

---

# Modélisation des comportements non linéaires non classiques

La loi de Hooke en élasticité linéaire établit que la déformation  $\epsilon$  subie par un corps est proportionnelle à la contrainte  $\sigma$  qui lui est appliquée :

$$\epsilon = M\sigma, \tag{II.1.1}$$

où le coefficient de proportionnalité est un module que nous appellerons  $M$ .

En se limitant à un problème unidimensionnel, toutes les quantités intervenant dans cette égalité peuvent être considérées comme scalaires. Si  $M$  est une constante intrinsèque du matériau, indépendante du niveau de sollicitation  $\sigma$ , nous sommes alors dans le domaine de l'élasticité linéaire et ce module correspond au module d'Young noté  $E$ . En revanche, si ce module est fonction de la contrainte appliquée, la stricte proportionnalité entre contrainte et déformation disparaît et nous entrons dans le domaine de l'élasticité non linéaire.

Depuis plusieurs années, il a été montré qu'une fissure dans un matériau pouvait être considérée comme l'inclusion d'une partie "molle" dans une matrice dure et produisait une réponse non linéaire importante à toute sollicitation [99]. L'analogie a donc pu être faite entre le comportement non linéaire d'une fissure dans un matériau et le comportement non linéaire de grains et de leur jonction dans un ensemble granulaire tels que les bétons ou les roches [100]. Ce type de nonlinéarité caractérisé par l'existence d'une boucle d'hystérésis dans la relation contrainte-déformation rend l'utilisation de la théorie classique inadéquate et impose le développement de nouvelles approches pour traiter au mieux les phénomènes non linéaires hystérétiques [1, 4, 101] qui définissent un comportement non linéaire non classique.

La description théorique de tels phénomènes acoustiques a été approfondie [7, 99] en parallèle au développement de méthodes expérimentales dans le but d'analyser les comportements de ces matériaux. Cette théorie montre que l'évolution non linéaire des ondes planes longitudinales dans un milieu micro-inhomogène ne peut pas être correctement décrite par l'équation d'onde simple même en y ajoutant les termes non linéaires d'ordre supérieur [102, 103]. Il est donc nécessaire de prendre en compte un comportement hys-

---

térétique et un état mémoire, typique des matériaux micro-inhomogènes, dans la relation contrainte-déformation [104].

Au cours de ce chapitre, le comportement hystérétique lié à une micro-inhomogénéité sera présenté. La modélisation de la distribution de zones endommagées dans un matériau sera ensuite développée par l'utilisation de l'espace de Preisach-Mayergoysz et d'un modèle multi-échelle développé par Van Den Abeele *et al.* [105]. Enfin, l'adaptation de l'algorithme pseudo-spectral à des comportements non linéaires non classiques sera décrite.

## 1.1 Comportement hystérétique lié à une micro - inhomogénéité

Les observations fondamentales qui ont pu être réalisées pour dénoter la nonlinéarité dans les solides viennent d'essais quasi-statiques permettant de déterminer la courbe contrainte-déformation. Ils sont effectués à l'aide d'une configuration expérimentale basée sur l'application d'une contrainte axiale accompagnée d'une mesure de la déformation dans la même direction [106, 107]. Le matériau est ainsi soumis à un certain protocole de contrainte durant lequel la courbe contrainte-déformation est tracée (figure 22).

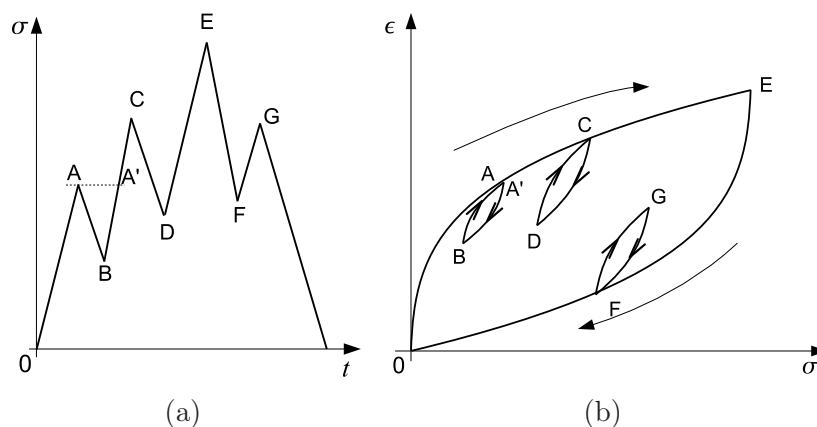


Figure 22 – Représentation (a) d'un protocole de contrainte appliqué à un matériau fissuré impliquant (b) une courbe de contrainte-déformation avec une boucle d'hystérésis.

Durant cette expérience, une forte nonlinéarité dans la relation contrainte-déformation a été mise en évidence. Cela se traduit par l'apparition de boucles d'hystérésis multi-échelle qui témoignent d'un comportement sensible à l'historique de la contrainte appliquée, phénomène qui n'est pas observé sur des échantillons non fissurés ou non granulaire. Pour dénoter le comportement particulier de ce genre de matériaux, le terme de comportement "non linéaire non classique" est utilisé en opposition à la nonlinéarité classique issue du

---

développement aux ordres supérieurs de la relation contrainte-déformation (partie I). De plus, à chaque fois que le protocole impose un changement de sens à la contrainte appliquée, le matériau exhibe une mémoire ("end point memory") matérialisée par les points A, C et F sur la figure 22, et montrant ainsi une capacité à se souvenir du dernier état de déformation maximale [2, 99]. Ces expériences quasi-statiques confirment ce comportement non linéaire particulier de certains matériaux tels que les roches, les bétons et les matériaux endommagés.

Ces manifestations ont d'importantes conséquences sur le module élastique du matériau. En d'autres termes, les essais statiques montrent que la valeur du module est bien dépendante de l'historique de la contrainte, de la relation contrainte-déformation et des changements discontinus.

## 1.2 Modélisation de la distribution : l'espace de Preisach-Mayergoysz

Le comportement non linéaire non classique des roches et de certains matériaux endommagés engendre des restrictions de modélisation par rapport à la théorie classique. L'hystérésis observé sur ces types d'échantillons lors d'essais quasi-statiques rend difficile l'expression analytique de telles déformations. C'est pourquoi, en se basant sur les travaux de Franz Preisach [108] et Isaac Mayergoysz [109], Robert Guyer et Katherine McCall [7, 99, 110] et Jordi Ortín [111] ont développé un modèle théorique afin de décrire au mieux les observations liées au comportement non linéaire non classique de certains matériaux.

L'hypothèse principale de ce modèle porte sur le fait que le comportement macroscopique des matériaux non linéaires est essentiellement dû à un grand nombre d'unités hystérétiques au sein du matériau, appelées Unités Hystérétiques Élémentaires UHE (HEU pour Hysteretic Elementary Unit). Dans un premier temps, ces unités sont caractérisées de manière individuelle. Ensuite, on évalue l'influence d'un ensemble d'unités sur le comportement du matériau à l'échelle macroscopique. Ce procédé, présenté dans la partie II.1.3, est appelé modélisation multi-échelle [105]. Ces unités sont des éléments constitutifs du matériau représentant des discontinuités qui peuvent être soit ouvertes soit fermées. Ainsi, elles sont caractérisées par des déformations (ou des comportements élastiques) qui peuvent changer de manière hystérétique entre deux configurations pour deux pressions caractéristiques d'ouverture  $P_o$  et de fermeture  $P_f$  (figure 23). La réponse élastique de ces unités est alors définie comme dépendante de l'histoire de la pression à laquelle le matériau est soumis (module élastique  $K_1$  pour la configuration fermée et  $K_2$  pour la configuration ouverte). Une description rigoureuse du comportement élastique du matériau ne peut être définie sans une connaissance préalable de l'historique de la pression appliquée.

---

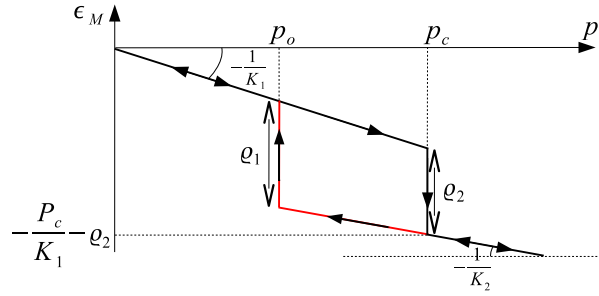


Figure 23 – Comportement hystérétique d'une UHE avec deux états élastiques. Un état correspond à l'état fermé (module élastique  $K_1$ ) et l'autre à l'état ouvert (module élastique  $K_2$ ) avec pour chacun une pression caractéristique associée  $P_o$  et  $P_f$ .

Le grand nombre d'UHE que l'on peut trouver dans un matériau exige une autre simplification. En considérant que toutes les UHE ont les mêmes modules élastiques pour l'état fermé  $K_1$  et pour l'état ouvert  $K_2$ , c'est-à-dire que les déformations équivalentes aux états d'ouverture ou de fermeture sont identiques pour tous les éléments, les UHE peuvent alors être différenciées uniquement par les paires de pressions  $(P_f, P_o)$  auxquelles elles correspondent. Le suivi de l'évolution des UHE, c'est-à-dire le dénombrement des UHE fermées et ouvertes, peut donc s'effectuer dans une représentation d'un espace appelé espace de Preisach-Mayergoysz (figure 25) [1, 99]. Dans cet espace, un point est caractérisé par le couple  $(P_f, P_o)$  correspondant. Il est donc possible de déterminer le comportement hystérétique total du matériau en connaissant la densité et la fonction de répartition des couples  $(P_f, P_o)$  dans l'espace de Preisach-Mayergoysz notée  $\rho_{PM}(P_f, P_o)$ . Cette distribution des UHE dans l'espace de Preisach-Mayergoysz peut être trouvée en appliquant un problème inverse [7, 112]. Ce principe permet d'extraire les informations nécessaires pour la construction de l'espace PM en appliquant un protocole de contraintes particulier, balayant tout l'espace, et en mesurant les déformations induites.

Par exemple, si toutes les UHE sont situées sur la diagonale, c'est-à-dire que pour tous les couples  $P_f = P_o$ , alors le matériau n'a pas de comportement hystérétique. Dans ce cas, le modèle peut être réduit à la théorie classique d'élasticité non linéaire décrite par Landau [113]. Pour comprendre l'utilisation de l'espace de Preisach-Mayergoysz, un protocole de pression peut être étudié (figure 24) et le suivi du comportement des unités élémentaires détaillé (figure 25).

Pendant la première phase du protocole de pression, c'est-à-dire du point 0 au point A, les UHE situées dans le triangle hachuré double incliné sont fermées. Une diminution de la pression (A à B) a pour conséquence d'ouvrir les UHE situées dans le triangle hachuré droit. Lorsque la pression augmente de nouveau jusqu'au point C (figure 24), les UHE situées dans le triangle hachuré double incliné se ferment et ainsi de suite.

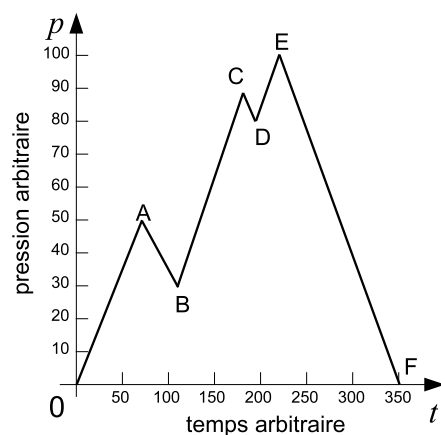


Figure 24 – Protocole de pression appliqué à un matériau dont les caractéristiques hystériques sont modélisées sur l'espace de Preisach-Mayergoysz présenté sur la figure 25. À l'état initial 0, toutes les UHE sont ouvertes.

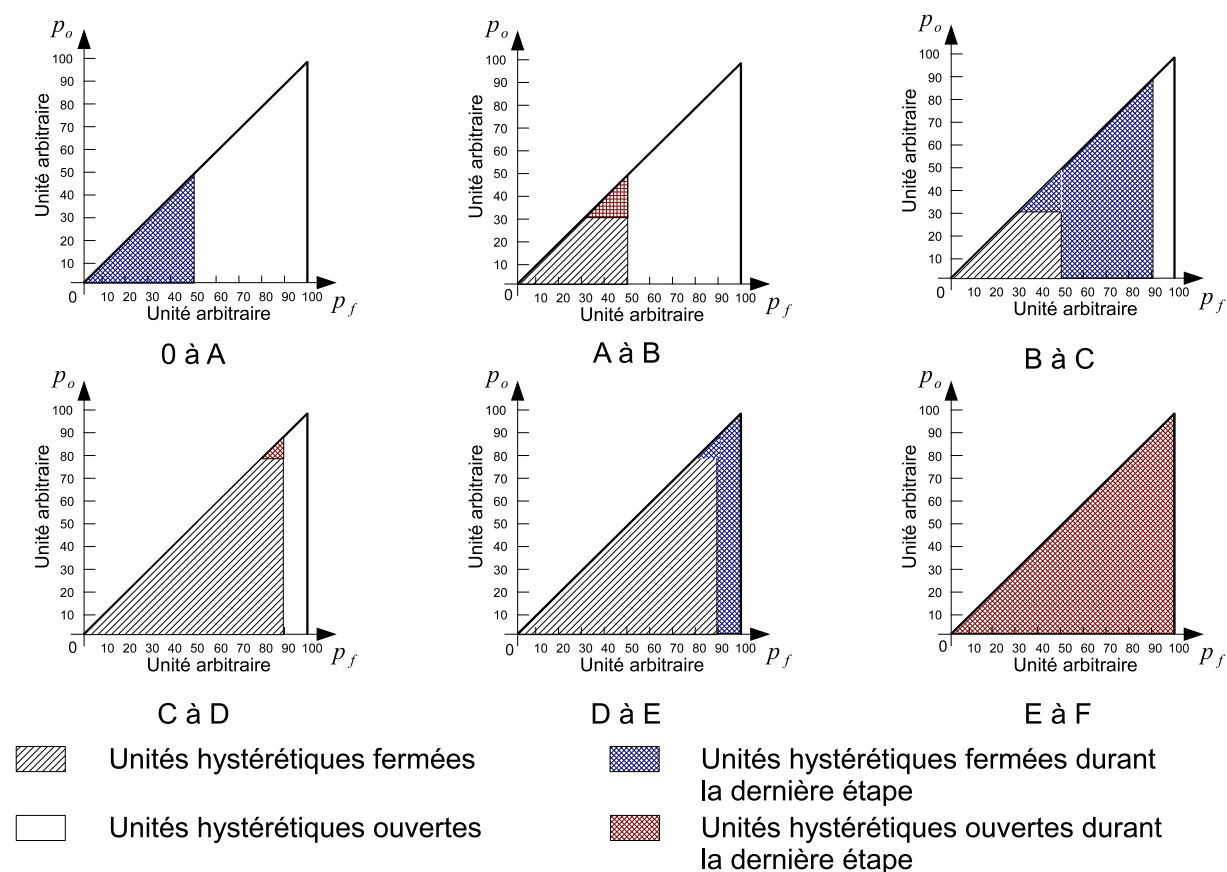


Figure 25 – Évolution de l'espace de Preisach-Mayergoysz associé à un matériau au comportement hystérique suivant le protocole de pression présenté sur la figure 24.

La construction d'un modèle théorique capable de reproduire le comportement non linéaire des matériaux est liée à la connaissance de la fonction de distribution des UHE

dans l'espace de Preisach-Mayergoysz.

On considère un problème uni-dimensionnel et dont le comportement hystérétique est défini par les changements entre deux longueurs distinctes pour un état fermé et ouvert (figure 26). Pour une chaîne constituée de  $N_0$  UHE de même longueur à l'ouverture et à la fermeture, la longueur  $L(p)$  de l'échantillon à la pression  $p$  peut alors être notée [114]

$$L(p) = N_0 \left[ l_o f_c(p) + l_f (1 - f_c(p)) \right], \quad (\text{II.1.2})$$

où  $f_c(p)$  est la fonction de répartition des UHE se trouvant à l'état fermé à la pression  $p$  dans l'espace de Preisach-Mayergoysz,  $l_o$  est la longueur de l'UHE lorsqu'elle est ouverte et  $l_f$  la longueur de l'UHE lorsqu'elle est fermée. En d'autres termes, il paraît évident que cette fonction de répartition dépend directement du protocole de pression utilisé. Ainsi la relation entre la longueur totale et la fonction de répartition est liée à celle entre la longueur et la pression. C'est l'équation de l'état statique : à  $p = 0$ , on a  $f_c = 0$  et donc  $L(0) = N_0 l_o$ , si on suppose toutes les UHE ouvertes.

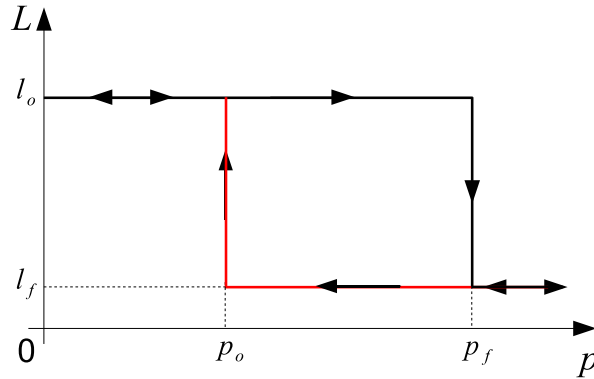


Figure 26 – *Modèle hystérétique lié à une UHE avec un changement de longueur dépendant du sens de variation de la pression ( $l_f$  longueur lorsque l'UHE est fermée,  $l_o$  longueur lorsque l'UHE est ouverte).*

Les matériaux ayant un comportement non linéaire non classique sont caractérisés par une relation contrainte-déformation hystérétique. Il est donc nécessaire de définir le module  $M$  présent dans cette relation en respectant les propriétés du matériau. Le module statique correspondant à des essais quasi-statiques est défini comme suit :

1. si la pression augmente  $p \rightarrow p + \Delta p$ ,

$$\frac{1}{M} = -\frac{1}{L(p)} \frac{L(p + \Delta p) - L(p)}{\Delta p}, \quad (\text{II.1.3})$$

où  $L(p)$  est la longueur correspondant à la pression acoustique instantanée  $p$ .

2. si la pression diminue  $p \rightarrow p - \Delta p$ ,

$$\frac{1}{M} = -\frac{1}{L(p)} \frac{L(p) - L(p - \Delta p)}{-\Delta p}. \quad (\text{II.1.4})$$

En combinant alors les expressions du module (éq. II.1.3 et II.1.4) avec celle donnant la longueur de l'échantillon (éq. II.1.2), lorsque la pression augmente, on obtient :

$$\frac{1}{M} = \frac{\Delta\epsilon}{\Delta p} \left[ f_c(p + \Delta p) - \rho_{PM}(P_f, P_o)(p) \right], \quad (\text{II.1.5})$$

et lorsque la pression diminue :

$$\frac{1}{M} = \frac{\Delta\epsilon}{\Delta p} \left[ \rho_{PM}(P_f, P_o)(p) - f_c(p - \Delta p) \right], \quad (\text{II.1.6})$$

où  $\Delta\epsilon$  est la déformation infinitésimale subie par le matériau pour une variation de pression  $\Delta p$  qui correspond à la différence de longueur  $L(p + \Delta p) - L(p)$ .

Lorsque l'augmentation (respectivement la diminution) de pression est suffisamment faible, c'est-à-dire que  $\Delta p$  est petit, la mesure du module  $M$  est équivalente à une mesure de la densité  $\rho_{PM}(P_f, P_o)$  dans une bande étroite de l'espace de Preisach-Mayergoysz de largeur  $\Delta p$  correspondant à l'intégrale sur une ligne verticale.

Ayant déterminé la distribution des UHE dans l'espace de Preisach-Mayergoysz, il est maintenant intéressant d'étudier la modélisation multi-échelle d'un milieu endommagé.

### 1.3 Modélisation multi-échelle d'un milieu à nonlinéarité hystérétique

Plusieurs équipes de recherche ont développé des modèles permettant de décrire les effets non linéaires hystérétiques observés durant la propagation d'une onde dans des milieux micro-inhomogènes [2, 16, 99, 101, 115]. Pour supprimer l'inconvénient de traiter individuellement chaque inhomogénéité (micro-fissures, jointures de grains), ce qui demande un temps de modélisation très important, un modèle phénoménologique entre les phénomènes mécaniques microscopiques et le comportement macroscopique a été introduit. À ce niveau, que l'on peut définir de mesoscopique (avec des longueurs caractéristiques inférieures aux longueurs d'onde), chaque élément matériel peut être considéré comme un ensemble d'opérateurs ou d'unités hystérétiques élémentaires UHE (HEU pour Hysteretic Elementary Unit).

Avec un tel concept appelé modélisation multi-échelle [105], un échantillon macroscopique est constitué d'un nombre fini de cellules mesoscopiques (figure 27). Chaque cellule est constituée d'un nombre important d'unités microscopiques qui peuvent être assimilées à des grains individuels, à des contacts entre grains, à des zones d'interface ou encore à des micro-fissures.

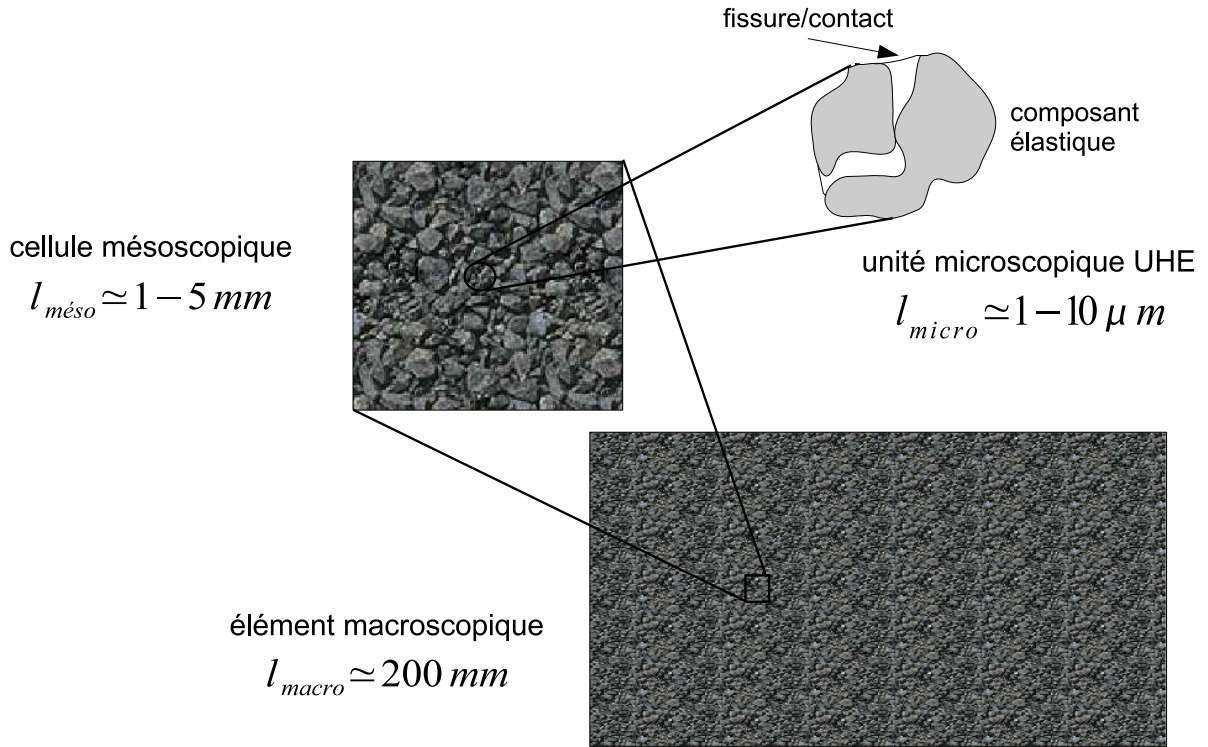


Figure 27 – Représentation de la modélisation multi-échelle avec la longueur caractéristique pour chaque échelle.

La longueur d'onde caractéristique des expériences réalisées sur l'échantillon fissuré est  $\lambda = c/f = 5000/1 \cdot 10^6 = 5mm$ . Il est donc possible d'accéder aux cellules mesoscopiques : la modélisation multi-échelle de ce type de comportement est alors adaptée à la simulation des expériences réalisées.

### 1.3.1 De l'échelle microscopique à l'échelle mesoscopique

Au niveau microscopique, la déformation d'une unité individuelle est modélisée par une combinaison de la relation d'état non linéaire "classique" avec une relation non linéaire "non classique" due aux effets hystérétiques, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'unicité dans la relation contrainte-déformation (figure 28) :  $\epsilon = \epsilon_C + \epsilon_H$ . La composante de déformation "classique"  $\epsilon_C$  peut être liée à la relation non linéaire classique reliant la contrainte  $\sigma$  à la déformation  $\epsilon$  utilisée pour décrire la nonlinéarité dans les liquides et les matériaux homogènes. Le module élastique non linéaire  $K = \partial\sigma/\partial\epsilon$  peut être alors développé en loi de puissance de la contrainte  $\sigma$  :

$$K = K_0 \left( 1 + \beta\sigma + \delta\sigma^2 + \dots \right), \quad (\text{II.1.7})$$

avec  $K_0$  le module élastique linéaire,  $\beta$  et  $\delta$  les paramètres non linéaires classiques quadratique et cubique.



Pour la composante de déformation hystérétique  $\epsilon_H$ , une relation d'état est considérée : la contribution à la déformation est nulle ou a une valeur finie  $\varrho$  selon la valeur actuelle de la contrainte  $\sigma$  et de son "histoire"  $\sigma_{his}$ . Ce comportement discontinu peut être vu comme une ouverture ou une fermeture instantanée de la micro-inhomogénéité [99, 110]. Pour une augmentation de la contrainte (figure 28), la contribution à la déformation est nulle pour  $\sigma < \sigma_o$  (état "fermé") avec  $\sigma_o$  la contrainte nécessaire pour l'ouverture de la fissure et égale à  $\varrho$  pour  $\sigma > \sigma_o$  (état "ouvert"). Pour une diminution de la contrainte, la contribution à la déformation est égale à  $\varrho$  pour  $\sigma > \sigma_f$  (état "ouvert") avec  $\sigma_f$  la contrainte nécessaire pour la fermeture de la fissure et nulle pour  $\sigma < \sigma_f$  (état "fermé"). Naturellement la contrainte  $\sigma_o$  est choisie supérieure à la contrainte  $\sigma_f$  (figure 28). Pour simplifier la modélisation,  $\sigma_o$  et  $\sigma_f$  sont les seuls paramètres variant entre les différentes UHE, tous les autres paramètres étant considérés comme constants. Cela signifie que si une cellule mesoscopique représente  $N_0$  UHE, les constantes  $K_0$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  et  $\tilde{\varrho} = N_0\varrho$  sont des constantes effectives de la cellule définies au niveau mesoscopique.

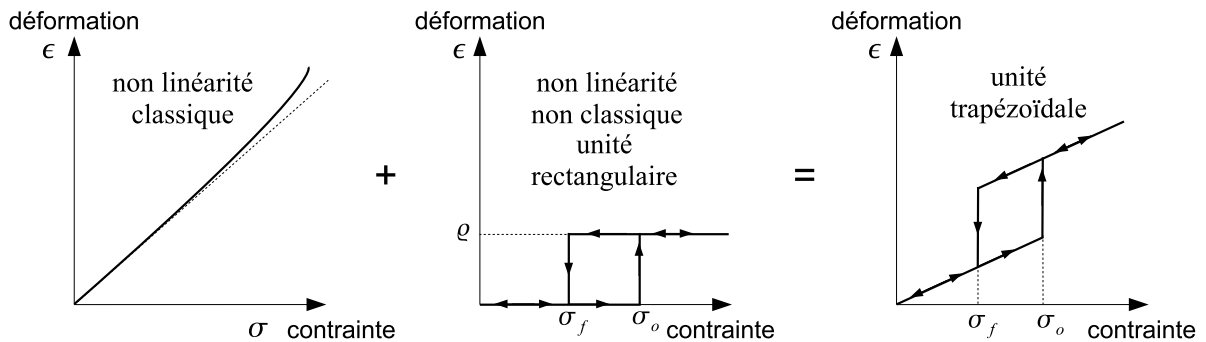


Figure 28 – Combinaison de la relation contrainte-déformation pour un comportement non linéaire "classique" couplé à un comportement non linéaire "non classique" (échelle microscopique : une UHE).

Par conséquent, toutes les UHE à l'intérieur d'une cellule mesoscopique peuvent être représentées dans un espace "contrainte-contrainte" en fonction de leur contrainte d'ouverture  $\sigma_o$  et de fermeture  $\sigma_f$ . Cet espace est appelé l'espace de Preisach-Mayergoyz (figures 24 et 25), présenté dans la partie II.1.2, et peut être traité mathématiquement avec la densité de distribution  $\rho_{PM}(\sigma_f, \sigma_o)$  [99, 110, 116].

Les constantes  $K_0$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  et  $\tilde{\varrho}$ , ainsi que la densité de l'espace PM  $\rho_{PM}(\sigma_f, \sigma_o)$  forment une signature unique de la cellule mesoscopique. La relation contrainte-déformation pour chaque cellule mesoscopique peut être déterminée en suivant la relation d'incrémenta-tion  $\Delta\epsilon_{\sigma_1 \rightarrow \sigma_2}$  entre la contrainte augmentant ou décroissant de  $\sigma_1$  à  $\sigma_2$  et la réponse en

déformation correspondant [117], soit :

$$\begin{aligned}
 \Delta\epsilon_{\sigma_1 \rightarrow \sigma_2} &= \Delta\epsilon_C + \Delta\epsilon_H, & (II.1.8) \\
 &= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma'}{K} + \tilde{\varrho} (f_c(\sigma_2) - f_c(\sigma_1)), \\
 &= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma'}{K_0 (1 + \beta\sigma' + \delta\sigma'^2 + \dots)} + \tilde{\varrho} (f_c(\sigma_2) - f_c(\sigma_1)),
 \end{aligned}$$

avec  $f_c(\sigma_i)$  pour  $i = 1, 2$  la fraction des unités microscopiques dans la cellule mesoscopique qui sont à l'état "fermé" pour la contrainte  $\sigma_i$ . Cette fonction est très dépendante de l'"histoire" de la contrainte.

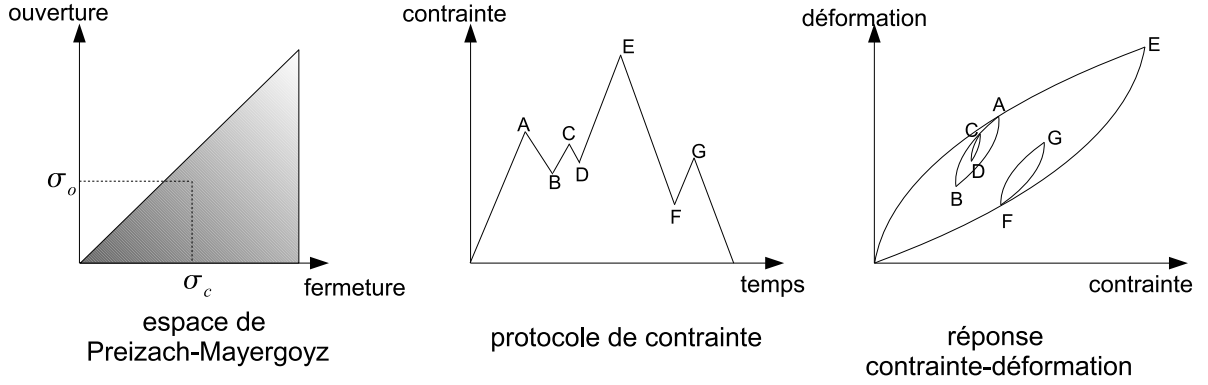


Figure 29 – Déformation relative à un protocole de contrainte en suivant un espace de Preisach-Mayergoyz (échelle mésoscopique :  $N_0$  UHE).

La figure 29 montre comment la déformation répondant au protocole de contrainte donné, peut être obtenue. L'hystérésis, la nonlinéarité et l'état mémoire (point A, C et F sur la figure 29) sont montrés. Il est donc possible, à partir de l'espace de Preisach-Mayergoyz, représentatif du milieu micro-inhomogène considéré et d'un protocole de contrainte appliqué à ce milieu, d'obtenir une relation contrainte-déformation.

### 1.3.2 De l'échelle mesoscopique à l'échelle macroscopique

Pour ce deuxième changement d'échelle du niveau mesoscopique (cellule) au niveau macroscopique (nombre fini de cellules mésoscopiques : échantillon) (figure 27), les équations "homogénéisées" à résoudre sont données par :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \frac{\omega}{Q} v, \quad (II.1.9)$$

et

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = K(\sigma, \sigma_{his}) \frac{\partial \epsilon}{\partial t}. \quad (\text{II.1.10})$$

Or

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (\text{II.1.11})$$

donc

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{II.1.12})$$

et finalement

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = K(\sigma, \sigma_{his}) \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (\text{II.1.13})$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $v = \partial u / \partial t$  la vitesse particulaire et  $x$  la coordonnée spatiale en 1D. Le second terme du coté droit de l'équation II.1.9 prend en compte l'atténuation dépendante de la fréquence ( $\omega = 2\pi f$ ) qui est proportionnelle à la vitesse particulaire et le facteur de qualité  $Q$ . Cette expression ne convient que pour des impulsions à bande étroite. Dans l'équation de variation des contraintes (éq. II.1.13),  $\partial \sigma / \partial \epsilon = K(\sigma, \sigma_{his})$  est le module élastique non linéaire en présence d'hystérésis à l'échelle microscopique. Depuis l'expression générale de l'incrément de la déformation ( $\Delta \epsilon$ ) avec une variation de contrainte (de  $\sigma_1 = \sigma$  à  $\sigma_2 = \sigma + \Delta \sigma$ ) (éq. II.1.9), il peut être dérivé que :

$$\frac{1}{K(\sigma, \sigma_{his})} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \sigma} = \frac{\partial \epsilon_C}{\partial \sigma} + \frac{\partial \epsilon_H}{\partial \sigma} = \lim_{\Delta \sigma \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \epsilon}{\Delta \sigma} \right), \quad (\text{II.1.14})$$

soit :

$$\boxed{\frac{1}{K} = \frac{1}{K_0 (1 + \beta \sigma + \delta \sigma^2 + \dots)} + \frac{\partial \epsilon_H}{\partial \sigma}}, \quad (\text{II.1.15})$$

avec  $\epsilon_H$  la contribution à la déformation des éléments hystérétiques. Cette équation doit être manipulée avec beaucoup de précautions, la contribution  $\epsilon_H$  étant très dépendante de l'"histoire" de la contrainte. La dérivée de cette contribution  $\epsilon_H$  correspond à une simple ligne d'intégration dans l'espace de Preisach-Mayergoyz sur une ligne horizontale lorsque la contrainte diminue et une ligne verticale lorsqu'elle augmente.

## 1.4 Algorithme pseudo-spectral bi-dimensionnel adapté au comportement non linéaire non classique

Dans cette partie, l'algorithme pseudo-spectral, présenté dans la partie I.1.2, est adapté à une propagation dans un milieu comportant des inhomogénéités modélisées par un comportement non linéaire hystérétique (partie II.1.1). La première partie portera sur un modèle hystérétique unidimensionnel avec une distribution de type espace de Preisach-Mayergoyz (espace-PM). Ensuite, cette modélisation sera étendue à un cas bi-dimensionnel.

### 1.4.1 Modélisation du comportement hystérétique de la fissure dans le code de propagation

L'équation II.1.15 nous donne une expression du module élastique  $K$  en prenant en compte toutes les contributions non linéaires classiques et non classiques.

Dans le but de calculer la variation de la déformation par rapport à la contrainte induite par les unités hystérétiques élémentaires (UHE), une méthode développée par Aleshin *et al.* [118, 119] est utilisée. La première étape est l'écriture de la variation de déformation en fonction de la pression comme une somme pondérée, à travers l'étude de l'espace-PM, de la déformation contributive  $\epsilon_M$  de chaque UHE :

$$\frac{\partial \epsilon_H}{\partial \sigma} = \sum_M \frac{\partial \epsilon_M}{\partial \sigma}. \quad (\text{II.1.16})$$

La somme sur tous les éléments de l'espace-PM peut être remplacée par une intégration sur l'espace-PM en entier :

$$\frac{\partial \epsilon_H}{\partial \sigma} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dP_o dP_f \frac{\partial \epsilon_M}{\partial \sigma} \rho_{PM}(P_f, P_o), \quad (\text{II.1.17})$$

avec  $P_o$  la pression définie comme la pression nécessaire pour l'ouverture de la fissure,  $P_f$  celle nécessaire pour la fermeture et  $\rho_{PM}(P_f, P_o)$  la fonction de distribution du couple  $(P_o, P_f)$  dans l'espace-PM. Cette fonction décrit le nombre d'éléments dans le rectangle de l'espace-PM défini par  $(P_f, P_f + dP_f) \times (P_o, P_o + dP_o)$  et on peut donc écrire :

$$\frac{\partial \epsilon_H}{\partial \sigma} = - \int_{-\infty}^{P_f} dP_o \int_{P_o}^{+\infty} dP_f \rho_{PM}(P_f, P_o) \frac{\partial \epsilon_M}{\partial p} = - \frac{\partial \epsilon_H}{\partial p}, \quad (\text{II.1.18})$$

avec  $p$  la pression perturbée par l'onde ultrasonore.

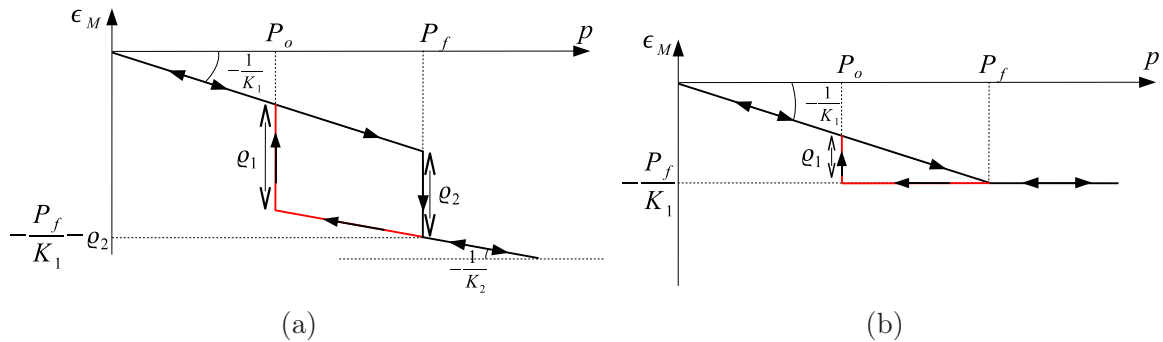


Figure 30 – UHE utilisées dans le calcul de la variation de la déformation appliquée au modèle d'espace-PM : (a) élément hystérétique à deux états élastiques et (b) élément hystérétique proposé par Scalerandi et al. [120]. Dans chaque cas, un état correspond à un état ouvert et l'autre à l'état fermé avec pour chacun une pression associée ( $P_o$  et  $P_f$ ).

D'après la figure 30(a), la variation de la déformation  $\epsilon_M$  pour chaque UHE dans le cas où la pression augmente ( $\frac{\partial p}{\partial t} > 0$ ) est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \epsilon_M}{\partial p} = -\frac{1}{K_1} & \text{si l'UHE est ouverte,} \\ \frac{\partial \epsilon_M}{\partial p} = -\frac{1}{K_2} & \text{si l'UHE est fermée,} \end{cases} \quad (\text{II.1.19})$$

où  $K_1$  et  $K_2$  correspondent aux modules élastiques des UHE dans les états respectivement ouvert et fermé.

En introduisant cette relation dans l'équation II.1.18, la variation de la déformation induite par toutes les UHE devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_H}{\partial p} = & - \int_{-\infty}^p dP_o \varrho_2 \rho_{PM}(P_o, p) \Omega - \frac{1}{K_2} \int_{-\infty}^{P_f} dP_o \int_{P_o}^{+\infty} dP_f \rho_{PM}(P_f, P_o) \\ & - \left( \frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2} \right) \int_{-\infty}^{P_f} dP_o \int_{P_o}^{+\infty} dP_f H(P_c - p) \rho_{PM}(P_f, P_o) \Omega, \end{aligned} \quad (\text{II.1.20})$$

avec  $\Omega = 1$  si l'UHE est ouverte et  $\Omega = 0$  si elle est fermée et  $H(P_f - p)$  la fonction d'Heaviside. Finalement, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_H}{\partial p} = & - \int_{O_2}^p dP_o \varrho_2 \rho_{PM}(P_o, p) - \frac{1}{K_2} \int_{-\infty}^{P_f} dP_o \int_{P_o}^{+\infty} dP_f \rho_{PM}(P_f, P_o) \\ & - \left( \frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2} \right) \int_{O_2}^{P_f} dP_o \int_p^{+\infty} dP_f \rho_{PM}(P_f, P_o), \end{aligned} \quad (\text{II.1.21})$$

où  $O_2$  est la coordonnée "ouverte" du point  $A_2$  dans l'espace-PM (figure 31e). Le terme de la première intégrale double est l'inverse du module élastique lorsque toutes les UHE

sont dans l'état fermé. Le terme de la deuxième double intégrale est la modification de l'inverse du module élastique due à l'ouverture de l'UHE et le terme d'intégrale simple est la contribution qui s'ajoute à l'inverse du module élastique de l'UHE fermée à la pression  $p$ .

Lorsque la pression diminue ( $\frac{\partial p}{\partial t} < 0$ ), de la même manière que précédemment nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_H}{\partial p} = & - \int_p^{C_2} dP_f \varrho_1 \rho_{PM}(p, P_f) - \frac{1}{K_1} \int_{-\infty}^{P_f} dP_o \int_{P_o}^{+\infty} dP_f \rho_{PM}(P_f, P_o) \\ & - \left( \frac{1}{K_2} - \frac{1}{K_1} \right) \int_{-\infty}^{P_f} dP_o \int_{P_o}^{C_2} dP_f \rho_{PM}(P_f, P_o), \end{aligned} \quad (\text{II.1.22})$$

où maintenant  $C_2$  est la coordonnée "fermée" du point  $A_2$  dans l'espace-PM (figure 31e). Le terme de la première intégrale double est l'inverse du module élastique lorsque toutes les UHE sont dans l'état ouvert. Le terme de la deuxième double intégrale est la modification de l'inverse du module élastique due à la fermeture de l'UHE et le terme d'intégrale simple est la contribution qui s'ajoute à l'inverse du module élastique de l'UHE ouverte à la pression  $p$ .

Dans les deux cas, pour une augmentation ou une diminution de la contrainte, les variations  $\frac{\partial \epsilon_H}{\partial \sigma}$  peuvent être calculées en regardant les UHE s'ouvrant et se fermant dans l'espace-PM entre la valeur courante et l'ancienne valeur de la contrainte.

Dans le cas d'UHE ayant la forme définie sur la figure 30b, les relations suivantes peuvent être utilisées pour simplifier les équations II.1.21-II.1.22 :

$$\varrho_1 = \varrho = \frac{P_f - P_o}{K_1}, \quad \varrho_2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{K_2} = 0. \quad (\text{II.1.23})$$

Les UHE de types "triangulaire" ou "trapézoïdal" (figure 30) ont été préférées à une UHE rectangulaire "classique" (figure 28) car cette dernière ne produit que des harmoniques impaires pour une distribution  $\rho_{PM}(P_f, P_o)$  uniforme [1]. Dans le but d'une étude avec un filtrage par inversion d'impulsion, présentée ultérieurement (partie II.3.1.1.2), l'UHE de forme triangulaire a été choisie. Cette forme, plus facile à implémenter que la forme trapézoïdale, décrit un comportement élastique lorsque la micro-inhomogénéité est ouverte et un comportement rigide lorsqu'elle est fermée. Cette description suit bien une certaine cohérence avec l'application expérimentale.

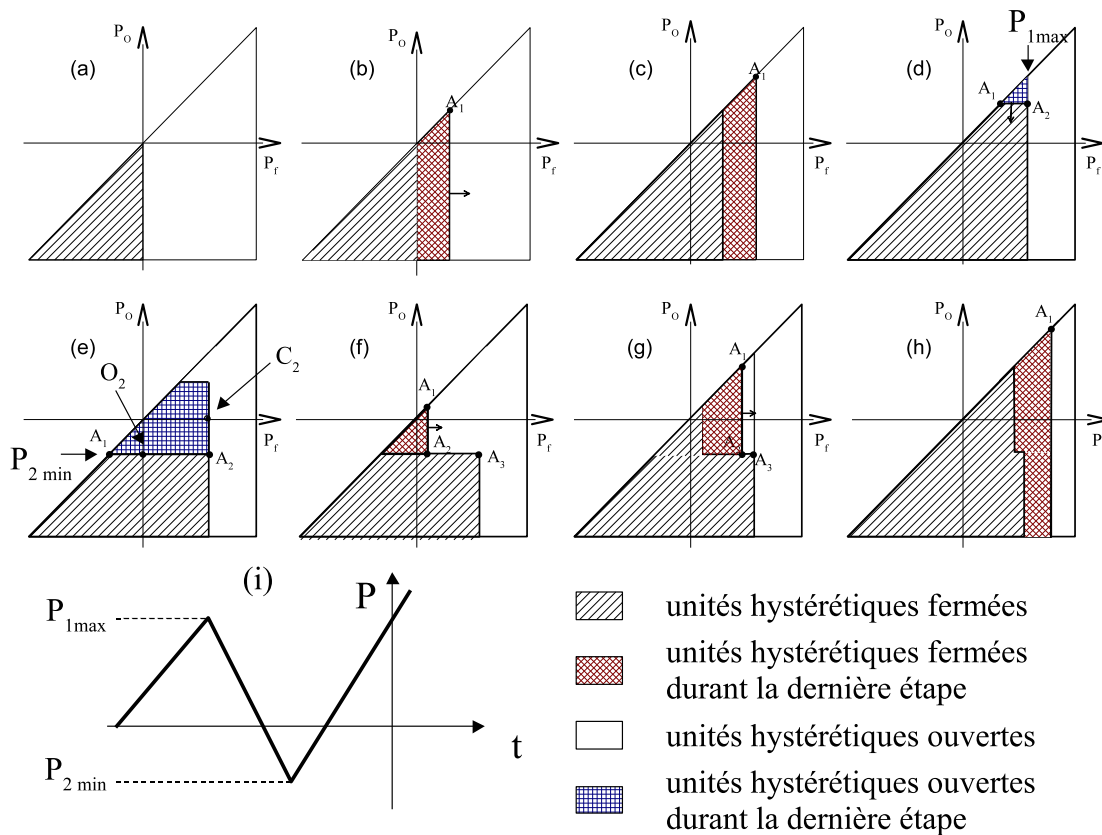


Figure 31 – (a)-(h) Évolution du domaine de l'espace-PM durant un cycle de compression jusqu'à  $P_{1max}$  et de relaxation jusqu'à  $P_{2min}$  présenté en (i).

## 1.4.2 Extension 2D de la modélisation du comportement hystérique

Dans cette partie, l'extension à un problème bi-dimensionnel est présentée. La propagation étant définie par la variation des constantes élastiques du milieu lors de la propagation d'une onde acoustique, il a fallu introduire un comportement non linéaire non classique dans cette variation. Pour permettre ce calcul tout en gardant l'égalité de la norme des constantes élastiques, une notation de Kelvin a été utilisée [121].

### 1.4.2.1 Notation de Kelvin pour un solide isotrope

Nous allons tout d'abord considérer la propagation d'une onde élastique dans un milieu solide hétérogène. La loi de Newton (en sommation implicite) peut s'écrire :

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad (\text{II.1.24})$$

où  $x_j$  sont les composantes du vecteur de position,  $\rho_0$  la masse volumique du milieu,  $v_i$  les composantes du vecteur de vitesse particulaire et  $\sigma_{ij}$  les composantes du tenseur de contraintes (figure 32).

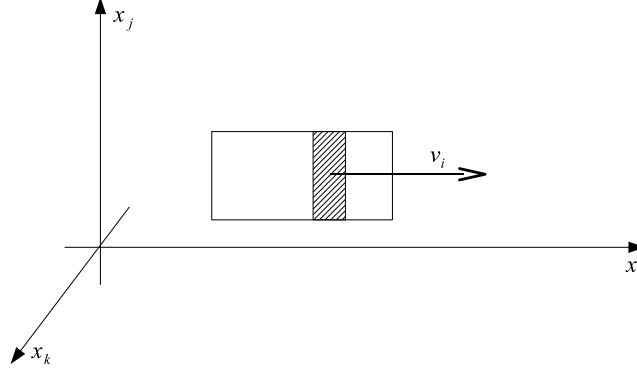


Figure 32 – Représentation des coordonnées spatiales et de la vitesse particulaire selon la composante  $i$ .

La relation constitutive pour un solide élastique linéaire est donnée par la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}, \quad (\text{II.1.25})$$

où  $\epsilon_{kl}$  sont les composantes du tenseur de déformation et  $C_{ijkl}$  sont les constantes élastiques. La symétrie de la matrice des constantes élastiques rend possible la transformation à une matrice  $3 \times 3$  (notations de Voigt) des indices (Tableau 3).

Tenseur	11	22	33	23	32	13	31	12	21
Matrice	1	2	3	4	4	5	5	6	6

Tab 3 – Transformation des indices dans la notation de Voigt.

Dans le cas d'un solide hétérogène, la matrice des constantes élastiques en notation de Voigt ( $I, J = 1, 2, \dots, 6$ ) est :

$$C_{IJ} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.1.26})$$

Cette notation ne conserve pas la norme correspondant à la somme des carrés des éléments du tenseur de rigidité [121], *i.e.* :

$$\sum_{I,J} C_{IJ}^2 \neq \sum_{i,j,k,l} C_{ijkl}^2. \quad (\text{II.1.27})$$



Afin de préserver cette égalité, une normalisation légèrement différente, appelée notation de Kelvin, a été utilisée. La nouvelle matrice des constantes élastiques est alors obtenue en pré-multipliant et post-multipliant la matrice des constantes élastiques en notation de Voigt (Eq. II.1.26) par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.1.28})$$

Dans le cas d'un solide hétérogène, la matrice des constantes élastiques en notation de Kelvin est donc donnée par :

$$\tilde{C}_{IJ} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & 2C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & 2C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & 2C_{66} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.1.29})$$

Grâce à cette nouvelle notation, qui préserve la norme, les vecteurs propres  $\tilde{\epsilon}^{(k)}$  et les valeurs propres associées  $\Lambda^{(k)}$  de cette matrice sont géométriquement significatifs. En effet, d'après Helbig *et al.* [122], les valeurs propres de la matrice en notation de Kelvin  $\tilde{C}$  peuvent être appelées "rigidités propres" et les vecteurs propres "tenseurs propres". Ces vecteurs propres représentent les directions pour lesquelles les contraintes appliquées et les directions de déformations sont identiques. Finalement, la matrice des coefficients élastiques en notation de Voigt, permettant d'être incluse dans l'équation II.1.25, peut être retrouvée par :

$$C_{IJ} = \sum_k \Lambda^{(k)} \tilde{\epsilon}^{(k)} \tilde{\epsilon}^{(k)T}, \quad (\text{II.1.30})$$

appelée matrice des coefficients élastiques modifiés. Il est alors possible de définir un espace de Preisach-Mayergoysz "scalaire" pour chacune de ces six directions privilégiées. La détermination des vecteurs propres et des valeurs propres associées, dans le cas général décrit dans cette partie, n'a pas été possible numériquement. C'est pour cela que l'application à un solide isotrope transverse a été choisie.

#### 1.4.2.2 Cas d'un solide isotrope transverse

Dans cette partie, nous allons appliquer la notation de Kelvin à un cas bi-dimensionnel de propagation dans un solide isotrope transverse. Dans un tel solide, la propagation des ondes transverses planes orientées verticalement peut être découplée de la propagation

des ondes transverses orientées horizontalement et la relation entre la contrainte et la déformation est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{13} & 0 \\ C_{13} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xz} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.1.31})$$

La matrice des constantes élastiques associées en notation de Kelvin est donc donnée par :

$$\tilde{C}_{IJ} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{13} & 0 \\ C_{13} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 2C_{44} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.1.32})$$

Il est donc maintenant possible, en utilisant ces notations, de déterminer les 3 vecteurs propres qui seront définis comme les déformations propres et qui nous donnerons les directions privilégiées.

$$\tilde{\epsilon}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1+X_1^2}} \begin{pmatrix} X_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{\epsilon}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{1+X_2^2}} \begin{pmatrix} X_2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{\epsilon}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{II.1.33})$$

en posant

$$X_1 = -\frac{1}{C_{13}} \left( \frac{C_{33}}{2} - \frac{C_{11}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{C_{33}^2 - 2C_{11}C_{33} + C_{11}^2 + 4C_{13}^2} \right), \quad (\text{II.1.34})$$

et

$$X_2 = -\frac{1}{C_{13}} \left( \frac{C_{33}}{2} - \frac{C_{11}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{C_{33}^2 - 2C_{11}C_{33} + C_{11}^2 + 4C_{13}^2} \right). \quad (\text{II.1.35})$$

Les 3 valeurs propres associées à ces 3 directions sont respectivement :

$$\Lambda^{(1)} = \frac{C_{33}}{2} + \frac{C_{11}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{C_{33}^2 - 2C_{11}C_{33} + C_{11}^2 + 4C_{13}^2}, \quad (\text{II.1.36})$$

$$\Lambda^{(2)} = \frac{C_{33}}{2} + \frac{C_{11}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{C_{33}^2 - 2C_{11}C_{33} + C_{11}^2 + 4C_{13}^2}, \quad (\text{II.1.37})$$

$$\Lambda^{(3)} = 2C_{44}. \quad (\text{II.1.38})$$

En se basant sur ces notations et sur les vecteurs propres et leur valeur propre associée, les étapes de calcul sont ensuite les suivantes :

- Calcul du vecteur de contrainte associée en notation de Kelvin :

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz}\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad (\text{II.1.39})$$

- Calcul des projections de la contrainte selon les 3 directions privilégiées :

$$\tilde{\sigma}^{(1)} = \frac{X_1}{\sqrt{1+X_1^2}} \sigma_{xx} + \frac{1}{\sqrt{1+X_1^2}} \sigma_{zz}, \tilde{\sigma}^{(2)} = \frac{X_2}{\sqrt{1+X_2^2}} \sigma_{xx} + \frac{1}{\sqrt{1+X_2^2}} \sigma_{zz}, \tilde{\sigma}^{(3)} = \sigma_{xz}\sqrt{2}; \quad (\text{II.1.40})$$

- 
- Chaque valeur associée va être modifiée en utilisant un modèle d'espace-PM scalaire :

$$E^{(1)} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \varrho_1 \frac{\partial \tilde{\epsilon}_H^{(1)}}{\partial \tilde{\sigma}^{(1)}}}, E^{(2)} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_2} + \varrho_2 \frac{\partial \tilde{\epsilon}_H^{(2)}}{\partial \tilde{\sigma}^{(2)}}} \text{ et } E^{(3)} = \frac{1}{\frac{1}{2C_{44}} + \varrho_3 \frac{\partial \tilde{\epsilon}_H^{(3)}}{\partial \tilde{\sigma}^{(3)}}}. \quad (\text{II.1.41})$$

- Les constantes élastiques sont alors calculées d'après la relation II.1.30 *i.e* :

$$C_{IJ} = \begin{pmatrix} E^{(1)} \frac{X_1^2}{1+X_1^2} + E^{(2)} \frac{X_2^2}{1+X_2^2} & E^{(1)} \frac{X_1}{1+X_1^2} + E^{(2)} \frac{X_2}{1+X_2^2} & 0 \\ E^{(1)} \frac{X_1}{1+X_1^2} + E^{(2)} \frac{X_2}{1+X_2^2} & E^{(1)} \frac{1}{1+X_1^2} + E^{(2)} \frac{1}{1+X_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E^{(3)}}{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.1.42})$$

Dans cette procédure, une anisotropie induite par les effets non linéaires peut apparaître. Si ces effets peuvent être considérés comme faibles, le vecteur des déformations propres peut être considéré constant par rapport à la propagation.

L'algorithme pseudo-spectral alors développé pour simuler la propagation non linéaire d'une onde acoustique dans un milieu fissuré va donc être utilisé pour étudier les méthodes de détection de propriétés non linéaires non classiques. La description théorique d'un milieu fissuré à travers la modélisation multi-échelle a permis de révéler une nonlinéarité importante directement liée au comportement particulier de la fissure. Il sera alors intéressant d'étudier l'apparition d'un tel phénomène lors des applications expérimentales.

---

