Notions de logique et étude du langage mathématique

Sommaire

Je présente dans ce chapitre les notions de logique qui sont des éléments constitutifs du langage mathématique : proposition, variable, connecteur, quantificateur.

Je précise d'abord ce que j'appelle *langage mathématique*, qui se rapporte à ce qui concerne les objets mathématiques, et eux uniquement. Je le distingue notamment du *discours mathématique* dont il est une partie seulement, et qui concerne plus largement les objets mathématiques mais aussi des personnes qui les manipulent.

À l'instar de ce qui est fait dans les systèmes logiques que nous avons étudiés au premier chapitre, je précise ensuite en premier lieu ce que recouvre l'expression *proposition mathématique*, non pas en donnant une définition mathématique, mais en me basant sur une conception intuitive de cette notion, tout en attirant l'attention sur certaines idées erronées. Je fais ensuite de même pour la notion de variable, en insistant particulièrement sur la distinction entre variable libre et variable liée qui me paraît essentielle pour la compréhension des énoncés mathématiques (connaître le statut des variables qui interviennent dans un énoncé permet de savoir de qui parle cet énoncé). L'approche de ces deux notions se limite ainsi à une présentation naïve, mais en adéquation avec la façon dont peut les définir la logique mathématique. Je rappelle que ces deux notions sont absentes des programmes, et, à ma connaissance, elles n'ont pas été l'objet de travaux didactiques spécifiques (du point de vue de la logique, puisque la notion de variable est certes présente dans les travaux de didactique de l'algèbre, mais essentiellement d'un point de vue cognitif).

La présentation de ces notions est un préalable à celle des connecteurs et des quantificateurs. Pour les connecteurs ET et OU, la négation, l'implication, et pour les quantificateurs, j'adopte de façon systématique les trois approches déjà mentionnées :
- à partir de la logique mathématique, qui ancre les notions dans une référence épistémologiquement adéquate ;
- à partir de l'étude des pratiques langagières des mathématiciens à travers l'expression de ces notions dans le discours mathématique (je relève notamment des implicites et des ambiguïtés qui sont potentiellement sources de difficulté pour les élèves),
- à partir de travaux didactiques, qui ont mis en évidence et analysé des difficultés des élèves (à ma connaissance, ces travaux n'ont jamais spécifiquement porté sur les connecteurs ET et OU).

3.1 Langage mathématique, discours mathématique, expressions mathématiques

Les linguistes distinguent la langue, qui est un système de signes qui permet la communication, du langage, qui est la mise en activité de la langue, par un sujet, à des fins de communication (voir par exemple Rebière, 2013, p. 221). En logique mathématique, un langage est un ensemble de signes, avec lesquels sont construites les formules (voir la définition d'une formule en annexe page 446). C'est dans le sens des linguistes qu'il faut entendre *langage* dans l'expression *langage des mathématiciens*, mais c'est dans le sens des logiciens qu'il faut entendre *langage* dans l'expression *langage mathématique*, que je vais maintenant décrire.

Le *langage mathématique* est une partie de ce que j'appellerai *discours mathématique*, qui est l'ensemble des phrases, et de certains éléments de ces phrases (ceux à qui l'on peut donner un sens même si on les isole du reste de la phrase), prononcés, écrits, pensés dans un contexte où une ou des personnes font des mathématiques. Parmi elles, certaines sont des phrases qui disent des faits sur les objets mathématiques. Ce sont ces phrases, et certains de leurs éléments, qui constituent le *langage mathématique*. Elles sont des propositions au sens déjà donné par Aristote de phrases dans lesquelles réside le vrai ou le faux. Par exemple, la phrase « Tous les nombres réels ont un carré positif » fait partie du langage mathématique, c'est une proposition. Dans la proposition équivalente « pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$ », la formalisation dans le langage des prédicats permet d'isoler les éléments à partir desquels la proposition est construite : le quantificateur universel portant sur la variable x, et la proposition $x^2 \geqslant 0$, à l'intérieur de laquelle nous pouvons isoler des éléments qui désignent des objets mathématiques : x^2 et 0. Finalement, le *langage mathématique* est constitué d'*expressions mathématiques* qui peuvent être vues comme :

> des assemblages de signes qui obéissent à certaines règles et à certaines conventions, lesquelles peuvent être soit très générales (voire universellement admises) soit particulières à un contexte donné (un ouvrage, un chapitre, un paragraphe...) (Cori, s. d., p. 3)

Voici quelques exemples d'expressions mathématiques :

(a) $2x + y = -3$.

(b) L'ensemble des multiples de 7.

(c) $\{x \mid f(x) = a\}$.

(d) $x \mapsto \int_1^x t dt$.

(e) a est solution de l'équation $x^2 - xy = 0$ d'inconnue réelle x.

(f) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

(g) Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.

On peut classer les expressions mathématiques en deux grandes catégories :

– les expressions qui servent à désigner des objets mathématiques, que nous appellerons des NOMS (qui correspondent aux termes du langage des prédicats : voir en annexe page 449) ;
– les expressions qui disent des faits concernant les objets mathématiques ; nous les appellerons des PROPOSITIONS (qui correspondent aux formules du langage des prédicats, voir en annexe page 449). Une proposition est susceptible d'être vraie ou fausse, c'est-à-dire que cela a un sens de se demander si elle est vraie ou fausse, même si nous

ne sommes pas forcément en mesure de répondre à cette question. Nous reviendrons là-dessus dans la section suivante, qui concerne les variables.

Nous dirons que deux expressions mathématiques sont SYNONYMES si :

– ou bien ce sont deux noms et ces deux noms désignent le même objet quelles que soient les circonstances ;
– ou bien ce sont deux propositions et ces deux propositions sont en même temps vraies et en même temps fausses, quelles que soient les circonstances. Dans le cas des propositions, on dit souvent ÉQUIVALENTES au lieu de synonymes.

Je préciserai plus loin ce que signifie « quelles que soient les circonstances » (voir page 113).

Certains assemblages de signes ne sont pas des expressions mathématiques. Il en va ainsi des assemblages qui sont « mal formés », au sens où ils ne respectent pas la syntaxe des signes utilisés, par exemple : « $cos = x^2$ », « $\{x \in \mathbb{R}$ ».

D'autres assemblages sont bien formés, mais ne sont pas des expressions mathématiques. Par exemple, « nous avons donc montré que le carré d'un nombre réel est toujours positif » n'est pas une phrase du langage mathématique car elle ne dit pas un fait sur des objets mathématiques, mais un fait sur l'activité d'êtres humains. C'est une phrase du *discours mathématique*, que nous pourrions rencontrer dans un texte de démonstration. Les phrases exprimant une inférence, par exemple $(*)$: « n est pair donc n^2 est pair », ne font pas non plus partie du langage mathématique. La logique mathématique formalise de telles phrases, mais ce ne sont pas des propositions. Cela n'a effectivement pas de sens de se demander si elles sont vraies ou fausses. On pourrait être tenté de dire que la phrase $(*)$ est vraie, mais on serait gêné de dire que la phrase « 3 est pair donc 3^2 est pair » est vraie, pourtant elle n'est qu'une instanciation de la phrase $(*)$. La phrase $(*)$ exprime un raisonnement, la question qui se pose par rapport à ce raisonnement n'est pas celle de sa vérité mais celle de sa validité (voir distinction déjà faite par Aristote, page 37). Reprenant elle aussi dans sa thèse [1] un cours de D. Lacombe, F. Rakotovoavy situe de telles phrases, et d'autres qui plus généralement permettent de suivre le raisonnement, au niveau *épimathématique* :

> Nous dirons que, dans un endroit donné d'un texte mathématique donné, un certain syntagme se situe au niveau épimathématique, lorsque ce syntagme ne désigne aucun objet mathématique, mais fournit au lecteur une indication sur la manière dont il convient de compléter, de rectifier et de relier entre elles les portions strictement mathématiques du texte environnant ce syntagme, de façon à obtenir soit une proposition mathématique correcte et complète, soit une démonstration mathématique convenablement mise en forme. (Rakotovoavy, 1983, p. 14)

Autre exemple d'expression se situant au niveau *épimathématique* : « soit x un nombre réel dont le carré est inférieur à 4 ». Cette phrase sert à introduire la variable x dans

1. Intitulée « Difficultés linguistiques et pédagogiques soulevées par l'emploi, dans les textes mathématiques, de certains adjectifs marqueurs de variance. »

le discours. Il ne s'agit pas seulement de préciser dans quel ensemble la variable x peut prendre ses valeurs, cette phrase atteste d'un acte d'un locuteur qui donne un nom à un objet mathématique, et qui va ensuite dire des choses sur cet objet. Le caractère « quelconque » de cet objet permet de savoir que ce qui va être affirmé de x pourra l'être de tout nombre réel dont le carré est inférieur à 4. Par contre, une phrase telle que : « la démonstration suivante se fait facilement par récurrence » ne se situe pas au niveau *épimathématique*, c'est un commentaire sur l'activité mathématique, elle n'est pas nécessaire, même si elle peut être utile, pour suivre le raisonnement.

Revenons maintenant aux expressions mathématiques. On les utilise comme des briques qui permettent, comme dans un jeu de construction, de fabriquer d'autres expressions mathématiques. Par exemple, à partir des noms x et 1, on peut former le nom $x + 1$. Puis :

la proposition : $x + 1 = 0$,

le nom : l'équation $x + 1 = 0$,

la proposition : l'équation $x + 1 = 0$ n'a pas de solution positive.

Mettre au jour une telle construction relève d'une analyse syntaxique des expressions mathématiques. D'une certaine façon, c'est faire de la grammaire du langage mathématique. L'analyse grammaticale occupe une place importante dans l'enseignement des langues, mais elle est peu présente dans l'enseignement mathématique (bien sûr les textes officiels soulignent l'importance du travail sur l'expression en mathématiques, mais pas au sens d'un travail syntaxique).

Dans l'activité mathématique, la vocation des propositions est d'être énoncées, et cette énonciation constitue l'acte d'affirmation de leur vérité. Dans la pratique, on ne dit pas « la proposition "tous les réels ont un carré positif" est vraie » mais simplement « tous les réels ont un carré positif ». L'énonciation d'une proposition constitue un acte de langage (Austin, 1970) : l'acte d'assertion. Nous avons vu que, dans son *Idéographie*, Frege utilisait un symbole pour le jugement (voir page 66) qu'il distinguait de la « *simple combinaison d'idées*, à propos de laquelle celui qui l'écrit n'exprime pas s'il lui attribue la vérité ou non » (Frege, 1999, p. 15).

Le logicien fait alors un pas de côté pour s'intéresser aux propositions en tant qu'objets (ce que faisaient déjà Aristote et les Stoïciens, la grande nouveauté de la logique mathématique ayant été d'en faire des objets mathématiques), notamment d'un point de vue syntaxique en en analysant les constituants. C'est ce que nous allons faire maintenant, en commençant par un élément caractéristique du langage mathématique : les variables.

3.2 Variable

En mathématiques aujourd'hui, nous utilisons des lettres, majuscules ou minuscules, de différents alphabets, pour représenter les variables. Les signes « x », « f », où x et f sont des variables, constituent à eux seuls des expressions mathématiques, ce sont des noms, au même titre que les expressions « 2 », « la fonction *sinus* ». L'utilisation d'une variable en mathématiques s'accompagne de la précision du type d'objet que la variable désigne, c'est-à-dire de la mention d'un certain ensemble auquel la variable est *astreinte*. Toutes les expressions mathématiques qui peuvent être formées avec le nom « 2 » sont encore des expressions mathématiques de même nature (nom ou proposition) quand on y remplace 2 par une variable x, astreinte par exemple à l'ensemble des nombres réels (sous réserve que l'expression ait un sens pour tous les nombres réels). Ainsi, « x^2 est positif » est une proposition, au même titre que « 2^2 est positif », la première dit un fait sur un objet qui s'appelle x, la deuxième sur 2.

L'inverse n'est cependant pas vrai : si on remplace la variable x par 2 dans l'expression « pour tout réel x, x^2 est positif », on obtient « pour tout réel 2, 2^2 est positif », qui n'est pas une expression mathématique. Il y a en effet une différence fondamentale entre les propositions « 2^2 est positif » et « x^2 est positif », c'est la possibilité de former à partir de la deuxième proposition des expressions dans laquelle la variable x est *muette*, telles que « pour tout réel x, x^2 est positif ». Cette proposition ne parle pas de x, elle donne une information sur l'ensemble des nombres réels. Un cas bien connu de variable *muette* (on dit aussi variable *liée*) est la variable d'intégration dans une intégrale [2], par exemple t dans $\displaystyle\int_0^1 t^2 dt$. Cette expression est le nom d'un nombre réel, qui ne « dépend » pas d'un objet qui s'appellerait t. D'ailleurs le nombre réel désigné par cette expression a aussi pour nom $\dfrac{1}{3}$, où la variable t ne figure pas. En revanche, la variable x n'est pas muette dans l'expression $\displaystyle\int_0^x t^2 dt$, qui est syntaxiquement proche de la précédente. Ici, l'objet désigné par ce nom « dépend » de x. Un autre nom du même objet est $\dfrac{1}{3}x^3$, et il est impossible de lui trouver un nom dans lequel la variable x ne figure pas. La variable x dans cette expression est *parlante* (on dit aussi variable *libre*). On peut maintenant préciser dans quels cas on obtient encore une expression mathématique en substituant une valeur à une variable : une telle substitution est possible quand la variable est libre. Les variables libres ont ainsi un rôle de marque-place dans les expressions. Cette substitution qui conserve le statut d'expression n'est pas possible dans le cas de variables muettes : l'expression $\displaystyle\int_0^1 3^2 d3$ n'a pas de sens.

Revenons alors à la précision « quelles que soient les circonstances » utilisée dans la définition d'expressions synonymes (voir page 111). Les noms x et y ne sont pas synonymes, et les propositions $2x + 6 = 0$ et $2y + 6 = 0$ ne sont pas équivalentes. En effet, dans

2. Les manuels de Terminale utilisent cette terminologie, en disant par exemple que la variable est muette car « elle n'intervient pas dans le résultat ».

ces expressions les variables x et y sont libres, ces expressions prennent différentes « valeurs » selon les valeurs attribuées aux variables x et y, qui n'ont aucune raison d'être les mêmes. Ceci est souvent une difficulté, notamment pour les élèves qui ont en tête que « peu importe la lettre choisie pour la variable », ce qui est vrai pour les variables muettes, puisque les expressions dans lesquelles elles sont utilisées ne dépendent pas d'elles. C'est généralement à propos de variables muettes que le professeur peut être amené à tenir ce discours, par exemple à propos de la variable d'intégration. Mais quand les variables sont libres, deux variables différentes n'ont aucune raison de désigner le même objet « quelles que soient les circonstances ». Peut-être peut-on s'en convaincre en tenant le raisonnement suivant :

> Supposons que les propositions (1) $2x + 6 = 0$ et (2) $2y + 6 = 0$ soient équivalentes, ainsi que les expressions (1') $x = -3$ et (2') $y = -3$, alors toutes expressions dans lesquelles (1) et (2), ou (1') et (2'), seraient à la même place, seraient équivalentes. Par exemple, « Si $2x + 6 = 0$ alors $x = -3$ » et « Si $2x + 6 = 0$ alors $y = -3$ » seraient équivalentes. On voit assez facilement que ça n'est pas le cas.

Le statut (libre ou liée) d'une variable dans une expression est indépendant de la signification de cette expression. Il s'agit d'une notion purement syntaxique : une variable est liée quand elle est dans le champ d'un *mutificateur* (« signe qui rend muet »). Nous avons déjà vu que le signe d'intégrale $\int_{\dots}^{\dots} \dots d\dots$ est un mutificateur, il en est de même, par exemple[3], du signe de somme indexée $\sum_{\dots=\dots}^{\dots} \dots$, de la flèche d'application $\dots \mapsto \dots$, du syntagme « équation d'inconnue… », et bien sûr des quantificateurs.

Une proposition qui ne comporte pas de variables libres est une proposition *close*, par exemple la proposition « il existe un réel x tel que $x + 3 = 0$ », dans laquelle la variable x est astreinte à $\mathbb{R}$. Une proposition qui contient des variables libres est une proposition *ouverte*, par exemple la proposition « $x + 3 = 0$ », dans laquelle la variable x est astreinte à $\mathbb{R}$. On pourrait alors être tenté de donner un critère sémantique pour distinguer le statut de la variable x dans ces deux propositions : des connaissances mathématiques me permettent de savoir que la première proposition est vraie, alors qu'il n'est pas possible d'attribuer une valeur de vérité à la deuxième proposition, par manque d'information sur l'individu x. V. Durand-Guerrier dit qu'un énoncé est *contingent* pour un sujet donné à un instant donné « si ce sujet n'a pas les moyens de se prononcer sur la vérité de cet énoncé, soit que la valeur de vérité de l'énoncé ne soit pas contrainte par la situation, soit que le sujet ne dispose pas des informations nécessaires pour se prononcer » (Durand-Guerrier, 2005, p. 41). Il s'agit d'une caractéristique sémantique et pragmatique. La proposition « $x + 3 = 0$ » est contingente dans le premier sens donné par V. Durand-Guerrier. Mais les notions de proposition ouverte et de proposition contingente ne sont pas identiques : une proposition telle que « $x^2 + 3 \geqslant 0$ » dans laquelle la variable x est astreinte à $\mathbb{R}$,

3. La liste est loin d'être exhaustive.

est une proposition ouverte, pourtant elle n'est pas contingente, en tout cas pas pour un sujet qui sait que le carré d'un réel est positif, et donc que cette proposition est vraie indépendamment de la variable x.

Dans certaines activités proposées aux élèves, même si cela n'est évidemment pas demandé explicitement, et même si ça n'est pas ainsi que l'envisagent les enseignants, la tâche consiste à donner une expression sans variable muette synonyme d'une expression qui en comporte une. C'est le cas par exemple quand il leur est demandé de calculer la valeur d'une intégrale telle que $\int_0^1 x^2 dx$, de déterminer l'ensemble des solutions d'une équation (ici il s'agit de trouver une expression en extension d'un ensemble donné en compréhension [4], par exemple de $\{x \in \mathbb{R} \mid x + 3 = 0\}$). C'est aussi le cas de la première question de l'exercice suivant, extrait du manuel Transmath 1S :

95 On donne le trinôme $f(x) = mx^2 + 4x + 2(m - 1)$.

1. Pour quelles valeurs de m l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle une seule solution ? Calculez alors cette solution.

2. a) Quel est l'ensemble des nombres m pour lesquels l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions distinctes ?

b) Quel est l'ensemble des nombres m pour lesquels $f(x) < 0$ pour tout nombre x ?

FIGURE 3.1 – Exercice extrait du manuel Transmath 1S

Dans cette question il s'agit en fait de donner une proposition équivalente à « l'équation $mx^2 + 4x + 2(m - 1) = 0$ a une seule solution », en l'occurrence « $m = -1$ OU $m = 2$ » (le fait de parler de trinôme astreint de manière implicite la variable m à $\mathbb{R}^*$, sans cette restriction, la proposition équivalente serait « $m = -1$ OU $m = 2$ OU $m = 0$ »). Il est possible de faire vivre ces notions de synonymie, et de statut des variables, dans la classe de mathématiques, en soulignant cette équivalence, et le fait que les deux propositions parlent de m, lors de la correction d'un tel exercice. Elles peuvent être également pertinentes pour marquer la distinction entre la définition de « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée », et « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par M ». La première proposition est équivalente à « il existe un réel M tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par M », la variable M est mutifiée par le quantificateur existentiel, alors que dans la deuxième proposition elle est libre.

Le statut des variables dont nous parlons ici est différent de ce qui est appelé « les différents statuts de la lettre » dans certains travaux de didactique de l'algèbre, qui étudient un statut cognitif de la lettre, c'est-à-dire des conceptions que l'on peut distinguer en analysant l'utilisation des lettres par une personne lors d'une activité mathématique (voir par exemple Grugeon, 1997).

4. Un ensemble est défini en extension quand on donne la liste de ses éléments, en compréhension quand on donne une propriété caractéristique de ses éléments.

Du point de vue de l'analyse du langage mathématique, ces lettres sont toutes des variables, qui sont des noms d'objets. Ce point de vue sur les variables n'a pour l'instant pas été explicitement l'objet de recherches didactiques. Je fais l'hypothèse que plusieurs pratiques font obstacle à ce qu'il vive dans la classe de mathématiques au lycée. Tout d'abord, dans l'enseignement secondaire, les élèves entendent parler de variable essentiellement à propos de variables astreintes à des ensembles de nombres [5] (dans le contexte de l'algèbre, ou dans le contexte des fonctions). Les élèves rencontrent des lettres majuscules qui sont des noms de points du plan, ou des variables qui sont des noms de fonctions, ou de vecteurs, mais le mot « variable » n'est quasiment jamais utilisé à leur propos. Par ailleurs, comprendre qu'une variable est un nom d'objet nécessite de distinguer ce nom d'objet de l'objet lui-même, c'est-à-dire distinguer le signifiant (la variable) du signifié (un objet mathématique). Or, certaines expressions couramment utilisées masquent cette distinction, par exemple quand on dit « a et b sont des nombres réels », avant de donner les identités remarquables. Un tel énoncé est utilisé pour introduire des variables, il s'agit d'un acte d'un locuteur en train de faire des mathématiques. Il s'agit même de deux actes confondus en une seule expression : considérer deux nombres réels et les nommer a et b. À ce titre, cet énoncé se situe au niveau *épimathématique*.

3.3 Connecteurs ET et OU

3.3.1 Approche à partir de la logique mathématique

D'un point de vue syntaxique, les CONNECTEURS LOGIQUES servent à construire de nouvelles propositions à partir d'une ou plusieurs propositions. D'un point de vue sémantique, chaque connecteur logique est défini par son comportement par rapport aux valeurs de vérité des propositions utilisées dans cette construction : un connecteur logique à n places est alors défini comme une application de $\{V, F\}^n$ dans $\{V, F\}$, où V représente la valeur de vérité Vrai, et F la valeur de vérité Faux. Les connecteurs le plus souvent utilisés en mathématiques sont : NON (connecteur unaire), ET, OU, IMPLIQUE, ÉQUIVAUT À (connecteurs binaires). Je reviendrai plus en détail sur chacun d'eux.

Les connecteurs binaires ET et OU permettent à partir de deux propositions P et Q de former :
– leur conjonction, qui est la proposition (P ET Q)
– leur disjonction, qui est la proposition (P OU Q)

5. Notons cependant une nouveauté dans les programmes actuels du lycée : la présence de variables aléatoires, qui sont des fonctions, et la présence de variables en algorithmique, celles-ci présentant des différences importantes avec les variables en mathématiques. Par exemple cela n'a pas de sens en mathématiques de dire « j'affecte à la variable n la valeur $n + 1$ ».

Les *tables de vérité* suivantes indiquent le comportement des connecteurs ET et OU par rapport aux valeurs de vérité :

P	Q	P ET Q
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux
Faux	Faux	Faux

FIGURE 3.2 – Table de vérité du connecteur ET

P	Q	P OU Q
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Faux

FIGURE 3.3 – Table de vérité du connecteur OU

Un connecteur binaire est défini en associant une des valeur Vrai, Faux à chacun des quatre couples de valeurs de vérité. Il y a 16 façons de faire cela et donc 16 connecteurs binaires différents. Les tables de vérité des connecteurs ET et OU reflètent le sens des mots « et », « ou » dans la langue courante. Le fait que le connecteur OU corresponde au « ou » inclusif est un choix arbitraire. Voici quelques propriétés des connecteurs ET et OU :

– tout d'abord, on peut remarquer que (P ET Q) est vraie dans le seul cas où P est vraie et Q est vraie, et fausse dans les trois autres, et que (P OU Q) est fausse dans le seul cas où P est fausse et Q est fausse, et vraie dans les trois autres.
– les connecteurs ET et OU sont distributifs l'un par rapport à l'autre, c'est-à-dire que

$$[P \text{ ET } (Q \text{ OU } Q')] \text{ est équivalente à } [(P \text{ ET } Q) \text{ OU } (P \text{ ET } Q')]$$
$$[P \text{ OU } (Q \text{ ET } Q')] \text{ est équivalente à } [(P \text{ OU } Q) \text{ ET } (P \text{ OU } Q')]$$

– les propriétés suivantes sont appelées lois d'absorption :

$$[P \text{ ET } (P \text{ OU } Q)] \text{ est équivalente à } P$$
$$[P \text{ OU } (P \text{ ET } Q)] \text{ est équivalente à } P$$

Il y a également des règles sur le comportement de ET et OU vis-à-vis de la négation sur lesquelles nous reviendrons dans la section 3.4.

Il est naturel d'exprimer les connecteurs ET et OU dans le discours mathématique en utilisant les mots « et » et « ou ». Cependant, nous allons voir que tous les « et » utilisés dans le discours mathématique ne correspondent pas à des connecteurs ET, et que, plus souvent qu'on ne le croit, l'usage des mots « et » et « ou » en mathématiques est différent de celui qu'on en fait dans la langue courant.

3.3.2 Expression dans le discours mathématique

Différents « et » en mathématiques

La fonction syntaxique des connecteurs logiques ET et OU est de coordonner deux propositions. Mais dans la phrase « Pierre et Paul sont cousins » le mot « et » ne coordonne pas les deux propositions « Pierre est cousin » et « Paul est cousin » ; il sert à lier les éléments auxquels s'applique la propriété « être cousins » (on pourra alors parler de *et-couple*, ici la conjonction « et » n'est pas un connecteur binaire). La situation est analogue dans la proposition « les nombres m et n sont premiers entre eux ». Par contre, il y a bien coordination entre deux propositions dans la phrase « Pierre et Paul sont cousins de Jean », ou dans la proposition « les nombres m et n sont premiers » (on pourra alors parler de *et-propositionnel*). Notons par ailleurs que, dans ce deuxième cas, il n'y a pas eu seulement une opération de coordination entre les deux propositions « Pierre est cousin de Jean » et « Paul est cousin de Jean », mais aussi une sorte de *mise en facteur* d'une partie qui se répétait dans chacune des propositions, nécessitant éventuellement quelques ré-écritures (on pourra dire que le « et » de cette dernière phrase est un *et-propositionnel factorisé*). En effet, faire opérer le connecteur ET sur les propositions « Pierre est cousin de Jean » et « Paul est cousin de Jean » donne la phrase « Pierre est cousin de Jean ET Paul est cousin de Jean ». Ensuite, par « mise en facteur » de « est cousin de Jean », on obtient « Pierre et Paul est cousin de Jean », qu'il faut ré-écrire pour que les règles d'accord soient respectées, ce qui donne finalement « Pierre et Paul sont cousins de Jean ». La remarque s'applique également dans le cas de la proposition « les nombres m et n sont premiers ». La situation y est même encore plus compliquée par la présence de « les nombres » qui nécessite un rétablissement du singulier quand on veut retrouver les deux propositions sur lesquelles opère la conjonction. Nous soulignons rarement cette opération de *mise en facteur*. Pourtant, elle peut ne pas être si évidente pour des élèves qui ne maîtrisent pas bien la langue française. D'autre part, il peut y avoir des ambiguïtés quand il s'agit de retrouver les propositions élémentaires qui composent la phrase. Ainsi, que signifie « Pierre et Paul sont les frères d'Antoine et Julien » ? Que les quatre sont frères ou que Pierre est le frère d'Antoine et Paul celui de Julien ? Parfois d'autres éléments permettent de trancher. Par exemple, dans la proposition « n et m sont les successeurs de p et q », on peut considérer qu'il n'y a pas d'ambiguïté en raison de l'unicité du successeur, mais ce n'est pas le cas pour la proposition « n et m sont des majorants de p et q ».

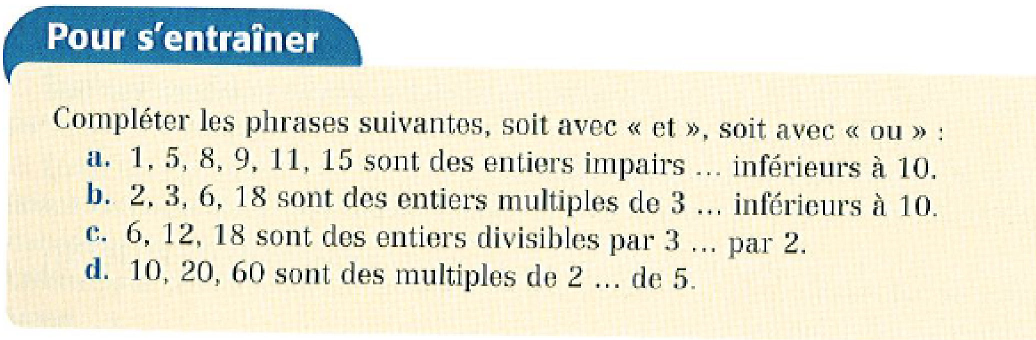
Comme nous le voyons, en mathématiques, puisque nous nous exprimons en utilisant la langue naturelle, tous les « et » ne sont pas des connecteurs logiques. Pour clarifier les choses, il serait pertinent de marquer la distinction. La logique mathématique propose les symboles $\wedge$ pour le connecteur ET et $\vee$ pour le connecteur OU, mais à la différence des flèches pour les connecteurs IMPLIQUE et ÉQUIVAUT À, ces symboles ne sont pas utilisés par les mathématiciens. Une alternative est de noter en majuscule les « et », « ou » qui sont des connecteurs entre propositions. Ceci ne sera pas toujours possible, comme nous allons le voir dans l'exemple emblématique suivant : considérons la proposition « les ensembles A et B sont non-vides et disjoints ». Elle est la conjonction, signalée par le deuxième « et », des propositions « les ensembles A et B sont non-vides » et « les ensembles A et B sont disjoints », après mise en facteur de « les ensembles A et B sont ». Mais le « et » placé entre A et B est *et-propositionnel* dans la première de ces deux propositions, *et-couple* dans la deuxième. Il n'est donc pas possible d'appliquer ce critère distinctif à cette formulation condensée, il faut pour cela recourir à une formulation plus longue : « les ensembles A ET B sont non-vides ET les ensembles A et B sont disjoints », que l'on peut encore reformuler en : « l'ensemble A est non-vide ET l'ensemble B est non-vide ET les ensembles A et B sont disjoints ». Ici le « et » en minuscules qui subsiste est incontournable : c'est un et-couple et le connecteur ET ne saurait le remplacer.

Il y a également un troisième usage du mot « et » qu'il est important de souligner. Prenons comme exemple la phrase « Pierre et Paul sont les frères de Jean ». Le mot « les » joue ici un rôle essentiel : cette phrase n'est pas la conjonction des deux phrases « Pierre est le frère de Jean » et « Paul est le frère de Jean ». Le « et » utilisé, associé à l'expression « sont les », sert à énumérer les éléments d'un ensemble, nous parlerons alors de *et d'énumération.* Nous retrouvons un tel « et » dans « 1 et 3 sont les solutions de l'équation $(x-1)(x-3) = 0$ ». Il ne s'agit pas d'un connecteur ET qui coordonne les deux propositions « 1 est la solution de l'équation $(x-1)(x-3) = 0$ » et « 3 est la solution de l'équation $(x-1)(x-3) = 0$ ». Cette proposition est en fait équivalente à « (1 est une solution de l'équation $(x-1)(x-3) = 0$) ET (3 est une solution de l'équation $(x-1)(x-3) = 0$) ET (pour tout réel x, si x est solution de l'équation $(x-1)(x-3) = 0$, alors ($x = 1$ OU $x = 3$)) », qui est la conjonction de trois propositions. Nous pourrions aussi donner une proposition équivalente plus simple : « pour tout réel a, (a est solution de l'équation $(x-1)(x-3) = 0$ si et seulement si ($a = 1$ OU $a = 3$)) », dans laquelle il n'y a pas de conjonction mais une disjonction. Ce passage d'un « ou » à un « et » entre « $(x-1)(x-3) = 0$ si et seulement si ($x = 1$ ou $x = 3$) » et « les solutions de l'équation $(x-1)(x-3) = 0$ sont 1 et 3 » peut laisser les élèves perplexes. Les distinctions précédentes éclairent ce changement : il ne s'agit pas ici de la transformation d'un connecteur OU en un connecteur ET, mais d'un connecteur OU dans un cas, et d'un *et d'énumération* dans l'autre.

Une situation analogue se produit à propos de la réunion de deux ensembles. La propriété « x appartient à $A \cup B$ » est équivalente à « (x appartient à A) OU (x appartient à B) », mais on dira tout aussi bien « les éléments de $A \cup B$ ce sont les éléments de A et les éléments de B », en utilisant un *et d'énumération.* Ainsi, dans une situation où on s'intéresse au tirage d'une carte dans un jeu, pour déterminer la probabilité de l'événement « être rouge ou être un roi », il faut compter les cartes rouges et les rois.

Intervention du *Principe du maximum d'information*

Nous avons essayé de clarifier différents usages du « et » dans le langage courant qui se retrouvent en mathématiques. Nous allons maintenant voir comment certains usages du langage courant peuvent être en contradiction avec la sémantique logique des connecteurs ET et OU. En effet, comment expliquer que tant d'élèves refusent de considérer que la proposition « $2 \leqslant 3$ » est vraie ? Du point de vue de la logique mathématique, cette proposition, qui est la disjonction des propositions « $2<3$ » et « $2=3$ », est vraie puisque « $2<3$ » est vraie. C'est finalement exactement cet argument qui amène les élèves à dire que « $2 \leqslant 3$ » est fausse, en vertu du fait qu'ils connaissent une proposition vraie, « $2<3$ », qui donne plus d'informations que « $2 \leqslant 3$ ». Ils appliquent ainsi ce que D. Lacombe a appelé *le principe du maximum d'information*, inspiré de la *loi d'exhaustivité* d'O. Ducrot. Ce principe, spontanément appliqué dans la vie courante, amène une personne, lorsqu'elle donne une information, à donner tous les renseignements dont elle dispose. Voyons un autre exemple de mise en œuvre de ce principe dans la classe de mathématiques, avec l'exercice suivant proposé dans le manuel *Indice* de Seconde :



Pour s'entraîner

Compléter les phrases suivantes, soit avec « et », soit avec « ou » :

a. 1, 5, 8, 9, 11, 15 sont des entiers impairs … inférieurs à 10.
b. 2, 3, 6, 18 sont des entiers multiples de 3 … inférieurs à 10.
c. 6, 12, 18 sont des entiers divisibles par 3 … par 2.
d. 10, 20, 60 sont des multiples de 2 … de 5.

FIGURE 3.4 – Exercice sur les connecteurs ET et OU dans le manuel *Indice*

Savoir que (P ET Q) est vraie me donne des informations sur P et sur Q, à savoir qu'elles sont vraies, et je peux alors en déduire que (P OU Q) est vraie. A l'inverse, savoir que (P OU Q) est vraie ne me donne pas d'informations sur P et sur Q, et donc je ne peux rien en déduire sur (P ET Q). Nous pouvons alors dire qu'affirmer (P ET Q) donne plus d'information que d'affirmer (P OU Q)[6]. Dans un tel exercice, il est possible et correct de compléter toutes les propositions avec « ou », mais ça n'est sans doute pas ce qui est attendu ! Les élèves complèteront vraisemblablement avec « et » là où c'est possible et, conformément au principe du maximum d'information, pourront même avoir tendance à considérer comme fausse la réponse « ou » dans un tel cas. Le corrigé du manuel du professeur donne une seule possibilité pour chaque proposition (ET quand c'est possible), allant ainsi dans le sens des élèves qui pensent qu'il n'y a qu'une « bonne réponse ». Pourtant, cet exercice offre l'occasion de susciter un débat autour de cette question. En

6. De la même manière, dire que P est vraie donne plus d'information que de dire que (P OU Q) est vraie, et la proposition « pour tout nombre réel x, si$(x-1)(x-3)=0$, alors ($x=1$ OU $x=3$ OU $x=2$) » serait très probablement considérée fausse par beaucoup d'élèves.

effet, on peut s'appuyer sur le comportement des connecteurs ET et OU par rapport aux valeurs de vérité pour préciser que parfois les deux connecteurs sont acceptables, et de dire qu'en mathématiques il n'y a pas des propositions plus vraies que d'autres.

Comme nous l'avons vu, l'utilisation des connecteurs ET et OU en mathématiques est moins simple qu'il n'y paraît, et la difficulté ne se résume pas à la distinction entre ou exclusif et ou inclusif. Les usages du discours quotidien sont plus souvent qu'on ne le croit en conflit avec l'utilisation des connecteurs ET et OU en mathématiques

3.4 Négation

3.4.1 Approche à partir de la logique mathématique

Le connecteur unaire NON permet à partir d'une proposition P de former sa négation NON P. La proposition NON P est vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.

On a alors la propriété suivante : NON(NON P) est équivalente à P.

Les propriétés suivantes concernant la négation et les connecteurs ET et OU sont appelées *Lois de Morgan* :

NON(P ET Q) est équivalente à (NON P OU NON Q)

NON(P OU Q) est équivalente à (NON P ET NON Q)

Nous avons déjà vu les propriétés suivantes concernant la négation et les quantificateurs avec le carré des oppositions de Frege (voir page 70) :

NON($\forall x\, P[x]$) est équivalente à $\exists x$ NON $P[x]$

NON($\exists x\, P[x]$) est équivalente à $\forall x$ NON $P[x]$

Ces équivalences servent à effectuer des manipulations syntaxiques sur les propositions, de la même manière qu'on manipule les expressions algébriques. Ainsi, pour une proposition donnée, il est possible d'obtenir plusieurs propositions équivalentes à sa négation en appliquant ces règles. Prenons par exemple la proposition $(*)$ « Il existe un entier n tel que n est pair ET n est un multiple de 3 ». On obtient successivement :

- sa négation : (1) « NON(Il existe un entier n tel que n est pair ET n est un multiple de 3) »
- une première proposition équivalente : (2) « pour tout entier n, NON(n est pair ET n est un multiple de 3) »
- une deuxième proposition équivalente : (3) « pour tout entier n, (NON(n est pair) OU NON(n est un multiple de 3)) »

Il y a dans le vocabulaire mathématique des appellations attitrées pour la négation de certains prédicats. Par exemple, la négation de « n est pair » est équivalente à « n est impair ». La négation de la proposition « n est un multiple de 3 » est équivalente à la forme négative « n n'est pas un multiple de 3 ». On obtient alors une quatrième proposition équivalente à la négation de la proposition $(*)$: (4) « Pour tout entier n, (n est impair OU n n'est pas un multiple de 3) ».

N'importe laquelle de ces propositions sera acceptée comme étant la négation de la proposition $(*)$ (et hormis les logiciens, rares sont les mathématiciens qui proposeront la proposition (1)). Finalement, plusieurs applications successives des règles données ci-dessus nous ont permis de « rentrer » le plus possible la négation à l'intérieur de la proposition. Ce que nous avons fait ici sur un exemple est toujours possible : pour toute proposition, on peut trouver une proposition équivalente dans laquelle les négations ne portent que sur des propositions élémentaires, c'est-à-dire des propositions qui ne comportent ni connecteur ni quantificateur. On privilégie souvent une telle formulation pour la négation d'une proposition donnée.

3.4.2 Expression dans le discours mathématique

Alors que les mots « et » et « ou » peuvent, dans certains cas, être dans la langue usuelle des opérateurs sur les propositions qui correspondent aux connecteurs ET et OU, il n'y a pas dans la langue française d'opérateur sur les propositions qui serait l'analogue du connecteur NON [7]. Ainsi, là où la conjonction des propositions « n est pair » et « n est un multiple de 3 » est « directement » la proposition « n est pair ET n est un multiple de 3 », la négation de la proposition « n est pair », qui est à strictement parler la proposition « NON(n est pair) », ne sera pratiquement jamais formulée ainsi ; on dira plutôt éventuellement « n est non pair » [8], ou plus souvent « n n'est pas pair » et même encore plus souvent « n est impair ».

L'exemple de la proposition $(*)$: « Il existe un entier n tel que n est pair ET n est un multiple de 3 » de la page 121 montre que les choses sont encore plus complexes quand on a affaire à une proposition comportant un connecteur ou un quantificateur. Dans le cas d'une proposition élémentaire, la négation est donnée par ce qu'on appelle *la forme négative*, généralement construite en encadrant le verbe des deux mots « ne » et « pas ». Les élèves pratiquent régulièrement à l'école primaire l'exercice qui consiste à passer d'une forme affirmative à une forme négative. Mais dans le cas d'une proposition quantifiée, la

7. Nous avons vu page 40 qu'un tel opérateur existe dans la langue grecque, c'est aussi le cas dans la langue arabe, voir les travaux de I. BEN KILANI, notamment l'article (Durand-Guerrier & Ben Kilani, 2004)

8. Le mot « non » est parfois, mais rarement, utilisé dans le langage courant associé à un adjectif (nul et non avenu, non voyant…). En mathématiques, cet usage est plus fréquent : une fonction non continue, un triangle non rectangle… mais il est très rare qu'on utilise le mot « non » apposé à une proposition comme c'est le cas pour le connecteur logique.

forme négative ne correspond pas toujours à la négation mathématique, puisque l'on accepte comme forme négative de la phrase « je mange toujours des fruits » tout aussi bien la phrase « je ne mange jamais de fruits », qui ne correspond pas à la négation, que la phrase « je ne mange pas toujours des fruits », qui correspond à la négation. Par ailleurs, toute proposition a une négation, même une proposition telle que« n n'est pas premier », mais cela n'a pas de sens de demander sa forme négative puisqu'elle est déjà sous forme négative. Les élèves doivent comprendre que l'exercice « donner la négation de » en mathématiques n'est pas le même que « donner la forme négative de » en français.

Considérer la négation d'une proposition (ce qui nous arrive assez souvent en mathématiques, dans les raisonnements par l'absurde ou par contraposée, ou pour se représenter un objet ne répondant pas à une certaine définition) va souvent nécessiter des opérations de conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre de l'écriture formalisée du langage des prédicats et de traitement (voir page 89) dans chacun de ces registres. Les propriétés vues page 121 se traduisent par des règles formelles qui permettent un traitement relativement simple de la négation dans le registre formalisé, règles dont ne nous disposons pas dans le registre de la langue naturelle. Ainsi, la négation de la proposition « Il existe un entier qui est pair et multiple de 3 » admet au moins les trois formulations équivalentes suivantes dans la langue naturelle :

- Il n'existe pas d'entier qui soit pair et multiple de 3
- Aucun entier n'est pair et multiple de 3
- Tous les entiers sont impairs ou non multiples de 3

Mais il n'y a pas vraiment de procédure syntaxique qui permettrait de passer d'une de ces formulations à une autre. Ainsi, le registre formalisé paraît plus sûr pour formuler la négation d'une proposition que celui de la langue naturelle. Mais j'ai déjà insisté sur le fait que langue naturelle et langage formalisé étaient imbriqués dans le discours mathématique, et une des difficultés associées à la négation est justement la nécessité de cette double expertise, d'une part des manipulations liées à la négation dans le langage formalisé, d'autre part des différentes expressions dans la langue naturelle.

3.4.3 Difficultés pour les élèves avec la négation

Opposition trompeuse

Une première difficulté des élèves, bien connue des professeurs, concerne des couples de prédicats comme être positif/être négatif, être croissante/être décroissante, qui ne sont pas la négation l'un de l'autre.

Le manuel *Hyperbole* de Seconde propose l'exercice suivant pour alerter les élèves sur cette confusion :

37 Fonctions non croissantes, non décroissantes

1. f est une fonction croissante sur un intervalle I signifie : « pour tous réels u et v de I, si $u \leqslant v$ alors $f(u) \leqslant f(v)$ ».

a) Écrire la définition d'une fonction non croissante sur I.

b) Une fonction non croissante sur I est-elle une fonction décroissante sur I ? Illustrer son propos avec un graphique.

2. f est la fonction définie sur $[0;3]$ par $f(x) = x^2 - 2x + 4$.

Pierre a écrit : « $f(0) = 4$ et $f(1) = 1 - 2 + 4 = 3$.

$0 \leqslant 1$ et $f(0) \geqslant f(1)$ donc f est décroissante sur $[0;3]$. »

a) Expliquer pourquoi ce raisonnement est faux.

b) Faire une conclusion correcte à partir des calculs de Pierre, commençant par « $0 \leqslant 1$ et $f(0) \geqslant f(1)$ donc... ».

FIGURE 3.5 – Un exercice sur la négation dans le manuel *Hyperbole*

Cet exercice est proposé dans une rubrique « s'initier à la logique ». Comment est-ce qu'un élève peut écrire la définition d'une fonction non croissante sur I[9] ? Est-ce qu'on s'attend à ce qu'il sache écrire la négation de la définition d'une fonction croissante sur I donnée dans le cours ? Est-ce qu'on s'attend à ce qu'il la retrouve de façon empirique (pour montrer qu'elle n'est pas croissante sur I, il faut trouver deux éléments x et y de I qui ne sont pas dans le même ordre que leurs images, c'est-à-dire vérifiant $x \leqslant y$ et $f(x) > f(y)$) ? De la même façon, comment répond-il à la question 1.b) ? En comparant deux définitions ? Formulé ainsi, cet exercice ne permet pas vraiment de travailler sur ce qu'est la négation, il permet seulement éventuellement d'appliquer les règles qui y sont associées si elles ont été données. Il me paraît plus intéressant de faire remarquer que « f n'est pas une fonction croissante sur I » est la négation de « f est une fonction croissante sur I », puis de se demander si c'est équivalent à « f est une fonction décroissante sur I » (on peut aussi demander quelle est la négation de « f est une fonction croissante sur I », il y a toutes les chances que les deux réponses soient proposées). Nul besoin d'écrire des définitions pour répondre qu'elles ne sont pas équivalentes : il est possible de trouver une fonction f (et un intervalle I) telle que les deux propositions « f est une fonction croissante sur I » et « f est une fonction décroissante sur I » soient fausses, ce qui contredit la définition de la négation. Ensuite seulement, l'exercice qui consiste à écrire la négation de « f est une fonction croissante sur I » en mettant au jour sa structure logique permet de travailler sur les règles de formulation d'une négation.

9. Il ne s'agit d'ailleurs pas d'une définition, mais plutôt d'une propriété qui se déduit de la définition d'une fonction croissante.

Ambiguïtés de certaines formes négatives, quantifications implicites

Je mentionne rapidement un exemple bien connu d'ambiguïté : celui des formulations en « tous… ne pas ». L'interprétation correcte est d'entendre la phrase « toutes les boules ne sont pas rouges » comme équivalente à « il existe une boule non-rouge », mais certaines personnes l'entendent comme « toutes les boules sont non-rouges » (voir par exemple Durand-Guerrier, 2005, p. 77). Je renvoie à l'article *Au collège comme au lycée : une activité sur les connecteurs ET et OU* du groupe Logique de l'IREM de Paris pour des exemples de formulations ambiguës de propositions contenant négation et connecteur ET ou OU (Groupe Logique de l'IREM de Paris, 2014).

J'insisterai un peu plus sur la difficulté à donner la négation de propositions qui relèvent du registre que j'ai appelé *intermédiaire*, dans lequel les quantifications ne sont pas toutes exprimées à l'aide des quantificateurs, comme par exemple « tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang », qui est la définition proposée par le programme de Terminale S de 2011 pour exprimer que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$. Dans cette définition, la quantification existentielle portant sur N dans la définition formelle « $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon)$ » est cachée dans l'expression « à partir d'un certain rang », dans laquelle on peut considérer qu'elle est devinable grâce à « un certain rang ». Bien sûr, on pourra toujours se servir de la définition du programme pour exprimer le fait que u_n ne tend pas vers ℓ quand n tend vers $+\infty$, et dire que cela signifie « il existe un intervalle ouvert contenant ℓ et qui ne contient pas toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». Mais rien dans l'expression « I ne contient pas toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang » ne laisse deviner la structure logique de la proposition équivalente « $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant N \text{ ET } u_n \notin I)$ ». Nous retrouvons l'idée que pour utiliser des procédures syntaxiques efficaces pour formuler et comprendre la négation d'une proposition « il est nécessaire que la syntaxe utilisée pour formaliser les énoncés soit en adéquation avec les règles de formation du calcul des prédicats, en particulier en ce qui concerne les quantificateurs, ce qui est loin d'être toujours le cas dans la pratique mathématique ordinaire » (Durand-Guerrier, 2005, p. 75).

Négation et contraire

Un deuxième obstacle, bien identifié par I. Ben Kilani dans sa thèse (Ben Kilani, 2005), à l'acquisition de la notion de négation par les élèves est son assimilation fréquente à l'idée de « contraire ». Le contraire est défini comme étant « ce qui s'oppose par le plus grand écart possible à une chose située sur le même plan » (définition du Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales) ; on voit qu'il y a là une différence avec la notion de négation qui ne contient pas cette idée de *plus grand écart possible*. Ainsi, le contraire de « tous les élèves de la classe ont un téléphone portable » est bien « aucun élève de la classe n'a de téléphone portable ». C'est parfois ce contraire que les élèves ont à formuler dans les exercices de français où ils doivent donner la forme négative d'une phrase, *toujours* est associé à *jamais* (il vient toujours/il ne vient jamais), *tous* à *aucun* (tous les membres sont là/aucun membre n'est là)... Nous avons vu (dans l'étude épistémologique, page 34) qu'Aristote distinguait une relation de contradiction entre une proposition et sa négation (qui ne peuvent ni être vraies toutes les deux en même temps, ni être fausses toutes les deux en même temps), et une relation de contrariété entre une proposition universelle et sa contraire (relation entre une universelle affirmative et une universelle négative, qui peuvent être fausses toutes les deux en même temps mais pas vraies toutes les deux en même temps), auxquelles viendra s'ajouter au Moyen-Âge une relation entre une proposition existentielle et sa subcontraire (relation entre une particulière affirmative et une particulière négative, qui peuvent être vraies toutes les deux en même temps mais pas fausses toutes les deux en même temps) (voir le carré des oppositions complet page 48). La logique mathématique, et les mathématiques d'une façon générale, n'ont gardé qu'une de ces relations, la relation de contradiction, qui est la seule définissable pour toutes les propositions en s'appuyant sur l'échange des valeurs de vérité.

Quand la négation n'est pas tout à fait ce qu'on croit

Traditionnellement, la proposition « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ » est équivalente à la proposition $(*)$: « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est ℓ », car écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ pose l'existence de la limite (finie ou infinie). De même, la proposition « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq \ell$ » est équivalente à la proposition $(**)$: « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est différente de ℓ ». Ainsi, bien que la proposition $(**)$ ait toutes les apparences de la négation de la proposition $(*)$, il n'en est rien puisque ces deux propositions sont fausses pour une suite qui ne converge pas.

La proposition « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ » est une *proposition composée au niveau du sens*, au sens des auteurs de la logique de Port-Royal (voir page 50), ce que nous voyons très bien dans la proposition $(*)$. Formuler la négation de telles propositions est complexe, justement parce qu'il faut exhiber les conjonctions qui y sont contenues.

3.5 Implication

Nous avons déjà relevé dans les études épistémologique et didactique les nombreuses difficultés liées à la notion d'implication. Sous ce titre, je ne parlerai pas seulement du connecteur IMPLIQUE, mais aussi de l'implication universellement quantifiée, et de la possible confusion entre les deux, surtout dans le cas des formulations en *si..., alors...*. Nous verrons également de nombreuses expressions du discours mathématique reliées à l'implication, qu'il est important de recenser même si cela aboutit à une liste qui peut paraître longue. Pour ce qui est des travaux didactiques, ils sont également particulièrement nombreux sur cette notion. La longueur de la section qui va suivre est une conséquence de ces divers points, qui montrent que l'implication est un élément majeur de l'activité mathématique, au cœur du langage, du raisonnement, et de l'articulation entre les deux.

3.5.1 Approche à partir de la logique mathématique

Le connecteur IMPLIQUE

Le connecteur binaire IMPLIQUE permet, à partir de deux propositions P et Q, de former la proposition $P \Rightarrow Q$. La proposition Q est presque systématiquement appelée *la conclusion*, plusieurs noms sont utilisés pour la proposition P :

– P est parfois appelée *l'hypothèse*. Ce terme est également utilisé dans une démonstration : l'hypothèse (généralement les hypothèses), c'est ce qui est posé comme vrai. Or, nous y reviendrons ultérieurement, affirmer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie ne pose absolument pas la vérité de P, et penser cela est même une difficulté identifiée par rapport à la compréhension de la notion d'implication.
– P est parfois appelée *la condition*. Mais ce terme de condition est également utilisé dans l'expression « condition nécessaire », or, quand $P \Rightarrow Q$ est vraie, c'est Q qui est une condition nécessaire pour P. Par ailleurs, « condition » n'est quasiment jamais utilisé dans le langage courant pour signifier une condition suffisante, il signale le plus souvent une condition nécessaire et suffisante (comme dans « j'irai me promener dimanche, à condition qu'il ne pleuve pas »), parfois seulement nécessaire (comme dans « il est possible que j'aille me promener dimanche, à condition qu'il ne pleuve pas »).
– P est parfois appelée *la prémisse*, terme que j'utilise dans cette thèse car, à l'inverse des deux autres, il ne présente pas d'ambiguïté.

La table de vérité du connecteur IMPLIQUE est la suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Vrai

Figure 3.6 – Table de vérité du connecteur IMPLIQUE

Les deux dernières lignes de cette table posent souvent problème. Je propose trois arguments pour les justifier.

Premier argument : il n'y a qu'un nombre fini de possibilités. Examinons les autres choix possibles :

– en choisissant la valeur Faux pour les deux cas où P est Faux, on a la table de vérité du connecteur ET. On veut évidemment définir un connecteur IMPLIQUE distinct du connecteur ET.
– En choisissant la valeur Vrai pour P Faux et Q Vrai, et la valeur Faux pour P Faux et Q Faux, on obtient alors les mêmes valeurs de vérité pour $P \Rightarrow Q$ et pour Q, et on aurait alors $P \Rightarrow Q$ équivalent à Q, là aussi, on attend autre chose du connecteur IMPLIQUE que le fait d'être équivalent à la conclusion.
– En choisissant la valeur Faux pour P Faux et Q Vrai, et la valeur Vrai pour P Faux et Q Faux, on obtient alors la table de vérité du connecteur ÉQUIVAUT À.

Ce premier argument montre que le choix qui est fait est le seul « raisonnable ». Cela étant dit, l'argument n'est pas très constructif, puisqu'il est basé sur l'élimination des autres possibilités.

Je donne alors un deuxième argument pour essayer de convaincre que ce choix est raisonnable. Demandons-nous comment persuader quelqu'un que l'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse. L'argument souvent avancé comme étant le plus convaincant est de dire que P est vraie et Q est fausse. Ceci correspond bien au seul cas de la table de vérité où $P \Rightarrow Q$ est fausse.

Finalement, je donne un troisième argument pour essayer de convaincre que cette table de vérité correspond bien à l'usage de l'implication en mathématiques. Il est lié aux implications universellement quantifiées : prenons par exemple la proposition « pour tout entier naturel n, [(n est premier et n est différent de 2) $\Rightarrow$ n est impair] ». Elle est vraie, ce qui veut dire que chaque implication obtenue en attribuant une valeur à la variable n dans la proposition « (n est premier et n est différent de 2) $\Rightarrow$ n est impair » est vraie. Il en est notamment ainsi des implications :

$$(2 \text{ est premier et } 2 \text{ est différent de } 2) \Rightarrow 2 \text{ est impair},$$

nous sommes alors dans le cas « prémisse fausse conclusion fausse »,

$$(9 \text{ est premier et } 9 \text{ est différent de } 2) \Rightarrow 9 \text{ est impair},$$

nous sommes alors dans le cas « prémisse fausse conclusion vraie ».

Ainsi, décider que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie lorsque la prémisse P est fausse est la seule manière de pouvoir écrire des propositions de la forme « pour tout x, $P[x] \Rightarrow Q[x]$ », sans se préoccuper des valeurs qui rendent la prémisse fausse pour conclure à sa vérité. En particulier, une telle proposition est vraie lorsqu'aucun élément ne vérifie P.

Cette table de vérité nous permet de voir facilement que la négation de $P \Rightarrow Q$ est équivalente à (P ET NON Q)[10].

10. Plusieurs étudiants savent « utiliser » ce résultat, notamment quand ils produisent un contre-exemple pour infirmer une implication, car ils donnent alors un élément qui vérifie la prémisse et pas

Implication universellement quantifiée

Le symbole $\Rightarrow$, ou une des expressions qui le traduit, est presque toujours utilisé en mathématiques entre deux propositions comportant au moins une même variable libre, comme par exemple dans la proposition « n est pair $\Rightarrow$ n est divisible par 4 ». Les mathématiciens diront (presque) tous que cette proposition est fausse. Pourtant, il s'agit d'une proposition contenant une variable libre, nous ne pouvons pas savoir si elle est vraie ou fausse. En se reportant à la table de vérité de l'implication, cette proposition est vraie lorsque la variable n prend, par exemple, la valeur 4 (on a alors la proposition « 4 est pair $\Rightarrow$ 4 est divisible par 4 »), ou la valeur 3 (car la prémisse est alors fausse), et fausse lorsque variable n prend, par exemple, la valeur 2. Mais les mathématiciens lisent cette proposition comme une proposition close car ils associent systématiquement une quantification universelle au symbole $\Rightarrow$, ou à une des expressions qui le traduit. La plupart du temps, ils n'éprouvent alors pas le besoin d'écrire explicitement cette quantification universelle, ce qui amène parfois des malentendus avec les élèves (voir l'exemple de la tâche du labyrinthe page 82).

3.5.2 Expression dans le discours mathématique

Quels mots associer à ce symbole $\Rightarrow$? Comment « lire » la proposition $P \Rightarrow Q$? Plusieurs expressions sont couramment utilisées : « si P, Q » (ou « Q si P ») , « P implique Q », « P entraîne Q », « si P alors Q »... Il y a également des expressions en lien avec les notions de condition nécessaire et de condition suffisante sur lesquelles nous reviendrons.

Utilisation de « si »

Le mot « si » dans le langage courant Le mot « si » est une conjonction de subordination, utilisé pour introduire une proposition subordonnée reliée à une proposition principale. La subordonnée P et la principale Q sont dans le même ordre que dans $P \Rightarrow Q$ dans l'expression « si P, Q », ou dans l'ordre inverse dans l'expression « Q si P ». Dans *Dire et ne pas dire*, O. Ducrot propose une description des énoncés *si p, q* non pas à partir de l'existence d'un type de relation entre p et q, mais à partir de l'acte de supposition accompli quand on les emploie :

> [...] la thèse principale défendue ici est qu'une proposition de type *si p, q* n'a pas pour *signification* première « p est cause de q », ni « p est condition de q » (bien qu'elle puisse servir à indiquer ces relations). Sa valeur fondamen-

la conclusion. Mais quand on leur demande d'écrire formellement la négation de $P \Rightarrow Q$, ils proposent souvent $P \Rightarrow \text{NON}\,Q$, ou $\text{NON}\,P \Rightarrow Q$, ou $Q \Rightarrow \text{NON}\,P$, bref, une implication combinant P, Q ou leur négation !

> tale est de permettre la réalisation successive de deux actes illocutoires [11] : 1° demander à l'auditeur d'imaginer « *p* », 2° une fois le dialogue introduit dans cette situation imaginaire, y affirmer « *q* ». (Ce qui explique immédiatement une déontologie du *si* : il y a des situations dont il est indécent de demander à l'auditeur de les envisager). (Ducrot, 1991, p. 168)

Il explique à la lumière de cette description pourquoi l'emploi du mot « si » donne à entendre qu'il y a une relation de dépendance entre les propositions qu'il réunit :

> Dans la mesure, en effet, où on demande à l'auditeur de se placer dans l'hypothèse « *p* » avant de lui annoncer « *q* », on donne à penser qu'il y a une certaine dépendance entre « *p* » et « *q* » : sinon, on comprendrait mal que le locuteur ait cru bon de faire précéder l'acte d'affirmation d'un acte de supposition. La dépendance entre les deux propositions apparaît ainsi comme un contrecoup de la dépendance entre les deux actes accomplis.

Selon O. Ducrot, cette idée de dépendance associée au mot « si » empêche même les mathématiciens de l'utiliser pour marquer dans tous les cas le connecteur IMPLIQUE :

> Un mathématicien n'aurait pas de répugnance particulière à dire « si 2+2=4, alors 2+3=5 », car on peut envisager que la deuxième proposition se démontre à partir de la première [12]. Mais il hésiterait à dire « si 2+2=4, alors 2 n'a pas de racine carrée rationnelle », car la démonstration de la deuxième proposition, dans ce cas, n'utilise pas, habituellement, la première.

Il explique ensuite comment la loi d'exhaustivité, qui correspond au principe du maximum d'information décrit page 120, amène alors à entendre cette relation de dépendance comme à la fois suffisante et nécessaire :

> En allant un peu plus loin dans la même voie, on peut expliquer un phénomène linguistico-psychologique bien connu, qui désespère les enseignants préoccupés de former leurs élèves à un minimum de pensée logique. Alors qu'on voudrait réserver l'expression *si p, q* pour indiquer que « *p* » est une condition suffisante de « *q* », les élèves, et pas mal d'autres, tendent à comprendre la même expression comme désignant une condition non seulement suffisante mais nécessaire – ou, du moins, très favorable. La loi générale d'exhaustivité permet de prévoir cette interprétation. Si le locuteur a restreint son affirmation de « *q* » à la supposition préalable que « *p* » est vrai, il est naturel de

11. Catégorie de la théorie des actes de langage d'Austin : il distingue trois aspects de l'acte de langage consistant à faire quelque chose par la parole : il y a l'acte de *locution* (la production de sons appartenant à un vocabulaire et à une grammaire, et auxquels sont rattachés un « sens » et une « référence », c'est-à-dire une « signification », au sens classique du terme) ; l'acte *d'illocution* (produit *en* disant quelque chose, et consistant à rendre manifeste *comment* les paroles doivent être comprises en ce moment - les *mêmes* paroles pouvant être comprises soit comme un conseil, soit comme un commandement, etc.) ; et l'acte de *perlocution* (produit *par* le fait de dire quelque chose, c'est-à-dire que l'acte donne lieu à des *effets* - ou conséquences - chez les autres ou chez soi) (Austin, 1970).

12. Je dirais plutôt car il s'agit d'une instanciation de l'implication $x + y = z \Rightarrow x + y + 1 = z + 1$ qui est vraie quels que soient x, y et z.

> croire, puisqu'il est censé dire le maximum de ce qu'il sait, qu'il ne pouvait pas affirmer « q » d'une façon catégorique. Si, de plus, on refuse d'attribuer cette incapacité à une limitation de son savoir, on doit interpréter cette restriction de l'affirmation comme l'affirmation d'une restriction. On introduit donc l'idée que « q » est vrai seulement si « p » est vrai. (Ducrot, 1991, pp. 169-170)

Ducrot cite ensuite d'autres utilisations du mot « si », notamment le *si présuppositionnel* qui « introduit une proposition qui constituerait la présupposée de la principale si celle-ci était employée isolément » (Ducrot, 1991, p. 176), comme dans l'exemple qu'il donne : « si tu as soif, il y a de la bière au frigidaire ». Notons que le *si présuppositionnel* ne vérifie pas la règle de contraposition (on s'en convaincra facilement en essayant avec l'exemple donné !)

***Si présuppositionnel* en mathématiques** On retrouve également en mathématiques un usage du mot « si » qui se rapproche de ce *si présuppositionnel*, quand on donne une propriété des éléments d'un ensemble, mais qu'il faut exclure certains éléments pour lesquels la propriété n'a pas de sens. Par exemple dans :

$$\text{si } x \text{ et } y \text{ sont des réels strictement positifs, } \ln(xy) = \ln x + \ln y$$

Ici, le « si » introduit une condition P : « x et y sont des réels strictement positifs » pour que la proposition Q : « $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ » ait un sens. On est alors effectivement bien gêné en énonçant la contraposée de cette proposition. Ainsi, même si une proposition comme celle énoncée ci-dessus peut correspondre à une implication universellement quantifiée sur des variables astreintes à $\mathbb{R}_+^*$, cette formalisation n'est pas porteuse de sens dans la mesure où il s'agit d'une implication dont la prémisse n'impose aucune restriction. On lui préfèrera une formulation simplement sous forme d'énoncé universel :

$$\text{Pour tous réels } x \text{ et } y \text{ strictement positifs, } \ln(xy) = \ln x + \ln y$$

Le « si » dans les définitions On utilise également le mot « si » en mathématiques dans certaines définitions. Commençons par dire qu'une définition n'est pas une proposition. Elle pose une convention, et cela n'a pas de sens de se demander si elle est vraie ou fausse. Elle introduit un nouveau prédicat $P'[x]$ (par exemple « la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ ») comme raccourci d'une proposition $P[x]$ (ici « pour tous réels x, y, si $x \leqslant y$ alors $f(x) \leqslant f(y)$). Elle pose une équivalence entre ces deux propositions, mais on ne peut pas utiliser dans la définition l'expression « si et seulement si » puisque d'une certaine façon le prédicat $P'[x]$ n'est pas encore introduit dans le langage. Une fois posée la définition : « soit $x \in E$, par définition, on dira que $P'[x]$ si $P[x]$ », on pourra utiliser la propriété : « pour tout $x \in E$, $P'[x]$ si et seulement si $P[x]$ ». Au vu des commentaires précédents, cette utilisation du « si » ne correspond bien sûr pas à une implication. Pour bien marquer cette différence, et éviter une confusion malheureuse, plusieurs auteurs de manuels utilisent des termes qui signalent l'aspect *épimathématique* d'une définition (c'est-à-dire qui indiquent que ça n'est pas une proposition : voir page 111) : « par définition », « on dira que »...

Utilisation de « implique », « entraîne »

L'utilisation des mots « implique »ou « entraîne » entre deux propositions, comme c'est le cas en mathématiques, ne se retrouve pas dans le langage courant où il est attendu qu'ils soient placés entre deux syntagmes nominaux, l'un constituant le sujet, l'autre le complément du verbe. Or, une proposition n'est pas un syntagme nominal. « n est divisible par 4 implique n est pair » n'est donc pas une phrase correcte du point de vue de la grammaire française. L'utilisation du mot « implique » en mathématiques amène ainsi à prendre des libertés avec la syntaxe de la langue naturelle [13].

Citant W. Quine (philosophe et logicien américain du XXe siècle), V. Durand-Guerrier signale une utilisation du mot « implique » qui « combine non des énoncés pour former des énoncés, mais des noms d'énoncés pour former des énoncés sur des énoncés. » (Quine, cité dans Durand-Guerrier, 2005, p. 48). Par exemple, nous pourrions dire « P et Q implique P ». Dans ce cas, nous ne nous contentons pas de considérer la proposition « $(P \text{ ET } Q) \Rightarrow P$ », nous affirmons aussi qu'elle est vraie quelles que soient les valeurs de vérité des propositions P et Q.

Nous utilisons aussi le mot « implique » (ou « entraîne ») dans une phrase telle que « la convergence uniforme implique la convergence simple » (dans le cas des suites de fonctions à valeurs réelles). Dans ce cas, « implique » traduit une implication universellement quantifiée : « pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, et toute fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}$, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f ».

Le mot « implique » est présent dans la maxime « le faux implique n'importe quoi », qui est parfois utilisée pour dire qu'une implication est vraie quand sa prémisse est fausse. Je reviendrai sur cette maxime, pour le moment je me contente de dire qu'en l'occurrence, il serait plus juste de dire « "le faux implique le faux" est vrai, et "le faux implique le vrai" est vrai ».

Utilisation de « si..., alors... »

Dans le langage courant comme dans le langage mathématique, « si..., alors...... » s'utilise avec deux propositions. Une petite particularité à signaler toutefois : dans le langage courant, il y a des phénomènes d'anaphore (procédé consistant à rappeler un mot ou groupe de mots précédemment énoncé par un terme grammatical). C'est ce qui se produit

13. Une telle formulation peut être vue comme un condensé de la phrase « le fait que n est divisible par 4 implique le fait que n est pair ».

dans l'exemple « si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme » : derrière le *alors* il y a un énoncé dans lequel un mot (c') est utilisé pour rappeler un terme de la prémisse, et cet énoncé n'est pas, pris isolément, une proposition. Quand il y a un tel phénomène, l'écriture de la réciproque ou de la contraposée demande quelques réaménagements. Ainsi, quand on dit, par exemple, que la réciproque de la proposition « si P alors Q » est la proposition « si Q alors P », cela s'applique uniquement quand les deux énoncés reliés par *si. . ., alors. . .* sont des propositions ayant du sens même prises isolément, ce qui est bien sûr le cas quand ils sont exprimés dans le registre formalisé, mais ce qui est loin d'être toujours le cas dans les exemples proposés aux élèves, ce qui leur laisse alors la charge de ces réaménagements.

Signalons ici une difficulté dans des formulations du type « s'il existe x tel que $P[x]$ alors $Q[x]$ ». Considérons par exemple :

$$(*) \text{ s'il existe un réel } x \text{ tel que } f(x) = 3 \text{ alors } x > 1$$

Comment formuler cette proposition dans le registre formalisé ? On pourrait être tenté de proposer :

$$(\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3) \Rightarrow x > 1$$

Mais alors la variable x est muette dans la prémisse et parlante dans la conclusion, ce qui pose problème car la proposition ainsi obtenue contient alors une variable parlante, ce qui n'est pas le cas de la proposition $(*)$. On peut très bien écrire de manière équivalente la proposition :

$$(\exists y \in \mathbb{R},\ f(y) = 3) \Rightarrow x > 1$$

dont on voit clairement qu'elle n'est pas équivalente à $(*)$.

On peut alors essayer de conserver une quantification existentielle sans avoir x parlante dans la conclusion en écrivant la proposition suivante, dont on se rendra rapidement compte qu'elle ne convient pas :

$$\exists x \in \mathbb{R},\ (f(x) = 3 \Rightarrow x > 1)$$

En effet, toute fonction vérifie cette dernière proposition (il suffit de prendre $x = 2$) alors qu'il y a des fonctions qui ne vérifient pas la proposition $(*)$.

En fait, malgré la présence de « s'il existe » dans cette proposition $(*)$, il s'agit d'une proposition purement universelle. Cette proposition $(*)$ est équivalente à :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ (f(x) = 3 \Rightarrow x > 1)$$

En fait, n'importe quelle implication universellement quantifiée « pour tout x, $P[x] \Rightarrow Q[x]$ » peut se lire « s'il existe un x tel que $P[x]$ alors il vérifie $Q[x]$ », formulation utilisée notamment dans des phases de recherche d'une condition nécessaire.

Expressions en lien avec les notions de condition nécessaire, condition suffisante

Je signale ici quelques expressions utilisées en mathématiques pour dire « $P \Rightarrow Q$ » :
– P est une condition suffisante pour (que) Q, P suffit à Q, pour (que) P il faut (que) Q
– Q est une condition nécessaire pour (que) P, pour (que) Q il suffit (que) P, il faut (que) Q pour (que) P

Ces expressions sont particulièrement complexes à utiliser du fait du double jeu entre suffisant et nécessaire (dans $P \Rightarrow Q$, qu'est-ce qui est nécessaire à quoi, qu'est-ce qui est suffisant à quoi ?), et entre les places dans la phrase (parfois P est en premier, comme dans $P \Rightarrow Q$, parfois P est en second). Parfois, ces formulations seront plus compréhensibles en passant par la contraposée (par exemple, « il faut Q pour P » est peut-être plus facile à entendre comme « si NON Q, alors NON P »).

Pour terminer, je mentionnerai une difficulté liée à l'expression « si et seulement si ». Quand nous disons « P si et seulement si Q », on dit « P si Q », qui correspond à $Q \Rightarrow P$, et « P seulement si Q », qui correspond à $P \Rightarrow Q$. Ainsi, quand nous commençons la démonstration d'une équivalence « P si et seulement si Q » en montrant $P \Rightarrow Q$, nous commençons par montrer le « seulement si », et non le « si » qui vient en premier dans l'expression.

3.5.3 Difficultés pour les élèves avec l'implication

Quantification universelle implicite

Nous avons déjà vu (par exemple avec la tâche du labyrinthe, page 82) que certains élèves interprètent la proposition « si $P[x]$ alors $Q[x]$ » comme une proposition ouverte pour laquelle ils ne peuvent pas conclure si elle est vraie ou fausse, et qu'ils n'ont pas tort du point de vue de la logique mathématique.

On pourrait alors suggérer qu'il suffit d'apprendre aux élèves que, même s'il n'y a pas écrit « pour tout », il faut faire comme si c'était le cas. Je donnerai trois arguments contre une telle suggestion.

Le premier est lié a la négation. En effet, pour donner la négation de la proposition « si $P[x]$ alors $Q[x]$ », comme elle est généralement entendue, c'est-à-dire comme une implication universellement quantifiée, il ne suffit pas de savoir que la négation de la proposition $P \Rightarrow Q$ est la proposition (P ET NON Q) (ce qui est déjà bien !), et de proposer ($P[x]$ ET NON $Q[x]$). Ici, il faut expliciter la quantification existentielle, la négation est « il existe x tel que ($P[x]$ ET NON $Q[x]$) ». Expliciter la quantification universelle aiderait les élèves à penser à cette quantification existentielle !

Le deuxième concerne le domaine de quantification. En l'absence de quantification universelle explicite, le domaine de quantification (c'est-à-dire le domaine auquel la variable est astreinte) n'est évidemment pas mentionné. Or, bien sûr, la connaissance de ce domaine est nécessaire pour se prononcer sur la vérité de l'implication. Ainsi, dans une classe où on demande aux élèves de se prononcer sur la proposition « si $x^2 \geqslant 1$ alors $x \geqslant 1$ », certains désaccords entre élèves peuvent être dus au fait que certains rétablissent la quantification universelle et pas d'autres, mais certains hésiteront aussi car c'est vrai quand les variables sont astreintes à $\mathbb{R}_+$, faux quand les variables sont astreintes à $\mathbb{R}$.

Le troisième argument a trait à la place et à la portée du quantificateur omis. Deux exemples sont donnés dans *Élaboration d'une formation à la logique pour les professeurs de mathématiques* (Hache & Mesnil, 2012, pp. 215-216). Je reprends ici le deuxième. Considérons la proposition suivante (dans laquelle la variable k est astreinte à $\mathbb{R}$, et la variable f à l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) :

$$(*) \text{ Si } f \text{ est croissante alors } |k| \times f \text{ est croissante}$$

Replaçons maintenant les quantifications universelles, il y a deux possibilités :
– (1) : $\forall f\, \forall k$ (si f est croissante alors $|k| \times f$ est croissante)
– (2) : $\forall f$ [si f est croissante alors ($\forall k\; |k| \times f$ est croissante)]
Ces deux propositions sont équivalentes, on peut donc *a priori* utiliser indifféremment l'une ou l'autre de ces formulations. Or, examinons maintenant les réciproques :
– réciproque de la proposition (1) : $\forall f\, \forall k$ (si $|k| \times f$ est croissante alors f est croissante)
– réciproque de la proposition (2) : $\forall f$ [si ($\forall k\; |k| \times f$ est croissante) alors f est croissante]
Les deux réciproques obtenues ne sont pas équivalentes (la première est fausse, la deuxième est vraie). Ainsi, on ne peut pas rétablir les quantifications universelles implicites dans la proposition $(*)$ indifféremment comme dans la proposition (1) ou comme dans la proposition (2).

Vérité de l'implication et vérité de la prémisse

Dans les réponses à un questionnaire proposé à des étudiants entamant leurs études à l'université, V. Durand-Guerrier repère une conception « selon laquelle affirmer un énoncé conditionnel, c'est affirmer son antécédent », et relie cette conception à l'utilisation d'une implication dans les démonstrations :

> Cette conception commune semble donc assez résistante, au sens où elle *résiste* à la pratique et aux savoirs acquis en mathématiques [...] On peut naturellement mettre en relation le fait de ne pas considérer les cas qui rendent faux l'antécédent avec la pratique scolaire usuelle où l'implication est utilisée essentiellement pour appliquer la règle du détachement [14], après avoir contrôlé que les hypothèses du théorème sont satisfaites. (Durand-Guerrier, 2005, p. 56)

14. Ou *modus ponens* : de A et de si A alors B, on déduit B.

Une telle conception amène des difficultés dans des questions faisant intervenir la contraposée, comme le montre V. Durand-Guerrier avec certaines réponses d'étudiants à la question suivante :

> Si un domaine plan D_1 est inclus dans un domaine plan D_2, alors son aire A_1 est inférieure à l'aire A_2 du domaine D_2.
>
> Que peut-on dire de D_1 et de D_2 sachant que $A_1 > A_2$?

Un étudiant répond : « C'est impossible puisque D_1 est supposé inclus dans D_2. D_1 et D_2 sont à redéfinir. » (Durand-Guerrier, 2005, p. 55). Cette difficulté a aussi été repérée par L. Radford dans (Radford, 1985).

Confusion entre implication et équivalence

Dans sa thèse L. Radford remet en question l'interprétation de certaines erreurs d'élèves comme étant une confusion entre implication et équivalence (Radford, 1985). Il propose un test à des élèves de Première (16-17 ans) dans lequel il y a trois types de question :
– Sachant que « si A alors B » est vraie, et que A est fausse, que conclure sur B ?
– Sachant que « si A alors B » est vraie, et que B est vraie, que conclure sur A ?
– Sachant que « si A alors B » est vraie, et que B est fausse, que conclure sur A ?
Il détecte alors quatre traitements différents de l'implication, dont le premier pourrait être interprété comme une confusion entre implication et équivalence, mais pour lequel Radford parle plutôt de co-occurrence :

> Le premier [traitement de l'implication] est globalisant : il consiste à voir dans les deux événements A et B de l'énoncé « si A alors B », deux événements inséparables : l'un ne saurait se produire sans l'autre. Vu ainsi, ce traitement semblerait relever de l'équivalence logique. Mais il n'en est rien : c'est une affirmation de co-occurence qui n'a aucune signification logique. (Radford, 1985, p. 194)

Dans un tel traitement, le rôle de la prémisse et le rôle de la conclusion ne sont pas distingués. Pour de tels élèves, dire « si A alors B » revient à dire « soit A et B, soit ni A ni B ». Bien sûr, ce traitement ne pourra pas être mis à mal dans des situations où il y a effectivement équivalence entre A et B !

Le cas de la prémisse fausse

J. Rogalski et M. Rogalski, dans une perspective globale d'étude des erreurs de raisonnement liées à un maniement erroné de la logique, se sont intéressés aux divers modes de traitement de la validité de l'implication par des étudiants (J. Rogalski & Rogalski, 2004). Ils ont conduit une étude empirique faite sur deux groupes d'étudiants entrant dans la préparation au CAPES de mathématiques [15] de l'université de Lille, en 1999 et en 2001. Ils ont notamment étudié le traitement des implications à prémisse fausse, intérêt qu'ils justifient par le fait que « la situation de l'implication à hypothèse fausse est à peu près la seule qui met fortement en évidence le saut qualitatif entre d'une part une certaine logique usuelle, naturelle [...] et d'autre part une logique formelle [16] dont la nécessité intervient de façon plus cachée en mathématiques, au point que les étudiants ne se rendent pas compte qu'elle y est plus qu'on ne le pense à l'œuvre » (J. Rogalski & Rogalski, 2004, p. 177).

Des réponses à 3 items concernant des implications de type factuel (où les propositions en jeu sont des données immédiatement saisissables par le sujet, pratiquement sensibles, comme la tâche du labyrinthe, ou qui peuvent éventuellement être à contenu mathématique « routinier » pour les sujets, comme la proposition « si un triangle non aplati du plan a ses médiatrices non concourantes, alors il est équilatéral »), à prémisse fausse, leur permettent de dégager différents profils :

- **Logique** (réponse du type *l'implication est vraie*, en général avec l'argument *parce que l'hypothèse est fausse*)
- **Pertinent** (réponse du type *l'implication est stupide*, *l'implication n'a pas de sens*)
- **Non conditionnel** (réponse du type *l'assertion est fausse car l'hypothèse est fausse*)
- **Sans dominante** (autre type de réponse ou de distribution de réponse) (J. Rogalski & Rogalski, 2004, p. 180)

Voici la répartition dans chaque groupe :

Profil	Premier groupe (107 étudiants)	Deuxième groupe (71 étudiants)
Logique	17,7 %	21,1%
Pertinent	21,5%	23,9%
Non conditionnel	42%	39,4%
Sans dominante	18,7%	15,5%

Seules les réponses des étudiants du profil *logique* sont en adéquation avec la table de vérité de l'implication, mais nous ne savons pas si c'est effectivement la connaissance de cette table qui permet aux étudiants de conclure. Dans sa thèse V.Deloustal-Jorrand relate une pré-expérimentation avec des étudiants en maîtrise de mathématiques (quatrième année à l'université) (Deloustal-Jorrand, 2004). Elle a notamment demandé aux étudiants ce qu'ils pensaient des implications suivantes (ils pouvaient cocher l'une des quatre cases Vrai, Faux, On ne peut pas savoir, Je ne sais pas répondre) :

- 3 pair $\Rightarrow$ 4 pair
- 3 pair $\Rightarrow$ 4 impair
- 3 impair $\Rightarrow$ 4 pair
- 3 impair $\Rightarrow$ 4 impair

15. Concours qui permet de devenir professeur de mathématiques dans le secondaire.
16. Je rappelle qu'en France, les étudiants en mathématiques, et en particulier ceux qui vont préparer le CAPES, n'ont le plus souvent aucune formation en logique mathématique.

Ces étudiants ont suivi plusieurs séances de travail sur l'implication, et ont notamment vu sa table de vérité. Sur 17 étudiants, 16 répondent correctement à ces questions, et l'auteur relie cela à la connaissance de la table de vérité.

Il semble alors naturel de se demander si le fait de ne pas savoir qu'une implication est vraie quand sa prémisse est fausse est handicapant dans l'activité mathématique. En effet, on se retrouve assez peu souvent (je serais presque tentée de dire *jamais*) en situation de devoir valider une implication en justifiant sa vérité par le fait que sa prémisse est fausse. Par contre, on « croise » plus souvent qu'on ne croit des implications à prémisse fausse, notamment parce qu'à chaque fois que nous affirmons la vérité d'une implication universellement quantifiée « pour tout x, $(P[x] \Rightarrow Q[x])$ », nous affirmons en particulier la vérité d'un certain nombres d'implications à prémisse fausse (voir le troisième argument en faveur du choix fait pour la table de vérité de l'implication page 128). Dans certaines récurrences, il peut nous arriver de montrer que l'hérédité est vraie à partir d'un certain rang n_0, mais sans pouvoir initialiser la propriété au rang n_0 parce qu'elle n'est vraie qu'à partir d'un rang $n_1 > n_0$ (nous aurons alors montré la vérité d'implications dont la prémisse est fausse : les implications $P[n] \Rightarrow P[n+1]$ pour $n_0 \leqslant n < n_1$). J. Rogalski et M. Rogalski donnent aussi l'exemple d'une récurrence descendante, de certains raisonnements par l'absurde (J. Rogalski & Rogalski, 2004, p. 178).

J. Rogalski et M. Rogalski étudient ensuite les réponses aux autres items du questionnaire, qui mettent en jeu des validations d'implications à contenu mathématique, des implications « arbitraires », correspondant à la définition d'une règle (par exemple dans un exercice inspirée d'un test célèbre appelé « la tâche de Wason », dans lequel il est question de la règle « si une carte a une voyelle sur une face, alors elle a un nombre pair sur son autre face »), des implications de « contrat social » (par exemple dans un exercice une maîtresse dit « demain, si quelqu'un a su résoudre l'exercice, je vous donnerai des bonbons ») (voir J. Rogalski & Rogalski, 2004, p. 179), et regardent si le regroupement des réponses selon les profils définis ci-dessus est pertinent. Ils regardent aussi la réussite au CAPES pour chaque profil. Globalement, il y a une meilleure réussite, au questionnaire comme au CAPES, pour les étudiants qui ont le profil *logique*, et une moins bonne réussite pour les étudiants qui ont le profil *non conditionnel*. Les auteurs ne cherchent pas un lien de cause à effet dans les corrélations qu'ils ont mises en évidence, c'est-à-dire qu'ils ne se lancent pas dans des explications du type « les étudiants qui manifestent une meilleure compétence mathématique ont le profil *logique* parce que… », ou à l'inverse « les étudiant qui ont le profil *logique* manifestent une meilleure compétence mathématique parce que… ». Ils se demandent par contre comment agir face à ce constat que des étudiants sont reçus au CAPES, et vont devenir professeurs de mathématiques, alors que leur « aptitude à évaluer des implications pose de sérieux problèmes » (J. Rogalski & Rogalski, 2004, p. 193). Ils doutent qu'un enseignement de logique formelle soit efficace, mais suggèrent un enseignement de logique en interaction avec l'activité mathématique, éventuellement avec une dimension historique. Or, si des expérimentations locales et ponctuelles ont eu lieu, et ont été assez concluantes (les auteurs évoquent le débat scientifique de M. Legrand, des cours proposés en DEUG [17] par V. Durand-Guerrier ou R. Pellissier), les questions de logique continuent d'être globalement absentes de la formation initiale des enseignants de mathématiques, et l'on peut supposer que les résultats de cette étude si elle était menée aujourd'hui ne seraient pas très différents.

Dans la conduite des situations de débat scientifique (pratique initiée par M. Legrand, reprise par exemple dans la brochure de M. Gandit et M-C. Demangeot, *Le vrai et le faux au collège et au lycée*), dans lesquels les élèves ont à se prononcer sur la vérité ou non d'une implication « pour tout x, si $P[x]$ alors $Q[x]$ », M. Legrand distingue trois catégories de valeurs possibles pour la variable x :
– les *exemples*, qui vérifient la prémisse et la conclusion,
– les *contre-exemples*, qui vérifient la prémisse et pas la conclusion,
– les *hors-sujet*, qui ne vérifient pas la prémisse. (Gandit & Masse-Demongeot, 2001)
Du point de vue de la logique mathématique, la distinction entre *exemples* et *hors-sujet* n'a pas vraiment de raison d'être : certes, nous pouvons les associer chacun à des lignes différentes de la table de vérité du connecteur IMPLIQUE, mais dans le deux cas, l'implication « si $P[x]$ alors $Q[x]$ » est vraie. Ils interviennent par contre différemment dans les réponses des élèves à ce type de tâche : il est courant que des élèves proposent un hors-sujet pour infirmer une implication, ou un exemple pour la démontrer. La catégorisation proposée ci-dessus peut s'avérer utile pour identifier ces types d'erreurs (on ne prouve pas une implication universellement quantifiée avec un exemple ! on ne l'infirme pas avec un hors-sujet, mais avec un contre-exemple !).

3.6 Quantificateurs

3.6.1 Approche à partir de la logique mathématique

Nous avons vu dans l'étude épistémologique que dans la logique Aristotélicienne, les propositions sont différenciées selon un critère de quantité. La quantification est ainsi déjà présente dans cette formalisation des propositions, mais elle n'est pas séparable du reste de la proposition (c'est-à-dire que la quantification n'est pas une opération supplémentaire que l'on peut faire à partir d'une proposition). C. S. Peirce (sémiologue, philosophe et logicien américain, 1839-1914) est le premier [18] à dégager toute la portée du fait de « sortir » la quantification de la proposition en utilisant des quantificateurs qui « portent sur un ou plusieurs individus indéterminés x, y, z, arguments d'une fonction, la distinction étant nettement faite entre le ou les quantificateurs et la formule qu'ils quantifient »

17. Diplôme d'Études Universitaires Générales, correspondant jusqu'en 2003 aux deux premières années à l'université.
18. Il reconnaît à son élève Mitchell la paternité des symboles qu'il utilise.

(Blanché, 1970, p. 299). Je dirai alors qu'il y a dans une proposition :
– une quantification quand des éléments y expriment l'idée d'une quantité,
– un quantificateur quand cette quantification est marquée par une expression possédant la propriété de pouvoir être séparée du reste de la proposition, qui est alors encore une proposition.

La logique des prédicats utilise deux quantificateurs : le quantificateur universel, qui appliqué à une variable x astreinte à un domaine E permet d'obtenir, à partir d'une proposition P, la proposition $\forall x\, P$, et le quantificateur existentiel, qui appliqué à une variable x permet d'obtenir, à partir d'une proposition P, la proposition $\exists x\, P$. La proposition $\forall x\, P[x]$ [19] est vraie lorsque pour chaque élément a de l'ensemble E la proposition $P[a]$ est vraie. La proposition $\exists x\, P[x]$ est vraie lorsqu'il existe au moins un élément a de l'ensemble E tel que $P[a]$ soit vraie [20].

Dans la pratique, on indique souvent dans la proposition le domaine auquel les variables sont astreintes, ce qui rend parfois la succession de quantifications assez chargée, comme dans la proposition suivante :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \, \forall x \in I \, \forall y \in I \quad (|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

(uniforme continuité de la fonction f sur l'intervalle I).

Il arrive que l'on sépare les quantifications par des virgules et que l'on rassemble les variables astreintes à un même domaine et soumises consécutivement à un même quantificateur, ce qui donne dans le cas présent :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \, \forall x, y \in I, \quad (|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

Constatons tout de suite que le gain de place est minime ! Conscients qu'il y a là une écriture qui n'est pas tout à fait correcte, certains mathématiciens utilisent le produit cartésien et écrivent : $\forall (x, y) \in I^2$. Il vaut beaucoup mieux s'astreindre à ne faire suivre un quantificateur que par une simple variable. Cela permet de disposer de règles syntaxiques simples et sûres pour manipuler les propositions. De plus, dans l'exemple de la continuité uniforme, l'écriture $\forall x \in I \, \forall y \in I$ permet de mettre en évidence l'inversion de l'ordre des quantifications qui différencie la continuité uniforme sur I et la continuité sur I, qui, elle, s'exprime par :

$$\forall x \in I, \, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \, \forall y \in I, \quad (|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

19. Dans la pratique nous rencontrons essentiellement des propositions où la quantification porte sur une variable x qui est libre dans P, d'où la notation $P[x]$. Je n'ai pas utilisé cette notation dans l'aspect syntaxique des quantificateurs, car j'ai voulu souligner que de ce point de vue syntaxique, une proposition telle que $\forall x, y = 4$ est correcte (et il est en fait possible de lui donner une interprétation sémantique, voir dans l'annexe A page 451).

20. L'utilisation d'une lettre a différente de x souligne la différence entre les aspects syntaxique et sémantique.

Je rappelle le carré des oppositions pour les propositions contenant un prédicat unaire :

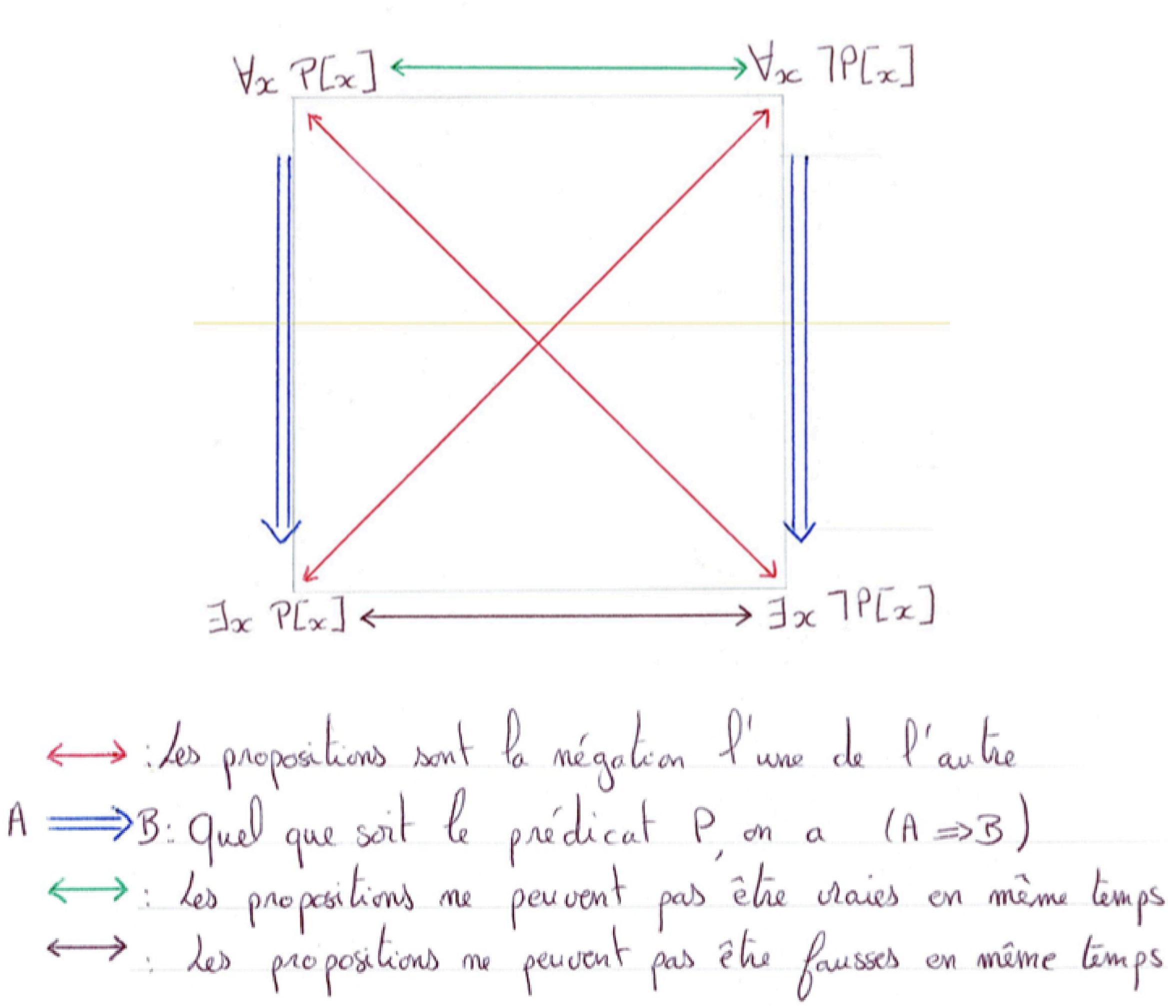


FIGURE 3.7 – Carré des oppositions pour les prédicats unaires avec couleurs

Pour un prédicat binaire $P[x, y]$, selon la nature de la quantification sur x et de la quantification sur y, et l'ordre de ces quantifications, nous obtenons 8 propositions closes différentes. Mais quand les deux quantificateurs sont identiques, « l'ordre n'a pas d'importance » (c'est-à-dire que les propositions $\forall x\, \forall y\ \ P[x, y]$ et $\forall y\, \forall x\ \ P[x, y]$ sont équivalentes, ainsi que les propositions $\exists x\, \exists y\ \ P[x, y]$ et $\exists y\, \exists x\ \ P[x, y]$). Nous avons alors, à équivalence près, 6 propositions :
- $\forall x\, \forall y \quad P[x, y]$
- $\forall x\, \exists y \quad P[x, y]$
- $\exists x\, \forall y \quad P[x, y]$
- $\exists x\, \exists y \quad P[x, y]$
- $\forall y\, \exists x \quad P[x, y]$
- $\exists y\, \forall x \quad P[x, y]$

Sur le modèle du carré des oppositions, nous pouvons alors construire un dodécagone pour les prédicats à deux variables. Dans la figure ci-dessous (pour laquelle j'ai utilisé la même légende que pour la précédente), toutes les flèches rouges existantes sont dessinées. Par contre, pour ne pas alourdir le schéma, j'ai choisi pour les flèches bleues, vertes et noires de ne noter que celles partant ou arrivant à la proposition $\exists x \, \forall y \; P[x, y]$ ou à sa négation $\forall x \, \exists y$ NON$P[x, y]$:

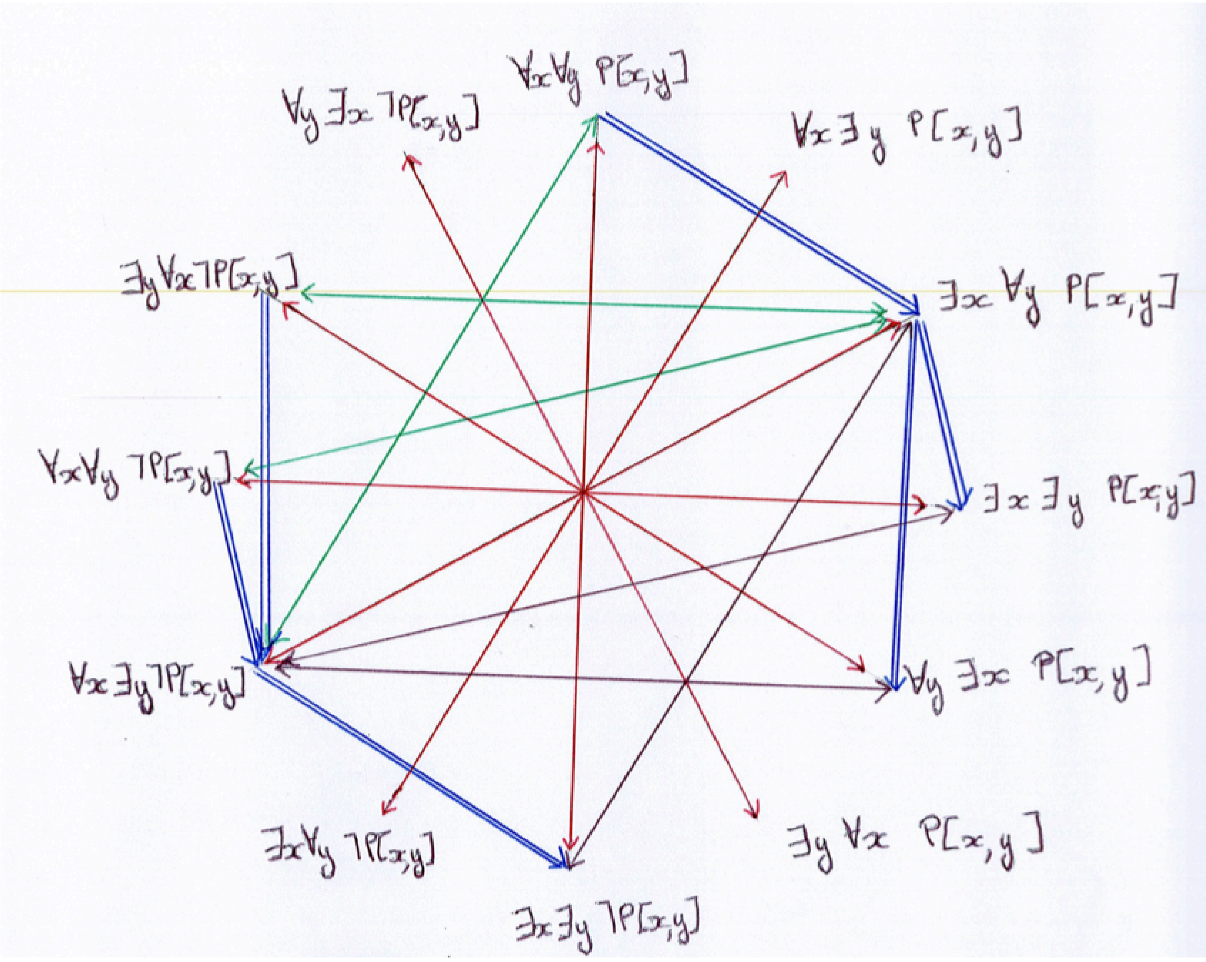


FIGURE 3.8 – Dodécagone des oppositions pour les prédicats binaires avec couleurs

Donnons également quelques propriétés des quantificateurs vis-à-vis des connecteurs ET et OU. Dans le cas d'un ensemble fini E à n éléments $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, la proposition « pour tout $x \in E$, $P[x]$ » est équivalente à la conjonction « $P[x_1]$ ET $P[x_2]$ ET $\ldots$ ET $P[x_n]$ », et la proposition « il existe $x \in E$ tel que $P[x]$ » est équivalente à la disjonction « $P[x_1]$ OU $P[x_2]$ OU $\ldots$ OU $P[x_n]$ ».

Par extension, dans le cas d'un ensemble E dénombrable, $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, nous pourrions voir la proposition « pour tout $x \in E$, $P[x]$ » comme « $P[x_1]$ ET $P[x_2]$ ET $\ldots$ ET $P[x_n]$ ET $\ldots$ », et la proposition « il existe $x \in E$ tel que $P[x]$ » comme « $P[x_1]$ OU $P[x_2]$ OU $\ldots$ OU $P[x_n]$ OU $\ldots$ ». D'une façon générale, une quantification universelle peut-être vue comme une conjonction infinie, et une quantification existentielle comme une disjonction infinie.

Cela peut servir pour se souvenir des propriétés suivantes :

Quels que soient les prédicats P et Q,

(1) on a équivalence entre :
  – $\forall x\ (P[x]$ ET $Q[x])$ et $(\forall x\ P[x]$ ET $\forall x\ Q[x])$
  – $\exists x\ (P[x]$ OU $Q[x])$ et $(\exists x\ P[x]$ OU $\exists x\ Q[x])$

(2) les propositions suivantes sont vraies :
  – $(\forall x\ P[x]$ OU $\forall x\ Q[x]) \Rightarrow \forall x\ (P[x]$ OU $Q[x])$
  – $\exists x\ (P[x]$ ET $Q[x]) \Rightarrow \exists x\ (P[x]$ ET $\exists x\ Q[x])$

Les réciproques de ces implications ne sont pas toujours vraies. En effet, considérons les prédicats $P[n]$: « n est pair » et $Q[n]$: « n est impair » (pour une variable n astreinte à $\mathbb{N}$). Alors :

– la proposition « $\forall n\ (P[n]$ OU $Q[n])$ » est vraie,
  mais la proposition « $(\forall n\ P[n]$ OU $\forall n\ Q[n])$ » est fausse,
– la proposition $(\exists n\ P[n]$ ET $\exists n\ Q[n])$ est vraie,
  mais la proposition $\exists n\ (P[n]$ ET $Q[n])$ est fausse.

3.6.2 Expression dans le discours mathématique

Quantifications implicites, quantificateurs

Les quantifications sont souvent implicites, et c'est une difficulté importante, et sous-estimée, pour les élèves (nous avons déjà vu l'exemple de la quantification universelle implicite associée à l'implication). Par ailleurs, elles sont également souvent marquées par d'autres expressions que des quantificateurs (voir page 140 pour la distinction quantification/quantificateur).

Examinons les 12 propositions suivantes [21] (la variable x est astreinte à $\mathbb{R}$) :

(1) Un nombre réel a un carré positif

(2) Un nombre réel a toujours un carré positif

(3) Tous les réels ont un carré positif

(4) Chaque nombre réel a un carré positif

(5) N'importe quel nombre réel a un carré positif

(6) Le carré d'un nombre réel est positif

(7) Le carré d'un nombre réel est toujours positif

(8) Tout réel x est tel que son carré est positif

21. Certaines paraîtront moins bien formulées que d'autres, mais elles sont toutes grammaticalement correctes, et l'on peut très bien toutes les imaginer prononcées ou écrites dans le cadre d'un cours de mathématiques.

(9) Si x est un réel, alors x^2 est positif

(10) Pour tout réel x, x^2 est un réel positif

(11) Tout réel x est tel que x^2 est positif

(12) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geqslant 0$

Ce sont plusieurs formulations d'une même propriété, mais la quantification universelle y est exprimée de manière très différente.

Dans la proposition (1), la quantification est implicite, sous-entendue par la première occurrence du mot « un ». Nous utilisons fréquemment « un » pour marquer une quantification universelle, dans le langage courant comme en mathématiques. Mais « un » est également utilisé pour marquer une quantification existentielle, ce qui est évidemment source de confusion ! Parfois les deux utilisations cohabitent dans une même proposition, comme par exemple dans « un réel positif possède une racine carrée », ou dans « un triangle rectangle est inscriptible dans un demi-cercle ». Dans la proposition (1), la deuxième occurrence de « un » n'est pas directement interprétable comme une quantification [22].

Dans la proposition (2) l'implicite de la quantification universelle est levé par l'utilisation du mot « toujours ». La permanence indiquée ici par « toujours » n'est pas une permanence dans le temps, mais une permanence dans un ensemble de valeurs.

Dans les propositions (3), (4), (5), la quantification est explicite, marquée par les mots « tous », « chaque », « n'importe quel ». Dans sa théorie du *denoting*, B. Russell fait une distinction entre ces expressions (pour plus de précisions, on pourra se reporter à *La philosophie mathématique de Russell* , de D. Vernant, 1993, pp. 64-65). Il est probable qu'elles induisent différentes « représentations » chez les élèves, qui seraient différemment opérantes selon les situations. Je n'ai pas connaissance d'études ayant testé cette hypothèse.

Les propositions (6) et (7) se différencient des propositions (1) à (5) car le carré y est sujet et non plus complément. Notons que le déterminant utilisé devant « carré » est « le », qui donne une information qui n'était pas contenue dans les formulations précédentes : l'unicité du carré. Une telle information est également contenue dans (1') : « un nombre réel à son carré positif ».

Les propositions (8) à (12) se démarquent profondément des précédentes par l'utilisation d'une variable. Dans la proposition (8) cependant, la variable est tout à fait superflue, on pourrait dire (8') : « Tout réel est tel que son carré est positif ». La proposition (8) mélange l'utilisation d'une variable et un phénomène d'anaphore (voir page 132) avec le

22. Il est tout de même possible de formaliser cette proposition en utilisant une deuxième variable, et d'interpréter ce deuxième « un » comme une quantification. Nous aurions alors les deux possibilités suivantes : $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}\ (y = x^2 \text{ ET } y \geqslant 0)$ ou $\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\ (y = x^2 \Rightarrow y \geqslant 0)$, c'est-à-dire une formulation avec une quantification universelle, et une formulation avec une quantification existentielle. Ceci est dû à l'unicité du carré d'un réel. En effet, plus généralement, quand il y a existence et unicité d'un élément y d'un ensemble E vérifiant la propriété $P[y]$ (ici $y = x^2$), quel que soit le prédicat $Q[y]$ (ici $y \geqslant 0$), les propositions $\exists y(P[y] \text{ ET } Q[y])$ et $\forall y(P[y] \Rightarrow Q[y])$ sont équivalentes.

mot « son », qui fait que la quantification n'est pas séparable du reste de la proposition, comme cela est possible dans la proposition (11).

Quand j'ai décrit le registre formalisé (voir page 90), l'expression des quantifications à l'aide des quantificateurs était une contrainte de mise en forme de ce registre. Dans la liste des propositions précédentes, seules les propositions (10), (11) et (12) appartiennent à ce registre. Dans les propositions (1) à (9), la quantification n'est pas exprimée à l'aide d'un quantificateur, et est plus ou moins explicite.

D'autres expressions cachent des quantifications. C'est le cas par exemple du terme « avec », dans une proposition telle que « $n = 2k$, avec $k \in \mathbb{N}$ » qui est souvent donnée comme synonyme de « n est pair ». Ici, le terme « avec » cache une quantification existentielle. Autre exemple, l'expression « pour n assez grand », par exemple dans « $np > A$ pour n assez grand ». Dans une proposition « $P[n]$ pour n assez grand », il y a deux quantifications cachées : une existentielle portant sur une variable A qu'il faut réintroduire, et une universelle sur n : cette proposition est équivalente à « $\exists A \, \forall n \, (n \geqslant A \Rightarrow P[n])$ ». Autre exemple dans un cadre géométrique : la proposition « $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, \beta \in \mathbb{R}, \forall\, \gamma \in \mathbb{R}$, si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, alors le vecteur $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ est indépendant de M ». La proposition « $N[x]$ est indépendant de x », dans laquelle $N[x]$ n'est pas une proposition mais le nom d'un objet, est équivalente à « $\forall x \, \forall x' \; N[x] = N[x']$ ». Je ne me prononcerai pas sur le fait que de telles formulations sont ou non plus facilement compréhensibles par les élèves. Par contre, je peux affirmer qu'elles empêchent un travail sur les quantificateurs, puisqu'ils n'y sont pas présents. Par ailleurs, nous avons vu dans la partie de ce chapitre concernant la négation que des telles formulations sont peu opératoires pour formuler la négation (voir page 125).

Les expressions les plus utilisées pour le quantificateur universel sont « pour tout x », « quel que soit x ». Pour le quantificateur existentiel, les expressions les plus utilisées sont « il existe x tel que », « il existe au moins un x tel que », la deuxième étant surtout utilisée quand on veut souligner le fait qu'on ne demande pas l'unicité. La présence d'un verbe dans cette expression oblige à faire la liaison avec la proposition en utilisant « tel que », ce qui n'est bien sûr pas nécessaire quand on utilise le symbole $\exists$. On pourrait marquer le quantificateur universel avec l'expression « tout réel x est tel que », dans laquelle on aurait cette même liaison. Et on pourrait marquer le quantificateur existentiel avec l'expression « pour au moins un x », qui permettrait de l'éviter.

Je terminerai avec l'utilisation, fréquente en mathématiques, du mot « soit », par exemple dans l'énoncé « soit x un réel ». Notons tout d'abord que dans le discours mathématique un tel énoncé peut constituer une phrase à lui tout seul [23] (rappelons que « soit x un réel » n'est pas une proposition, voir page 111). Dans sa thèse, F. Rakotovoavy dit qu'une

23. On ne trouve pas de telle utilisation du mot « soit » dans la langue courante.

telle expression [24] sert à faire une présentation-quantification universelle différée (PUD, voir Rakotovoavy, 1983, p. 50). Quand une PUD est utilisée dans un théorème, elle n'est généralement suivie que d'une (ou en tout cas d'un petit nombre de) proposition(s). Elle marque alors la quantification universelle qui porte dessus (le théorème est de la forme $\forall x,\ P[x]$). Quand une PUD est utilisée au début d'une démonstration, tout ce qui est démontré concernant x est vrai pour tout élément du domaine auquel x est astreinte (c'est-à-dire que chaque proposition $P[x]$ de la démonstration dont on a prouvé la vérité peut être complétée en une proposition close vraie : $\forall x,\ P[x]$). Cela est vrai en particulier de la conclusion. Malheureusement, la démonstration s'arrête souvent là (par exemple elle se termine par « donc $P[x]$ »), et il est assez rare que la quantification universelle soit rappelée, par exemple en ajoutant « nous avons montré que pour tout x, $P[x]$ » (V. Durand-Guerrier signale que cette absence « tend à occulter les questions de généralisation, ou de réciproque, qui pourraient se poser, ce qui va à l'encontre de ce que l'on souhaite développer chez les élèves », (Durand-Guerrier, 2005, p. 94).

Quantification relativisée

En mathématiques, nous avons très souvent recours à la quantification relativisée, par exemple dans la proposition $(*)$: « tout entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers » [25]. Pour une variable astreinte à $\mathbb{N}$, notons $P[n]$ le prédicat « n est un entier pair supérieur à 3 », et $P'[n]$ le prédicat « n est un nombre premier ». La proposition $(*)$ est équivalente à la proposition $(**)$ (les variables sont astreintes à $\mathbb{N}$) :

$$\forall n, \quad \Big(P[n] \Rightarrow (\exists p, \exists q,\ (P'[p] \text{ ET } P'[q] \text{ ET } n = p + q))\Big)$$

Nous utilisons une quantification universelle relativisée quand nous voulons affirmer une propriété $Q[x]$ non pas de tous les éléments d'un ensemble, mais de ceux possédant une certaine autre propriété $P[x]$. Nous pourrons alors noter $\forall x \mid P[x],\ Q[x]$ (lire « pour tout x tel que $P[x]$, $Q[x]$ »), qui est en fait un « raccourci » pour la proposition « $\forall x, (P[x] \Rightarrow Q[x])$ ». De la même manière, nous utilisons une quantification existentielle relativisée quand nous voulons affirmer l'existence d'un élément possédant une propriété $Q[x]$, non pas n'importe où mais parmi les éléments qui possèdent aussi une certaine propriété $P[x]$. Nous pourrons alors noter $\exists x \mid P[x],\ Q[x]$ (lire « il existe x tel que $P[x]$ tel que $Q[x]$ » [26]), qui est en fait un « raccourci » pour la proposition « $\exists x, (P[x] \text{ ET } Q[x])$ ».

24. Elle donne d'autres exemples d'expressions ayant le même effet : « on considère un réel x », « on se donne un réel x ».

25. Cette proposition, à ce jour ni démontrée ni infirmée, est appelée *conjecture de Goldbach*.

26. L'utilisation de l'expression « pour au moins un x » éviterait cette répétition de « tel que », nous dirions alors « pour au moins un x tel que $P[x]$, $Q[x]$ »

Avec ces notations, la proposition $(*)$ devient alors :

$$\forall n \mid P[n], \exists p \mid P'[p], \exists q \mid P'[q], \quad n = p + q$$

Nous voyons dans cette dernière formulation, comme dans la formulation initiale, l'allègement de l'écriture par rapport à la formulation $(**)$. Outre cet allègement, un autre avantage de la quantification relativisée est que la relativisation reste inchangée quand on passe à la négation d'une proposition. Ainsi, la négation de la proposition $(*)$ est :

$$\exists n \mid P[n], \forall p \mid P'[p], \forall q \mid P'[q], \quad n \neq p + q$$

et d'une façon générale, la négation de la proposition « pour tout $x \mid P[x]$, $Q[x]$ » est la proposition « il existe $x \mid P[x]$ tel que NON $Q[x]$ », et la négation de la proposition « il existe $x \mid P[x]$ tel que $Q[x]$ » est « pour tout $x \mid P[x]$, NON $Q[x]$ ». Cet avantage est malheureusement méconnu de certains élèves qui, quand on leur demande la négation d'une proposition commençant par $\forall \varepsilon > 0$, écrivent une proposition qui commence par $\exists \varepsilon < 0$.

Au collège, les propriétés permettant de reconnaître la nature d'un quadrilatère sont données souvent sous la forme *si…, alors …*, mais aussi parfois sous la forme d'une quantification relativisée. Par exemple, on trouvera souvent « si un quadrilatère a ses côtés opposés deux à deux de même longueur, alors c'est un parallélogramme », également parfois « un quadrilatère qui a ses côtés opposés deux à deux de même longueur est un parallélogramme », malheureusement rarement « tout quadrilatère qui a ses côtés opposés deux à deux de même longueur est un parallélogramme », formulation dans laquelle la quantification est explicite. Un avantage de la première formulation est de pouvoir énoncer facilement la réciproque, mais d'une part nous avons vu que cela nécessitait parfois quelques aménagements (voir page 133), d'autre part, nous pourrions définir une notion de réciproque des énoncés de la forme « pour tout $x \mid P[x]$, $Q[x]$ », qui serait « pour tout $x \mid Q[x]$, $P[x]$ ».

Pour terminer cette section, je reviens sur l'utilisation du *si présuppositionnel* en mathématiques (voir page 131), par exemple dans la proposition « si $x > 0$, $\ln(x^2) = 2\ln x$ ». Contrairement aux apparences, il ne s'agit pas d'une quantification relativisée, puisque $\ln(x^2) = 2\ln x$ n'a pas de sens sur un domaine plus large que les réels strictement positifs.

3.6.3 Difficultés pour les élèves avec les quantificateurs

Les études qui portent sur la manipulation des quantificateurs dans l'apprentissage des mathématiques se situent dans le contexte de l'enseignement supérieur. Deux raisons à cela : à ce niveau-là, ils sont utilisés de façon plus systématique dans des définitions et des propriétés, souvent sous forme symbolique, et ils interviennent dans des propositions où il y a alternance des deux quantificateurs, ce qui est, nous allons le voir maintenant, source de difficulté pour les étudiants.

Non prise en compte de l'ordre des quantificateurs

J'ai déjà évoqué la recherche de E. Dubinsky et O. Yiparaki montrant une forte tendance chez des étudiants à favoriser, pour des énoncés comportant une quantification universelle et une quantification existentielle, une interprétation « pour tout... il existe » par rapport à une interprétation « il existe... pour tout » (voir page 80). Dans sa thèse déjà citée, F. Chellougui retrouve ce phénomène dans des productions d'étudiants qui ont à démontrer des énoncés contenant simultanément les quantificateurs universels et existentiels (qui sont explicitement présents ou qui sont « cachés » dans la définition de certains termes, par exemple de « A est majorée »). F. Chellougui utilise la déduction naturelle de Copi [27] dans l'analyse *a priori* des tâches proposées aux étudiants, afin de « repérer ce qui relève de la gestion des quantificateurs, ce qui est clairement un appel à des connaissances mathématiques, et de repérer également comment ces deux pôles sont articulés » (Chellougui, 2004, p. 124). Elle mène 6 entretiens semi-directifs avec des binômes d'étudiants de première année d'université de la section Math-Informatique ayant préalablement résolu ces exercices. Au début de chaque entretien, elle demande ce qu'est un majorant, et la plupart des réponses sont formulées ainsi :

Quel que soit x appartenant à A, il existe un réel M tel que x est inférieur ou égal à M.
On dit que M est un majorant de A.

Ces réponses sont accompagnées d'une formulation notée sur une feuille :

$$\forall x \in A, \exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \leqslant M$$

F. Chellougui relève d'abord qu'une telle définition donne une propriété d'un ensemble A, et non la caractérisation d'une relation entre un élément M et un ensemble A, ce qui peut être repéré en identifiant le statut des variables. En s'appuyant sur la représentation graphique d'un intervalle de $\mathbb{R}$, et en cherchant à voir avec les étudiants s'il vérifie ou non la définition proposée, F. Chellougui tente ensuite de les amener à remettre en cause cette définition. Elle remarque alors dans la discussion qui suit que l'ordre des quantificateurs n'est souvent pas pris en compte par les étudiants. Par ailleurs, elle signale que « cette intervention provoque soit un aménagement de la définition, soit un questionnement sur les objets eux mêmes, mais ne permet pas en général d'aboutir à une définition satisfaisante » (*ibid*, p. 249).

27. Logicien américain, qui reprend le principe de la déduction naturelle de Gentzen et propose son propre système en 1954.

Utilisation des propositions existentielles

F. Chellougui met en évidence une autre difficulté. Elle propose à des étudiants de première année d'université de la section Math-Informatique l'exercice suivant :

On munit l'ensemble $\mathbb{N}^*$ de la relation $\mathscr{R}$ définie par :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad p\mathscr{R}q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \ p^n = q.$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre.

Pour montrer la transitivité, $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}^*, \forall r \in \mathbb{N}^*$, $\Big((p\mathscr{R}q \text{ ET } q\mathscr{R}r) \Rightarrow p\mathscr{R}r\Big)$, il faut utiliser deux fois l'énoncé existentiel qui définit la relation $\mathscr{R}$, c'est-à-dire que suite à l'affirmation de l'existence d'un élément vérifiant une certaine propriété, on va en choisir un et lui donner un nom. Bien sûr, il ne faut pas utiliser la même lettre de variable dans les deux cas. Or, dans la rédaction d'une démonstration, les mathématiciens passent, la plupart du temps, directement de la proposition « il existe n vérifiant $P[n]$ », à un énoncé où apparaît un élément n vérifiant $P[n]$ (par exemple, « N est pair, donc il existe n tel que $N = 2n$ donc $N^2 = 4n^2$ » ; nous y reviendrons dans la partie suivante sur les démonstrations). Dans l'expérimentation proposée par F. Chellougui, seuls 19 étudiants sur 96 changent de lettre entre les deux utilisations. De nombreux autres justifient la transitivité par le raisonnement erroné [28] « $p\mathscr{R}q$ donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $p^n = q$, $q\mathscr{R}r$ donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $q^n = r$, donc $p^{n^2} = r$ et donc $p\mathscr{R}r$)

Les propositions $\forall, \exists$ et la « règle de dépendance »

Quand nous utilisons un énoncé de la forme « $\forall \varepsilon\, \exists \eta \quad P[\varepsilon, \eta]$ », pour un ε donné, nous pouvons considérer un η vérifiant $P[\varepsilon, \eta]$. Mais ce η dépend de ε. Nous trouvons une erreur due à un non-respect de cette dépendance dans la démonstration ci-après, proposée par un étudiant, et issue de l'article *Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ?* de G. Arsac et V. Durand-Guerrier (Durand-Guerrier & Arsac, 2003).

28. Les rédactions des étudiants données en exemples utilisent plutôt des mises en forme de démonstrations avec le symbole d'équivalence, des accolades.

Question ; (E,d) est un espace métrique, A et B sont deux parties de E. On définit $d(A,B) = \inf\{d(x,y),\ x\in A,\ y\in B\}$. Montrer que si A est compact et B est fermé et $A\cap B=\varnothing$, alors $d(A,B)\neq 0$.

Démonstration ;

1 $\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, x\in A,\ \exists\, y\in B,\ 0\leq d(x,y) < \frac{\varepsilon}{2}$.

2 Comme $x\in A$, et A fermé $\Rightarrow x\in \overline{A} \Rightarrow \exists\ (x_n)\subset A,\ x_n \to x$

3 Or, $d(x_n,y)\leq d(x_n,x)+d(x,y)$

4 Et, comme $x_n \to x$, $\exists\, n_0$, $n\geq n_0$ $d(x_n,x)< \frac{\varepsilon}{2}$

5 d'où, pour $n\geq n_0$, $d(x_n,y)<\varepsilon$, ainsi $x_n \to y$ et comme $(x_n)\subset A$, alors :

6 $y\in \overline{A}=A$, or $y\in B \Rightarrow y\in A\cap B \Rightarrow A\cap B\neq\varnothing$.

Tableau 3. – Le texte de la démonstration de l'étudiant

Figure 3.9 – Démonstration proposée par un étudiant

Les auteurs soumettent cette preuve à 21 enseignants. Tous, sauf un, écrivent que « x et y dépendent de ε », dépendance explicitée dans des termes très variés selon les enseignants (voir p. 324 de l'article). Pour les auteurs, cette règle de dépendance est emblématique du fait que « le professeur communique des règles de raisonnement contextualisées qui remplacent l'appel explicite à la logique », bien qu'elle présente un caractère exceptionnel, « d'une part par l'unanimité de son emploi par les enseignants, d'autre part par la fréquence de son explicitation dans les manuels » (p. 331). Les enseignants interrogés se servent de leur expertise mathématique pour dire que dans un tel cas, il aurait fallu expliciter la dépendance. Dans son HdR déjà citée, V. Durand-Guerrier parle d'un paradoxe didactique : « l'appropriation des règles de raisonnement suppose apparemment l'expertise mathématique, qui précisément fait défaut à celui qui étudie un nouveau domaine mathématique. » (Durand-Guerrier, 2005, p. 146).

3.7 Synthèse de l'étude du langage mathématique

Dans ce chapitre nous avons étudié des éléments constitutifs des expressions mathématiques, en prenant comme référence la logique des prédicats. Nous avons alors identifié plusieurs difficultés possibles pour les élèves dans l'utilisation du langage mathématique :

– le mélange, pour certains termes, d'un usage conforme à la logique mathématique, et d'un usage différent dans le langage courant. C'est le cas par exemple du mot « et » dont nous avons vu qu'il ne traduit pas toujours un connecteur propositionnel ET, ou encore du principe du maximum d'information qui agit sur les phrases avec « ou », mais qui ne vaut pas pour le langage mathématique.

- L'usage d'un même mot dans différentes expressions dans lesquelles il ne prend pas toujours le sens que lui donne la logique mathématique. C'est le cas par exemple du mot « si », qui n'est pas toujours employé pour traduire le connecteur IMPLIQUE, mais qui sert aussi à marquer une restriction pour qu'une proposition ait un sens, ou qui est utilisé dans les définitions.
- L'emploi de variables et de mutificateurs agissant sur ces variables est une spécificité du langage mathématique. Apprendre à formuler et à comprendre des propositions comportant des variables, différencier les statuts (libre ou liée) d'une variable, sont des compétences importantes pour la maîtrise du langage mathématique, rarement explicitement enseignées. C'est particulièrement vrai pour les différents statuts des variables, dont peu d'enseignants sont familiers.
- De nombreux implicites sont présents dans les pratiques langagières de la communauté mathématique, implicites qui ne sont pas toujours partagés par les élèves, ce qui peut amener des malentendus. Des formulations qui semblent parfois plus proches d'une compréhension intuitive masquent souvent une structure logique complexe et rendent difficile la manipulation des propositions ainsi formulées.

La mise en évidence de ces implicites et de ces ambiguïtés n'a pas pour but de les faire disparaître des pratiques langagières des mathématiciens. Mais il paraît essentiel que les professeurs en prennent conscience, pour qu'ils puissent en informer leurs élèves.

Les constituants des expressions mathématiques utilisés pour leur formulation dans le registre formalisé (connecteurs, quantificateurs) sont familiers aux mathématiciens. La logique mathématique a aussi pour objet la formalisation des démonstrations, mais les formalisations proposées sont beaucoup moins connues que le langage des prédicats. Je vais dans le chapitre suivant proposer une étude des divers types de raisonnement, comme je viens de le faire pour les expressions mathématiques, en m'appuyant notamment sur la formalisation proposée par la déduction naturelle.