

Modélisation mécanique à base topologique

Sommaire

4.1	Introduction	91
4.2	Lien entre modèle topologique et modèle physique	92
4.3	Simulation à base de maillages tétraédriques	93
4.4	Simulation du modèle masses/ressorts pour maillages rectangulaires ou hexaédriques	95
4.5	Simulation avec maillages homogènes tétraédriques ou hexaédriques	97
4.6	Utilité des modèles topologiques en simulation mécanique	98
4.7	Conclusion	99

4.1 Introduction

Nous avons présenté dans le premier chapitre de ce manuscrit, différents types de modèles mécaniques définis dans la littérature, qui se décomposent en deux grandes familles : les modèles basés sur la mécanique discrète et ceux basés sur la mécanique des milieux continus. Nous avons constaté que la simulation de déchirures, fractures ou découpes nécessitent l'emploi de modèles suffisamment souples, permettant de prendre en compte les modifications topologiques. Dans le deuxième chapitre, nous avons donné une panoplie de différents modèles topologiques, et nous nous sommes focalisés sur les cartes combinatoires (orientées ou généralisées) parce qu'elles permettent de représenter des quasi-variétés sous forme de maillages de type quelconque. Dans le présent chapitre, qui conclut de façon synthétique notre état de l'art, nous présentons des travaux qui proposent d'associer un modèle topologique avec un modèle mécanique pour la simulation physique de déformation et des transformations topologiques.

Nous commençons par une discussion visant à définir de façon plus précise le lien que l'on peut construire entre un modèle topologique et un modèle mécanique. Dans la suite, nous faisons l'hypothèse que l'objet est maillé et nous examinons divers modèles proposés dans la littérature. Nous classons ces modèles en fonction du

type de maillage et du modèle mécanique utilisés : modèles à base de maillages tétraédriques d’abord, puis maillages rectangulaires (2D) et hexaédriques (3D). Puis nous présentons une approche pour simuler des maillages homogènes quelconques (*i.e.* tétraédriques ou hexaédriques) pour des modèles mécaniques discrets et continus. Nous terminons ce chapitre par une synthèse des avantages qu’ont apportés les cartes combinatoires pour la simulation physique dans les divers travaux précédemment cités.

4.2 Lien entre modèle topologique et modèle physique

Le chapitre 2 a montré que les modèles physiques peuvent se baser ou non sur un maillage. Dans le cas de modèles physiques non maillés ou *meshless*, la condition de variété n’est utile que pour la visualisation de l’objet. Dans ce cas, une base topologique peut être un support au modèle géométrique servant à la visualisation de l’objet, si l’on souhaite pouvoir faire varier la topologie de cet objet. Dans le cas de modèles physiques maillés, il apparaît opportun qu’un modèle topologique sous-jacent au modèle mécanique permette de gérer les modifications topologiques que cet objet doit pouvoir subir. Dans le premier cas, on parle de modèle à *base mécanique* [LCM⁺14], dans le second cas, on parle de modèle à *base topologique*.

Concernant les approches à base mécanique, l’approche développée par les laboratoires ICA et XLIM [DKS⁺11] montre l’intérêt d’utiliser les G-cartes pour bâtir un habillage à topologie variable pour un modèle mécanique de type masses/interactions. Des phénomènes comme la fusion, les déchirures et les fractures peuvent être représentés par des transformations du modèle visuel, sans que le modèle masses/interactions sous-jacent, en charge du mouvement, ne nécessite de modifications. Dans cette approche, les auteurs utilisent le système CORDIS-ANIMA. Les sommets du modèle topologique sont ici directement associés aux particules (éléments *MAT*) du modèle mécanique. Des arêtes sont construites à partir de l’ensemble ou d’un sous-ensemble des interactions (éléments *LIA*). Cette approche a été généralisée par la suite [JAD⁺12], afin que chaque sommet soit associé à un ensemble d’éléments *MAT* pour calculer sa position au cours du temps. Une mise à jour topologiquement cohérente de ces sous-ensembles est alors proposée lorsqu’une modification topologique apparaît (qu’elle soit pilotée par le modèle mécanique ou déduite de son comportement) et qu’un sommet du modèle topologique se subdivise en plusieurs. Enfin, il est possible que le modèle mécanique soit explicitement à l’origine des modifications de l’habillage topologique : c’est par exemple le cas des éléments *MAT* éclatables [KLC14] qui permettent de mieux gérer les modifications du modèle topologique [RCDL18].

La suite de ce document se focalise sur les modèles à base topologique, donc exclusivement maillés. L’utilisation de modèles topologiques élaborés de type cartes combinatoires ou assimilés n’est pas très répandue dans le monde de la simulation. Citons, par exemple, la bibliothèque SOFA [Sof], qui se base essentiellement sur un modèle de graphe d’incidence indicé, avec les conséquences indésirables que nous

avons énumérées en section 3.3.1. Certaines simulations d’objets 2D avec modifications topologiques se sont sans aucun doute basées sur des modèles de type arêtes ailées ou demi-arêtes, sans toutefois nécessairement le signaler (par exemple, en simulation chirurgicale, pour la simulation de déchirure de tissus biologiques au début des années 2000). Seuls des travaux récents comme [SvWC14] mentionnent explicitement l’utilisation des demi-arêtes. Citons néanmoins des travaux précurseurs comme ceux de Nienhuys *et al.* [NvdS00], dans lesquels un modèle topologique simplicial est utilisé pour simuler la découpe dans un maillage, obligatoirement triangulaire en 2D ou tétraédrique en 3D, animé par la méthode des éléments finis. Nous présentons dans la suite de ce chapitre des approches à base topologique où le maillage est décrit par des cartes combinatoires.

4.3 Simulation à base de maillages tétraédriques

La première approche, dans laquelle est montré l’intérêt de simuler des objets déformables en basant un modèle physique sur un maillage décrit pas des cartes combinatoires est celle de Meseure *et al.* [MDS10]. Dans leur approche, les auteurs utilisent le modèle masses/ressorts comme modèle mécanique et le modèle des cartes généralisées comme modèle topologique. Dans le modèle proposé, seuls des objets représentés par des maillages tétraédriques peuvent être simulés, car seuls les ressorts d’élongation sont modélisés. Les auteurs proposent également dans leur approche, des méthodes de changements topologiques comme la séparation des volumes ou leur suppression pour effectuer des opérations de découpe et de déchirure au cours de la simulation. Ces transformations topologiques sont basées sur une opération fondamentale, la décousure α_3 , qui permet de séparer deux volumes adjacents. L’opération de décousure est également nécessaire à la suppression de volume puisque ce dernier doit préalablement être isolé (donc décousu de ses volumes adjacents) avant d’être supprimé. Quelques résultats de leurs transformations topologiques sont montrés sur la figure 4.1.

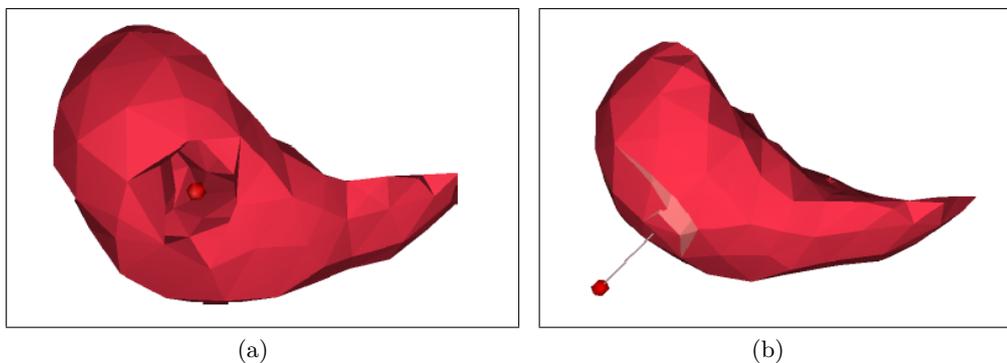


FIGURE 4.1 – Résultats de transformation topologique de Meseure *et al.*

Dans cette approche, il est discuté de l’intérêt de stocker dans la structure topo-

logique, en tant que plongement, toutes les propriétés ou informations mécaniques. Une particule est ainsi associée à un sommet c'est-à-dire à une 0-cellule. Dans les sommets sont plongées les propriétés des particules comme la masse, la viscosité dans le milieu ambiant, etc. ainsi que des informations d'état comme la position, la vitesse, le bilan des forces exercées. Dans ce modèle, les interactions sont retrinites aux ressorts d'élongation, positionnés sur les arêtes, ce qui empêche l'extension de l'approche à des maillages non simpliciaux, puisque ces derniers nécessitent des ressorts de cisaillement, ainsi qu'à son utilisation en 2D, puisque les ressorts de courbure ne sont pas pris en compte non plus. Le modèle se réduit ainsi aux seuls maillage tétraédriques.

Dans cette étude, il est mis en évidence que toute cellule qui, suite à une opération de découpe α_3 , éclate en plusieurs cellules doit mettre à jour ses informations mécaniques : la masse et la viscosité des particules aux sommets, la raideur des ressorts d'arêtes, etc. Par exemple, quand un sommet est éclaté, les auteurs choisissent de dupliquer sa position et sa vitesse dans les nouveaux sommets. Leur masse est obtenue en calculant la somme des masses fournies par chaque volume qui leur est incident. Précisons que, dans cette approche, les auteurs considèrent que la masse d'un tétraèdre est répartie équitablement entre ses quatre sommets :

$$m^s = \sum_{i \in \text{tetra}(s)} m_i / 4 \quad (4.1)$$

De la même manière que pour la masse, la raideur d'un ressort placé sur une arête est égale à la somme des raideurs apportées par chaque volumes incidents à l'arête (loi de Kirchhoff pour les ressorts disposés en parallèle). Après l'éclatement, chaque nouvelle arête doit recalculer sa propre raideur, à partir de ses volumes incidents.

Par ailleurs, pour des raisons de rapidité d'accès, les auteurs ont utilisé une structure simplifiée, à base d'indices, pour permettre un accès immédiats aux sommets, arêtes et volumes ainsi qu'aux faces externes (α_3 -libres) pour l'affichage. Quelle que soit la cellule, la structure simplifiée est constituée d'une liste fournissant, pour chaque cellule, un brin représentant la cellule et un lien vers le(s) plongement(s) porté(s) par celle-ci. Cette structure est nécessaire car le moteur Moka utilisé [Mok] ne propose pas d'outils efficaces pour parcourir spécifiquement les cellules (des parcours de type « Pour tous les sommets/arêtes/faces/volumes faire » ; les parcours proposés reviennent toujours à parcourir toute la carte, ce qui est coûteux). Ce manque a été pallié dans des moteurs de cartes plus récents comme CGoGN [CGo] par exemple. Cette solution a permis d'améliorer le temps d'exécution de leur méthode, mais elle nécessite la mise à jour de cette structure indicée redondante après tout changement topologique (aucune solution de mise à jour incrémentale n'est proposée, tous les tableaux sont complètement recalculés). Cette approche met en exergue le fait que toute structure redondante au modèle topologique se paie généralement par l'obligation de mises à jour et par l'absence d'une garantie de cohérence.

Plus récemment, Meseure *et al.* [MDST15] ont étendu leur approche pour simuler également des maillages tétraédriques, mais dont les lois de comportement

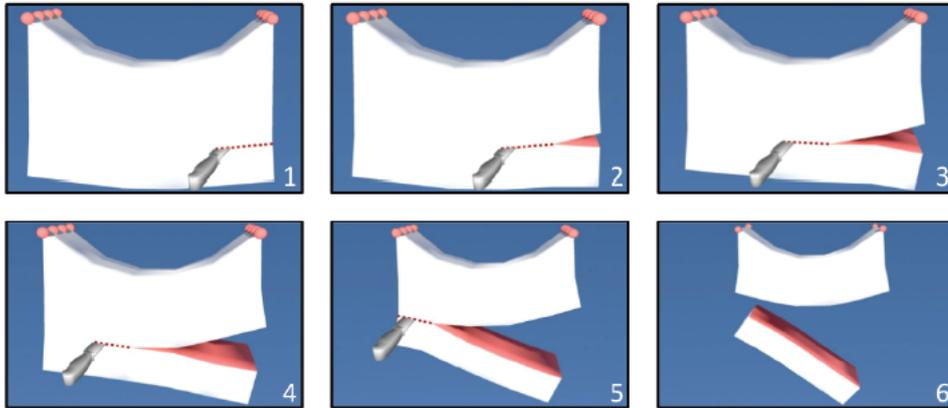
sont basées sur la mécanique des milieux continus, résolue par la méthode des éléments finis explicites (petits déplacements ou co-rotationnel). Des plongements sont à ajouter, comme par exemple le plongement dans les tétraèdres de leur matrice de raideur, ainsi que la matrice inverse des positions des sommets lors de l'utilisation de la méthode du co-rotationnel. Les auteurs ont également défini une transformation topologique plus complexe, à savoir une opération de subdivision offrant une résolution adaptative du maillage. Là aussi, des mises à jour des plongements sont nécessaires après la subdivision : découpage de ressorts en groupes de ressorts positionnés en série, calcul des matrices éléments finis des sous-tétraèdres, re-calcul des masses des sommets impliqués, etc. Le moteur de G-cartes n'ayant pas été modifié, les structure externes à base d'indices sont toujours utilisées dans cette version.

Dans [PUC⁺15], Paulus *et al.* ont également utilisé une base topologique de type cartes orientées avec un modèle physique basé sur la mécanique continue et résolue avec la méthode des éléments finis étendues (*extended FEM* ou *XFEM*) pour simuler les découpes dans des maillages tétraédriques. Cette méthode se base sur des fonctions d'interpolation linéaires ou quadratiques présentant des discontinuités aux zones de découpe. Ils ont également défini des transformations topologiques plus complexes comme la modification de maillage basée sur une subdivision $\sqrt{3}$ (méthode dite « flip/flap ») pour adapter la forme de l'élément à la découpe qui doit être appliquée au maillage. Des mise à jour de propriétés mécaniques (masses et matrices éléments finis) sont effectuées après la modification topologique. Les auteurs ont confirmé que leur travail est basé sur les cartes orientées mais aucune information concernant l'implantation et en particulier les plongements choisis n'est fournie.

4.4 Simulation du modèle masses/ressorts pour maillages rectangulaires ou hexaédriques

Les travaux de Fléchon *et al.* [FZDJ13] ont combiné la structure topologique des cartes orientées avec un modèle masses/ressorts, pour l'animation physique des objets déformables. Plus exactement, les auteurs utilisent des cartes orientées dotées d'un plongement de position en chaque sommet et appelées « complexes linéaires cellulaires » ou *Linear Cell Complex* (LCC). Dans ces travaux, les objets à animer sont représentés uniquement par des maillages rectangulaires en 2D et hexaédriques en 3D. Des changements topologiques sont proposés : l'opération de découpe, comme montré sur la figure 4.2 et les changements de résolution (raffinement/subdivision ou simplification de maillage).

Fléchon *et al.* [FZDJ13] reprennent les mêmes hypothèses de plongement des informations dans le modèle topologique que celles proposée dans [MDS10] : une particule est associée à chaque cellule sommet et des ressorts d'élongation aux arêtes du maillage. Notons néanmoins que dans ce modèle, les ressorts d'élongation font explicitement référence aux sommets qu'ils lient. Par ailleurs, l'utilisation de maillages non symplectiques implique l'ajout d'autres types de ressorts comme les ressorts de

FIGURE 4.2 – Exemples de résultats de l’approche de Fléchon *et al.*

cisaillement. Dans leur approche, les propriétés mécaniques de ces ressorts (longueur au repos et raideur) sont stockées dans des conteneurs indépendants de la structure du modèle, en indiquant explicitement les sommets sur lesquels ils s’appliquent. En effet, les ressorts de cisaillement sont positionnés sur les diagonales des faces quadrangulaires en 2D et des hexaèdres en 3D, qui ne sont pas des cellules dans les cartes combinatoires. Aussi, aucune solution de plongement des ressorts de cisaillement dans la structure n’est proposée. De plus, même si un modèle 2D est proposé, les ressorts contrôlant la courbure ne sont pas explicitement étudiés, mais on peut supposer qu’une prise en compte similaire à celle des ressorts de cisaillement est envisageable.

En utilisant des structures externes pour les ressorts de cisaillement ou en forçant les ressorts à gérer les sommets sur lesquels ils s’appliquent, la stratégie employée par Fléchon *et al.* est risquée. En effet, lorsque le modèle subit des changements topologiques, le modèle topologique assure sa propre cohérence, mais rien ne permet de s’assurer de la cohérence des liens topologiques gérés par les structures externes. On pourrait, par exemple, garder des interactions liées à une cellule qui a disparu.

Comme dans [MDS10], une mise à jour des propriétés mécaniques plongées dans les cellules concernées par une modification topologique est nécessaire. Ainsi, après l’éclatement d’un sommet, la masse de chaque nouveau sommet est à recalculer à partir de masses fournies par chaque élément incident au nouveau sommet. Lorsqu’une arête est scindée, les raideurs de ressort d’élongation des arêtes nouvellement créées sont recalculées en se basant sur les formules décrites dans la section 2.2.2.3, et en considérant la contribution de chaque face ou volume incident. Même si le fait de séparer deux éléments (faces ou volumes) ne semble pas concerner les éléments eux-mêmes, l’utilisation de structures externes compliquent les mises à jour. En réalité, pour chaque modification topologique, et pour tout type de ressort, une phase de post-traitement gérant la cohérence des extrémités des ressorts est systématiquement proposée. En effet, si un sommet éclate en deux sommets ou plus, alors qu’il est l’extrémité d’un ou plusieurs ressorts, il faut déterminer, pour chaque

ressort, à quelle nouveau sommet il doit être lié. Par exemple, si deux volumes sont séparés alors qu'ils partageaient une face commune, les ressorts touchés par cette séparation doivent rester dans leur volume d'origine : un ressort d'élongation reste sur une arête de volume, un ressort de cisaillement lie deux extrémités d'une même diagonale. Il ne faut pas que, suite à une mauvaise identification de ses extrémités après la transformation topologique, un ressort lie des sommets qui n'appartiennent pas au même élément. C'est pour cette raison que, dans les travaux qui ont suivi [GCZD15], les ressorts font désormais référence non à des sommets, mais à des brins, judicieusement choisis, les désignant. Les brins, en tant que tels, n'étant pas modifiés par les opérations topologiques utilisées, les ressorts désignent toujours les mêmes sommets.

4.5 Simulation avec maillages homogènes tétraédriques ou hexaédriques

Récemment, Golec *et al.* [GCZD15] ont étendu le modèle de Fléchon *et al.* pour permettre de simuler des mailles hexaédriques ou tétraédriques en utilisant non seulement le modèle mécanique masses/ressorts, mais également le modèle des masses/tenseurs. Dans cette approche, les auteurs ont utilisé la même modélisation que dans les travaux de Fléchon *et al.* mais veulent incorporer toutes les propriétés physiques dans le modèle topologique. De cette manière, les mises à jour des propriétés mécaniques après un changement topologique peuvent être gérées de façon cohérente. Une structure externe est néanmoins associée à chaque volume, à savoir un tableau de brins permettant de définir d'une part les cellules dans un ordre donné et, grâce à cet ordre, de stocker des informations liées à des groupes de cellules du volume (pour désigner, par exemple, des diagonales de volume par leur sommets).

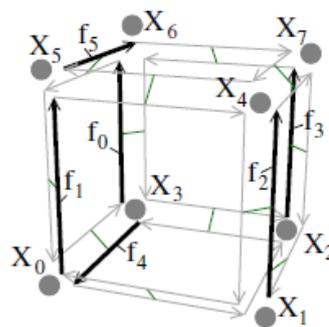


FIGURE 4.3 – Convention de stockage de brins dans des tableaux

Cette structure se base sur la convention décrite sur la figure 4.3. La structure de chaque hexaèdre est décrite dans un tableau bi-dimensionnel de brins $brins[j][i]$. Le premier indice j , pris dans l'ensemble $0, \dots, 5$ désigne une face de l'hexaèdre. Le second indice i permet de décrire les quatre brins constituant la face j . Ainsi, pour

chaque j , le brin $brin[j][0]$ désigne le premier brin de la face j , représentée en gras sur la figure 4.3. On retrouve le fait que plusieurs brins désignent un même sommet, par exemple, les brins $brins[0][3]$, $brins[4][1]$ et $brins[1][0]$. A partir du numérotage des faces, ce tableau permet de numéroter tout autre cellule, en particulier les sommets, mais également d'indiquer un ordre des diagonales du volume ou des faces. Mais il apparaît que les brins du tableau sont nécessairement liés par des liaisons bien précises, et cette structure se révèle complètement redondante avec la structure LCC de l'objet.

Dans cette structure, il est possible de plonger des informations comme les ressorts de cisaillement, mais aussi, plus globalement les influences de chaque sommet sur tous les autres, sous la forme de tenseurs (approche masses/tenseurs développée en section 2.2.2.3) correspondant aux arêtes, aux diagonales de faces et aux diagonales de volume.

4.6 Utilité des modèles topologiques en simulation mécanique

Dans ce chapitre, nous avons présenté des travaux qui utilisent des modèles topologiques pour la simulation physique de corps solides déformables. Comme on peut le remarquer, ces différentes approches ont utilisé des cartes combinatoires (orientées ou généralisées). Nous regroupons dans cette partie les arguments avancés par ces approches.

- La définition mathématique des modèles topologiques comme les cartes combinatoires assure leur robustesse. Après une modification, il est possible de s'assurer de la cohérence de la structure en vérifiant chaque point de leur définition ;
- De nombreuses opérations ont été définies, de façon robuste voire même formellement [LMA⁺02, CD99], pour ces modèles et sont autant de transformations topologiques que l'on peut exploiter dans un contexte d'animation physique ;
- Les objets représentables par les structures topologiques ne sont pas quelconques. Ainsi, les cartes combinatoires ne peuvent représenter que des quasi-variétés. Il est alors strictement impossible de simuler des objets présentant des faces (en 3D) ou arêtes (en 2D ou 3D) pendantes, des volumes liés seulement par une arête ou un sommet, des faces liées seulement par un sommet, etc. Aucune recherche et traitement des cas dégénérés comme proposé dans [FDA05] n'est nécessaire ;
- Certains modèles topologiques ne permettent de représenter que des assemblages de simplexes, ce qui peut être utile pour des maillages purement simpliciaux, mais cela restreint les possibilités de modifications du maillage. Au

contraire, des modèles comme les cartes combinatoires permettent de représenter de nombreux types de maillages, avec des cellules quelconques, de façon homogène (maillages constitués d'un seul type de cellules) ou pas, ce qui offre une grande souplesse dans les opérations de transformation du maillage.

- La définition des modèles topologiques est souvent générale à toute dimension, ce qui permet d'utiliser le même modèle quelle que soit la dimension topologique de l'objet à représenter. Néanmoins, dans les travaux précédents, les implantations 2D et 3D de modèles mécaniques basés topologie sont (au moins en partie) distinctes. La question de l'exploitation d'un modèle unique pour la 2D et la 3D (voire également pour la 1D) reste ouverte.

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différents travaux de la littérature qui ont combiné un modèle topologique avec un modèle physique. Ces approches ont chacune eu recours à une structure annexe. Pourtant, suite à l'application d'une modifications topologique, la structure topologique assure sa propre cohérence alors que rien ne permet de s'assurer de la cohérence des structures additionnelles. Plus globalement, toute information persistante faisant référence à un élément de la structure topologique (par exemple un brin pour les cartes combinatoires) est potentiellement source d'incohérences si des mises à jour sont omises suite à une ou plusieurs modifications de la structure. En conséquence, l'utilisation de structures externes est critiquable et apparaît, de notre point de vue, comme une sous-exploitation des capacités de plongement des modèles topologiques.

Nous pensons que cet ajout d'information redondante est dû à une modélisation inadéquate des interactions. En effet, c'est une erreur de chercher des orbites topologiques qui supportent à la fois l'origine d'une interaction et les particules subissant ces forces. Certes, cette approche fonctionne pour les ressorts d'élongation, parce qu'ils sont naturellement associés aux arêtes. Mais pour les autres types d'interaction (cisaillement, courbure), de tels orbites n'existent pas nécessairement. Il s'agit donc de revoir la méthode de plongement des informations mécaniques afin d'exploiter totalement les solutions de plongement offertes par les modèles topologiques.

Par ailleurs, les divers travaux présentés se cantonnent à l'utilisation de mailles élémentaires identiques (maillages triangulaires, tétraédriques, hexaédriques, etc.). Ces restrictions ne sont pas justifiées : des modèles comme les cartes combinatoires permettent de manipuler des cellules de types différents et des approches de résolution mécanique comme celles des éléments finis prévoient, depuis leur conception, l'agglomération de différents types de cellules. Par exemple, des maillages volumiques constitués de tétraèdres et d'hexaèdres, ainsi que des volumes de transitions comme les pyramides et les prismes, sont tout à fait courants dans les moteurs éléments finis. Dans nos travaux, nous souhaitons une approche autorisant les maillages hétérogènes, où les données et les traitements sont à effectuer de façon la plus indé-

100 Chapitre 4. Synthèse : Modélisation mécanique à base topologique

pendante possible de la dimension. Pour cela, nous avons utilisé le langage à base de règles de transformation de graphes, Jerboa, décrit dans le chapitre précédent, pour :

- Formaliser la simulation physique en exploitant le modèle topologique des G-cartes qui nous a permis de stocker toutes les informations nécessaires pour la simulation dans le modèle sans utilisation d'une structure externe ;
- Simuler les déformations des objets déformables en 2D et 3D avec différents modèles mécaniques (masses/ressorts, méthode des éléments finis linéaires, approche par co-rotationnel, masses/tenseurs) ;
- Simuler avec différents types de maillages homogènes ou non ;
- Simuler différents types de transformations topologiques.

Dans la suite, nous présentons, dans un premier temps, la modélisation qui nous permet de plonger toutes les informations mécaniques, de façon adaptée, dans le modèle. Nous présentons, dans un deuxième temps, la simulation en nous basant sur le langage à base de règles. Puis, nous focalisons sur les différents types de modifications topologiques implantées dans notre plate-forme.

Deuxième partie

Contribution

Modélisation de corps physiques basés topologie

Sommaire

5.1	Hypothèses et modèle support	104
5.1.1	Hypothèses	104
5.1.2	Modèle support	105
5.2	Modélisation des interactions	107
5.2.1	Méthode générale	108
5.2.2	Modèles mécaniques discrets 2D	109
5.2.3	Modèles mécaniques discrets 3D	118
5.2.4	Modèles mécaniques continus	120
5.3	Adaptation de la modélisation pour les cartes orientées	127
5.4	Conclusion	129

Dans le chapitre précédent, nous avons conclu qu'il est utile de combiner un modèle topologique avec un modèle mécanique pour la simulation physique de corps déformables et plus précisément lors de transformations topologiques. Nous avons également présenté les lacunes des travaux précédents (stockage de données dans des structures externes, simulation d'un seul type d'éléments, dimension fixe...). Le problème est lié au fait que les informations mécaniques à plonger dans le modèle ne peuvent l'être que dans des orbites, afin de contrôler ce plongement lors des opérations topologiques. L'objectif de ce chapitre est de trouver les plongements et les orbites les plus appropriés pour stocker ces informations mécaniques (les informations liées aux particules et les différents types d'interactions qui sont implantées dans notre plate-forme à l'aide du langage à base des règles de transformations de graphes Jerboa) en 2D et 3D. Nous commençons ce chapitre par la présentation des hypothèses et du modèle support utilisé dans notre travail. Nous détaillons ensuite la méthode générale utilisée pour trouver l'orbite adéquate pour chaque information et la modélisation faite avec les G-cartes pour chaque type d'interaction. Nous terminons ce chapitre avec une adaptation de la méthode générale proposée avec le modèle topologique des cartes orientées.

5.1 Hypothèses et modèle support

5.1.1 Hypothèses

Dans cette partie, nous introduisons les hypothèses utilisées dans le cadre de notre approche. Nous avons montré, dans la section 2.2.2.1 de l'état de l'art, que dans notre approche, nous nous intéressons exclusivement à la simulation des objets décrits par des maillages géométriques. La modélisation des interactions que nous utilisons dans notre plate-forme est faite avec le modèle topologique des G-cartes.

Notre processus de modélisation d'un objet commence par le choix d'un maillage géométrique (voir figure 5.1). Ce dernier peut être construit explicitement et directement avec le langage à base de règles comme nous le faisons en section 3.4.2 (page 81). Cependant, Jerboa permet également le chargement direct de fichiers (obj, gmsh, moka...) de maillages géométriques d'objets.

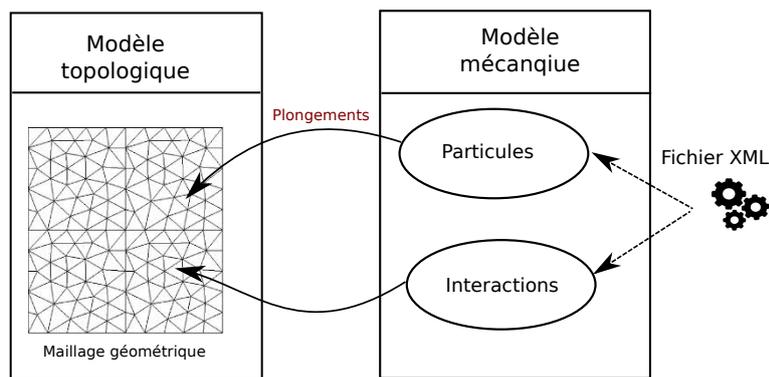


FIGURE 5.1 – Processus de modélisation.

Après le choix du maillage (construit ou chargé directement avec Jerboa), il faut le peupler avec les informations mécaniques qui sont incluses dans le modèle géométrique via le processus de plongement, comme montré sur la figure 5.1. Par exemple, après l'ajout de plongements à une surface damier créée au préalable, le modèle peut être considéré comme un tissu avec des propriétés mécaniques bien définies et prêt pour la simulation. Les propriétés mécaniques des différents types d'interactions implantées (ressorts et éléments finis), les masses et toutes les informations nécessaires à la simulation sont décrites dans un fichier XML.

Une autre hypothèse est très importante dans notre approche : nous supposons que les modèles utilisés sont des modèles particulaires. Plus précisément, une particule est placée sur chaque sommet du maillage et permet de l'animer, et la déformation de l'objet résulte du déplacement des sommets. Aucune hypothèse n'est faite concernant le maillage, il peut être hétérogène, c'est à dire constitué d'éléments de types divers (triangles et quadrilatères, tétraèdres et hexaèdres). Les lois utilisées peuvent être anisotropes.

5.1.2 Modèle support

Dans l'état de l'art sur les modèles mécaniques, nous avons présenté plusieurs modèles pour simuler les déformations de corps déformables. Dans notre approche, nous souhaitons utiliser un ensemble aussi vaste que possible de ces modèles et les combiner. Pour cela, il nous faut une base commune. L'objectif de cette section est de proposer un modèle support, alors que la modélisation des interactions proprement dite fait l'objet de la section suivante. Notre approche considère un modèle support dont le but est de contrôler les degrés de liberté du corps à simuler. Comme déjà dit, nous plaçons une particule en chaque sommet du maillage. Ceci implique la définition d'une masse, d'une vitesse et d'une position pour chacune des particules. Ces sont les informations à plonger dans le modèle. Un tel plongement a déjà été proposé par Meseure *et al.* [MDS10] et Fléchon *et al.* [FZDJ14]. Dans leurs travaux, ils ont associés toutes ces propriétés mécaniques aux orbites sommets ($\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ en 2D et $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ en 3D). Mais cette solution est discutable, en particulier pour la masse, car elle provient des éléments, et c'est dans ces derniers qu'elle aurait pu être stockée. Il s'agit alors d'identifier l'orbite la plus adéquate et la plus naturelle compte tenu de l'origine et la signification physique de chaque plongement. Parfois, on peut trouver directement l'orbite qui convient à l'information physique. Par exemple pour la position, la vitesse et l'accélération de la particule, compte tenu de notre hypothèse initiale, ces données doivent être stockées dans des plongements portés par les sommets du maillage, qui correspondent aux orbites $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ en 2D ou $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ en 3D. Mais concernant la masse, plusieurs solutions sont possibles et il faut évaluer la pertinence de chacune.

Pour définir le plongement qui porte l'information de masse, nous considérons l'origine de cette propriété physique. Dans notre modèle, nous supposons que la masse est répartie sur la surface de l'objet 2D ou son volume en 3D. Il semble alors plus naturel d'associer la masse aux faces ou aux volumes plutôt qu'aux sommets. Cependant nous travaillons avec une structure discrète, dans laquelle les masses doivent être concentrées sur les particules, et non pas une structure continue. Le calcul de l'accélération de chaque particule nécessite de connaître sa masse. Or celle-ci provient des faces/volumes environnant le sommet support. Ainsi, chaque face/volume répartit uniformément sa masse sur ses sommets (coins de la face en 2D, coins du volume en 3D). Par exemple, la masse d'un sommet incident à deux faces est égale à la somme des masses associées aux deux coins incidents à ce sommet. Compte tenu de cette remarque, nous associons deux types de plongements pour la propriété physique masse. Le premier est le plongement de masse qui est lié à un sommet (coin) de face/de volume, donc le plongement associé aux sous-orbites $\langle \alpha_1 \rangle$ / $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$, et un deuxième plongement qui est lié aux sommets, donc associé aux orbites $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ / $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$. La figure 5.2 montre deux faces quadrilatères adjacentes présentées avec Jerboa. Elle montre aussi les deux types de plongements en 2D, le plongement **Masse-coin** qui est porté par les orbites $\langle \alpha_1 \rangle$ soit sur les deux brins qui sont liés par une liaison α_1 . De même le plongement **Masse-sommet** qui est porté par les orbites $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ soit sur tous les brins qui sont liés par les liaisons

α_1 et α_2 donc les brins d'un sommet incident à plusieurs faces.

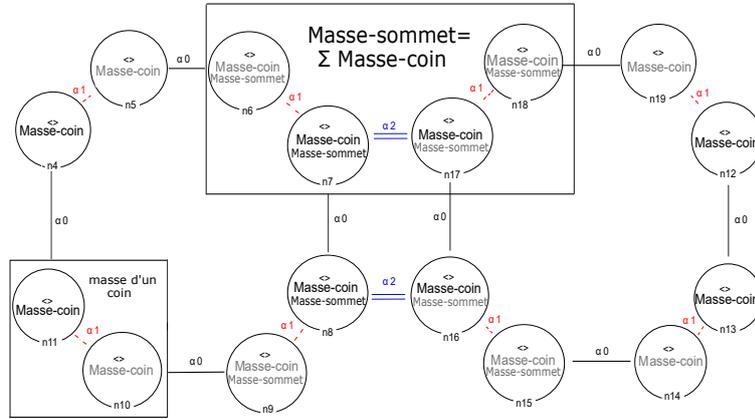


FIGURE 5.2 – Les divers plongements masse.

Notons que la valeur d'un plongement **Masse-sommet** est calculée à partir des plongements **Masse-coin**, en faisant la somme de toutes les masses qui appartiennent à un même sommet : en d'autres termes, par exemple en 2D, la masse plongée dans les orbites $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ correspond à la somme des masses plongées dans les orbites $\langle \alpha_1 \rangle$ le constituant. De même en 3D la masse plongée dans les orbites $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ est la somme des masses plongées dans les orbites sommets de volume $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ qui le constituent. Lorsque le modèle ne subit pas de transformation topologique, les deux masses (**Masse-coin** et **Masse-sommet**) sont invariantes. Cette distinction n'a donc pas d'intérêt. Mais en cas de modification topologique, cela facilite leur mise à jour. Par exemple, en cas de déchirure, nous avons besoin de mettre à jour les valeurs des masses pour chaque sommet. Cela se fait facilement en calculant la somme des **Masses-coins** de chaque sommet modifié. Donc nous pouvons constater que le plongement de masse sur le sommet apparaît comme une optimisation mais, qu'en soi il n'est pas indispensable. Il faut noter également que chaque élément gérant sa propre masse, aucune hypothèse de densité homogène de l'objet n'est nécessaire.

Pour récapituler, afin de modéliser les particules, nous avons introduit quatre plongements comme le montre la figure 5.3.

- Plongement **Position** : porté par les orbites sommets et stockant, sous la forme d'un vecteur 3D, les coordonnées de la position des particules.
- Plongement **Vitesse** : porté par les orbites sommets et stockant le vecteur vitesse de la particule.

Plongements mécaniques du modèle support			
Masse-sommet	Masse-coin	Vitesse	Position
orbites sommets	orbites sommets d'élément	orbites sommets	orbites sommets
2D : $\langle a1, a2 \rangle$	2D : $\langle a1 \rangle$	2D : $\langle a1, a2 \rangle$	2D : $\langle a1, a2 \rangle$
3D : $\langle a1, a2, a3 \rangle$	3D : $\langle a1, a2 \rangle$	3D : $\langle a1, a2, a3 \rangle$	3D : $\langle a1, a2, a3 \rangle$

FIGURE 5.3 – Plongements liés aux particules.

- Plongement **Masse-coin** : porté par les orbites sommets d'élément dans lesquels nous enregistrons la valeur de masse d'un coin d'une face ou d'un volume.
- Plongement **Masse-sommet** : porté par les orbites sommets et calculé à partir des masses-coins.

Dans la section suivante, nous introduisons la modélisation faite pour stocker les propriétés mécaniques des interactions dans les orbites les plus adéquates.

5.2 Modélisation des interactions

Pour simuler le comportement et la déformation des objets au cours du temps, il faut se baser sur des lois de comportements. Dans cette partie nous nous intéressons aux interactions décrites sur la figure 5.4.

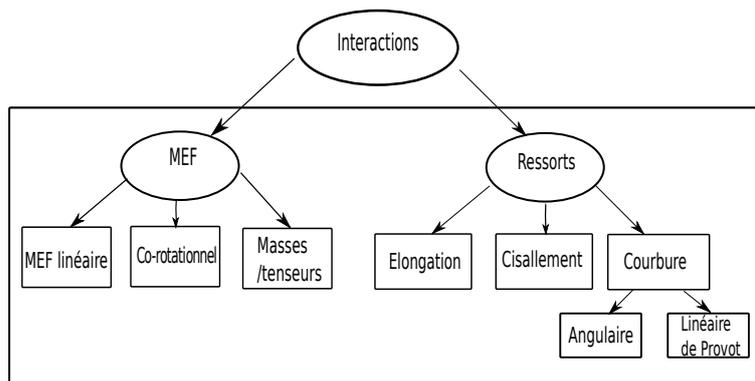


FIGURE 5.4 – Interactions à modéliser.

À partir de l'étude de quelques interactions, nous avons défini une méthode générale qui permet de trouver le lieu de stockage de chaque propriété mécanique ainsi que celui des forces appliquées par chaque interaction, selon son origine physique. Aussi, cette méthode facilite l'introduction de n'importe quelle interaction dans notre plate-forme. Nous expliquons alors, dans cette partie, les étapes de cette méthode et son application aux différentes interactions de la figure 5.4.

5.2.1 Méthode générale

Nous avons remarqué que les travaux antérieurs [MDS10, FZDJ13, GCZD15], introduits dans le chapitre 4, présentent des limites. En effet, dans ces approches, la solution pour les ressorts d'élongation est simple et immédiate, puisque leurs supports topologiques sont les arêtes du maillage. Mais les autres types d'interactions ne correspondent pas directement aux éléments topologiques des G-cartes (comme par exemple les diagonales de faces/volumes). Comme, ces lieux ne sont pas forcément des entités topologiques, le problème du recours à des structures annexes apparaît dans les travaux de Fléchon *et al.* et Golek *et al.*. Si, au contraire, nous nous focalisons sur l'origine des forces (un coin, une articulation entre faces, etc.) sans se soucier des points d'application, il est alors moins contraignant de trouver un lieu topologique pour associer le plongement des paramètres des interactions. Les lieux d'application des forces s'obtiennent alors grâce à un sous-graphe qui indique les voisinages à suivre à partir de lieu de stockage de l'interaction. Globalement, nous estimons que les limites des approches précédentes (le type d'éléments dans [MDS10] et l'utilisation de structures externes dans [FZDJ13, GCZD15]) peuvent être dues à une modélisation inadaptée des interactions car les auteurs de ces travaux cherchent des lieux topologiques qui correspondent à la fois à l'origine et aux lieux d'application des forces (par exemple un lien entre deux particules). Par conséquent, ils n'arrivent pas à trouver les lieux topologiques les plus adéquats et renoncent à certaines interactions et donc à certains éléments ou ont recours aux structures externes.

Pour modéliser et calculer les forces de n'importe quel type d'interactions (discrètes ou continues) en 2D ou 3D pour différents types de maillage, nous avons proposé la méthode suivante :

- localiser le lieu topologique correspondant à la source des interactions et y stocker leurs paramètres. Si lors d'une transformation topologique, ce lieu est modifié, alors l'interaction est nécessairement traitée en même temps que la transformation ;
- à partir de chaque lieu, définir un motif (*i.e* un sous-graphe) à filtrer qui désigne les particules participant à l'interaction (utiles aux calculs ou subissant les forces) ;
- stocker chaque force calculée dans une sous-orbite incluse à la fois dans l'orbite du sommet d'application et dans le sous-graphe défini à l'étape précédente.

Prenons l'exemple d'un ressort placé sur une arête entre deux masses (*i.e* entre deux sommets), comme le montre la figure 5.5. La source de l'interaction dans cet exemple est l'arête (encadrée en vert dans la figure 5.5 et les suivantes). L'ensemble des caractéristiques physiques du ressort sont ainsi portées par cette orbite verte. Les particules et leur masse sont portées par les sommets (entourés en rouge sur la figure 5.5 et les suivantes). Le motif à filtrer doit inclure à la fois les brins portant