MPR et modes de justification de l'élève relatifs aux figures planes de la géométrie « à la Euclide » dans le champ d'action de la transition cycle 3/cycle 4

Dans ce chapitre, nous présentons un Modèle Praxéologique de Référence (MPR) et les modes de justification de l'élève qui réifient la référence épistémologique relative à la géométrie « à la Euclide » construite à partir d'approches institutionnelle, épistémologique et cognitive (cf. chapitre 3).

Le MPR nous permet de structurer le savoir relatif aux figures planes de la géométrie « à la Euclide » dans le champ d'action de la transition cycle 3 / cycle 4. Il constitue le fondement épistémologique du modèle de savoir implémenté dans l'environnement MindMath comme nous le verrons dans le chapitre 7. C'est aussi la référence qui nous permet d'analyser les praxéologies à l'œuvre dans les programmes et manuels scolaires en les comparant à celles que nous définissons dans le MPR.

Les modes de justification de l'élève définis selon les dimensions de l'activité géométrique nous permettent de caractériser le bloc technologico-théorique majoritairement engagé par l'élève dans la résolution de tâches en géométrie.

4.1 Organisation du savoir géométrique

Nous considérons que le domaine mathématique est composé de praxéologies globales dont la géométrie et l'algèbre.

Nous distinguons ensuite deux praxéologies régionales qui composent la praxéologie globale de la géométrie : une praxéologie régionale relative aux figures géométriques planes (triangles, quadrilatères, polygones à plus de quatre côtés, etc.) et une praxéologie régionale relative aux solides géométriques.

Nous nous intéressons à la praxéologie régionale des figures géométriques planes. Nous définissons alors cinq praxéologies locales qui caractérisent l'activité géométrique (cf. image 4.1) :

- une praxéologie locale 1 relative à la construction de figures géométriques ;
- une praxéologie locale 2 relative à la preuve mettant en jeu des figures géométriques ;
- une praxéologie locale 3 relative au calcul de grandeurs de figures géométriques ;
- une praxéologie locale 4 relative à la représentation des figures géométriques ;
- une praxéologie locale 5 relative à la modélisation par des figures géométriques.

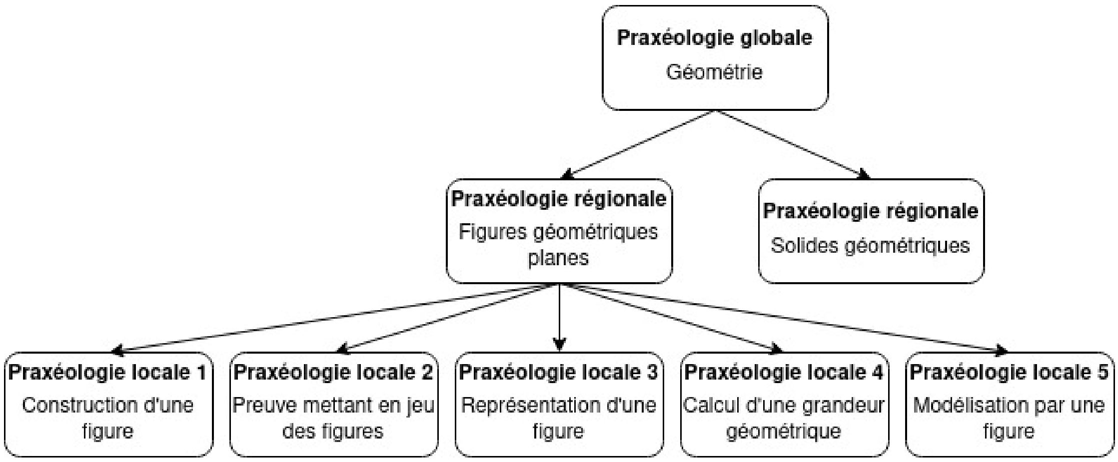

Image 4.1 – Organisation praxéologique de la géométrie

Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, nous nous intéressons à la praxéologie locale 1 relative à la construction de figures planes en lien avec la praxéologie locale 2 relative à la preuve. En particulier, dans la suite de cette thèse, nous nous limiterons à la construction des triangles et des quadrilatères qui sont des objets de base de la géométrie euclidienne (et particulièrement les triangles) mais aussi des programmes scolaires.

Dans la suite de ce chapitre, nous identifions donc les types de tâches, les techniques et les éléments technologico-théoriques mis en jeu dans la praxéologie locale relative à la construction de figures planes. Cette présentation n'est pas exhaustive, notre but est de rendre compte des principales techniques et technologies impliquées dans la construction de figures planes et de souligner les liens avec d'autres praxéologies locales. En effet, un type de tâches d'une praxéologie locale donnée peut se résoudre à l'aide d'une technique qui nécessite de faire appel à des types de tâches, intrinsèques ou extrinsèques (cf. section 2.1.3), issus d'une ou d'autres praxéologies locales. En particulier, comme nous avons commencé à le voir dans le chapitre 3, par exemple dans la section 3.2.5, les techniques mises en œuvre dans la résolution des tâches de la praxéologie locale 1 relative à la construction de figures planes font appel à des types de tâches de la praxéologie locale 2 relative à la preuve mais aussi à des types de tâches des praxéologies locales 3 et 4, respectivement relatives au calcul des grandeurs géométriques et à la représentation des figures géométriques. L'élaboration d'une argumentation heuristique telle que nous l'avons définie dans le chapitre 3 est ainsi rattachée à la praxéologie locale 2 relative à la preuve. En effet, les îlots déductifs de ces argumentations heuristiques mettent en jeu des aspects épistémologiques du raisonnement déductif utilisés dans la résolution des tâches de preuve ou de démonstration.

4.2 La praxéologie locale relative à la construction de figures planes

4.2.1 Types de tâches

Nous avons fait le choix de ne pas considérer les différentes figures géométriques plane (triangles, quadrilatères, etc.) à un niveau régional. Chacune des praxéologies locales que nous avons définies doit donc d'abord se décomposer selon la figure plane en jeu. Les principaux types de tâches génériques constitutifs de la praxéologie locale 1 relative à la construction de figures géométriques planes sont donc :

- Exécuter un programme de construction.
- Construire un point.
- Construire une droite.
- Construire un cercle.
- Construire un triangle.

— Construire un quadrilatère.

— Construire un polygone à plus de quatre côtés.

— Construire une figure composée (par exemple : configurations de droites, un carré et un demi-cercle, plusieurs triangles, etc.).

Nous nous concentrons sur les types de tâches génériques « construire un triangle » et « construire un quadrilatère ». De plus, comme nous l'avons vu au début du chapitre 3, nous n'abordons pas ici la question de la construction des figures géométriques à partir des transformations du plan.

a. Construire un triangle

À partir du types de tâches générique « construire un triangle », nous faisons un premier découpage selon la nature du triangle à construire. Nous obtenons ainsi une partition de l'ensemble des triangles qui correspond aux types de tâches suivants :

— Construire un triangle scalène non rectangle.

— Construire un triangle isocèle non rectangle non équilatéral.

— Construire un triangle équilatéral.

— Construire un triangle rectangle non isocèle.

— Construire un triangle rectangle isocèle.

Nous faisons ensuite un deuxième découpage selon les données pour la construction en faisant le choix de caractériser les triangles à partir de leurs angles et de leurs côtés.

Il est à noter que ces types de tâches sont décrits d'un point de vue institutionnel, les énoncés des tâches effectivement données aux élèves peuvent avoir des sens différents. Par exemple, nous définissons le type de tâches « construire un triangle équilatéral, un côté et un angle de 60° étant donnés » tandis que les élèves devront résoudre une tâche avec un énoncé du type « construire un triangle ABC isocèle en A à partir du côté $[AB]$ donné et tel que $\widehat{BAC} = 60°$ ». Dans le cas général, nous supposons que la nature du triangle indiqué dans le type de tâches est donnée dans l'énoncé (soit par le texte, soit par un schéma, soit par une propriété caractéristique) et nous mentionnons explicitement, comme dans cet exemple, les cas particuliers.

Pour le type de tâches « construire un triangle scalène », les (sous-)types de tâches que nous avons considérés sont :

— Construire un triangle, un angle et deux côtés étant donnés.

— Construire un triangle, deux angles et le côté situé entre les deux angles étant donnés.

— Construire un triangle, deux angles et un côté qui n'est pas situé entre les deux angles étant donnés.

— Construire un triangle, les trois côtés étant donnés.

— Construire un triangle, deux hauteurs et deux sommets du triangle sur ces hauteurs étant donnés.

— Construire un triangle, deux médianes et deux sommets du triangle sur ces médianes étant donnés.

— Construire un triangle, deux médiatrices des côtés et un sommet du triangle étant donnés.

— Construire un triangle, deux côtés et le périmètre du triangle étant donnés.

— Construire un triangle, deux côtés de mesures de longueur entières étant donnés, le dernier côté devant être de mesure de longueur la plus grande entière possible.

Les (sous-)types de tâches des autres types de tâches du types de tâches générique « construire un triangle » que nous avons considérés sont présentés dans l'annexe A.

b. Construire un quadrilatère

Concernant la construction des quadrilatères, nous considérons en particulier les parallélogrammes (dont les parallélogrammes particuliers) puisque ce sont les seuls quadrilatères présents dans les programmes de 2020 des cycles 3 et 4. Nous nous concentrons donc sur les types de tâches :

— Construire un parallélogramme non rectangle, non losange.

— Construire un rectangle non carré.

— Construire un losange non carré.

— Construire un carré.

De nouveau, nous décrivons les types de tâches d'un point de vue institutionnel, ils ne correspondent donc pas forcément à l'énoncé donné à l'élève.

Nous nous appuyons sur le schéma 4.2 pour pouvoir exprimer plus facilement les (sous-)types de tâches du type de tâches « construire un parallélogramme » qui sont :

— Construire un parallélogramme, deux côtés adjacents et l'angle entre les deux étant donnés (AB, AD et $\widehat{DAB}$).

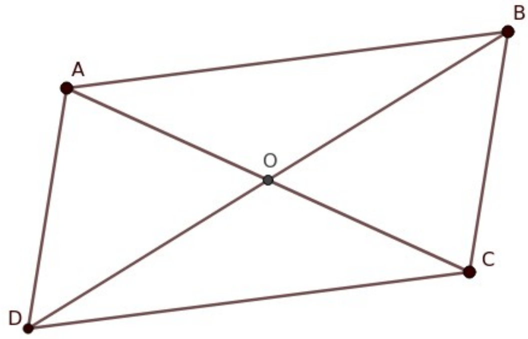

Image 4.2 – ABCD est un parallélogramme dont les diagonales se coupent en O

- Construire un parallélogramme, deux côtés adjacents et l'angle opposé à l'angle entre les deux étant donnés (AB, AD et $\widehat{BCD}$).
- Construire un parallélogramme, deux côtés adjacents et un des angles adjacents qui n'est pas entre les deux côtés étant donnés (AB, AD et $\widehat{CDA}$ ou $\widehat{ABD}$).
- Construire un parallélogramme, deux côtés adjacents et la diagonale qui relie les deux côtés étant donnés (AB, AD et BD).
- Construire un parallélogramme, deux côtés adjacents et la diagonale qui part du sommet rejoignant les deux côtés étant donnés (AB, AD et AC).
- Construire un parallélogramme, les deux diagonales et un côté étant donnés (AB, AC et BD).
- Construire un parallélogramme, les deux diagonales et un angle entre ces diagonales étant donnés (AC, BD et $\widehat{AOB}$).
- Construire un parallélogramme, un côté, une diagonale et l'angle entre la diagonale et le côté étant donnés (AB, AC et $\widehat{CAB}$).
- Construire un parallélogramme, un côté, une diagonale et l'angle qui forme des angles alternes-internes avec l'angle entre la diagonale et le côté étant donnés (AB, AC et $\widehat{ACD}$).
- Construire un parallélogramme, une diagonale, un côté et un des autres angles (AB, AC et $\widehat{DAC}$ ou $\widehat{BCA}$).
- Construire un parallélogramme, une diagonale et deux angles avec les côtés étant donnés (AC, $\widehat{CAB}$ et $\widehat{BCA}$).
- Construire un parallélogramme, une diagonale, un angle avec l'autre diagonale et un angle avec un côté étant donnés (AC, $\widehat{BOA}$, $\widehat{BCA}$).

Les sous-types de tâches des autres types de tâches du type de tâches générique « construire un quadrilatère » (limité aux parallélogrammes particuliers) sont présentés dans l'annexe A.

Dans la pratique, comme nous l'avons vu dans la section 3.5, nous travaillons avec des grandeurs pour les longueurs de côté et des mesures pour les angles. Ainsi, lorsque nous disons « un côté étant donné », nous voulons soit dire que le côté en question est déjà tracé à l'écran (de même dans l'environnement papier-crayon), soit qu'un segment de même longueur est affiché sur l'écran. Pour les angles, nous donnons la mesure de l'angle.

4.2.2 Technique

Pour donner des éléments d'une technique experte avec validation théorique attendue pour résoudre les types de tâches « construire un triangle » et « construire un quadrilatère », nous pouvons structurer le raisonnement à partir du patron d'analyse-synthèse (cf. section 3.2.3). Nous présentons cette technique de manière assez générale en précisant que les étapes peuvent se dérouler dans un autre ordre que celui que nous avons choisi et que le processus dans son entier est itératif, certains types de tâches ou certains groupes de types de tâches ayant besoin d'être répétés plusieurs fois pour aboutir à la résolution de la tâche.

Une première phase, la phase d'analyse, engage l'élaboration d'une argumentation heuristique qui met en lien les données de l'énoncé, les outils de construction du milieu et les propriétés de la figure à construire pour concevoir un programme de construction. Cette phase peut mettre en jeu les types de tâches suivants :

— faire un schéma codé de la figure à construire à partir des données de l'énoncé ;

— identifier les sous-figures ou unités figurales qui semblent pertinentes pour la construction en jeu ;

— identifier les propriétés de la figure à mobiliser pour construire ;

— calculer les mesures d'angles ou de longueurs éventuellement manquantes ;

— associer les propriétés géométriques à utiliser aux outils de construction à disposition dans le milieu pour élaborer un programme de construction.

Phase de synthèse :

— construire la figure avec les outils de construction à partir du programme de construction élaboré dans la phase d'analyse ;

— si demandé, valider théoriquement que la figure construite répond bien à ce qui était demandé dans l'énoncé.

Cette technique générale fait appel à des types de tâches intrinsèques et extrinsèques relevant parfois d'autres praxéologies locales comme c'est le cas du type de tâche « faire un schéma de la figure à construire » qui relève de la praxélologie locale 4 relative à la représentation des figures géométriques.

Dans le chapitre 7, nous explicitons des techniques de construction (et les types de tâches d'autres praxéologies locales qu'elles mettent en jeu) pour les types de tâches du type de tâches générique « construire un triangle » considérés dans l'EIAH MindMath.

4.2.3 Éléments technologico-théoriques

Le discours technologique pour justifier les techniques est centré sur la définition de la figure géométrique exprimant des relations entres les unités figurales qui la composent. Ce discours technologique est aussi lié à celui de la praxéologie locale 2 relative à la preuve mais il est ici mis en acte et pas forcément explicité spontanément par l'élève.

Ainsi, en lien avec les aspects épistémologiques relatifs aux figures et aux raisonnements géométriques que nous avons relevés dans la section 3.4, le raisonnement élaboré par l'élève sous forme d'argumentation heuristique, se fonde sur la distinction entre dessin et figure géométrique, sur la visualisation non iconique de ces figures et la mobilisation de déconstructions instrumentales ou dimensionnelles. Il s'appuie également sur la distinction entre sens et dénotation des énoncés qui mettent en avant une certaine caractérisation de la figure (sens) à laquelle ils réfèrent (dénotation).

De plus, étant donnés les éléments disponibles dans l'énoncé, la construction d'une figure, et sa validité, s'appuient sur la mobilisation de technologies :

- soit communes à tous les triangles (inégalité triangulaire, somme des mesures des angles, etc.) ou tous les parallélogrammes (côtés opposés parallèles deux à deux, côtés opposés de même longueur deux à deux, diagonales qui se coupent en leur milieu, etc.) ;
- soit spécifiques à certaines familles de triangles (égalité des angles de la base d'un triangle isocèle, théorème de Pythagore dans un triangle rectangle, etc.) ou de parallélogrammes particuliers (côtés égaux des losanges, angles droits des rectangles, etc.).

Ces propriétés permettent de caractériser les relations entre les objets constitutifs de la figure à construire qui complètent les données de l'énoncé pour rendre possible la construction avec les outils de construction disponibles.

Dans le chapitre 7, nous expliciterons des technologies nécessaires à la résolution des types de tâches du type de tâches générique « construire un triangle » que nous avons définis et qui sont implémentés dans l'EIAH MindMath (cf. annexe C).

La théorie qui justifie la technologie employée par l'élève relève ici de la géométrie euclidienne.

4.3 Modes de justification de l'élève relatifs à la construction de figures planes

Dans la section 2.2.1, nous avons introduit la notion de mode de justification de l'élève à partir des travaux initialement élaborés dans le cadre du projet *Pépite*.

Les modes de justification de l'élève sont définis *a priori* selon les différentes dimensions de l'activité mathématique en jeu. Dans cette thèse, nous avons modélisé les dimensions de l'activité géométrique par des praxéologies locales. Un mode de justification correspond donc au bloc *logos* majoritairement mobilisé par l'élève dans la résolution des types de tâches d'une praxéologie locale donnée.

Comme nous l'avons vu, en algèbre, Grugeon-Allys (2016) définit : un mode technologique idoine au regard du niveau scolaire considéré, un mode technologique faible, un mode technologique incomplet relativement à certains aspects épistémologiques de l'algèbre élémentaire et un mode technologique qui relève d'un *logos* « ancien », ici, appuyé sur l'arithmétique.

De même, nous définissons *a priori* des modes de justification de l'élève selon les cinq praxéologies locales de la géométrie plane que nous avons abordées dans la section 4.1. Nous nous intéressons donc en particulier ici aux modes de justification de l'élève définis pour la praxéologie locale 1 relative à la construction de figures géométriques. Cependant, nous ne pouvons pas penser la praxéologie locale de construction sans faire le lien avec la praxéologie locale de preuve. En effet, comme nous l'avons montré dans les chapitres précédents, les tâches de construction que nous concevons demandent la mobilisation d'un raisonnement sous la forme d'une argumentation heuristique. Certains des types de tâches de la technique employée en lien avec le raisonnement et la validation relèvent donc de la praxéologie locale de preuve. Ainsi, nous définissons également les modes de justification de l'élève pour la praxéologie locale 2 relative à la preuve mettant en jeu des figures géométriques.

4.3.1 Définition des modes de justification de l'élève

Nous définissons des modes de justification de l'élève relatifs à la géométrie plane. Ceux-ci se décrivent selon les différentes praxéologies locales que nous avons relevées dans la section 4.1. Nous présentons ici les modes de justification de l'élève selon les praxéologies locales 1 et 2.

À partir des aspects épistémologiques relatifs aux figures planes, aux raisonnements et aux problèmes de construction, et à partir des travaux déjà évoqués, notamment sur les paradigmes géométriques dans la section 1.2.3 (Houdement & Kuzniak, 2006), nous pouvons définir *a priori* des modes de justification de l'élève pour la praxéologie locale relative à la construction.

Nous définissons ainsi trois modes de justification de l'élève pour la praxéologie locale de construction (abrégée en « CO ») :

— CO0 : un mode ancien correspondant à une construction au jugé et validée par la perception ou le recours à la mesure ;

— CO1 : un mode incomplet correspondant à une construction qui reste dans le paradigme des constructions molles [1] et/ou ayant recours à une utilisation non réfléchie des outils de construction appuyée sur un raisonnement qui présente des technologies erronées (utilisation de propriétés fausses ou dont les conditions d'application ne sont pas remplies, erreurs dans la chronologie des pas de construction) ;

— CO2 : un mode idoine correspondant à une construction robuste appuyée sur une argumentation heuristique correcte, une validation théorique peut être spontanément mise en œuvre.

De la même façon, nous définissons trois modes de justification de l'élève pour la praxéologie locale de preuve (abrégée en « P ») :

— P0 : un mode ancien correspondant à une preuve basée sur la perception ou le recours à la mesure ;

— P1 : un mode incomplet correspondant à une mobilisation d'éléments de preuve reposant sur l'utilisation des propriétés géométriques mais présentant des technologies erronées (utilisation de propriétés fausses ou dont les conditions d'application ne sont pas remplies) ou des îlots déductifs incorrects (erreurs dans la chronologie des pas de construction ou dans l'enchaînement des pas, structure du pas ternaire incorrecte, confusion entre données et conclusion) ;

1. Nous étudierons les paradigmes des constructions molles et robustes dans la section 6.1.1.

— P2 : un mode idoine correspondant à une preuve basée sur les propriétés géométriques sous la forme d'une argumentation heuristique voire d'une démonstration.

De la même façon, nous définissons *a priori* les modes de justification de l'élève selon les différentes praxéologies locales de la géométrie des figures planes. Le quintuplet formé par les modes de justification de l'élève sur les différentes praxéologies locales constitue le mode de justification de l'élève relatif à la géométrie plane.

Ainsi, les modes de justification des élèves permettent de hiérarchiser les praxéologies apprises par les élèves et de repérer leurs besoins d'apprentissage en inférant les processus cognitifs développés. Ils fondent le modèle de l'apprenant que nous concevons dans le chapitre 7 et ils participent à la construction des parcours d'apprentissage que nous étudierons dans la section 7.4 en permettant de repérer l'écart entre le bloc technologico-théorique majoritairement mis en œuvre par l'élève et ce qui est visé par le parcours selon le niveau scolaire.

4.3.2 Critères pour l'analyse des productions de l'élève

Nous l'avons dit, le mode de justification de l'élève se situe au niveau du bloc *logos* des praxéologies régulièrement mises en œuvre par l'élève. Or, si certaines tâches demandent à l'élève d'expliciter le raisonnement et les propriétés qu'il emploie, ce n'est pas toujours le cas des tâches de construction qui nous intéressent ici. Ainsi, à partir des aspects épistémologiques que nous avons relevés dans le chapitre 3 et de certains autres aspects particuliers au contexte de la géométrie dynamique que nous aborderons dans le chapitre 6, nous dégageons des critères pour analyser les productions de l'élève. Ces critères permettent d'inférer son mode de justification selon les différentes praxéologies locales impliquées dans la résolution de la tâche. En particulier pour les tâches de construction qui nous intéressent, il est attendu que les techniques de résolution mettent en œuvre une argumentation heuristique qui relève de la praxéologie locale de preuve.

Les critères que nous définissons ne peuvent pas être relevés dans les résolutions de toutes les tâches que nous proposons. De plus, comme nous l'avons dit, nous devons inférer le mode de justification de l'élève à partir de ces critères. C'est pourquoi un mode de justification ne se calcule pas sur une unique tâche. Afin de pouvoir proposer une hypothèse suffisamment fiable sur le mode de justification de l'élève, les mêmes critères doivent être relevés sur plusieurs tâches issues de différents types de tâches. Nous aborderons de nouveau cette question dans la section 7.3.

Les productions de l'élève qui résout des tâches de construction sont donc analysées selon plusieurs critères qui sont des indicateurs de ses modes de justification relatifs aux praxéologies locales mobilisées dans la technique de résolution :

1. le type de constructions réalisé : construction au jugé, construction molle uniquement, construction robuste [2] ;
2. les outils utilisés pour la construction : outils de dessin, utilisation combinatoire d'outils de construction, utilisation réfléchie d'outils de construction ;
3. l'utilisation ou non d'un schéma codé : pas de schéma codé, utilisation d'un schéma codé ;
4. la présence et la nature du raisonnement : construction sans élaboration d'un raisonnement, raisonnement dans une phase de validation d'une figure construite au jugé, raisonnement préalable à la construction (argumentation heuristique) ;
5. la validation de la construction : pas de validation, validation perceptive ou par les instruments de tracé, validation en utilisant le déplacement, validation théorique ;
6. la visualisation des figures et les déconstructions éventuellement mises en œuvre : visualisation iconique, visualisation non iconique, mise en œuvre de déconstructions instrumentales et/ou dimensionnelles ;
7. les propriétés mobilisées : propriétés spatio-graphiques, propriétés erronées ou inventées, propriétés utilisées en dehors de leur domaine de validité, propriétés géométriques bien utilisées ;
8. la structure déductive du raisonnement éventuellement mis en œuvre : argumentation erronée (inversion de la causalité, utilisation de la conclusion comme donnée, etc.), argumentation heuristique correcte mais incomplète pour les besoins de la construction, argumentation heuristique correcte, démonstration ;
9. le(s) calcul(s) réalisé(s) : erreurs de calcul [3], erreurs d'unités ou de conversions d'unités, calculs corrects.

Pour le critère 1, nous verrons dans la section 6.1.1 que, dans une phase heuristique, les élèves passent souvent naturellement par une construction molle qui leur permet d'élaborer une argumentation heuristique et leur réponse. Ce n'est pas ce que relève

2. Pour les critères 1, 2 et 5, nous reviendrons sur les valeurs qu'ils prennent dans le chapitre 6 qui se centre sur les spécificités de la construction dans un environnement de géométrie dynamique.

3. Les erreurs de calcul peuvent être liées à une maîtrise insuffisante de l'algèbre et de la résolution d'équations. Ce n'est pas un de nos enjeux ici mais il est possible de faire des liens avec les praxéologies du domaines algébriques (Pilet, 2015 ; Sirejacob, 2017).

ce critère, nous considérerons ici que le type de construction de l'élève est une construction molle lorsque l'élève s'y arrête et ne construit pas une figure robuste à partir des propriétés qu'il a potentiellement identifiées dans la phase de construction molle. De même pour le critère 5, la validation d'une construction par le déplacement est un outil que peuvent utiliser les élèves dans un environnement de géométrie dynamique. Nous considérons que la validation relève du déplacement quand c'est la seule forme de validation utilisée par l'élève.

Les critères 1 et 2 sont liés à la praxéologie locale de construction, les critères 7 et 8 sont liés à la praxéologie locale de preuve, les critères 4, 5 et 6 sont liés à ces deux praxéologies, le raisonnement étant ici fortement lié à la fois à la construction de la figure mais aussi à la preuve de sa validité mathématique. Le critère 3 correspond à la praxéologie locale de représentation et le critère 9 à la praxéologie locale de calcul.

À noter que même si certains critères sont communs à toutes les praxéologies locales de la géométrie plane, d'autres critères permettent de mieux caractériser les résolutions pour d'autres types de tâches d'autres praxéologies locales.

Dans le tableau 4.1, nous précisons les associations entre les valeurs des critères relatifs à la construction et/ou à la preuve (en laissant de côté le critère relatif au calcul) et les modes de justification des élèves définis *a priori*.

Critère	Mode CO0 ou P0	Mode CO1 ou P1	Mode CO2 ou P2
1. Type de construction	au jugé	construction molle	construction robuste
2. Outils utilisés pour la construction	outils de dessin	utilisation combinatoire des outils de construction	utilisation réfléchie d'outils de construction
3. Schéma codé [4]			utilisation d'un schéma codé
4. Présence et nature du raisonnement	pas de raisonnement	raisonnement dans une phase de validation d'une figure molle ou construite au jugé	raisonnement préalable à la construction (argumentation heuristique)
5. Validation de la construction	pas de validation ou validation perceptive ou par les instruments de tracé	validation en utilisation le déplacement	validation théorique
6. Visualisation des figures et déconstructions	visualisation iconique		visualisation non iconique, déconstructions instrumentales ou dimensionnelles
7. Propriétés mobilisées	pas de propriétés ou propriétés spatio-graphiques	propriétés erronées, inventées ou utilisées en dehors de leur domaine de validité	propriétés géométriques bien utilisées

8. Structure déductive du raisonnement	argumentation incorrecte, pas d'îlots déductifs	argumentation incomplète	argumentation correcte ou démonstration

TABLE 4.1 – Associations entre les valeurs des critères et les modes de justification des élèves définis *a priori*

Dans le chapitre 7, nous verrons comment, à partir de ces critères, nous définissons des catégories d'erreurs associées aux modes de justification des élèves sur les praxéologies locales de construction et de preuve.

Dans le chapitre 9, nous verrons comment nous pouvons utiliser ces critères pour analyser la résolution d'une tâche de construction par les élèves de 3e qui ont participé à nos expérimentations.

4. Nous ne considérons pas que le fait de ne pas utiliser un schéma codé pour la construction relève de l'un ou l'autre des modes de justification définis. De plus, la validité du schéma codé réalisé relève des modes de justification de l'élève selon la praxéologie locale 4 liée à la représentation.

Chapitre 5

Entrée dans la géométrie théorique dans les programmes et manuels scolaires en vigueur à la rentrée 2020

Au cours de sa scolarité, l'élève occupe une série de positions institutionnelles dans différentes institutions. Le rapport personnel de l'élève aux objets d'une institution dépend donc des praxéologies à enseigner et enseignées dans les institutions par lesquelles il est passé et dans laquelle il se trouve. Dans ce chapitre, nous nous intéressons en particulier au savoir à enseigner. En France, celui-ci est prescrit par les programmes scolaires publiés au bulletin officiel de l'éducation nationale, de la jeunesse et des sports. Cependant, les programmes scolaires ne suffisent pas à caractériser complètement les rapports institutionnels aux objets de savoir. C'est pourquoi nous étudions également les documents d'accompagnement associés aux programmes scolaires également publiés par le ministère de l'éducation nationale, de la jeunesse et des sports, mais aussi les manuels scolaires tirés des programmes scolaires en cours qui représentent, selon Chaachoua, « une réalisation effective assez représentative des réalisations possibles » (Chaachoua, 1999, p. 328).

Le rapport personnel de l'élève aux objets de savoir dépendant notamment du rapport institutionnel, étudier les praxéologies à enseigner présentées par les programmes et manuels scolaires nous donne donc des indications sur les praxéologies apprises et mobilisées par les élèves des cycles 3 et 4 pour la résolution de tâches de construction de triangles.

Dans ce chapitre, nous nous demandons donc si les programmes scolaires actuels, ainsi que les manuels scolaires tirés de ces programmes, permettent de négocier l'entrée dans le raisonnement théorique en géométrie, en lien avec la construction de figures. Pour répondre à cette question, nous étudions les programmes et manuels scolaires de 6e et du début du cycle 4 (5e) pour déterminer les praxéologies à enseigner relatives à la géométrie des figures planes. Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, nous nous intéressons essentiellement à l'entrée dans le raisonnement de la géométrie théorique et donc à la place des propriétés des figures planes dans les raisonnements. Nous nous intéressons également à la construction de figures planes puisque c'est notre point d'entrée dans la géométrie théorique.

5.1 Méthode d'analyse des programmes et manuels scolaires

Dans cette section, nous explicitons la méthode d'analyse que nous employons pour répondre à la question : les programmes scolaires actuels, ainsi que les manuels scolaires tirés de ces programmes, permettent-ils de négocier l'entrée dans le raisonnement théorique en géométrie, en lien avec la construction de figures ?

Nous reprenons les deux niveaux d'analyse du curriculum introduits par Assude (2002) qui s'appuient sur la TAD (Chevallard, 1999). Le premier consiste à déterminer les habitats et niches des constructions de figures planes pour caractériser leurs « contextes de vie » (Assude, 2002, p. 212). Le second est une analyse des praxéologies mathématiques mettant en jeu cet objet d'étude.

Dans la section 5.2, nous menons donc une analyse écologique des programmes scolaires de 2008 et 2020 afin de déterminer les habitats et niches de la géométrie des figures planes et de la praxéologie locale relative aux constructions de figures que nous avons identifiée dans le chapitre 4. Dans la section 5.3, nous nous concentrons sur les praxéologies de construction et sur les liens éventuellement faits par les programmes scolaires avec l'entrée dans la géométrie théorique et l'introduction du raisonnement géométrique. Nous nous appuyons sur les éléments praxéologiques relevés dans le chapitre 4 ainsi que sur les aspects épistémologiques relatifs aux figures planes, aux raisonnements et aux problèmes de construction que nous avons identifiés dans le chapitre 3. De plus, nous comparons les praxéologies à enseigner des programmes scolaires au MPR que nous avons construit et nous identifions alors les praxéologies ponctuelles absentes, peu travaillées, isolées, qui amèneraient les élèves à construire un rapport personnel à la construction de triangles non idoine au cycle 4 et donc un rapport à la géométrie théorique non idoine au cycle 4 (cf. section 2.3).

Nous nous intéressons ensuite à six manuels scolaires de 6e et de 5e (trois de chaque) pour lesquels nous reprenons les deux mêmes niveaux d'analyse dans la section 5.4 en nous centrant sur la question des triangles. Dans la section 5.5, nous abordons plus finement la question des exercices de construction de triangles, en particulier en lien avec les conditions didactiques relatives au milieu des tâches de construction que nous avons définies dans la section 3.5. Nous revenons à la question de l'entrée dans la géométrie théorique par les problèmes de construction dans les manuels scolaires en vigueur en 2020 dans la section 5.6.

5.2 Analyse écologique des programmes scolaires depuis 2008

5.2.1 Programmes scolaires étudiés

Dans les programmes de 2008, le cycle 3 se terminait en CM2. Depuis la rentrée 2016, la classe de 6e est la dernière classe du cycle 3, tandis que les classes de 5e, 4e et 3e forment le cycle 4 (cf. image 5.1).

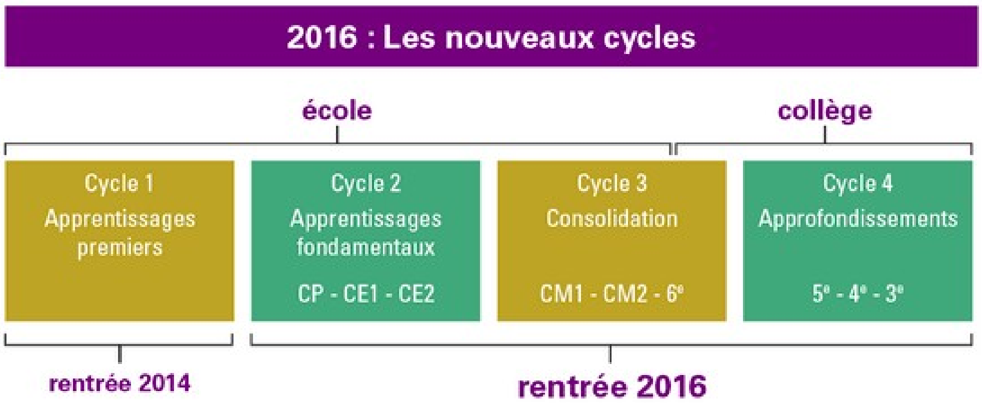

Image 5.1 – Répartition des cycles à la rentrée 2016 [1]

À la rentrée 2016, de nouveaux programmes entrent donc en vigueur pour tous les cycles et en particulier les cycles 3 et 4 qui nous intéressent. Tout en conservant la même structuration, ces programmes sont consolidés à la rentrée 2018. Ils sont une nouvelle fois enrichis à la rentrée 2020 [2].

1. Image tirée du site de l'académie de Nantes : `https://www.pedagogie.ac-nantes.fr/college-2016/les-cycles-3-et-4-948117.kjsp?RH=1450176582711`.
2. En ce qui concerne les programmes de mathématiques des cycles 3 et 4 entre 2018 et 2020, seul un paragraphe concernant la possibilité de travailler sur les notions de changement climatique, de développement durable et de biodiversité est ajouté dans l'introduction.

Nous étudions donc ici les programmes scolaires de mathématiques des cycles 3 (pour la 6^{e}) et 4 en vigueur à la rentrée 2020 ainsi que les attendus de fin d'année parus en 2019 et nous les comparons avec les programmes scolaires de géométrie au collège de 2008. Nous nous appuierons également sur certains documents d'accompagnement associés aux programmes de 2020 ou de 2008.

5.2.2 Structure des programmes scolaires de 2008 et de 2020

Dans un premier temps, nous menons une analyse écologique pour déterminer les habitats de la praxéologie globale relative à la géométrie, de la praxéologie régionale relative aux figures géométriques planes et des praxéologies locales que nous avons définies dans le chapitre 4.

Le programme scolaire de mathématiques de 2020 du cycle 3 est organisé en trois domaines : « nombres et calculs », « grandeurs et mesures » et « espace et géométrie » suivis d'une partie « croisements entre enseignements ». On retrouve ces trois domaines dans le programme scolaire de mathématiques de 2020 du cycle 4 auxquels s'ajoutent les domaines « organisation et gestion de données, fonctions » et « algorithmique et programmation ». Comme dans le programme du cycle 3, on trouve également une partie « croisements entre enseignements » qui fait un lien entre les mathématiques et les autres disciplines scolaires.

Les programmes scolaires de 2020 définissent également des « compétences majeures » à développer en mathématiques. Elles sont transversales aux différents domaines que nous avons passés en revue. Aux cycles 3 et 4, ces compétences majeures sont : « chercher », « modéliser », « représenter », « raisonner », « calculer », « communiquer ».

Le programme scolaire de mathématiques de 2008 est organisé en quatre domaines pour chacun des niveaux scolaires du collège : « organisation et gestion de données, fonctions », « nombres et calculs », « géométrie », « grandeurs et mesures ».

Pour étudier la praxéologie globale relative à la géométrie, nous nous intéresserons donc en particulier aux domaines « espace et géométrie » ou « géométrie » des différents programmes scolaires. Nous retrouvons également des éléments de cette praxéologie globale dans le thème « grandeurs et mesures ».

Pour étudier en particulier la praxéologie régionale relative aux figures planes, nous identifions plus précisément certains thèmes issus des domaines que nous avons relevés. Du domaine « espace et géométrie » des programmes de mathématiques de 2020, nous tirons les thèmes « reconnaître, nommer, décrire, reproduire, représenter, construire quelques solides et figures géométriques » et « reconnaître et utiliser quelques relations géométriques » (*Programme du cycle 3*, 2020, p. 98) ainsi que le thème « utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer » (*Programme du cycle 4*, 2020, p. 136)

Du domaine « grandeurs et mesures » des programmes de mathématiques de 2020, nous nous intéressons aux thèmes « comparer, estimer, mesurer des grandeurs géométriques avec des nombres entiers et des nombres décimaux : longueur (périmètre), aire, volume, angle. Utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesures spécifiques de ces grandeurs » et « résoudre des problèmes impliquant des grandeurs (géométriques, physiques, économiques) en utilisant des nombres entiers et des nombres décimaux » (*Programme du cycle 3*, 2020, p. 96). Au cycle 4, nous nous intéressons au thème « calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées » (*Programme du cycle 4*, 2020, p. 135).

Dans le programme du collège de 2008, nous nous concentrons, pour chacun des niveaux scolaires sur les thèmes « 3.1 Figures planes » issus du domaine « géométrie ». De plus, nous nous intéressons aux thèmes « 4.1 Longueurs, masses, durées », « 4.2 Angles » et « 4.3 Aires : mesure, comparaison et calcul d'aires » du domaine « grandeurs et mesures » pour les classes de 6^e^ et de 5^e^. Nous remarquons qu'il n'y a pas de grandes différences concernant les habitats de la géométrie et en particulier la géométrie plane entre les programmes de 2008 et de 2020.

Pour chacun des domaines, des objectifs (en 2008) ou des attendus (en 2020) sont définis. Ils correspondent à des connaissances ou des compétences (on parle de capacités en 2008). Les thèmes des programmes scolaires de 2008 et 2020 sont eux-mêmes découpés en connaissances et compétences/capacités associées. Dans sa thèse, Pilet (2012) analyse les programmes scolaires de 2008, elle interprète « les "capacités" comme des ingrédients du bloc pratico-technique ($[T,\tau]$) et les "connaissances" comme des ingrédients du bloc technologico-théorique ($[\theta,\Theta]$) » (Pilet, 2012, p. 96). Nous reprenons cette interprétation ici.

Par la suite, nous nous intéresserons en particulier aux praxéologies locales 1 et 2 relatives aux constructions de figures planes et à la preuve (définies dans le MPR, cf. section 4.1) qui apparaissent dans les thèmes que nous avons relevés.