}$ ;
  - $\mathcal{F}_i = \{\mathcal{F}_{1,i}, \dots, \mathcal{F}_{p,i}\} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_i}\{d\omega_i\}$  avec  $\mathcal{F}_{j,i} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{j,i}}\{d\omega_{j,i}\}$ ;
6. Si  $\mathcal{F}_{j,i} \not\subset \{\mathcal{F}_{i-1} \cup \{\mathcal{F}_i \setminus \mathcal{F}_{j,i}\}\}$ , alors  $b_j = b_j + 1$ ;
7. Vérifier :
  - si  $\mathcal{F}_{i-1} \subset \mathcal{F}_i$ , alors faire  $i = i + 1$  puis retourner à l'étape 2 pour l'itération suivante;
  - dans le cas contraire, aller à l'étape 8;
8. Fin de l'algorithme.

Alors on note  $\partial\Omega = \partial\Omega_i$ ,  $\omega = \omega_{i-1}$ ,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_i$ , et  $\mathcal{K}(\xi) = \mathcal{K}_i(\xi)$ .

A la fin de l'algorithme, si  $\mathcal{K}(\xi) \notin \mathcal{L}$  alors  $z$  n'est pas observable.

**Théorème 5.3.** *S'il existe une matrice  $\mathcal{K}(\xi)$  telle que  $P = \mathcal{K}(\xi)\partial\Omega$  et que les composants des éléments de toutes les lignes de  $\mathcal{K}(\xi)$  satisfont  $\mathcal{K}^j(\xi) \in \mathcal{L}$  alors  $z$  est observable.*  $\diamond$

*Preuve.* Par définition,  $\mathcal{L}_i$  est l'espace observable du système (5.3) à chaque itération  $i$ . Après avoir appliqué l'algorithme 5.1, si  $\mathcal{K}^j(\xi) \in \mathcal{L}$ , alors tous les éléments dans  $\mathcal{K}(\xi)$  sont engendrés par  $\mathcal{L}$ . Donc, cela implique que  $z = P\xi$  est observable.  $\blacksquare$

**Remarque 5.2.** *La matrice  $\partial\Omega \in \mathbb{R}^{r \times (n+q)}$  étant de rang plein par ligne, il existe son inverse à droite  $[\partial\Omega]_R^{-1}$  telle que  $\partial\Omega[\partial\Omega]_R^{-1} = I_r$ . La matrice  $\mathcal{K}(\xi)$  peut alors être obtenue comme suit :*

$$\mathcal{K}(\xi) = P[\partial\Omega]_R^{-1}. \quad (5.9)$$

Supposons que la matrice  $P$  est choisie de telle sorte que  $\mathcal{K}(\xi) \in \mathcal{L}$ .

**Proposition 5.1.** *Il existe une fonction  $F(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)})$  telle que*

$$z = F(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}). \quad (5.10)$$

avec  $l \in \mathbb{N}$ .

*Preuve.* A partir de  $z = P\xi$ , on obtient  $dz = d(P\xi) = Pd\xi$ . Considérant  $P = \mathcal{K}(\xi)\partial\Omega$  puis en remplaçant la matrice  $P$  dans l'équation précédente, on obtient  $dz = \mathcal{K}(\xi)d\Omega$  avec  $d\Omega = \partial\Omega d\xi$ .

Notons que  $dz$  est une 1-forme fermée, ce qui implique que  $\mathcal{K}(\xi)d\Omega$  est aussi une 1-forme fermée [PANDHARIPANDE et al., 2014]. Alors, nous avons  $d(F(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)})) = dz$ , ce qui implique :

$$z = F(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) = \begin{pmatrix} F_1(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) \\ \vdots \\ F_\gamma(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^\gamma.$$

■

Après avoir déduit une condition suffisante moins restrictive sur l'observabilité de  $z$ , nous allons concevoir des observateurs appropriés pour son estimation.

Très souvent,  $F$  est une fonction rationnelle composée de deux fonctions  $g(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)})$  et  $\bar{g}(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)})$  telles que

$$F(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) = \frac{\bar{g}(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)})}{g(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)})} \quad (5.11)$$

$$\text{où } g(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) = \begin{pmatrix} g_1(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) \\ \vdots \\ g_\gamma(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) \end{pmatrix} \text{ et } \bar{g}(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) = \begin{pmatrix} \bar{g}_1(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) \\ \vdots \\ \bar{g}_\gamma(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) \end{pmatrix}.$$

Si nous prenons, par exemple le système (5.8), nous aurons :

$$\theta = F(y, \dot{y}) = \frac{\dot{y}}{y}$$

Ceci montre que des singularités peuvent apparaître (ici pour  $y = 0$ ). Le problème de singularité sera donc discuté dans la section suivante.

## 5.4 Estimateur en temps fini

En se basant sur les résultats des investigations menées dans la section précédente, différents observateurs peuvent être réalisés pour l'estimation de  $z$ . Notons aussi que l'estimation de  $z$  peut être garantie non seulement si l'Algorithme 5.1 se termine avec succès mais aussi si les fonctions  $g_i$  définie dans (5.11) sont non nulles.

Supposons que le Théorème 5.3 est satisfait pour le système (5.3). En se basant sur la Définition 5.1, il est alors possible de calculer algébriquement  $\theta$  comme une fonction de la sortie  $y$  du système considéré et d'un certain nombre de ses dérivées  $\dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(l)}$ .

Selon la Proposition 5.1 et la relation (5.11), il est clair qu'un problème de la singularité peut apparaître dans (5.10) si  $g(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)})$  passe par zéro à un instant  $t$  donné (perte d'observabilité locale).

Plusieurs chercheurs ont proposé différentes techniques pour surmonter ce problème de singularité. Dans [LANGUEH et al., 2015], la méthode de l'immersion a été proposée et consiste à

augmenter la dimension de la matrice d'observabilité avec un état virtuel dont la dynamique est nulle. Une autre méthode permettant de surmonter ce problème est l'imposition de la condition d'une excitation persistante.

**Définition 5.3.** (*Excitation persistante*) [SHIMKIN et al., 1987]. Pour l'équation (5.10), le vecteur des fonctions  $g(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)})$  est considéré comme étant une excitation persistante si et seulement si il existe des constantes positives  $\epsilon_1$  et  $T$  telles que pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\int_{t-T}^t g(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) g^T(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) ds > \epsilon_1 I_\gamma$$

où  $T$  représente la période d'excitation de  $g(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)})$ .

Il est bien connu que différentes approches peuvent être utilisées pour estimer les paramètres si la condition d'excitation persistante est satisfaite. L'une de ces méthodes qui paraît la plus simple est la méthode dite des moindres carrés [XIA, 2003]. Une autre façon d'estimer les paramètres inconnus consiste à utiliser l'algorithme adaptatif [MARINO et al., 1995a] ou encore l'algorithme du gradient normalisé [XIA, 2003]. Ces méthodes ne peuvent fournir qu'une convergence **asymptotique**. Dans cette section, nous proposons une nouvelle approche basée sur les modes glissants pour estimer les paramètres en temps fini (convergence non asymptotique). Pour cela, définissons une fonction  $Q_i$  comme suit :

$$Q_i(t) = \int_{t-T}^t [\bar{g}_i(s) - \hat{z}_i(s) g_i(s)]^2 ds \quad (5.12)$$

avec  $i = 1, \dots, \gamma$  et  $\hat{z}_i$  représente l'estimation de  $z_i$ . L'objectif est de minimiser cette fonction  $Q_i$ .

En calculant sa dérivée par rapport à  $\hat{z}_i$ , on a :

$$\frac{\partial Q_i(t)}{\partial \hat{z}_i} = -2 \int_{t-T}^t g_i(s) [\bar{g}_i(s) - \hat{z}_i(s) g_i(s)] ds$$

Définissons maintenant  $S_i$  comme suit :

$$S_i(t) = \int_{t-T}^t g_i(s) [\bar{g}_i(s) - \hat{z}_i(s) g_i(s)] ds \quad (5.13)$$

Le théorème suivant peut alors nous permettre d'estimer  $z$  tout en surmontant le problème de la singularité.

**Théorème 5.4.** *La dynamique suivante*

$$\dot{\hat{z}}_i(t) = \left[ \frac{\partial S_i(t)}{\partial \hat{z}_i} \right]_L^{-1} \left[ -k_1 [S_i]^\alpha - k_2 [S_i]^\beta - \frac{\partial S_i(t)}{\partial t} \right] \quad (5.14)$$

avec  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ ,  $0 < \alpha < 1$  et  $\beta > 1$ , converge en temps fini vers  $z_i$ , c'est-à-dire qu'il existe un instant positif  $T_f$  indépendant de toute condition initiale tel que  $\|z_i(t) - \hat{z}_i(t)\| = 0$ ,  $\forall t \geq T_f$ .  $\diamond$

*Preuve.* L'erreur  $Q_i$  atteint sa valeur minimale (zéro) si et seulement si sa dérivée par rapport à  $\hat{z}_i$



est nulle, c'est à dire  $\frac{\partial Q_i}{\partial \hat{z}_i} = 0$ , ce qui implique que  $S_i = 0$ . Puisque

$$\begin{aligned} S_i(t) &= \int_{t-T}^t g_i(s)[\bar{g}_i(s) - \hat{z}_i(\tau)g_i(\tau)]ds \\ &= \int_{t-T}^t g_i(s)[z_i(s)g_i(s) - \hat{z}_i(s)g_i(s)]ds \\ &= \int_{t-T}^t g_i^2(s)[z_i(s) - \hat{z}_i(s)]ds \end{aligned}$$

alors  $\|z_i - \hat{z}_i\| = 0$  si et seulement si  $S_i = 0$ . Par conséquent, il est équivalent à prouver que  $S_i$  convergera vers zéro dans un temps fini. Considérons alors la dynamique de  $S_i$  suivante que nous allons dériver par rapport au temps. Nous avons :

$$\dot{S}_i = \frac{dS_i(t)}{dt} = \frac{\partial S_i(t)}{\partial t} + \frac{\partial S_i(t)}{\partial \hat{z}_i} \dot{\hat{z}}_i$$

En insérant l'observateur proposé (5.14) dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$\dot{S}_i = -k_1[S_i]^\alpha - k_2[S_i]^\beta. \quad (5.15)$$

Du fait que  $k_1 > 0, k_2 > 0, 0 < \alpha < 1$  et  $\beta > 1$ , il a été prouvé dans [POLYAKOV, 2012] que  $S_i$  convergera en temps fini vers zéro, indépendamment de la condition initiale  $S_i(0)$ . Par conséquent, nous avons prouvé que l'observateur proposé (5.14) peut estimer  $z_i$  dans un temps fini, c'est-à-dire qu'il existe un instant  $T_f$  positif indépendant de la condition initiale tel que  $\|z_i(t) - \hat{z}_i(t)\| = 0, \forall t \geq T_f$ . ■

Contrairement à la méthode adaptative classique qui converge asymptotiquement, cette nouvelle méthode converge de manière non asymptotique. Dans la section suivante, un exemple illustratif est donné afin de mettre en évidence l'efficacité de l'observateur proposé.

## 5.5 Exemple illustratif

Le système considéré dans cet exemple est un réseau de trois systèmes dynamiques interconnectés comme le montre la Figure 5.1. La topologie du réseau est représentée par les paramètres inconnus mais constants des interconnexions  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_6)^T$ .

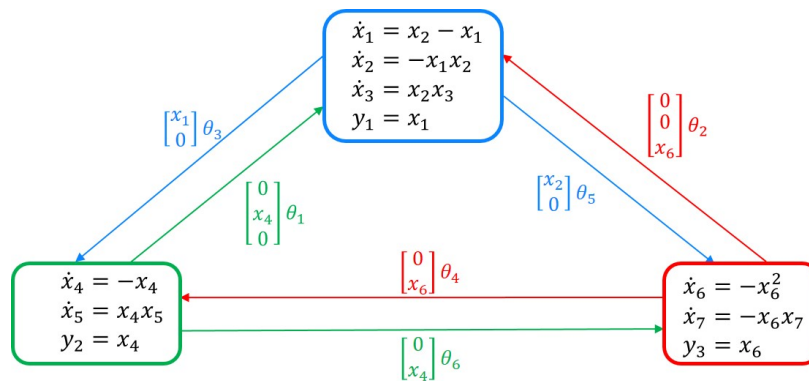


FIGURE 5.1 – Réseau formé par 3 systèmes dynamiques

Le modèle de l'ensemble des systèmes du réseau est décrit par la forme groupée suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_2 + \theta_1 x_4 \\ \dot{x}_3 = x_2 x_3 - \theta_2 x_6 \\ \dot{x}_4 = -x_4 + \theta_3 x_1 \\ \dot{x}_5 = x_4 x_5 + \theta_4 x_6 \\ \dot{x}_6 = -x_6^2 + \theta_5 x_2 \\ \dot{x}_7 = -x_7 + \theta_6 x_4 \\ y = (x_1, x_4, x_6)^T \end{cases} \quad (5.16)$$

où  $x = (x_1, x_2, \dots, x_7)^T$  représente les états du réseau considéré et  $y = (y_1, y_2, y_3)^T$  représente les sorties mesurées.

Le système (5.16) peut être réécrit sous la forme du système (5.3) comme suit :

$$\begin{cases} \xi = \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} \\ \dot{\xi} = f(\xi) = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) \\ y = (y_1, y_2, y_3)^T \end{cases}$$

où  $\xi = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)^T$ .

Supposons que nous souhaitons estimer le vecteur suivant :  $z = (x_2, \theta_1, \theta_3, \theta_5)^T$ . Alors nous avons

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Appliquons l'Algorithme 5.1 proposé afin de tester l'observabilité de l'état  $x_2$  et l'identifiabilité des paramètres inconnus  $\theta_1$ ,  $\theta_3$  et  $\theta_5$ , nous obtenons :

1. Initialisation :

- $\omega_0 = \{\omega_{1,0}, \omega_{2,0}, \omega_{3,0}\}$ , avec  $\omega_{1,0} = \{y_1\}$ ,  $\omega_{2,0} = \{y_2\}$  et  $\omega_{3,0} = \{y_3\}$ ;
- $\mathcal{F}_0 = \{\mathcal{F}_{1,0}, \mathcal{F}_{2,0}, \mathcal{F}_{3,0}\}$  avec  $\mathcal{F}_{1,0} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{1,0}}\{d\omega_{1,0}\}$ ,  $\mathcal{F}_{2,0} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{2,0}}\{d\omega_{2,0}\}$ ,  $\mathcal{F}_{3,0} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{3,0}}\{d\omega_{3,0}\}$ ;
- $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ .

2. Itération 1 ( $i=1$ ). On a :

- $\mathcal{L}_1 = \text{span}_{\omega_0}\{d\omega_0\} = \text{span}_{\omega_0}\{d\xi_1, d\xi_4, d\xi_6\}$ ;

$$\begin{aligned} & \text{— } \partial\Omega_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ & \text{— et } \mathcal{K}_1(\xi) = P[\partial\Omega_0]_R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On remarque que  $\mathcal{K}_1^j(\xi) \notin \mathcal{L}_1$ . Alors, on calcule

- $\omega_1 = \{\omega_{1,1}, \omega_{2,1}, \omega_{3,1}\}$  avec  $\omega_{1,1} = \{y_1, \dot{y}_1\}$ ,  $\omega_{2,1} = \{y_2, \dot{y}_2\}$  et  $\omega_{3,1} = \{y_3, \dot{y}_3\}$ ;
- $\mathcal{F}_1 = \{\mathcal{F}_{1,1}, \mathcal{F}_{2,1}, \mathcal{F}_{3,1}\}$  avec  $\mathcal{F}_{j,1} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{j,1}}\{d\omega_{j,1}\}$ ;

On peut donc vérifier que  $\mathcal{F}_{j,1} \not\subset \{\mathcal{F}_0 \cap \{\mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_{j,1}\}\}$  pour  $j = 1, 2, 3$ , alors on incrémente  $b_j$  qui donne  $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ ;

Notons que  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1$ . On procède donc à la deuxième itération.

3. Itération 2 (i=2). Nous avons :

- $\mathcal{L}_2 = \text{span}_{\omega_1}\{d\omega_1\} = \text{span}_{\omega_1}\{d\xi_1, d\xi_2, d\xi_4, d\xi_6, d\xi_{10}, d\xi_{12}\}$ ;

$$\begin{aligned} & \text{— } \partial\Omega_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_{10} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{12} & 0 & 0 & 0 & -2\xi_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 \end{pmatrix}; \\ & \text{— } \mathcal{K}_2(\xi) = P[\partial\Omega_1]_R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\xi_{10}}{\xi_1} & 0 & \frac{1}{\xi_1} & \frac{1}{\xi_1} & 0 & 0 \\ \frac{-\xi_{12}}{\xi_2} & \frac{-\xi_{12}}{\xi_2} & 0 & 0 & \frac{2\xi_6}{\xi_2} & \frac{1}{\xi_2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On note que  $\mathcal{K}_2^1(\xi) \notin \mathcal{L}_2$ , donc on calcule

- $\omega_2 = \{\omega_{1,2}, \omega_{2,2}, \omega_{3,2}\}$  avec  $\omega_{1,2} = \{y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1\}$ ,  $\omega_{2,2} = \{y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2\}$  et  $\omega_{3,2} = \{y_3, \dot{y}_3, \ddot{y}_3\}$ ;
- $\mathcal{F}_2 = \{\mathcal{F}_{1,2}, \mathcal{F}_{2,2}, \mathcal{F}_{3,2}\}$  avec  $\mathcal{F}_{j,2} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{j,2}}\{d\omega_{j,2}\}$ ;

On peut vérifier que

- $\mathcal{F}_{1,2} \not\subset \{\mathcal{F}_1 \cap \{\mathcal{F}_2 \setminus \mathcal{F}_{1,2}\}\}$  alors  $b_1 = 2$ ;
- $\mathcal{F}_{2,2} \subset \{\mathcal{F}_1 \cap \{\mathcal{F}_2 \setminus \mathcal{F}_{2,2}\}\}$  alors  $b_2 = 1$ ;
- $\mathcal{F}_{3,2} \subset \{\mathcal{F}_1 \cap \{\mathcal{F}_2 \setminus \mathcal{F}_{3,2}\}\}$  alors  $b_3 = 1$ .

On peut aussi vérifier que  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ . On procède alors à la troisième itération.

4. Itération 3 (i=3). On obtient :

$$— \mathcal{L}_3 = \text{span}_{\omega_2}\{d\omega_2\} = \text{span}_{\omega_2}\{d\xi_1, d\xi_2, d\xi_4, d\xi_6, d\xi_8, d\xi_{10}, d\xi_{12}\};$$

$$— \partial\Omega_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \xi_2 & -1 - \xi_1 & 0 & \xi_8 & 0 & 0 & 0 & \xi_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_{10} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{12} & 0 & 0 & 0 & -2\xi_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$— \text{et } \mathcal{K}_3(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\xi_1 + \xi_2}{\xi_4} & \frac{1 + \xi_1}{\xi_4} & \frac{1}{\xi_4} & -\frac{\xi_8}{\xi_4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\xi_{10}}{\xi_1} & 0 & 0 & \frac{1}{\xi_1} & \frac{1}{\xi_1} & 0 & 0 \\ -\frac{\xi_{12}}{\xi_2} & -\frac{\xi_{12}}{\xi_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\xi_6}{\xi_2} & \frac{1}{\xi_2} \end{bmatrix}.$$

Pour  $j = 1, 2, 3$ ,  $\mathcal{K}_3^j(\xi) \in \mathcal{L}$ , alors on arrête l'algorithme et on note  $\partial\Omega = \partial\Omega_3$  et  $\mathcal{K}(\xi) = \mathcal{K}_3(\xi)$ .

L'algorithme s'est terminé de manière positive, donc le Théorème 5.3 est satisfait et l'état du système (5.16) est alors observable. Cela signifie que l'état  $x_2$  est observable et que les paramètres inconnus  $\theta_1$ ,  $\theta_3$  et  $\theta_5$  du système (5.16) sont aussi identifiables. L'observateur proposé peut donc nous permettre d'estimer ces paramètres.

A partir de la matrice  $P = \mathcal{K}(\xi)\partial\Omega$  et de  $z = P\xi$ , nous avons

$$dz = Pd\xi = K(\xi)d\Omega \text{ avec } d\Omega = \partial\Omega d\xi.$$

Sachant que  $d\Omega = (dy_1, d\dot{y}_1, d\ddot{y}_1, dy_2, d\dot{y}_2, d\ddot{y}_2, dy_3, d\dot{y}_3)^T$ , on obtient

$$\begin{cases} d\xi_2 & = dy_1 + d\dot{y}_1 \\ d\xi_8 & = -\frac{\xi_1 + \xi_2}{y_2} dy_1 + \frac{1 + \xi_1}{y_2} d\dot{y}_1 + \frac{1}{y_2} d\ddot{y}_1 - \frac{\xi_8}{y_2} dy_2 \\ d\xi_{10} & = -\frac{\xi_{10}}{y_1} dy_1 + \frac{1}{y_1} dy_2 + \frac{1}{y_1} d\dot{y}_2 \\ d\xi_{12} & = -\frac{\xi_{12}}{y_1 + \dot{y}_1} dy_1 - \frac{\xi_{12}}{y_1 + \dot{y}_1} d\dot{y}_1 + \frac{2y_3}{y_1 + \dot{y}_1} dy_3 + \frac{1}{y_1 + \dot{y}_1} d\dot{y}_3 \end{cases}$$

ce qui conduit à

$$\begin{cases} dx_2 = d(y_1 + \dot{y}_1) \\ d(\theta_1 y_2) = d(\dot{y}_1 + \ddot{y}_1 + y_1(y_1 + \dot{y}_1)) \\ d(\theta_3 y_1) = d(y_2 + \dot{y}_2) \\ d(\theta_5 y_1 + \rho_5 \dot{y}_1) = d(y_3^2 + \dot{y}_3) \end{cases}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{cases} z_1 = x_2 = y_1 + \dot{y}_1 \\ y_2 z_2 = y_2 \theta_1 = \dot{y}_1 + \ddot{y}_1 + y_1 (y_1 + \dot{y}_1) \\ y_1 z_3 = y_1 \theta_3 = y_2 + \dot{y}_2 \\ (y_1 + \dot{y}_1) z_4 = (y_1 + \dot{y}_1) \theta_5 = y_3^2 + \dot{y}_3 \end{cases}$$

et finalement, on a :

$$\begin{cases} x_2 = y_1 + \dot{y}_1 \\ \theta_1 = \frac{\dot{y}_1 + \ddot{y}_1 + y_1 (y_1 + \dot{y}_1)}{y_2} \\ \theta_3 = \frac{y_2 + \dot{y}_2}{y_1} \\ \theta_5 = \frac{y_3^2 + \dot{y}_3}{y_1 + \dot{y}_1} \end{cases}$$

Il est donc clair qu'on peut avoir des problèmes de singularité dans l'estimation des paramètres  $\theta_1$ ,  $\theta_3$  et  $\theta_5$ .

A partir de l'équation (5.13), l'utilisation de la méthode proposée nous conduit donc à définir :

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{t-T}^t ((y_1 + \dot{y}_1) - z_1) ds \\ S_2 &= \int_{t-T}^t y_2 ((\dot{y}_1 + \ddot{y}_1 + y_1^2 + y_1 \dot{y}_1) - y_2 z_2) ds \\ S_3 &= \int_{t-T}^t y_1 ((y_2 + \dot{y}_2) - y_1 z_3) ds \\ S_4 &= \int_{t-T}^t (y_1 + \dot{y}_1) ((y_3^2 + \dot{y}_3) - (y_1 + \dot{y}_1) z_4) ds \end{aligned}$$

Nous pouvons alors suivre la forme proposée (5.14) pour concevoir un observateur en temps fini pour estimer les paramètres identifiables  $z = (x_2, \theta_1, \theta_3, \theta_5)^T$ .

La simulation numérique a été réalisée à l'aide de la méthode d'Euler avec un pas fixe  $h = 0,001$ . Les conditions initiales sont  $x(0) = [1, 3, 1, 1, 1, 1]^T$ ,  $z(0) = [3, 0, 0, 0]^T$  et  $\hat{\theta}(0) = [5, 0, 3, 0, -1, 0]^T$ . Les valeurs réelles des paramètres inconnus sont  $(\theta_1, \theta_3, \theta_5)^T = (1, 2, 4)^T$ . Les figures suivantes montrent les résultats des simulations.

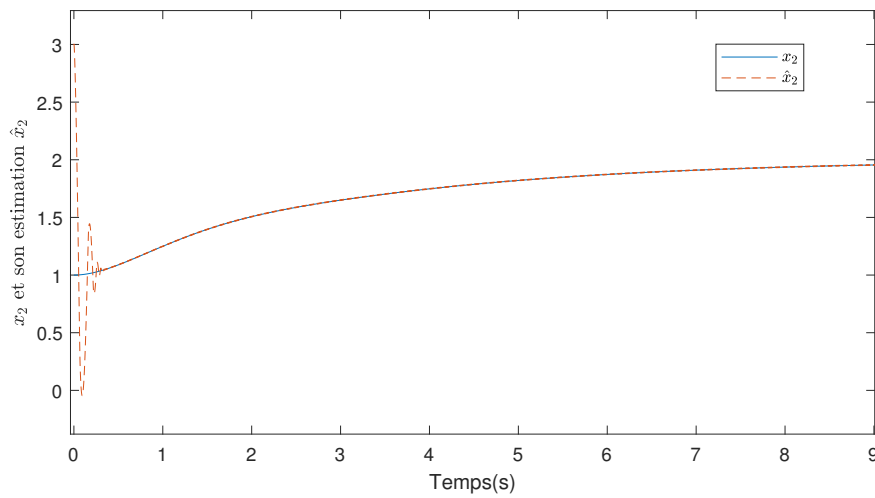


FIGURE 5.2 – L'état  $x_2$  et son estimation  $\hat{x}_2$

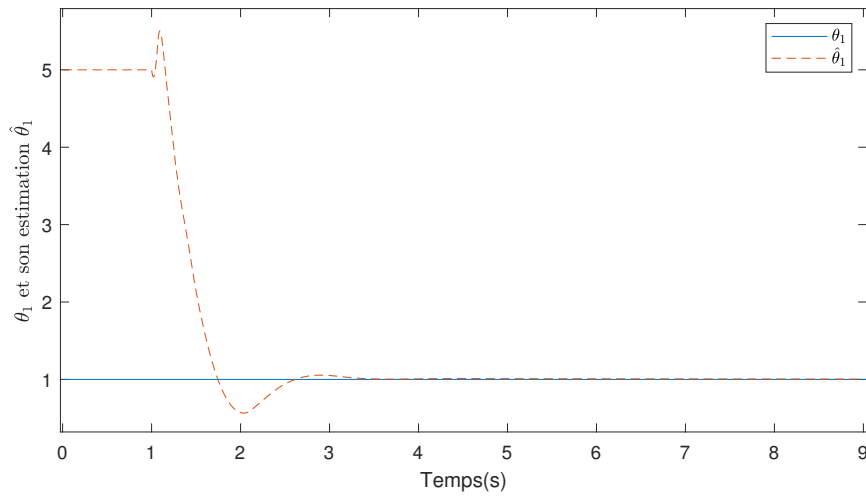


FIGURE 5.3 – Paramètre  $\theta_1$  et son estimation  $\hat{\theta}_1$

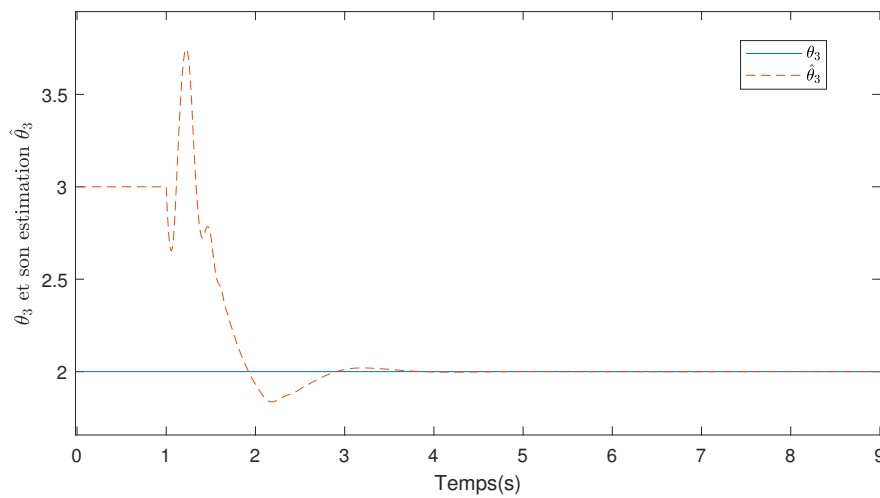
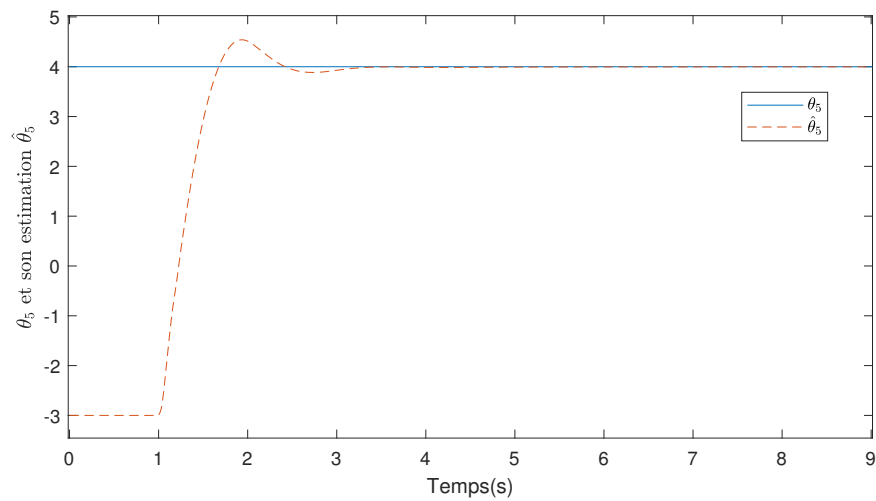


FIGURE 5.4 – Paramètre  $\theta_3$  et son estimation  $\hat{\theta}_3$

FIGURE 5.5 – Paramètre  $\theta_5$  et son estimation  $\hat{\theta}_5$ 

Les Figures 5.2, 5.3, 5.4 et 5.5 montrent respectivement que les estimations de l'état  $x_2$  et des paramètres inconnus  $\theta_1$ ,  $\theta_3$  et  $\theta_5$  qui convergent bien en temps fini. Ce qui montre aussi que le problème de singularité a bien été surmonté dans les estimations des paramètres inconnus.

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'identifiabilité partielle ou totale de paramètres inconnus des interconnexions entre plusieurs systèmes dynamiques. Un observateur en temps fini a été proposé pour estimer les valeurs des paramètres identifiables. Les résultats de simulation de l'exemple illustratif prouvent l'efficacité de l'observateur proposé. Dans le chapitre qui va suivre, nous étendrons les résultats obtenus à un réseau de systèmes dynamiques non linéaires avec entrées inconnues.





# Estimation pour les systèmes non linéaires à entrées inconnues

## Sommaire

6.1	Introduction . . . . .	113
6.2	Formulation du problème . . . . .	113
6.3	Observabilité et Identifiabilité . . . . .	115
6.4	Exemple illustratif . . . . .	117
6.5	Conclusion . . . . .	122

## 6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'observations des systèmes non linéaires avec des paramètres constants mais inconnus et des entrées inconnues. Ces entrées inconnues peuvent être des perturbations ou des bruits. Étant donné que nous ne connaissons pas la dynamique des entrées inconnues, le but de notre travail est de pouvoir estimer partiellement ou globalement les paramètres inconnus sans que le résultat ne soit influencé par ces entrées inconnues. Pour y parvenir, nous allons adapter l'algorithme élaboré dans le chapitre précédent pour les systèmes non linéaires sans entrées inconnues aux systèmes non linéaires avec des entrées inconnues.

## 6.2 Formulation du problème

Cette partie est consacrée à l'extension des résultats obtenus dans le chapitre précédent aux systèmes de la même classe mais avec des entrées inconnues. Pour cela, nous considérons un réseau de  $k$  systèmes dynamiques avec des paramètres d'interconnexion constants mais inconnus et des entrées inconnues.

Supposons que chaque sous système  $\Sigma_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) impliqué dans le réseau considéré peut être

modélisé mathématiquement sous la forme suivante :

$$\Sigma_i : \begin{cases} \dot{x}_i = \bar{f}_i(x_i) + \sum_{j=1}^{q_i} \varphi_{i,j}(x_j)\theta_{i,j} + \tilde{g}_i(x_i)\vartheta_i \\ \dot{\theta}_i = 0 \\ y_i = \bar{h}_i(x_i) \end{cases} \quad (6.1)$$

où  $x_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i})^T \in \mathbb{R}^{n_i}$  représente l'état du sous système  $\Sigma_i$ ,  $y_i = (y_{i,1}, \dots, y_{i,p_i})^T \in \mathbb{R}^{p_i}$  la sortie,  $\vartheta_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  le vecteur des entrées inconnues et  $\tilde{g}_i(x) = (\tilde{g}_{i,1}, \dots, \tilde{g}_{i,m_i}) \in \mathbb{R}^{n_i \times m_i}$  la matrice des entrées inconnues. Le vecteur des paramètres  $\theta_i = (\theta_{i,1}, \dots, \theta_{i,q_i})^T \in \mathbb{R}^{q_i}$  représente les coefficients d'interconnexion **constants mais inconnus** réalisant les interconnexions topologiques entre différents sous systèmes du réseau. Le vecteur des fonctions  $\varphi_{i,j}(x_j) = (\varphi_{i,j}^1(x_j), \dots, \varphi_{i,j}^{n_i}(x_j))^T \in \mathbb{R}^{n_i}$  représente les informations qu'un sous système  $\Sigma_j$  injecte dans le sous système  $\Sigma_i$  via la connexion réalisée par les paramètres  $\theta_i$ . Donc, la matrice des fonctions  $\varphi_i(x) = (\varphi_{i,1}^T(x_1), \dots, \varphi_{i,q_i}^T(x_{q_i}))^T \in \mathbb{R}^{n_i \times q_i}$  représente l'ensemble des informations injectées par le réseau dans le sous système  $\Sigma_i$ .

Pour simplifier notre investigation, notons  $n = \sum_{i=1}^k n_i$ ,  $m = \sum_{i=1}^k m_i$ ,  $p = \sum_{i=1}^k p_i$  et  $q = \sum_{i=1}^k q_i$ . Définissons  $x = (x_1^T, \dots, x_k^T)^T \in \mathbb{R}^n$  le vecteur des états du réseau global des systèmes dynamiques,  $y = (y_1^T, \dots, y_k^T)^T \in \mathbb{R}^p$  le vecteur des sorties mesurées,  $\vartheta = (\vartheta_1^T, \dots, \vartheta_k^T)^T \in \mathbb{R}^m$  le vecteur des entrées inconnues et  $\theta = (\theta_1^T, \dots, \theta_k^T)^T \in \mathbb{R}^q$  le vecteur des paramètres inconnus. On peut alors écrire l'ensemble du système de réseau sous la forme compacte suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{f}(x) + \varphi(x)\theta + \tilde{g}(x)\vartheta \\ \dot{\theta} = 0 \\ y = \bar{h}(x) \end{cases} \quad (6.2)$$

où  $\bar{f}(x) = (\bar{f}_1^T(x_1), \dots, \bar{f}_k^T(x_k))^T$ ,  $\bar{h}(x) = (\bar{h}_1^T(x_1), \dots, \bar{h}_k^T(x_k))^T$ ,  $\tilde{g}(x) = (\tilde{g}_1^T(x_1), \dots, \tilde{g}_k^T(x_k))^T$ ,  $\varphi(x) = \text{diag}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x))$ .

Tant que les paramètres inconnus sont considérés comme étant constant, on peut les traiter comme étant des variables d'états additionnels dont la dynamique est nulle ( $\dot{\theta} = 0$ ). Pour cela, notons  $\xi = \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$ . Alors le système (6.2) peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = f(\xi) + \tilde{g}(\xi)\vartheta \\ y = h(\xi) \\ z = P\xi \end{cases} \quad (6.3)$$

où  $\xi \in \mathbb{R}^{n+q}$ ,  $f(\xi) = \bar{f}(x) + \varphi(x)\theta$ ,  $h(\xi) = \bar{h}(x)$  et  $\tilde{g}(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+q) \times m}$ . Le vecteur  $z \in \mathbb{R}^p$  représente les variable à identifier et  $P \in \mathbb{R}^{p \times (n+q)}$  est une matrice constante introduite pour simplifier la présentation de l'observabilité des états et de l'identifiabilité des paramètres inconnus dans la suite de notre travail.

**Remarque 6.1.** On serait tenté de faire la même chose pour les entrées inconnues (c'est à dire les traiter

comme des variables d'état supplémentaires). Mais ceci est impossible vu que nous ne connaissons pas la dynamique des entrées inconnues. Le problème des entrées inconnues sera donc traité différemment dans la suite.

Pour  $\vartheta = 0$  et en fonction des différents choix de la matrice  $P$ , l'estimation de  $z$  peut être interprétée de différentes manières comme dans le chapitre précédent. Les Définitions, Remarques et Théorème du chapitre 5 sont aussi valables dans ce chapitre.

A partir de la forme compacte déduite (6.3), nous allons chercher dans la section suivante les conditions qui garantissent l'identifiabilité partielle ou globale des paramètres constants inconnus en présence des entrées inconnues.

### 6.3 Observabilité et Identifiabilité

Cette section est consacré à la généralisation des résultats obtenus dans le chapitre précédent. En plus des hypothèses imposées pour l'estimation des paramètres inconnus, d'autres conditions sont ajoutées et l'algorithme est adapté aux systèmes avec des entrées inconnues. Rappelons que sans perte de généralité, on suppose toujours que les composantes de  $h$  du système (6.3) sont linéairement indépendantes.

Notons que l'algorithme du chapitre précédent n'est pas efficace pour les systèmes avec des entrées inconnues. Compte tenu de ce fait et pour en déduire la condition suffisamment faible de l'identifiabilité des paramètres en présence des entrées inconnues, nous allons optimiser l'algorithme précédent. Mais avant cela, rappelons aussi que pour tout entier  $b_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , nous définissons

$$\omega = \{h_1, \dots, L_f^{b_1} h_1, \dots, h_p, \dots, L_f^{b_p} h_p\},$$

et  $\Xi = \{\mathcal{X} + \Theta\}$ . Nous avons

$$\mathcal{F} = \Xi \cap \text{span}_\omega\{d\omega\}$$

En tenant compte des résultats obtenus dans [BARBOT et al., 2009], définissons aussi  $G = \text{span}\{\tilde{g}(\xi)\} = \text{span}\{\tilde{g}_1(\xi), \dots, \tilde{g}_m(\xi)\}$  et son annihilateur  $G^\perp$  tels que  $G^\perp G = 0$ .

Définissons

$$V = (L_f^{b_1} h_1, \dots, L_f^{b_p} h_p)^T$$

et

$$\Gamma = \begin{pmatrix} L_{\tilde{g}_1} L_f^{b_1} h_1 & \cdots & L_{\tilde{g}_m} L_f^{b_1} h_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\tilde{g}_1} L_f^{b_p} h_p & \cdots & L_{\tilde{g}_m} L_f^{b_p} h_p \end{pmatrix}.$$

L'algorithme suivant est alors proposé pour assouplir la condition d'identifiabilité du Théorème 5.2. Il est similaire à l'algorithme 5.1 proposé dans le chapitre 5 auquel de nouvelles conditions sont ajoutées pour étendre son efficacité aux classes de systèmes dynamiques avec des entrées inconnues.

**Algorithme 6.1.**

1. *Initialisation :*

- $b_j = 0, j = 1, \dots, p;$
- $\omega_0 = \{\omega_{1,0}, \dots, \omega_{p,0}\}$  avec  $\omega_{j,0} = \{h_j\};$
- $\mathcal{F}_0 = \{\mathcal{F}_{1,0}, \dots, \mathcal{F}_{p,0}\} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_0}\{d\omega_0\}$  avec  $\mathcal{F}_{j,0} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{j,0}}\{d\omega_{j,0}\};$
- Définir  $G = \text{span}\{\tilde{g}_1(\xi), \dots, \tilde{g}_m(\xi)\};$
- $i = 1$  et  $l = 0.$

2. *Itération  $i$  :* Calculer  $\mathcal{L}_i = \text{span}_{\omega_{i-1}}\{d\omega_{i-1}\}$  et  $G^\perp$  l'annihilateur de  $G$  tel que

$$G^\perp = \text{span}\{\bar{\vartheta} \in \mathcal{L}_i \mid \bar{\vartheta} \tilde{g} = 0, \forall \tilde{g} \in G\};$$

3. Calculer  $\partial\Omega_i = \frac{\partial\omega_{i-1}^T}{\partial\xi};$

4. Pour une matrice  $P$  donnée, déterminer la matrice  $\mathcal{K}_i(\xi)$  telle que  $P = \mathcal{K}_i(\xi)\partial\Omega_i$ . Ensuite, noter  $\mathcal{K}_i^j(\xi)$  la  $j$ ème ligne de la matrice  $\mathcal{K}_i(\xi);$

5. Vérifier :

- si tous les éléments des vecteurs  $\mathcal{K}_i^j(\xi) \notin \mathcal{L}_i$ , alors aller à l'étape 6;
- Dans le cas contraire, aller à l'étape 11;

6. Calculer  $V_i = \left(L_f^{b_1} h_1, \dots, L_f^{b_p} h_p\right)^T$  et  $\Gamma_i = \begin{pmatrix} \Gamma_{1,i} \\ \vdots \\ \Gamma_{p,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{\tilde{g}_1} L_f^{b_1} h_1 & \cdots & L_{\tilde{g}_m} L_f^{b_1} h_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\tilde{g}_1} L_f^{b_p} h_p & \cdots & L_{\tilde{g}_m} L_f^{b_p} h_p \end{pmatrix};$

- Vérifier si  $\Gamma_i = 0$  alors aller à l'étape 8;
- Sinon, aller à l'étape 7;

7. Déterminer  $G^\perp \cap \mathcal{L}_i$ . Noter  $\Upsilon_i = \{\bar{\vartheta} \in G^\perp \cap \mathcal{L}_i \mid \bar{\vartheta} V_i \notin \omega_{i-1}\};$

Si  $\Upsilon_i \neq 0$  alors il existe une nouvelle sortie fictive. Incrémenter  $l$  puis calculer  $\bar{y} = \bar{\vartheta} V_i$  et  $y_{p+l} = \bar{y} \bmod \omega_{i-1}$ . Ensuite, recalculer  $\Gamma_i = (\Gamma_{1,i}, \dots, \Gamma_{p+l,i})^T$  avec  $\Gamma_{p+l,i} = 0$ .

8. Calculer :

- $\omega_i = \{\omega_{1,i}, \dots, \omega_{p+l,i}\}$  avec  $\omega_{j,i} = \{h_j, \dots, h_j^{(b_j+1)}\}, j = 1, \dots, p+l;$
- $\mathcal{F}_i = \{\mathcal{F}_{1,i}, \dots, \mathcal{F}_{p+l,i}\} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_i}\{d\omega_i\}$  avec  $\mathcal{F}_{j,i} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{j,i}}\{d\omega_{j,i}\};$

9. Vérifier si  $\mathcal{F}_{j,i} \not\subset \{\mathcal{F}_{i-1} \cup \{\mathcal{F}_i \setminus \mathcal{F}_{j,i}\}\}$  et  $\Gamma_{j,i} = 0$ , alors faire  $b_j = b_j + 1;$

10. Vérifier :

- si  $\mathcal{F}_{i-1} \subset \mathcal{F}_i$ , alors faire  $i = i + 1$  puis retourner au 2 pour l'itération suivante;
- Dans le cas contraire, aller au 11;

11. Fin de l'algorithme.

Alors noter

$$\partial\Omega(\xi) = \partial\Omega_i(\xi), \mathcal{L} = \mathcal{L}_i, \text{ et } \mathcal{K}(\xi) = \mathcal{K}_i(\xi).$$

Si l'algorithme se termine de façon négative, c'est-à-dire qu'à la fin de l'algorithme  $\mathcal{K}(\xi) \notin \mathcal{L}$ , alors  $z$  n'est pas observable.

La nouveauté dans cet algorithme concerne l'introduction de  $\Upsilon$  qui permet d'inhiber l'effet des entrées inconnues afin de pouvoir calculer les dérivées d'ordre supérieur des sorties sous certaines conditions. Des sorties fictives peuvent alors être déduites à partir des sorties réelles mesurées [BARBOT et al., 2009]. Notons que cette opération peut engendrer des singularités dans l'estimation des états et des paramètres (singularités apparaissant dans l'estimation des sorties fictives).

**Théorème 6.1.** *S'il existe  $\mathcal{K}(\xi)$  telle que  $P = \mathcal{K}(\xi)\partial\Omega(\xi)$  et que  $\mathcal{K}^j(\xi) \in \mathcal{L}$  alors  $z$  est observable.*  $\diamond$

La preuve est la même que pour le Théorème 5.3.

Si l'algorithme se termine de manière positive, connaissant  $P$ ,  $\mathcal{K}(\xi)$  et  $\partial\Omega$ , on peut alors déduire  $z$  comme présenté dans le **Chapitre 5** :

$$z = F(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)})$$

où  $F(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)})$  est une fonction rationnelle et  $l \in \mathbb{N}$ .

Un observateur similaire à celui proposé dans le **Chapitre 5** peut alors être réalisé pour l'estimation de  $z$ .

## 6.4 Exemple illustratif

Pour illustrer l'efficacité du nouvel algorithme, nous allons considérer un réseau de trois systèmes dynamiques interconnectés comme le montre la Figure 6.1. Les interconnexions sont réalisées via des paramètres inconnus mais constants qui sont représentés par le vecteur  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_5)^T$ .

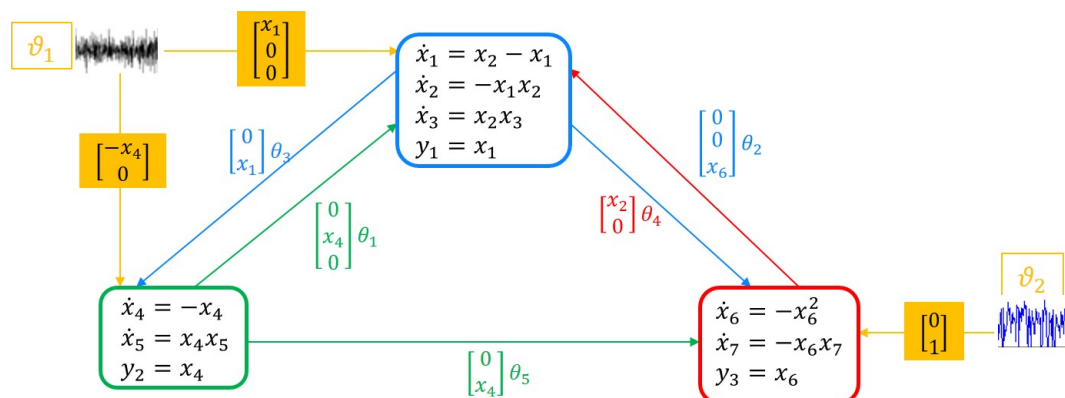


FIGURE 6.1 – Réseau formé par 3 systèmes avec des entrées inconnues

La dynamique de l'ensemble du réseau est donc décrite par la forme compacte suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1 + x_1 \vartheta_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_2 + \theta_1 x_4 \\ \dot{x}_3 = -x_2 x_3 + \theta_2 x_6 \\ \dot{x}_4 = x_4 - x_4 \vartheta_1 \\ \dot{x}_5 = x_4 x_5 - \theta_3 x_1 \\ \dot{x}_6 = -x_6^2 + \theta_4 x_2 \\ \dot{x}_7 = -x_6 x_7 + \theta_5 x_4 + \vartheta_2, \\ y = (x_1, x_4, x_6)^T \end{cases} \quad (6.4)$$

où le vecteur  $x = (x_1, x_2, \dots, x_7)^T$  représente les états du réseau global,  $y = (y_1, y_2, y_3)^T$  le vecteur des sorties mesurées et  $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)^T$  le vecteur des entrées inconnues.

En considérant les paramètres inconnus comme étant des états additionnels, c'est-à-dire en définissant  $\xi = (x, \theta)^T$ , le système (6.4) peut alors être réécrit sous la forme du système (6.3) comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = f(\xi) + g(\xi)\vartheta \\ y = (y_1, y_2, y_3)^T \end{cases} \quad (6.5)$$

où  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{12}) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)^T$ ,

$f(\xi) = (\xi_2 - \xi_1, \xi_2 + \xi_4 \xi_8, -\xi_3 + \xi_6 \xi_9, -\xi_4, -\xi_4 + \xi_1 \xi_{10}, \xi_6 + \xi_2 \xi_{11}, -\xi_7 + \xi_4 \xi_{12}, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ , et

$$g(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & -\xi_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

Dans cet exemple, nous voulons vérifier l'observabilité de l'état  $x_2$  et l'identifiabilité des paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_4$ . Pour cela, nous avons choisi la matrice  $P$  correspondante comme suit :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et par conséquent, nous avons  $z = P\xi = (x_2, \theta_1, \theta_4)^T$ .

En appliquant l'Algorithme 6.1 au réseau considéré dans cet exemple, nous avons :

1. Initialisation :

—  $\omega_0 = \{\omega_{1,0}, \omega_{2,0}, \omega_{3,0}\}$ , avec  $\omega_{1,0} = \{y_1\}$ ,  $\omega_{2,0} = \{y_2\}$  et  $\omega_{3,0} = \{y_3\}$ ;

—  $\mathcal{F}_0 = \{\mathcal{F}_{1,0}, \mathcal{F}_{2,0}, \mathcal{F}_{3,0}\}$  avec  $\mathcal{F}_{1,0} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{1,0}}\{d\omega_{1,0}\}$ ,  $\mathcal{F}_{2,0} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{2,0}}\{d\omega_{2,0}\}$ ,  $\mathcal{F}_{3,0} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{3,0}}\{d\omega_{3,0}\}$ ;

$$— G = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & -\xi_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \text{ dont l'annihilateur est}$$

$$G^\perp = \text{span}\{d\xi_2, d\xi_3, d\xi_5, d\xi_6, d\xi_8, d\xi_9, d\xi_{10}, d\xi_{11}, d\xi_{12}, \xi_4 d\xi_1 + \xi_1 d\xi_4\};$$

$$— b_1 = b_2 = b_3 = 0 \text{ et } i = 1.$$

2. Itération 1 (i=1). On a

$$— \mathcal{L}_1 = \text{span}_{\omega_0}\{d\omega_0\} = \text{span}_{\omega_0}\{d\xi_1, d\xi_4, d\xi_6\};$$

$$— \partial\Omega_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$— \text{et } \mathcal{K}_1(\xi) = P[\partial\Omega_1]_R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que pour  $j = 1, 2$ ,  $\mathcal{K}_1^j(\xi) \notin \mathcal{L}_1$ . Alors :

$$— \text{On calcule } V_1 = \begin{pmatrix} \xi_2 - \xi_1 \\ \xi_4 \\ -\xi_6^2 + \xi_2 \xi_{11} \end{pmatrix} \text{ et } \Gamma_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ -\xi_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$— \text{On détermine maintenant } G^\perp \cap \mathcal{L}_1 = \text{span}\{d\xi_6, \xi_4 d\xi_1 + \xi_1 d\xi_4\};$$

$$— \text{Ensuite on détermine aussi } \Upsilon_1 = \text{span}\{\bar{\vartheta} \in G^\perp \cap \mathcal{L}_1 \mid \bar{\vartheta} V_1 \notin \omega_0\} = \text{span}\{\xi_4 d\xi_1 + \xi_1 d\xi_4\}$$

$$— \text{On constate que } \Upsilon_1 \neq 0, \text{ donc on incrémente } l = 1 \text{ et on définit } b_4 = 0,$$

$$\bar{y} = \bar{\vartheta} V_1 = (\xi_2 - \xi_1)\xi_4 + \xi_4 \xi_1 = \xi_2 \xi_4 \text{ puis } y_4 = \bar{y} \text{ mod } \omega_0 = \xi_2 \text{ pour } \xi_4 \neq 0.$$

3. Nous pouvons alors calculer :

$$— \omega_1 = \{\omega_{1,1}, \omega_{2,1}, \omega_{3,1}, \omega_{4,1}\} \text{ avec } \omega_{1,1} = \{y_1, \dot{y}_1\}, \omega_{2,1} = \{y_2, \dot{y}_2\}, \omega_{3,1} = \{y_3, \dot{y}_3\} \text{ et } \omega_{4,1} = \{y_4, \dot{y}_4\};$$

$$— \mathcal{F}_1 = \{\mathcal{F}_{1,1}, \mathcal{F}_{2,1}, \mathcal{F}_{3,1}, \mathcal{F}_{4,1}\} \text{ avec } \mathcal{F}_{j,1} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{j,1}}\{d\omega_{j,1}\}$$

4. On peut donc vérifier que

$$— \Gamma_{1,1} \neq 0 \text{ donc } b_1 = 0;$$

$$— \Gamma_{2,1} \neq 0 \text{ donc } b_2 = 0;$$

$$— \mathcal{F}_{3,1} \not\subset \{\mathcal{F}_0 \cap \{\mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_{3,1}\}\} \text{ et } \Gamma_{3,1} = 0 \text{ donc on incrémente } b_3 \text{ d'où } b_3 = 1;$$

$$— \mathcal{F}_{4,1} \not\subset \{\mathcal{F}_0 \cap \{\mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_{4,1}\}\} \text{ et } \Gamma_{4,1} = 0, \text{ on incrémente donc } b_4 \text{ ce qui nous donne } b_4 = 1;$$

Notons que  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1$ , donc nous pouvons procéder à l'itération suivante.

5. Itération 2 (i=2). Nous avons

$$\begin{aligned}
& \text{— } \mathcal{L}_2 = \text{span}_{\omega_1} \{d\omega_1\} = \text{span}_{\omega_1} \{d\xi_1, d\xi_2, d\xi_4, d\xi_6, d\xi_8, d\xi_{11}\}; \\
& \text{— } \partial\Omega_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{11} & 0 & 0 & 0 & -2\xi_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\xi_2 & -\xi_1 & 0 & \xi_8 & 0 & 0 & 0 & \xi_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et} \\
& \text{— } \mathcal{K}_2(\xi) = P[\partial\Omega_2]_R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\xi_2}{\xi_4} & \frac{-\xi_8}{\xi_4} & 0 & 0 & \frac{1}{\xi_4} & \frac{1}{\xi_4} \\ 0 & 0 & \frac{2\xi_6}{\xi_2} & \frac{1}{\xi_2} & \frac{-\xi_{11}}{\xi_2} & 0 \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

6. Pour  $j = 1, 2$ , on peut vérifier que  $\mathcal{K}_2^j(\xi) \in \mathcal{L}_2$ , donc on arrête l'algorithme puis on note  $\partial\Omega = \partial\Omega_2$  et  $\mathcal{K}(\xi) = \mathcal{K}_2(\xi)$ .

On conclut donc que  $z$  est observable, c'est-à-dire que l'état  $x_2$  est observable et les paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_4$  sont identifiables.

On peut alors proposer un observateur en temps fini comme dans le chapitre 5 pour estimer l'état  $x_2$  et les paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_4$ .

Alors, à partir de  $P = \mathcal{K}(\xi)\partial\Omega$  et  $z = P\xi$ , on a :

$$dz = Pd\xi = \mathcal{K}(\xi)\partial\Omega d\xi \text{ avec } d\Omega = \partial\Omega d\xi.$$

Sachant que  $d\omega = (dy_1, dy_2, dy_3, \dot{y}_3, dy_4, d\dot{y}_4)^T$ , on obtient

$$\begin{cases} d\xi_2 & = dy_4 \\ d\xi_8 & = \frac{\xi_2}{\xi_4} dy_1 - \frac{\xi_8}{y_2} dy_2 + \frac{1}{y_2} dy_4 + \frac{1}{y_2} d\dot{y}_4 \\ d\xi_{11} & = \frac{2\xi_6}{y_4} dy_3 + \frac{1}{y_4} d\dot{y}_3 - \frac{\xi_{11}}{y_4} dy_4 \end{cases}$$

ce qui implique que

$$\begin{cases} d\xi_2 & = dy_4 \\ d(\xi_8 y_2) & = d(y_1 y_4 + \dot{y}_4) \\ d(\xi_{11} y_4) & = d(y_3^2 + \dot{y}_3) \end{cases}$$

et au final, on obtient

$$\begin{cases} x_2 & = \xi_2 = y_4 \\ \theta_1 & = \xi_8 = \frac{y_1 y_4 + \dot{y}_4}{y_2} \\ \theta_4 & = \xi_{11} = \frac{y_3^2 + \dot{y}_3}{y_4} \end{cases}$$

avec  $y_4 = x_2 = \frac{1}{y_2}(\dot{y}_1 y_2 + y_1 \dot{y}_2)$  pour  $y_2 \neq 0$ .

Les résultats obtenus montrent bien que l'algorithme proposé permet sous certaines conditions d'observer les états et d'identifier les paramètres inconnus de manière partielle ou globale.



On peut donc utiliser le même observateur que dans le Chapitre 5 pour estimer l'état  $x_2$  et les paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_4$ .

La simulation numérique a été réalisée à l'aide de la méthode d'Euler avec un pas fixe  $h = 0.001$ . Les conditions initiales sont  $x(0) = [1, 1, 1, 1, 1, 1]^T$ ,  $\hat{x}(0) = [0, 2, 3, 1, -1, -3, 0]^T$ ,  $\hat{\theta}(0) = [3, 0, 0, 5, 0]^T$  et les valeurs réels des paramètres  $[\theta_1, \theta_4]^T = [1, 2]^T$ . Les figures 6.2, 6.3 et 6.4 suivantes montrent les résultats de simulation pour l'estimation de l'état  $x_2$  et des paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_4$ .

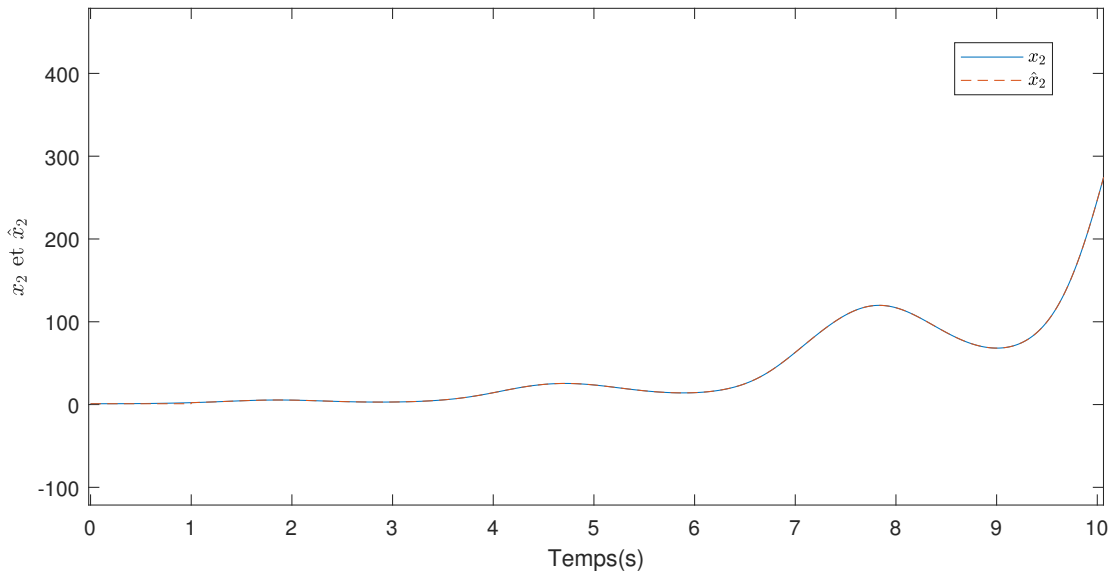


FIGURE 6.2 – L'état  $x_2$  et son estimation  $\hat{x}_2$

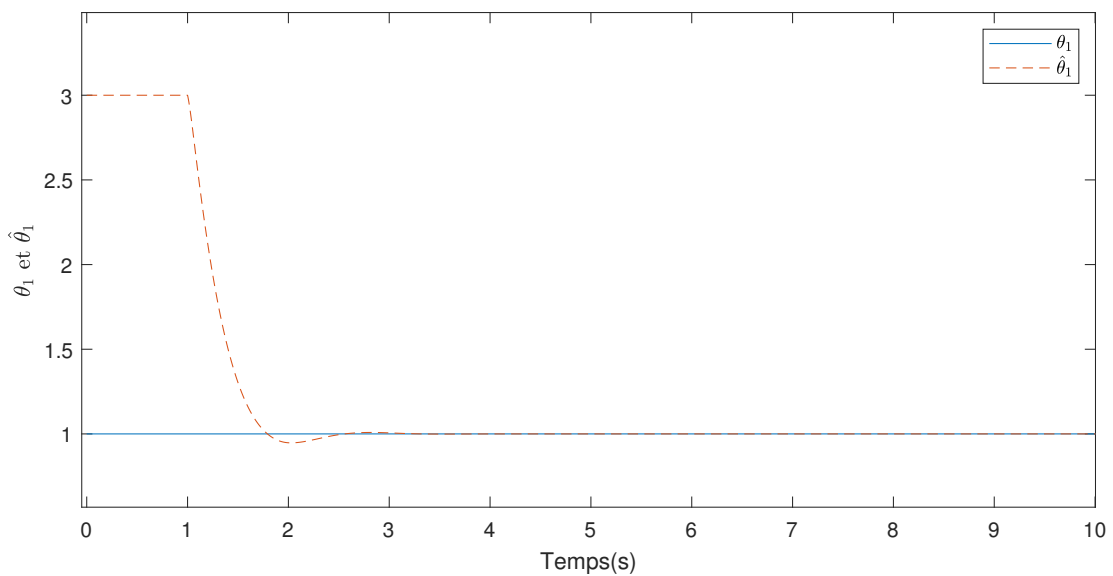
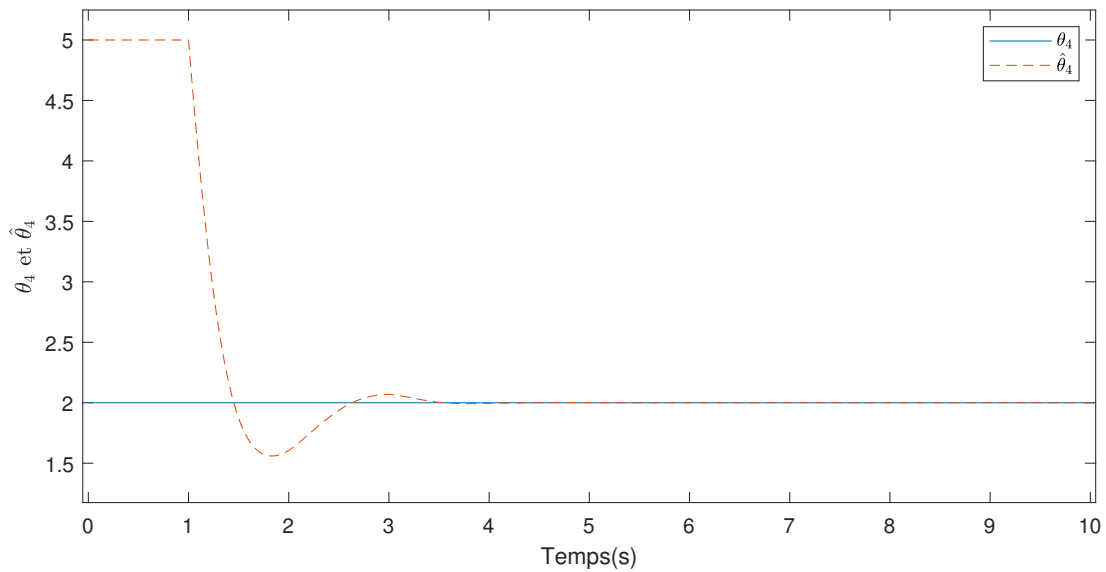


FIGURE 6.3 – Paramètre  $\theta_1$  et son estimation  $\hat{\theta}_1$

FIGURE 6.4 – Paramètre  $\theta_4$  et son estimation  $\hat{\theta}_4$ 

## 6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'identifiabilité partielle ou globale de paramètres inconnus des interconnexions entre plusieurs systèmes dynamiques d'un réseau en présence des entrées inconnues. Un observateur à mode glissant a été proposé pour estimer les valeurs des paramètres identifiables. Un exemple a été donné et des simulations ont été effectuées pour illustrer les résultats obtenus. Notons que les résultats décrits ici sont obtenus à partir des résultats du chapitre précédent. Dans la suite de nos travaux, nous allons nous intéresser aux cas de réseau de systèmes dynamiques non linéaires à entrées inconnues et avec retard.