Modélisation didactique pour la conception d'un EIAH

Dans ce chapitre, nous revenons sur la modélisation du savoir, que nous avons déjà abordée avec le MPR dans le chapitre 4, mais aussi de l'apprenant, des tâches et des parcours d'apprentissage en vue d'une implémentation dans un EIAH.

Nous nous posons donc les questions suivantes : comment modéliser le savoir en jeu dans l'EIAH ? Comment définir un modèle de l'apprenant permettant de caractériser ses besoins d'apprentissage en géométrie ? Quelles tâches issues de quels types de tâches proposer à l'élève au sein d'un parcours d'apprentissage pour accomplir les objectifs définis au préalable ? Quelles rétroactions envoyer à l'élève pour le guider dans la résolution d'une tâche ?

Cette dernière question sera abordée dans le chapitre 8. Nous répondons aux trois premières par la suite.

Dans le cadre du projet *MindMath*, des parcours d'apprentissage sont prévus en algèbre et en géométrie pour toutes les praxéologies locales que nous avons définies (cf. chapitre 4 pour les praxéologies du domaine géométrique). Dans ce chapitre, nous continuons de nous centrer, en géométrie plane, sur la praxéologie relative à la construction de figures planes. En particulier, tous les exemples que nous présentons sont issus du type de tâches générique « construire un triangle ».

À noter que, comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, nous nous situons notamment dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD). Dans ce chapitre, nous continuons donc d'utiliser les mots « technique » et « technologie » dans ce contexte (cf. section 2.1.3) et non en lien avec la dimension informatique de notre travail.

7.1 Modélisation didactique du savoir

La modélisation du savoir que nous proposons s'appuie sur la notion de MPR. Le modèle du savoir est d'abord structuré en niveaux praxéologiques globaux, régionaux et locaux à partir des MPR construits pour chacun des domaines (cf. chapitre 4 pour celui de la géométrie). La déclaration de ces niveaux prend en compte le fait que certaines praxéologies (régionales ou locales) sont mobilisées par d'autres praxéologies (régionales ou locales). Par exemple, la praxéologie locale de construction des figures géométriques planes mobilise la praxéologie locale de preuve comme nous l'avons vu dans le chapitre 4. Une illustration représentant certaines de ces relations est proposée sur l'image 7.1.

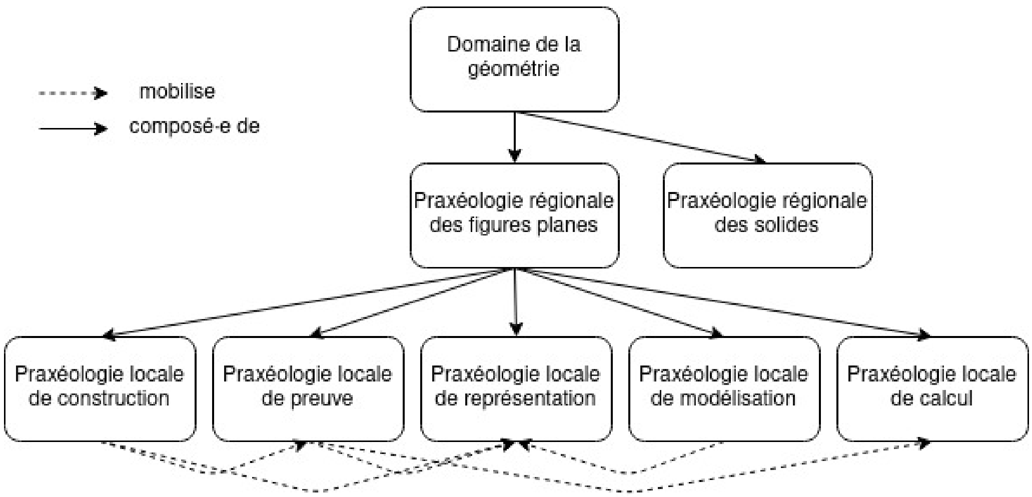

Image 7.1 – Illustration de la structuration de la géométrie des triangles et relations entre les niveaux

Nous nous concentrons désormais sur la géométrie et en particulier les triangles et les parallélogrammes. Le modèle du savoir en géométrie prend en compte une structuration des familles de triangles et de parallélogrammes particuliers. Cette structuration permet par exemple aux types de tâches relatifs aux triangles ou parallélogrammes particuliers d'hériter des techniques et technologies associées aux types de tâches relatifs aux triangles ou parallélogrammes « quelconques ». En effet, comme nous l'avons déjà vu dans la section 4.2.3, dans la résolution d'une même tâche, une technique peut mobiliser des propriétés propres à la nature du triangle à construire mais aussi des propriétés relatives à tous les triangles. Ainsi, pour les triangles, nous faisons le choix d'adopter une structuration par les angles sur l'image 7.2. L'ensemble des triangles est désigné par l'appellation « triangles quelconques », certains de ces triangles peuvent être particuliers : rectangles (s'ils possèdent un angle droit) ou isocèles (s'ils possèdent deux angles égaux). Des triangles isocèles peuvent aussi être particuliers, c'est-à-dire équilatéraux (s'ils possèdent trois angles égaux) ou isocèles rectangles s'ils sont également rectangles (des triangles rectangles peuvent donc aussi être des triangles isocèles rectangles) [1]

De même, pour les parallélogrammes et parallélogrammes particuliers dont la structuration est présentée sur l'image 7.3.

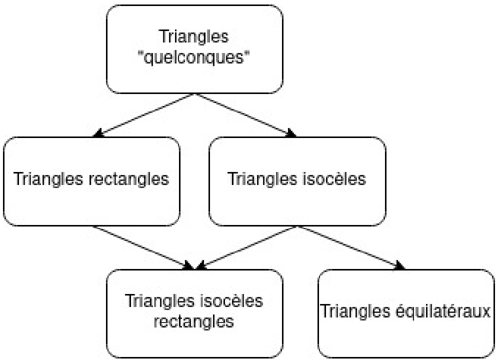

Image 7.2 – Approche par les angles d'une structuration des triangles

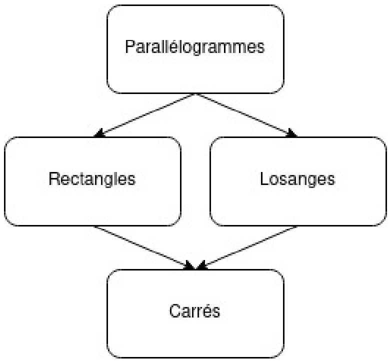

Image 7.3 – Structuration des parallélogrammes et parallélogrammes particuliers

À partir de ces structurations, nous reprenons les types de tâches définis dans le chapitre 4, en particulier concernant la praxéologie locale relative à la construction ici et nous construisons des graphes représentant la structuration des types de tâches de construction de triangles et de parallélogrammes. Ceux-ci sont présentés dans l'annexe C.

Dans la section suivante, nous explicitons le modèle didactique des tâches que nous concevons à partir de cette structuration des types de tâches.

7.2 Modélisation didactique des tâches

Le modèle didactique des tâches que nous construisons s'applique en algèbre et en géométrie, il permet, en fonction du niveau scolaire, de :

— générer des tâches qui deviendront les exercices qui composent les parcours d'apprentissage ;

— identifier les savoirs en jeu pour chaque tâche ;

1. Sur ce graphe, ayant adopté une approche par les angles, nous ne mentionnons pas les triangles scalènes, définis comme des triangles dont les trois côtés sont de longueurs inégales, comme nous avons pu le faire, par exemple dans le MPR présenté dans le chapitre 4. Des triangles scalènes peuvent donc être « quelconques » ou rectangles selon leurs angles.

— structurer le savoir en positionnant les tâches les unes par rapport aux autres ;

— caractériser le(s) rôle(s) *a priori* de la tâche dans l'apprentissage ;

— caractériser la complexité mathématique d'une tâche.

Dans les sections suivantes, nous expliquons comment nous réalisons ces objectifs.

À noter que dans le cadre de notre travail, les exercices sont composés d'une seule tâche. Dans certaines évolutions du projet *MindMath*, nous envisageons de proposer des exercices composés de plusieurs tâches, notamment pour mieux caractériser le travail de l'élève mais nous ne considérons pas de tels exercices pour le moment.

7.2.1 Générateurs de types de tâches

Nous structurons d'abord le domaine en praxéologies régionales et locales comme nous l'avons vu dans la section 7.1. Chacune des praxéologies locales est ensuite décomposée en générateurs de types de tâches (Chaachoua, 2018) (cf. section 2.3.4). En particulier, nous considérons les générateurs de types de tâches liés au type de tâches générique « construire un triangle ».

Comme nous l'avons vu dans la section 2.3.4, un générateur de types de tâches est défini par : GT = [Verbe d'action, Complément fixe ; Système de variables]. Le système de variables, une fois instancié, permet de générer des types de tâches.

Ces variables, appelées **variables de types de tâches** identifient donc les savoirs en jeu. Nous les avons déjà présentées pour le générateur GT1 = [Construire, un triangle ; VT1, VT2] où VT1 est la nature du triangle à construire et VT2 les données de l'énoncé pour construire le triangle. Ces variables correspondent à celles que nous avons identifiées dans la section 3.5.3 et les types de tâches ainsi définis correspondent à ceux que nous avons listés lorsque nous avons décrit le MPR (cf. section 4.2.1.a.).

Or, les élèves ne résolvent pas des types de tâches mais bien des tâches qu'il faut également générer. Nous définissons un niveau intermédiaire entre les types de tâches et les tâches : celui des familles de tâches. La famille de tâches est la plus petite unité de modélisation du savoir que nous prenons en compte, les tâches composant une famille de tâches sont donc considérées comme semblables à l'aléatoire de génération près. Pour caractériser ces familles de tâches, nous définissons donc un deuxième niveau de variables qui intervient une fois le type de tâches instancié à partir des variables de types de tâches. Ces variables sont appelées **variables de tâches**.

7.2.2 Variables de tâches

Nous l'avons vu dans la section 2.2, nous confrontons d'abord l'élève à la limite de portée des techniques (anciennes ou qui vont devenir anciennes) qu'il utilise et donc à la nécessité de mobiliser d'autres techniques associées à d'autres technologies idoines pour résoudre un type de tâches donné. Puis, une fois une praxéologie ponctuelle correspondant à une technologie visée introduite, nous jouons sur la complexité des tâches proposées.

Ce sont les variables de tâches qui permettent de caractériser la portée des techniques en jeu dans la résolution des tâches d'une famille de tâches, ainsi que la complexité mathématique de ces tâches. Pour les types de tâches de construction, elles sont en lien avec les conditions didactiques relatives aux tâches de construction que nous avons relevées dans la section 3.5. Dans la section 3.5.3, nous avons identifié des variables liées à la portée des techniques et d'autres liées à la complexité de la tâche (ici, de la famille de tâches). Plus particulièrement concernant la portée des techniques, nous définissions deux types de limitations ou de blocages des techniques :

— la limitation de la portée des techniques perceptives ou appuyées sur des instruments de mesure, en concevant des tâches pour lesquelles ces techniques ne peuvent pas suffire à résoudre la tâche. En plus des variables de tâches liées à la portée des techniques, cette fonction est essentiellement liée au choix des types de tâches dans le MPR et au contexte de la géométrie dynamique, en particulier en se plaçant dans le paradigme des constructions robustes (cf. section 6.4) ;

— le blocage de certaines propriétés, par exemple en empêchant l'utilisation d'un outil pour construire des angles, on bloque la mobilisation directement dans la construction des propriétés relatives aux angles et on incite à mobiliser d'autres propriétés dans un raisonnement potentiellement plus complexe. Cette fonction est assurée par les variables de tâches liées à la portée des techniques.

Concernant la complexité, nous nous appuyons notamment sur les adaptations des connaissances (Robert, 2008b) (cf. section 2.2.2). En plus des variables de tâches liées à la portée des techniques qui jouent également sur la complexité de la tâche, nous définissons en particulier des variables de tâches qui modifient par exemple la reconnaissance des modalités d'application de certaines propriétés et qui rendent nécessaire l'introduction d'intermédiaires ou de pas de raisonnement supplémentaires. Ainsi, la désignation du triangle équilatéral comme un triangle isocèle avec un angle de 60° nécessite une appréhension différente de la figure à construire, en lien avec les notions de sens et dénotation que nous avons étudiées dans la section 3.1.3.

Ainsi, les variables de tâches identifiées par le sigle Vt_P spécifient la portée de la technique visée et les limites des technologies anciennes. Les variables de tâches identifiées par le sigle Vt_C caractérisent la complexité mathématique de la tâche pour une certaine instanciation des variables Vt_P.

Pour le générateur de types de tâches GT1 déjà présenté, les variables de tâches sont :

— Vt_P1 : élément(s) déjà tracé(s) de la figure à construire.

— Vt_P2 : outils disponibles pour la construction, en particulier nous nous intéressons à la présence du report de longueur et du constructeur d'angle [2].

— VT_C1 : nombre minimum de propriétés à mobiliser pour résoudre la tâche.

— VT_C2 : registre de représentation de l'énoncé et désignation du triangle dans l'énoncé.

— Vt_C3 : présence d'objet(s) géométrique(s) externe(s) à la figure à construire (quadrillage, une autre figure à l'intérieur de ou sur laquelle il faut construire le triangle, etc.).

Toutes ces variables caractérisent les familles de tâches mais une partie d'entre elles suffit effectivement à les générer. En effet, la variable Vt_C1 peut être déduite de l'instanciation des autres variables. Par la suite, nous étudierons son rôle particulier dans la définition des parcours d'apprentissage.

Pour chacune de ces variables, nous définissons l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre :

— Vt_P1 : {aucun ; un côté ; deux droites particulières du triangle} × {en position prototypique ; en position non prototypique}.

— Vt_P2 : {report de longueur ; constructeur d'angle ; report de longueur et constructeur d'angle}, et, si nécessaire l'outil perpendiculaire ainsi qu'éventuellement des outils inutiles pour résoudre la tâche mais qui permettent d'éviter un contrat didactique amenant l'élève à penser que tous les outils à disposition sont toujours utiles.

— VT_C1 : {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5+}.

2. Ici, nous parlons de « report de longueur » et de « constructeur d'angle » pour évoquer avant tout la fonction de ces outils. Dans l'environnement papier-crayon, il s'agirait respectivement du compas et du rapporteur. Dans l'environnement informatique, il s'agit respectivement de l'outil « cercle » et de l'outil « angle ».

— VT_C2 : {énoncé textuel ; schéma codé} × {nature la plus précise du triangle donnée ; nature du triangle « incomplète » [3] ; nature du triangle non mentionnée}.

— Vt_C3 : {autre triangle ; quadrilatère ; diamètre ou rayon d'un cercle} × {écran vierge ; quadrillage}.

Concernant les énoncés des tâches présentées à l'élève dans l'EIAH, nous avons fait le choix de toujours nous situer à un niveau de mise en fonctionnement des connaissances disponible, c'est-à-dire que nous n'indiquons pas les connaissances à mettre en œuvre dans la résolution de la tâche. Cependant, si nécessaire la prise en charge d'un niveau de mise en fonctionnement des connaissances mobilisable est assurée par certaines rétroactions comme nous les verrons dans le chapitre 8.

Les variables Vt_P permettent en particulier de concevoir des familles de tâches qui montrent la nécessité d'entrer dans une démarche heuristique (puis dans la production d'une argumentation heuristique) pour résoudre une tâche dans laquelle la construction n'est plus immédiate. Elles sont complétées par la variable Vt_C1 relative au nombre de propriétés qui est liée au nombre de pas de l'argumentation heuristique à mobiliser. Par exemple, comme nous l'avons vu avec la construction d'un triangle isocèle dont l'angle au sommet mesure 60° à partir d'un côté différent de la base, le fait d'empêcher l'utilisation du constructeur d'angle oblige l'élève à élaborer un raisonnement mobilisant d'autres propriétés. Ainsi, si l'élève dispose du constructeur d'angle et du report de longueur, il peut mobiliser la définition « un triangle isocèle a deux côtés de même longueur » et reporter la longueur du premier côté sur la demi-droite issue de l'angle au sommet qu'il a construite. En l'absence de l'outil constructeur d'angle, avec uniquement le report de longueur, il va devoir mobiliser d'autres propriétés (la somme des mesures des angles dans un triangle est égale à 180°, les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux, si un triangle a trois angles égaux c'est un triangle équilatéral, et un triangle équilatéral a trois côtés de même longueur) pour finalement construire un triangle équilatéral avec le report de longueur sur le côté donné. Cet exemple illustre le rôle que cette variable peut jouer dans la négociation de l'entrée dans le raisonnement déductif à la transition cycle 3 / cycle 4.

3. Par exemple : triangle isocèle pour désigner un triangle équilatéral.

7.2.3 Familles de tâches

Une fois les variables de types de tâches et de tâches instanciées, nous obtenons une famille de tâches à partir de laquelle nous pouvons générer les tâches des parcours d'apprentissage.

La combinaison automatique des variables de types de tâches et de tâches permet de générer l'ensemble des possibles familles de tâches. Parmi celles-ci, nous n'avons gardé que celles qui permettent effectivement la construction d'une figure à une similitude près (ou qui permettent de conclure que la construction est impossible car les données de l'énoncé sont contradictoires) et celles que nous jugeons pertinentes à proposer à des élèves de cycle 4 en conformité avec les programmes scolaires de 2020. Ainsi, les choix réalisés dans les combinaisons de valeurs de VT et Vt, visent à :

— produire des familles de tâches qui permettent de motiver et travailler le passage d'une technique à une autre en jouant sur leur portée et la technologie en jeu ;

— produire des familles de tâches qui demandent la mobilisation de techniques mettant en jeu les mêmes propriétés mais sont plus ou moins complexes en termes d'activité cognitive sollicitée à travers la convocation de types de tâches relevant d'une autre praxéologie locale.

L'ensemble des familles de tâches ainsi générées est présenté dans l'annexe C. Elles sont associées au niveau institutionnel auquel on peut les proposer en accord avec les programmes scolaires actuels.

Par exemple, à partir de la famille de tâches définie comme suit :

— VT1 : un triangle isocèle ;

— VT2 : côté base et angle à la base[4] ;

— Vt_P1 : un côté en position non prototypique ;

— Vt_P2 : report de longueur et constructeur d'angle ;

— Vt_C1 : 1 (dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux).

— Vt_C2 : énoncé dans le langage naturel (angle donné sous la forme d'une mesure, côté donné en longueur), triangle désigné comme « triangle isocèle » ;

— Vt_C3 : pas d'objets externes.

nous pouvons définir plusieurs tâches en faisant varier la position du côté déjà tracé sur l'écran (de façon à ce qu'il reste en position non prototypique) et en faisant

4. Suivant ce que nous avons dit dans la section 3.5.1, les angles sont toujours donnés par une mesure en degrés et les côtés sont soit déjà tracés, soit donnés par un segment mesurant la même longueur (on ne donne pas de mesure de longueur).

varier la mesure de l'angle (en évitant les cas particuliers comme 45° ou 60°). Nous considérons que ces tâches impliquent une activité mathématique similaire de la part de l'élève. C'est pourquoi la famille de tâches est la plus petite unité du modèle des tâches considérée.

Dans la section 7.4 concernant le modèle des parcours d'apprentissage, nous reviendrons sur le jeu de ces variables pour définir des parcours d'apprentissage adaptés à l'élève. Dans la section suivante, nous nous attardons justement sur la notion de parcours *adapté* à l'élève avec la définition du modèle de l'apprenant.

7.3 Modélisation didactique de l'apprenant

La modélisation de l'apprenant permet de caractériser l'activité de résolution de l'élève au regard de ce qui est attendu dans une institution donnée. Cette modélisation prend en compte son activité pour la tâche en cours mais également des tâches déjà réalisées dans les différentes praxéologies locales.

Le modèle de l'apprenant intègre plusieurs types d'informations :

— son taux de réussite aux exercices résolus ;

— son mode de justification tel que défini dans la section 2.2.1 et en géométrie en particulier dans la section 4.3 ;

— des catégories d'erreurs récurrentes.

Le taux de réussite est une information chiffrée qui ne suffit évidemment pas à caractériser l'activité de l'élève. C'est pourquoi nous développons ici la notion de mode de justification de l'élève et des catégories d'erreurs associées. Celles-ci sont liées aux besoins d'apprentissage de l'élève comme nous allons le voir.

7.3.1 Modes de justification de l'élève

Nous prenons en compte le développement des apprentissages de l'élève à travers l'analyse des praxéologies qu'il convoque pour résoudre une tâche d'un domaine de savoir. D'un point de vue institutionnel, cette praxéologie est d'abord comparée à la ou les praxéologies attendue(s) par l'institution dans laquelle il se trouve. Mais nous nous plaçons également du point de vue de l'élève en cherchant à caractériser son rapport personnel à un savoir donné dans une institution donnée.

Nous nous appuyons ici sur les modes de justification des élèves développés par Grugeon-Allys (cf. section 2.2.1). Comme elle, nous avons identifié les praxéologies locales du MPR : construire, prouver, représenter, calculer et modéliser. Le mode de justification de l'élève est donc calculé selon ces cinq dimensions.

Pour la praxéologie locale de construction (CO) des figures géométriques planes, par exemple, nous avons vu dans la section 4.3.1 que nous avons défini trois modes de justification des élèves :

— CO0 : un mode ancien correspondant à une construction au jugé et validée par la perception ou le recours à la mesure ;

— CO1 : un mode incomplet correspondant à une construction qui reste dans le paradigme des constructions molles et/ou ayant recours à une utilisation non réfléchie des outils de construction appuyée sur un raisonnement qui présente des technologies erronées (utilisation de propriétés fausses ou dont les conditions d'application ne sont pas remplies, erreurs dans la chronologie des pas de construction) ;

— CO2 : un mode idoine correspondant à une construction robuste appuyée sur une argumentation heuristique correcte, une validation théorique peut être spontanément mise en œuvre.

De la même façon, nous avons défini trois modes de justification de l'élève pour la praxéologie locale de preuve (« P ») :

— P0 : un mode ancien correspondant à une preuve basée sur la perception ou le recours à la mesure ;

— P1 : un mode incomplet correspondant à une mobilisation d'éléments de preuve reposant sur l'utilisation des propriétés géométriques mais présentant des technologies erronées (utilisation de propriétés fausses ou dont les conditions d'application ne sont pas remplies) ou des îlots déductifs incorrects (erreurs dans la chronologie des pas de construction ou dans l'enchaînement des pas, structure du pas ternaire incorrecte, confusion entre données et conclusion) ;

— P2 : un mode idoine correspondant à une preuve basée sur les propriétés géométriques sous la forme d'une argumentation heuristique voire d'une démonstration.

Le modèle de l'élève est donc constitué d'un quintuplet, chacun des éléments de ce quintuplet correspondant à son mode de justification sur une des praxéologies locales relevées dans la section 4.1.

De plus, nous avons défini des critères permettant de repérer ces modes de justification selon les praxéologies mobilisées par les élèves (cf. section 4.3.1 et en particulier le tableau 4.1). Ces critères et leur association avec un mode de justification défini *a priori* fondent la définition des catégories d'erreurs que nous présentons dans la section 7.3.2.b..

Ainsi, à chaque fois que l'élève résout une tâche d'un parcours d'apprentissage, sa production est codée automatiquement par les modes de justification associés aux traces à repérer que nous allons définir, c'est ce que nous appelons un diagnostic local (cf. section 7.4.3). Ce même codage est appliqué à l'ensemble des tâches résolues par l'élève pour pouvoir, *in fine* déterminer son mode de justification dominant sur les praxéologies locales en jeu. L'interprétation du codage n'est donc pertinente que pour un nombre suffisamment important de tâches résolues.

Les modes de justification *a priori* sont hiérarchisés, permettant de repérer les besoins d'apprentissage de l'élève par comparaison avec le mode de justification idoine et attendu à un niveau scolaire donné. Au quintuplet des modes de justification de l'élève s'ajoutent les catégories d'erreurs qui précisent davantage les besoins d'apprentissage de l'élève comme nous le présentons dans la section suivante.

7.3.2 Techniques et technologies mobilisées par l'élève

Pour pouvoir diagnostiquer puis mettre à jour les modes de justification de l'élève sur les différentes praxéologies locales identifiées, l'EIAH doit pouvoir repérer les praxéologies qu'il met en œuvre dans la résolution des familles de tâches auxquelles il est confronté.

Pour chacune des familles de tâches implémentées dans l'EIAH, nous déterminons donc les techniques (idoines ou erronées) possibles associées à des technologies (idoines ou erronées). Concernant le quatrième élément des praxéologies, la théorie, pour tout le domaine de la géométrie plane, nous nous référons à celle qui sous-tend la géométrie « à la Euclide ».

Pour chacune des familles de tâches que nous définissons, nous faisons donc une analyse didactique *a priori* qui permet d'identifier des techniques idoines et erronées, ainsi que les technologies associées. À partir de cette analyse, lorsque l'élève résout une tâche sur le logiciel, le logiciel relève certains indices permettant de faire une hypothèse sur la technique employée, la technologie associée et donc de déterminer le mode de justification de l'élève. L'ensemble des techniques idoines associées aux familles de tâches du générateur « construire un triangle » est présenté dans l'annexe C.

Cette explicitation des techniques permet également de générer des rétroactions en lien avec la résolution de la tâche comme nous le verrons dans le chapitre 8.

a. Techniques et technologies visées au regard de l'entrée dans la géométrie théorique

Dans cette section, nous explicitons le travail d'analyse didactique *a priori* réalisé sur chacune des familles de tâches afin de déterminer la technique visée selon le niveau scolaire auquel on se place. Nous présentons ce travail sur un exemple particulier que nous compléterons avec ce qu'il ne permet pas d'illustrer.

Nous reprenons l'exemple de construction du triangle isocèle avec un angle de 60°. La capture d'écran 7.4 expose la disposition des éléments sur l'écran dont l'énoncé « à partir du côté $[AB]$, construis un triangle ABC isocèle en A tel que l'angle en A soit égal à 60° »en haut, suivi d'une remarque qui indique le contrat relatif à la validation des figures construites « Attention : il faut que la figure conserve ses propriétés lorsqu'on déplace ses points ». La barre d'outils géométriques est placée à la verticale à gauche. Les outils sont, de haut en bas : cercle, parallèle, perpendiculaire, point, texte, triangle. En bas à droite, on trouve un bouton « valider » sur lequel l'élève doit cliquer quand il pense avoir terminé la construction [5].

Cette tâche est issue du générateur de types de tâche « construire un triangle ». Les variables de types de tâches et de tâches associées sont :

- VT1 : un triangle équilatéral ;
- VT2 : côté non base et angle au sommet ;
- Vt_P1 : un côté en position non prototypique ;
- Vt_P2 : report de longueur et outils inutiles pour la construction (parallèle, perpendiculaire) ;
- Vt_C1 : 4 (dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux ; la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° ; si un triangle a trois angles égaux, alors il est équilatéral ; un triangle équilatéral a trois côtés de même longueur).
- Vt_C2 : énoncé dans le langage naturel (angle donné sous la forme d'une mesure), triangle désigné comme « triangle isocèle » ;
- Vt_C3 : pas d'objets externes.

5. Cette capture d'écran a été prise alors que le logiciel MindMath était en cours de développement, c'est pourquoi le bouton « aide » dont nous reparlerons n'est pas encore présent. La charte graphique est également différente de la version finale du logiciel.

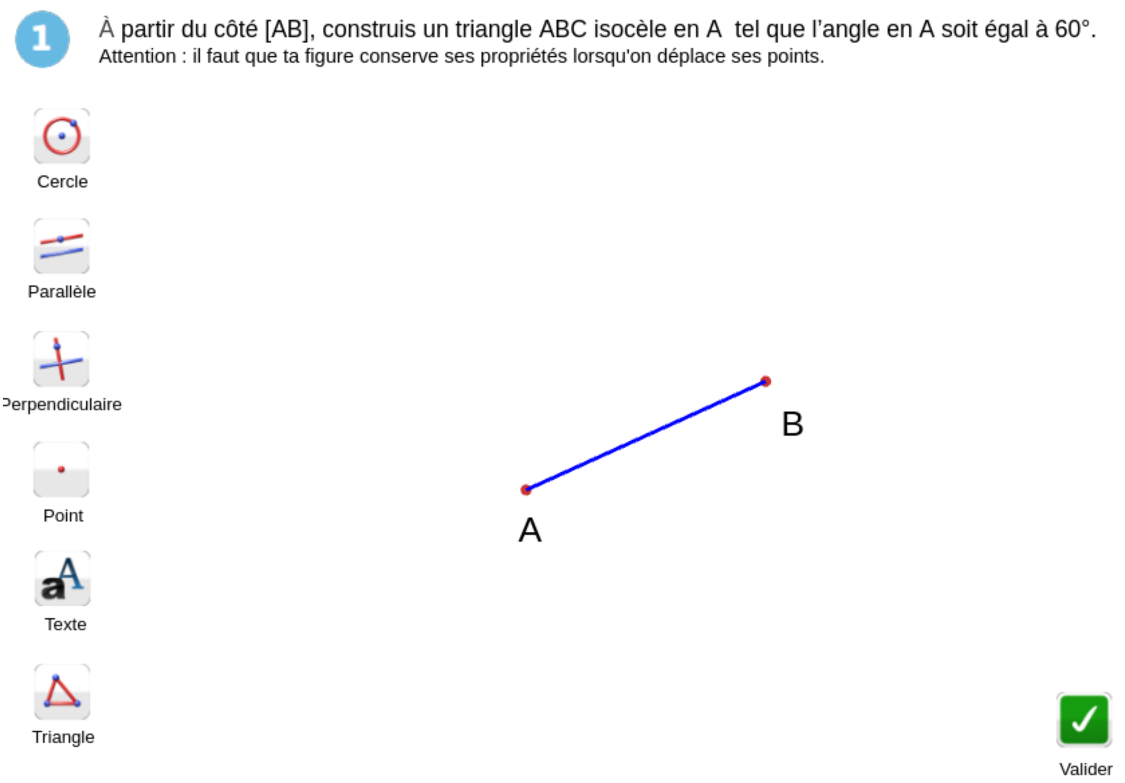

Image 7.4 – Capture d'écran de la tâche « à partir du côté $[AB]$, construis un triangle ABC isocèle en A tel que l'angle en A soit égal à 60° » proposée dans le logiciel Cabri

Une technique visée est présentée dans le tableau 7.1. Cette présentation sous forme de tableau ne peut pas montrer toute l'organisation heuristique que l'élève doit mettre en œuvre pour pouvoir résoudre la tâche, les potentiels essais non aboutis, des validations intermédiaires, etc. Cette même présentation, qui permet néanmoins de mettre en avant les étapes des techniques et les propriétés à utiliser, sera utilisée par la suite et présente les mêmes limites.

L'explicitation de la technique idoine permet d'identifier les propriétés et définitions en jeu, ainsi que les constructions intermédiaires qui aboutissent à la solution correcte. La technique idoine met ainsi en jeu une argumentation heuristique dont les îlots déductifs sont présentés dans les lignes 2 à 7 du tableau.

Certains ingrédients de la technique idoine font appel à des types de tâches de la praxéologie locale relative à la preuve sur les figures géométries planes ou à un type de tâches de la praxéologie locale relative au calcul de grandeurs de figures géométriques. Cependant, la dimension relative au calcul de grandeur ne sera pas prise en compte ici car elle se mêle à la dimension relative à la preuve et est trop difficilement visible dans la résolution de l'élève. À la fin de la résolution de cette

Étape de la technique visée		Élément technologico-théorique
Données	Conclusion	
L'énoncé donne des informations sur les angles, or le constructeur d'angle ne fait pas partie des outils de construction du milieu, il faut donc chercher à obtenir des données sur les longueurs.		Phase heuristique
ABC est un triangle (donnée de l'énoncé)	$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180°$	La somme des angles d'un triangle est égale à 180° (propriété)
ABC est un triangle isocèle en A (donnée de l'énoncé)	Les angles à la base ($\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$) sont égaux	Si un triangle est isocèle, alors ses angles à la base sont égaux (propriété)
$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180°$ & $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ & $\widehat{BAC} = 60°$ (donnée de l'énoncé)	$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = (180° - 60°)/2$; $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 60°$	Règles du calcul algébrique
$\widehat{BAC} = \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 60°$	ABC est triangle équilatéral	Si un triangle a ses trois angles égaux, alors il est équilatéral (propriété)
ABC est un triangle équilatéral	$AB = AC = BC$	Un triangle équilatéral a ses trois côtés égaux (définition)
$AB = AC = BC$ & segment [AB] (donnée de l'énoncé)	On peut construire le triangle ABC connaissant les trois longueurs des côtés	Cas d'égalité des triangles côté - côté - côté (propriété)
Construire le cercle de centre A passant par B		Tous les points d'un cercle sont à égale distance du centre (propriété)
Construire le cercle de centre B passant par A		Tous les points d'un cercle sont à égale distance du centre (propriété)
Construire le point C à une intersection des deux cercles Tracer le triangle ABC		Les points à l'intersection de deux cercles sont à la même distance des centres de ces deux cercles (propriété)

TABLE 7.1 – Technique visée pour la résolution de la tâche « à partir du côté $[AB]$, construis un triangle ABC isocèle en A tel que l'angle en A mesure 60° »

tâche, deux éléments du quintuplet des modes de justification de l'élève sont donc mis à jour : les modes de justification selon la praxéologie locale de construction et de preuve.

b. Techniques et technologies erronées

Nous caractérisons ensuite des techniques erronées *a priori* et les traces à relever dans les productions des élèves pour les repérer. La technique visée que nous avons relevée mettant en jeu des ingrédients correspondant à des types de tâches issus d'autres praxéologies locales, les catégories d'erreurs que nous définissons peuvent être liées à la praxéologie locale de construction ou à la praxéologie locale de preuve.

Ainsi, à partir de l'analyse didactique *a priori*, les algorithmes derrière l'EIAH MindMath repèrent des traces dans les productions des élèves permettant de faire des hypothèses sur d'éventuelles catégories d'erreurs définies au niveau du bloc *logos* des praxéologies mobilisées par les élèves et auxquelles sont associés des modes de justification. Les modes de justification codent la résolution de la tâche de l'élève. Lorsque celui-ci a résolu plusieurs tâches, le quintuplet de ses modes de justification peut donc être mis à jour avec les modes de justification calculés à partir du codage sur plusieurs tâches. De plus, les catégories d'erreurs relevées sont également conservées dans le modèle de l'apprenant.

Dans la suite de cette section, nous explicitons les catégories d'erreurs définies et les traces dans les constructions des élèves qui permettent de les repérer. Nous donnons des exemples en nous basant sur la famille de tâches définie dans la section précédente.

Catégories d'erreurs liées à la praxéologie locale de construction

Concernant la praxéologie locale de construction, sans être exhaustifs, nous relevons trois catégories d'erreurs relevant des modes de justification CO0 et CO1. Nous présentons à chaque fois la technique erronée ou l'absence de technique idoine permettant de relever ces catégories d'erreurs dans la production de l'élève, ainsi que les limites de nos hypothèses.

La première catégorie d'erreurs correspond à une construction au jugé qui est une des caractéristiques du mode de justification CO0. Nous repérons l'emploi d'une telle technique liée à une praxéologie ancienne lorsque le point C du triangle ABC n'est pas construit à l'aide des outils de construction sur les deux cercles de centre A et B (ces cercles ne sont d'ailleurs pas tracés) mais placé « à peu près » au bon endroit. Cette technique peut révéler le fait que l'élève se place explicitement dans le paradigme GI où la simple perception visuelle lui suffit à déterminer que sa construction est correcte et où on travaille sur le dessin plutôt que les figures géométriques abstraites. Mais l'élève peut également employer cette technique parce qu'il est bloqué dans sa démarche heuristique, quand bien même il sait que la construction au jugé n'est pas correcte géométriquement et n'est pas ce qui est attendu de lui. Nous faisons l'hypothèse que proposer un bouton « aide » sur lequel l'élève pourrait cliquer lorsqu'il est bloqué (nous en reparlerons en lien avec la notion de rétroaction dans le chapitre 8) devrait limiter ce genre de cas puisqu'il aurait alors un moyen d'obtenir l'aide dont il a besoin pour avancer.

La deuxième catégorie d'erreurs correspond à une construction utilisant les outils de construction géométrique mais sans appui sur l'élaboration d'une argumentation heuristique. Nous avons vu dans le chapitre 4 que ce critère est associé au mode de justification CO1. La technique employée consiste à utiliser de façon un peu systématique tous les outils à disposition. C'est une des difficultés que peut engendrer l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique comme nous l'avions vu dans la section 6.2. Dans le cas de la famille de tâches qui nous intéresse ici, cette technique se manifeste dans la production de l'élève par l'utilisation d'outils qui ne peuvent pas mener à une construction correcte. Dans notre exemple, ce serait l'utilisation de l'outil parallèle ou perpendiculaire. Bien sûr, comme nous l'avons vu dans la section 6.2, lorsque seuls des outils de construction utiles à la construction en jeu sont présents dans le milieu, l'élève peut quand même utiliser cette technique erronée. Dans ce cas, elle est plus difficile à repérer dans sa résolution. À noter cependant que dans une phase heuristique, l'élève peut être amené à tester les outils de construction à sa disposition les uns après les autres. Nous considérons qu'il est dans une utilisation systématique des outils quand il ne valide pas lui-même la pertinence du choix des outils pour la construction visée (en reprenant la construction au début avec les seuls outils adéquats) mais qu'il appuie sur le bouton « valider » pour que le logiciel lui indique s'il est ou non sur la bonne voie.

La troisième catégorie d'erreurs correspond à l'absence de construction d'un cercle pour placer deux points à la même distance d'un troisième point (le centre du cercle) associée au mode CO0. Cette erreur peut être le résultat de différentes praxéologies incomplètes. Soit l'élève ne conceptualise pas bien l'objet cercle et en particulier ne peut pas utiliser la définition du cercle comme un ensemble de points à la même distance du centre. Soit l'erreur est due à la transposition informatique comme nous avons pu le voir dans la section 6.1.2. Dans notre exemple, cette erreur se manifeste par l'absence des deux cercles de centre A et B. Ce qui, comme nous l'avons vu auparavant, peut correspondre à d'autres catégories d'erreurs. Prenons ici un autre exemple : la tâche « à partir du côté $[AB]$, construis un triangle ABC isocèle en A tel que l'angle en A soit égal à $X°$ » pour laquelle on laisserait le report de longueur et le constructeur d'angle à disposition dans le milieu. Dans cet exemple, un élève qui ne sait pas utiliser le cercle comme report de longueur (supposons qu'il ne fait pas d'autres erreurs) trace une demi-droite issue de A faisant un angle de $X°$ avec $[AB]$ mais ne trace pas le cercle de centre A passant B.

Catégories d'erreurs liées à la praxéologie locale de preuve

Concernant la praxéologie locale de preuve qui est mise en jeu dans les ingrédients de la technique de résolution de la tâche sous la forme d'une argumentation heuristique, nous identifions des catégories d'erreurs associées au mode de justification P1. Celles-ci sont en lien avec l'entrée dans le raisonnement de la géométrie théorique.

La première catégorie d'erreurs correspond à l'utilisation de propriétés inventées, erronées ou de propriétés employées en dehors de leur domaine de validité. Elle se repère par l'application de telles propriétés pour les besoins de la résolution de la tâche. Par exemple, comme nous le verrons dans le chapitre 9, certains élèves souhaitent appliquer la propriété « la somme des mesures des angles dans un triangle est égale à 190° » ou « si un triangle a trois côtés de même longueur, c'est un triangle isocèle ». Comme nous le verrons dans la section 7.3.3 concernant les limites actuelles de l'EIAH MindMath, cette catégorie d'erreurs, bien que définie didactiquement, est encore difficilement repérable dans les productions des élèves.

La deuxième catégorie d'erreurs relève du mode de justification P1 et correspond à la non prise en compte d'une partie des données. Cette erreur est liée à des difficultés dans l'élaboration d'une argumentation heuristique à partir des données de l'énoncé, des propriétés des outils de construction dans le milieu et de celles de la figure à construire. Dans notre exemple, l'élève va construire un cercle de centre A passant par B grâce à l'information du triangle isocèle en A. Mais il ne trace pas l'autre cercle car il ne prend pas en compte le reste des données de l'énoncé, à savoir l'angle de 60° en A qu'on ne peut pas exploiter directement ici mais qui doit permettre d'engager un raisonnement.

7.3.3 Limitations dans le repérage des techniques mobilisées par l'élève

Toutes les techniques erronées que nous avons présentées ici sont définies *a priori* à partir de la définition des modes de justification *a priori* (cf. section 4.3). Dans la pratique, en plus des techniques erronées que nous n'avons potentiellement pas anticipées, nous rencontrons des limitations techniques [6] dans leur détection. Ainsi, le logiciel MindMath tel qu'il existe pour le moment n'est, par exemple, pas en mesure de repérer qu'un point a été placé « à peu près » au bon endroit. Des développements du projet sont prévus afin de pouvoir repérer plus d'erreurs.

De la même façon, comme nous l'évoquions dans la section sur le modèle des tâches (cf. section 7.2), les exercices ne sont actuellement composés que d'une seule tâche. En ajoutant une tâche au cours de laquelle l'élève serait amené à indiquer les

6. Ici au sens des TICE.

propriétés qu'il a utilisées et dans quel ordre, nous pourrions mieux repérer certaines erreurs, en particulier celles liées à la praxéologie locale de preuve, en lien avec l'élaboration d'une argumentation heuristique.

7.4 Modélisation didactique des parcours d'apprentissage

Un parcours d'apprentissage est une suite de tâches [7] organisées pour répondre à un objectif d'apprentissage. Dans le cadre de l'EIAH MindMath, c'est l'enseignant qui, en choisissant un objectif d'apprentissage en fonction du niveau scolaire auquel il enseigne, lance la création d'un parcours d'apprentissage pour l'élève [8].

D'un point de vue épistémologique, le modèle didactique des parcours d'apprentissage permet de les construire en situant les familles de tâches qui les composent les unes par rapport aux autres en se basant sur le savoir en jeu dans leur résolution. Nous prenons également en compte un point de vue institutionnel en faisant correspondre les tâches proposées aux élèves à leur niveau scolaire. Enfin, d'un point de vue cognitif, nous concevons des parcours d'apprentissage sensibles à l'activité de l'élève sur la famille de tâches en cours, sur des familles de tâches proches, et sur des familles de tâches de toute la praxéologie locale pour que l'élève résolve des tâches qui se situent dans sa ZPD. Cette prise en compte est assurée par le modèle de l'apprenant que nous venons de présenter et, en particulier, par le quintuplet des modes de justification de l'élève ainsi que les catégories d'erreurs relevées.

Dans la suite de cette section, nous explicitons donc le modèle didactique des parcours d'apprentissage. Nous définissons des parcours d'apprentissage *a priori* qui servent de base à ceux qui sont implémentés dans l'EIAH MindMath. En effet, d'autres acteurs du projet développent des algorithmes qui s'appuient sur les modèles didactiques que nous présentons ici pour proposer des parcours d'apprentissage s'adaptant à chaque élève en prenant en compte ses modes de justification calculés sur les familles de tâches auxquelles il a déjà été confronté, ses réussites et ses erreurs.

7. Dans la section 7.2, nous avons vu que la famille de tâches est la plus petite unité du modèle de tâche que nous considérons, nous parlerons donc en termes de familles de tâches par la suite mais l'élève résout bien des tâches dans l'environnement MindMath.

8. Tel que l'EIAH MindMath a été conçu pour le moment, il faut un enseignant pour assigner un parcours à un élève, que ce soit en classe ou hors la classe. Un contexte d'utilisation autonome de l'EIAH par un élève, indépendamment de son enseignant, est cependant envisagé par la suite.

7.4.1 Rôle des variables de types de tâches et de tâches dans la modélisation des parcours

Dans un premier temps, les parcours d'apprentissage répondant à un objectif d'apprentissage, nous identifions la famille de tâches qui correspond au « cœur de cible » des apprentissages visés selon le niveau scolaire en jeu. Cette famille de tâches doit nécessairement figurer dans le parcours d'apprentissage proposé à l'élève. Cependant, selon les modes de justification de l'élève, pour rester dans sa ZPD, il peut être nécessaire de lui proposer d'autres familles de tâches en amont afin de l'amener progressivement à l'objectif visé. Au contraire, pour d'autres élèves, il sera intéressant de travailler des familles de tâches plus complexes que celles correspondant au cœur de cible. Le mode de justification de l'élève permet donc de déterminer à quel point il est nécessaire de proposer des familles de tâches en amont de la famille de tâches cœur de cible et s'il est notamment nécessaire de proposer des familles de tâches qui lui feront prendre conscience de l'insuffisance des techniques et technologies anciennes et de la nécessité de mobiliser les techniques et technologies visées.

Ainsi, en algèbre et en particulier pour les générateurs de types de tâches relatifs au calcul algébrique, nous avons indiqué la fréquence d'apparition des tâches de chaque famille de tâches dans les parcours *a priori* en fonction du mode de justification de l'élève (cf. image 7.5 [9]). Au cours d'un parcours d'apprentissage, l'élève est donc amené à résoudre plusieurs tâches d'une même famille de tâches.

Mode technologico-théorique	Familles de tâches pouvant être résolues avec une technologie ancienne	Familles de tâches pivots pour négocier la rupture	Familles de tâches cibles : mobilisation de la technologie visée	Familles de tâches cibles en restant dans l'OMR travaillée	Familles de tâches cibles avec convocation de praxéologies d'autres OMR
Ancien non idoine	10%	20%	50%	20%	
Incomplet		15%	50%	20%	15%
Idoine			40%	40%	20%

Image 7.5 – Modèle simplifié de parcours en fonction du mode de justification de l'élève en algèbre (Jolivet et al., À paraître)

En algèbre, il est possible de générer facilement des tâches différentes issues de la

9. L'article dont est tiré ce tableau utilise la dénomination « mode technologico-théorique » (cf. section 2.2.1) pour le mode de justification de l'élève. De même il utilise la notion d'OMR (cf. section 2.1.3) lorsque nous parlons de praxéologie régionale dans cette thèse.

même famille de tâches en faisant notamment varier les valeurs des coefficients des expressions algébriques en jeu. En géométrie, pour les générateurs de types de tâches relatifs aux constructions géométriques, nous adoptons une approche différente. En effet, malgré leur variabilité, proposer plusieurs tâches d'une même famille de tâches telles que nous les avons définies en géométrie serait trop redondant (seule la position du côté donné et certaines mesures d'angle varient). Ainsi, si l'élève réussit une tâche, nous ne lui proposons pas d'autres tâches de la même famille de tâches dans le même parcours. Dans le cas où il ne réussit pas, il est par contre envisageable de lui proposer de nouveau une tâche de cette famille de tâches lorsqu'il a progressé dans le parcours.

Pour définir des parcours d'apprentissage, nous nous appuyons sur le modèle du savoir ainsi que sur le modèle de tâche et en particulier les variables de type de tâches et les variables de tâche (de portée et de complexité). La structuration du MPR et les informations disponibles dans l'ontologie (que nous verrons dans la section 7.5) permettent de créer des parcours d'apprentissage selon différents objectifs d'apprentissage. Concernant les triangles par exemple, nous construisons des parcours organisés autour d'un type de triangles (parcours de plusieurs familles de tâches à l'intérieur d'un type de tâches du générateur « construire un triangle », VT1 étant fixée) ou autour d'une technologie particulière comme la somme des mesures des angles dans un triangle (parcours transversal sur plusieurs types de triangles). Ces parcours étant définis, il est possible d'en créer d'autres à partir de ceux-ci en jouant sur différents critères, en particulier sur la variable Vt_C1 (nombre minimum de propriétés à mobiliser) et le niveau scolaire. Ainsi, il est possible de ne sélectionner que des familles de tâches associées à un niveau scolaire donné (par exemple niveau 5^{e} ou « 5^{e} et moins ») ou mettant en jeu un certain nombre de propriétés lié aux pas de raisonnement de l'argumentation heuristique à développer.

7.4.2 Exemple de parcours pour l'entrée dans la géométrie théorique en 5^{e}

Des exemples de parcours pour l'entrée dans le raisonnement déductif en 5^{e} via la mobilisation de la propriété de la somme des mesures des angles dans un triangle isocèle sont présentés dans le tableau 7.2 [10], ils s'appuient sur les familles de tâches décrites dans le tableau 7.3. Notons que ce ne sont pas les seuls parcours possibles.

10. Une seule famille de tâches est proposée à l'élève parmi toutes celles auxquelles nous avons attribué le même numéro suivi de la mention « alea ».

Mode de justification	FT1	FT2	FT3	FT4	FT5	FT6	FT7	FT8
Mode de justification ancien	1	2	3	4				
Mode de justification incomplet		1	2	3	4 alea	4 alea	5	
Mode de justification idoine			1	2	3 alea	3 alea	4	5

TABLE 7.2 – Exemple de parcours pour l'entrée dans le raisonnement déductif en 5e via la mobilisation de la propriété de la somme des mesures des angles dans un triangle isocèle

FT	Nature du triangle à construire (VT1)	Données (VT2)	Outils à disposition (Vt_P2)	Nombre minimum de propriétés à mobiliser (Vt_C1)	Registre de représentation de l'énoncé et désignation du triangle (Vt_C2)	Niveau scolaire en 2020
FT1	triangle scalène	2 angles + 1 côté entre les deux	constructeur d'angle et report de longueur	0	énoncé textuel, pas de désignation particulière	6e
FT2	triangle isocèle	côté base + 1 angle à la base	constructeur d'angle	1	énoncé textuel, « triangle isocèle »	6e
FT3	triangle équilatéral	1 côté	constructeur d'angle	1	énoncé textuel, « triangle équilatéral »	5e
FT4	triangle isocèle	côté base + angle au sommet	constructeur d'angle	2	énoncé textuel, « triangle isocèle »	5e
FT5	triangle isocèle rectangle	hypoténuse	constructeur d'angle	3	énoncé textuel, « triangle isocèle rectangle »	5e
FT6	triangle isocèle rectangle	1 côté de l'angle droit	constructeur d'angle et perpendiculaire	3	énoncé textuel, « triangle isocèle rectangle »	5e
FT7	triangle équilatéral	base + angle au sommet de 60°	report de longueur	4	énoncé textuel, « triangle isocèle »	5e

FT8	triangle isocèle rectangle	hypoténuse	constructeur d'angle	4	énoncé textuel, « triangle rectangle » + schéma codé avec 2 longueurs égales	5e

Table 7.3 – Exemples de familles de tâches pour l'entrée dans le raisonnement déductif en 5e via la mobilisation de la propriété de la somme des mesures des angles dans un triangle isocèle

La famille de tâches qui correspond au cœur de cible de ce parcours d'apprentissage est la famille FT4. Quel que soit le mode de justification de l'élève, cette famille de tâches fait donc partie du parcours proposé. Cependant, si son mode de justification correspond à un mode ancien, l'élève commence par résoudre des familles de tâches attendues en 6e et ne nécessitant pas la mobilisation de propriétés puis ne nécessitant que l'application directe d'une définition ou propriété caractéristique du triangle en jeu à partir d'un jeu sur les variables comme nous l'avons vu dans la section 3.5.3. Pour un élève dont le mode de justification correspond au mode CO1 ou CO2, les familles de tâches du parcours commencent directement par des tâches dont la résolution nécessite la mobilisation d'une propriété. L'élève est ensuite amené à mobiliser de plus en plus de propriétés selon la figure à construire, les outils de construction disponibles dans le milieu et les valeurs des variables de complexité, jusqu'à la tâche de construction d'un triangle isocèle avec un angle de 60° que nous avons déjà étudiée. Aux élèves dont le mode de justification correspond au mode CO2, une dernière famille de tâche est proposée pour mettre en jeu une argumentation heuristique du même type en jouant sur le registre de représentation de l'énoncé demandant une adaptation des connaissances supplémentaire.

Ainsi, la résolution d'une tâche de la première famille de tâches ne demande la mobilisation d'aucune propriété, il s'agit simplement de construire un triangle à partir de deux de ses angles et d'un côté (entre les deux angles) déjà tracé. Ce parcours d'apprentissage étant à destination d'élèves de 5e, les connaissances nécessaires à la résolution de cette famille de tâches, et la suivante, attendues en 6e, sont anciennes.

La deuxième famille de tâches ressemble à la première mais le triangle à construire est maintenant isocèle et seul un des deux angles sur ce côté est donné. Comme pour la première famille de tâches, un constructeur d'angle est présent dans le milieu. Pour construire le triangle, il faut donc mobiliser une propriété (dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux). L'argumentation heuristique à mettre en œuvre est très simple.

La troisième famille de tâches a cette fois pour but la construction d'un triangle équilatéral. Aucun angle n'est donné mais le constructeur d'angle présent dans le milieu incite l'élève à mobiliser des propriétés concernant les angles d'un tel triangle. Une fois la propriété appliquée (dans un triangle équilatéral, les trois angles mesurent 60°), la construction est identique aux deux premières constructions. Cette fois encore, l'argumentation heuristique ne comporte qu'un seul îlot déductif mais la propriété mobilisée est un attendu de la classe de 5e.

La quatrième famille de tâches correspond au cœur de cible de ce parcours dont l'objectif est l'entrée dans la géométrie théorie via la mobilisation de la propriété de la somme des angles dans un triangle isocèle. Cette famille de tâche revient à la construction d'un triangle isocèle. L'angle donné n'est plus un angle à la base mais l'angle au sommet. Le constructeur d'angle est toujours présent dans le milieu, incitant un travail sur les angles, mais cette fois, il ne suffit plus d'appliquer une seule propriété pour pouvoir construire la figure. L'argumentation heuristique mobilise deux propriétés concernant les angles d'un triangle, l'une particulière aux triangles isocèles (dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux), l'autre applicable à tous les triangles (la somme des mesures des angles dans un triangle est égale à 180°).

La résolution d'une tâche de la cinquième famille de tâches nécessite la mobilisation d'une propriété supplémentaire concernant les triangles rectangles. Comme dans la famille de tâches FT3, seul un côté du triangle est donné et le seul outil de construction présent dans le milieu est le constructeur d'angle. L'argumentation heuristique doit donc permettre de déterminer la mesure des angles du triangle. Il faut donc mobiliser une propriété concernant les triangles rectangles (un triangle rectangle a un angle droit) en plus des deux autres précédemment citées pour pouvoir construire la figure. En plus de la mobilisation individuelle de ces propriétés, avec cette famille de tâches, l'élève commence à organiser son raisonnement qui comporte maintenant trois pas.

La sixième famille de tâches est du même ordre et demande la mobilisation des mêmes propriétés bien que le côté du triangle déjà tracé soit différent. C'est pourquoi cette famille de tâches est proposée en alternance avec la cinquième famille de tâches.

La septième famille de tâches est une famille de tâches que nous avons déjà étudiée, notamment dans la section 7.3.2 qui présente la technique et la technologie visées. Cette famille de tâches présente une rupture avec les précédentes. En effet, ici, seul le report de longueur est proposé dans le milieu alors que l'énoncé donne une information sur un des angles du triangle à construire. Ainsi, l'argumentation heuristique doit partir de données et de propriétés sur les angles d'un triangle (et en particulier isocèle) et permettre de déterminer les longueurs des côtés du triangle. L'argumentation heuristique présente ici quatre pas et amène à préciser la nature du triangle présenté comme isocèle dans l'énoncé.

La huitième famille de tâches est construite sur le même modèle mais propose de mêler des données issues d'un énoncé textuel à des données codées sur un schéma. Le constructeur d'angle fait de nouveau partie des outils de construction à disposition dans le milieu ce qui incite de nouveau un travail sur les angles. La difficulté réside dans l'utilisation de la réciproque de la définition du triangle isocèle qui porte sur les longueurs de côté (un triangle qui a deux côtés égaux est un triangle isocèle) pour ensuite mobiliser une propriété relative aux angles (dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux). À noter qu'on retrouve ce même raisonnement mais sur le triangle équilatéral dans la résolution de la famille de tâches précédente.

Ainsi, grâce à la prise en compte du mode de justification de l'élève pour concevoir les parcours d'apprentissage et à l'apport d'aides procédurales ou constructives selon ses besoins (cf. chapitre 8), nous nous situons dans la ZPD de l'élève.

7.4.3 Parcours diagnostiques

En plus des parcours d'apprentissage, nous concevons des parcours diagnostiques réalisés par l'élève au début de son apprentissage dans les différents domaines mathématiques pris en compte dans l'EIAH et selon les différentes praxéologies locales définies. Nous identifions en fait deux types de diagnostics :

— un diagnostic local des modes de justification de l'élève, déjà évoqué dans la section 7.3.1 qui a lieu à chaque fois que l'élève résout une tâche et qui permet de mettre le quintuplet de ses modes de justification à jour selon les praxéologies locales qui ont été mises en jeu dans la résolution de la tâche ;

— un diagnostic initial qui prend donc la forme d'un parcours dont les tâches sont choisies pour couvrir un domaine, un secteur ou un thème d'étude (on peut définir un parcours sur tout un domaine mathématique ou seulement sur une ou plusieurs praxéologie(s) de ce domaine) et qui permet de déterminer les modes de justification initiaux de l'élève afin de lui proposer des premiers parcours d'apprentissage adaptés, dans sa ZPD, partant de ses rapports personnels initiaux aux objets étudiées pour l'amener à développer les rapports attendus dans l'institution.

Un parcours diagnostique possible sur la praxéologie locale de construction pour des élèves entrant en 5e, qui correspond donc à des attendus du niveau 6e, est présenté dans le tableau 7.4.

FT	Nature du triangle à construire (VT1)	Données (VT2)	Outils à disposition (Vt_P2)	Nombre minimum de propriétés à mobiliser (Vt_C1)	Registre de représentation de l'énoncé et désignation du triangle (Vt_C2)	Niveau scolaire en 2020
FT1	triangle scalène	1 côté + 2 angles sur ce côté	constructeur d'angle et report de longueur	0	énoncé textuel, pas de désignation particulière	6e
FT2	triangle isocèle	côté base + 1 angle à la base	constructeur d'angle et report de longueur	1	énoncé textuel, « triangle isocèle »	6e
FT3	triangle équilatéral	1 côté	constructeur d'angle et report de longueur	1	énoncé textuel, « triangle équilatéral »	6e
FT4	triangle isocèle rectangle	1 côté de l'angle droit	constructeur d'angle, report de longueur et perpendiculaire	2	énoncé textuel, « triangle isocèle rectangle »	6e

TABLE 7.4 – Exemple d'un parcours diagnostique sur la praxéologie locale de construction à l'entrée en 5e

Concernant la variable Vt_P1, il s'agit toujours du côté donné dans VT2. Il n'y a pas d'éléments extérieurs à la construction (Vt_C3). Les variables de tâches liées à la portée des techniques ne jouent pas le même rôle dans la conception des parcours d'apprentissage ou des parcours diagnostiques. En effet, les tâches de ces derniers laissent plus de liberté à l'élève dans le choix des techniques de résolution afin de déterminer son mode de justification dominant avant l'apprentissage visé qui pourra amener à faire évoluer ses techniques si elles ne sont pas idoines.

Les familles de tâches proposées dans le parcours diagnostique à l'entrée en 5e mettent en jeu les définitions du triangle isocèle (FT4), équilatéral (FT3) et rectangle (FT4) ainsi qu'une propriété caractéristique des angles à la base du triangle isocèle (FT2) qui sont au programme de 6e. La première famille de tâches correspond à la construction d'un triangle, deux angles et le côté entre les deux étant donnés, qui sera beaucoup utilisée par la suite en lien avec la propriété de la somme des angles d'un triangle.

Les modes de justification de l'élève calculés à la suite de ce parcours diagnostique permettent notamment de choisir le parcours pour l'entrée dans le raisonnement géométrique (cf. section 7.4.2) le plus adapté aux connaissances et difficultés de l'élève.

7.5 Ontologie

Afin de pouvoir exploiter informatiquement les différents modèles didactiques que nous avons présentés, il faut pouvoir les représenter de manière structurée, les expliciter et les réifier dans un seul objet : une ontologie. Dans le domaine des EIAH, « *an ontology defines a set of representational primitives with which to model a domain of knowledge or discourse. The representational primitives are typically classes (or sets), attributes (or properties), and relationships (or relations among class members)* » [11] (Gruber, 2009).

L'ontologie, utilisée à la fois en algèbre et en géométrie, est fondée sur les modèles didactiques que nous avons développés dans ce chapitre et sert de pivot pour la communication entre les différents partenaires du projet *MindMath* (cf. section 1.1.1). Sa conception est donc issue d'une collaboration entre chercheurs en didactique et en informatique. Elle a été réalisée en majorité par Sébastien Jolivet post-doctorant au LDAR en 2019-2020 du côté didactique des mathématiques (Jolivet et al., À paraître), et par Amel Yessad, chercheuse au LIP6 du côté informatique. Nous en présentons les principaux éléments dans cette section.

L'ontologie est donc composée du modèle didactique du savoir (cf. section 7.1) et du modèle didactique de l'apprenant (cf. section 7.3). Le modèle didactique du savoir permet de construire le modèle didactique des tâches (cf. section 7.2). À leur tour, les modèles des tâches et de l'apprenant permettent de construire le modèle didactique des parcours d'apprentissage (cf. section 7.4) et, avec le modèle du savoir, le modèle didactique des rétroactions que nous verrons dans le chapitre 8.

L'ontologie est donc d'abord structurée en niveaux praxéologiques globaux, régionaux et locaux à partir des MPR construits pour chacun des domaines (cf. chapitre

11. Traduction issue de la thèse de Jolivet : « une ontologie définit un ensemble de représentations élémentaires avec lesquelles modéliser un domaine de la connaissance ou du discours. Les représentations élémentaires sont généralement des classes (ou ensembles), des attributs (ou propriétés) et des relations (ou liens entre les instances des classes) » (Jolivet, 2018, p. 44).

4 pour celui de la géométrie). La déclaration de ces niveaux prend en compte le fait que certaines praxéologies (régionales ou locales) sont mobilisées par d'autres praxéologies (régionales ou locales) comme nous l'avons vu dans la section 7.1.

Les praxéologies locales sont ensuite décomposées en générateurs de types de tâches à partir des types de tâches définis dans le MPR. Les variables de types de tâches et de tâches de ces générateurs sont déclarées dans l'ontologie ainsi que l'ensemble des valeurs qu'elles peuvent prendre pour pouvoir définir des types de tâches (associés aux variables de types de tâches) et des familles de tâches (associées aux variables de tâches). À ces types et familles de tâches, sont associées des techniques. Pour la praxéologie locale de construction de figures en géométrie, ces techniques sont des applications de la technique experte assez générale que nous avons présentée dans la section 4.2.2. De plus, comme nous l'avons vu dans la section 2.1.3, une technique est décrite par une succession de types de tâches potentiellement issus d'autres générateurs. Déclarer toutes ces relations dans l'ontologie permet de faire des retours à l'élève non seulement sur ce qui est en jeu dans le générateur de types de tâches sur lequel il travaille mais aussi d'autres générateurs selon les types de tâches mobilisés dans les techniques que nous avons identifiées (idoines ou erronées). Une technique est justifiée par une technologie. Dans l'ontologie, nous définissons donc les technologies associées aux praxéologies locales ainsi que les théories associées aux praxéologies régionales en nous appuyant sur les technologies et théories définies dans les MPR.

Dans l'ontologie, nous prenons également en compte l'élève. Nous définissons donc les modes de justification de l'élève pour toutes les praxéologies locales implémentées, ainsi que des technologies erronées associées, identifiées *a priori* à partir d'un travail didactique comme nous l'avons vu dans la section 7.3. Afin de repérer l'emploi de ces technologies erronées, nous définissons des traces associées à des catégories d'erreurs à identifier dans les productions des élèves à partir desquelles nous faisons des hypothèses sur la ou les technologie(s) erronée(s) employée(s). Les modes de justification de l'élève nous permettent de prendre en compte des erreurs liées au savoir en jeu mais aussi à des savoirs antérieurs mal ou non maîtrisés par l'élève.

Enfin, pour la conception des parcours, les types de tâches, techniques et technologies sont liés aux institutions dans lesquelles ils sont conformes. Ainsi, si le professeur utilisant l'EIAH souhaite créer un parcours lié à la construction de triangles en 5^{e}, le logiciel peut automatiquement sélectionner des types de tâches adaptés mais aussi comparer la réponse de l'élève aux tâches données à la technique attendue à ce niveau scolaire (qui pourra être différente en 6^{e} ou en 4^{e} par exemple). Le logiciel s'appuie également sur ces relations pour envoyer des rétroactions à l'élève en fonction de ce qui est attendu dans l'institution dans laquelle il se trouve.

L'ontologie est donc un outil très puissant pour la conception d'EIAH. Là où seul le calcul du mode de justification des élèves était automatisé dans le logiciel PÉPITE, l'ontologie développée dans le cadre du projet *MindMath* permet une automatisation des processus de construction de parcours, de mise à jour du mode de justification de l'élève au fur et à mesure sur les différentes praxéologies locales, et de rétroactions faites aux élèves.

7.6 Conclusion concernant les modèles didactiques pour la conception d'un EIAH

Dans ce chapitre, à partir des fondements didactiques développés dans la partie I, nous avons présenté les modèles didactiques de tâches, de l'apprenant et des parcours d'apprentissage qui sont implémentés dans l'EIAH MINDMATH. Nous faisons l'hypothèse qu'une méthode de conception ainsi que les modèles didactiques tels que nous les avons présentés peuvent être réutilisés pour la conception d'autres EIAH prenant en compte des fondements didactiques.

Dans le cadre de l'EIAH MINDMATH, ces modèles servent également d'appui à des algorithmes de *machine learning* (cf. section 1.1.1) qui apportent une autre dimension, que nous n'explorons pas ici, au projet. L'analyse des interactions entre nos modèles didactiques et ces algorithmes constituent une des perspectives de ce travail de thèse.

De même, le travail collaboratif entre didacticiens des mathématiques et informaticiens réalisé pour la conception et l'implémentation de ces modèles pourrait être intéressant à analyser et formaliser pour améliorer les communications entre ces deux communautés de recherche.

Dans le chapitre suivant, nous nous intéressons au modèle didactique des rétroactions que nous avons commencé à concevoir. Ce modèle s'appuie sur des travaux que nous n'avons pas encore présentés, en particulier dans le domaine des EIAH, c'est pourquoi il occupe un chapitre à part.