Modélisation de préférences avec la Théorie de l'Utilité Multi-Attribut couplée à une intégrale de Choquet

Ce chapitre traite de la modélisation des préférences en aide à la décision multicritère. Il constitue en cela un état de l'art de ce domaine dont le périmètre a été volontairement restreint aux seules méthodes utilisées dans cette étude. La section 2.1 introduit les problèmes d'aide à la décision multicritère et présente une méthode de résolution en trois étapes : (i) la construction d'un ensemble d'attributs préférentiels, (ii) la réalisation d'un modèle de préférences et enfin (iii) la recherche des alternatives préférées.

Dans le cadre de cette étude, le choix des attributs préférentiels est laissé à la charge des décideurs. La construction d'un modèle de préférence basé sur la théorie de l'utilité multi-attribut (introduite en section 2.2) couplée à une intégrale de Choquet (introduite en section 2.3) est présentée dans la section 2.4. La question de la recherche d'alternatives préférées pour un problème de planification avec préférences basé sur la théorie de l'utilité multi-attribut couplée à une intégrale de Choquet est traitée dans le chapitre 3 de ce manuscrit.

2.1 Aide à la décision multicritère

2.1.1 De la problématique de l'aide à la décision multicritère

L'aide à la décision est un domaine d'étude de la recherche opérationnelle qui peut être défini comme « *l'activité de la personne qui, par l'utilisation de modèles mathématiques, aide les décideurs à obtenir des éléments de réponse au cours d'un processus de décision* » [123]. Les méthodes d'aide à la décision sont employées pour adresser de nombreux problèmes comme par exemple l'amélioration des architectures des systèmes complexes [110, 116] ou encore l'évaluation de plans de gestion de crise (cf. chapitre 4).

Dans la plupart des problèmes de décision, le décideur est amené à considérer plusieurs critères différents. Ces derniers pouvant éventuellement être contradictoires les uns avec les autres à l'image de la surface habitable et du coût dans le cas de l'acquisition d'un logement. La communauté de l'*aide à la décision multicritère* (MCDA) propose de nombreux modèles et outils pour représenter et résoudre de tels problèmes de décision [88, 118].

Les problèmes de décision multicritère sont généralement classés en quatre catégories : choix, tri, rangement et description [123]. Le problème du *choix* vise à déterminer l'ensemble (éventuellement singleton) des meilleures alternatives offertes au décideur. Le problème du *tri* cherche quant à lui à affecter à chaque alternative une catégorie de sorte à classer ces dernières selon une typologie préalablement déterminée. Dans le problème de *rangement*, le but est de définir une relation d'ordre entre les différentes alternatives de décision considérées. Finalement, la problématique de *description* consiste à fournir des informations relatives aux choix qui peuvent être effectués.

Quelques notations fréquemment utilisées en aide à la décision multicritère sont à présent présentées. L'*ensemble des alternatives* qui doivent être comparées les unes aux autres est dénoté X. Chaque alternative est caractérisée par p *attributs* numérotés selon l'*ensemble des attributs* $P = \{1, \cdots, p\}$. Pour chaque attribut k, un *espace de définition* $\Omega_k \subset \mathbb{R}$ est défini ainsi qu'une fonction $z_k : X \to \Omega_k$ qui associe à chaque alternative $x \in X$ sa valeur pour l'attribut k. De façon analogue, la fonction $z : X \to \Omega$ associe à chaque alternative $x \in X$ un vecteur de l'espace des attributs $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_p$. En conséquence, à chaque alternative $x \in X$ correspond un vecteur de $Y = \{z(x) = (z_1(x), \cdots, z_p(x)) \mid x \in X\}$. Cet ensemble $Y \subset \Omega$ est appelé l'*ensemble des alternatives dans l'espace des attributs.*

Le problème de la planification avec préférences (cf. chapitre 1) peut être considéré comme un problème de choix puisqu'il consiste à fournir au décideur au moins l'un des meilleurs plans au sens des préférences définies dans le problème. Par conséquent, seule la problématique du choix sera considérée dans la suite de cette étude. Dans ce contexte, le terme *solution* (ou encore plan) pourra être utilisé en lieu et place du terme alternative.

2.1.2 Résolution des problèmes d'aide à la décision multicritère

La résolution d'un problème de décision multicritère peut être décrite à travers les trois étapes suivantes : (*i*) la construction d'un ensemble d'attributs préférentiels, (*ii*) la réalisation d'un modèle de préférences et enfin (*iii*) la recherche des alternatives préférées. Chacune de ces étapes successives est présentée dans la suite de cette section.

Construction d'un ensemble d'attributs préférentiels

La première étape a pour vocation de déterminer les différents attributs préférentiels à utiliser ainsi que leurs espaces de définition. Il s'agit intrinsèquement d'une activité de modélisation et elle constitue ainsi le premier choix du décideur : l'élicitation des points de vues à considérer pour évaluer les différentes alternatives les unes par rapport aux autres.

L'ensemble des attributs préférentiels construit doit vérifier les propriétés d'exhaustivité, de cohésion et de non redondance [124]. L'ensemble des attributs est *exhaustif* s'il permet de comparer n'importe quel couple d'alternatives (x^a, x^b) ce qui correspond intuitivement à l'idée qu'aucun attribut n'a été oublié. Ainsi si pour tout attribut $k \in P$, $z_k(x^a)$ et $z_k(x^b)$ sont jugés identiques alors x^a et x^b sont indifférenciés par rapport à l'ensemble des attributs P.

La propriété de *cohésion* traduit l'idée qu'aucun attribut n'est inutile. Il existe pour chaque attribut $k \in P$ au moins un couple d'alternative (x^a, x^b) tel que x^a soit préféré à x^b avec $z_k(x^a)$ étant préféré à $z_k(x^b)$ et $z_j(x^a)$ étant jugé identique à $z_j(x^b)$ pour tout $j \in P \backslash \{k\}$.
L'ensemble des attributs est *non redondant* s'il ne contient aucun attribut identique. Par conséquent, la suppression d'un attribut entraîne nécessairement la violation d'une des deux propriétés précédentes.

Par ailleurs, il est également possible de hiérarchiser les attributs retenus en formant des sous-ensembles d'attributs alors utilisés pour définir un attribut unique. Par exemple, dans le cas de la comparaison d'étudiants, un décideur peut utiliser comme attributs des notes de mathématique, de physique et de langue (l'espace de définition pouvant être l'intervalle $[0, 20]$). En regroupant les notes de mathématique et de physique, le décideur peut obtenir une note de science créant ainsi une hiérarchie au sein des attributs.

Réalisation d'un modèle de préférences

Une fois l'ensemble des attributs déterminé, il devient possible de réaliser un modèle des préférences du décideur. Un tel modèle est une relation d'ordre permettant de comparer automatiquement des alternatives entre elles. Afin de présenter la construction de ce modèle, la notion de *pré-ordre* est introduite.

Définition 2.1 - Pré-ordre
La relation binaire $\succsim \subset X \times X$ est un pré-ordre sur l'ensemble X ssi :

- $\forall x \in X,\ x \succsim x$ (*réflexivité*)
- $\forall x^a, x^b, x^c \in X,\ x^a \succsim x^b$ et $x^b \succsim x^c \ \Rightarrow\ x^a \succsim x^c$ (*transitivité*)

A partir d'un pré-ordre $\succsim$, les relations $\succ$ et $\sim$ sont définies telles que :

- $\forall x^a, x^b \in X,\ x^a \succ x^b \ \Leftrightarrow\ x^a \succsim x^b$ et $\neg\,(x^b \succsim x^a)$
- $\forall x^a, x^b \in X,\ x^a \sim x^b \ \Leftrightarrow\ x^a \succsim x^b$ et $x^b \succsim x^a$

Un pré-ordre est dit complet si pour toute paire d'éléments $x^a, x^b \in X$, la relation $\succsim$ est définie ($x^a \succsim x^b$ ou $x^b \succsim x^a$).

D'après des études réalisées en psychologie [129], il est plus facile pour les décideurs d'exprimer des préférences ordinales (comparaison d'alternatives entres elles) que des préférences cardinales (évaluation d'alternatives selon une échelle de satisfaction). La relation $\succsim_D$ (respectivement $\succ_D$ et $\sim_D$) représente les préférences ordinales du décideur. Elle est définie sur l'ensemble des alternatives X et son interprétation est la suivante :

- $x^a \succsim_D x^b$ signifie que x^a est au moins aussi préférée que x^b ;
- $x^a \succ_D x^b$ signifie que x^a est strictement préférée à x^b ;
- $x^a \sim_D x^b$ signifie que le décideur n'a pas de préférence entre x^a et x^b.

Dans un souci de simplification, la relation $\succsim_D$ est supposée définie sur Ω de sorte que $x^a \succsim_D x^b \Leftrightarrow y^a \succsim_D y^b$ avec $y^a, y^b \in Y$ où $Y = \{z(x) \mid x \in X\}$.

Le but de l'étape de réalisation du modèle de préférences est de construire un pré-ordre complet $\succsim$ qui respecte les préférences du décideur c'est à dire tel que : $\forall x^a, x^b \in X,\ x^a \succsim_D x^b \Rightarrow x^a \succsim x^b$. Au vue de la proximité entre ces relations, pourquoi est-il nécessaire de construire un tel modèle de préférences ? Il convient de remarquer que $\succsim$ est un modèle de $\succsim_D$ et constitue à ce titre une abstraction de cette relation de préférence. Ceci implique qu'il est possible de comparer deux alternatives x^a et x^b automatiquement au sens de $\succsim$ alors que la présence du décideur est requise pour les comparer au sens de $\succsim_D$. Si l'ensemble des alternatives est grand, il devient impossible de demander au décideur de comparer toutes les alternatives manuellement et le recours au modèle de préférences est indispensable. Tout l'art de cette étape consiste donc à construire un pré-ordre générique sur X à partir d'informations préférentielles portant sur un petit nombre d'alternatives.

Les techniques de réalisation de modèles de préférences proposées dans la littérature [57] peuvent être classées en deux catégories : les méthodes de surclassement et les méthodes de critère unique de synthèse. Les *méthodes de surclassement* telles que les méthodes ELECTRE [58, 59] et PROMETHEE [146] suivent l'approche dite « *Comparer puis Agréger* ». Elles consistent à comparer les attributs des alternatives deux à deux puis à agréger les comparaisons ainsi obtenues afin de déterminer si une alternative est préférée à une autre. Les *méthodes de critère unique de synthèse* à l'image de AHP [141] et de la Théorie de l'Utilité Multi-Attribut (MAUT) [45, 147] reposent quant à elles sur une approche de type « *Agréger puis*

Comparer ». Ces méthodes agrègent tous les attributs d'une alternative entre eux afin d'obtenir un critère unique de synthèse. Ce dernier définit alors un pré-ordre complet sur X qui permet de comparer toutes les alternatives entre elles.

Les deux approches présentent des avantages et des inconvénients. Les méthodes de surclassement sont particulièrement indiquées quand les différents attributs ne sont pas commensurables puisque les comparaisons effectuées portent toujours sur un même critère. En revanche, elles sont difficilement utilisables lorsque le nombre d'alternatives considérées est grand puisqu'il est nécessaire de comparer toutes les alternatives deux à deux pour identifier la meilleure d'entre elles. Les méthodes de critère unique de synthèse ne sont pas soumises à cette problématique puisque l'évaluation d'une alternative ne dépend pas des évaluations des autres alternatives. Ainsi, dans le cadre d'une problématique de choix, les méthodes de critère unique de synthèse permettent rapidement de savoir si une alternative est meilleure qu'une autre puisqu'il suffit de comparer cette dernière à la meilleure alternative connue.

La problématique de la planification avec préférences au cœur de cette étude étant un problème de choix, les méthodes de surclassement ne sont plus abordées dans la suite de ce document. De plus, seule la Théorie de l'Utilité Multi-Attribut MAUT est considérée dans le cadre de cette étude. Cette dernière a été retenue en raison de son grand pouvoir expressif (cf. sections 2.2 et 2.3).

Recherche des alternatives préférées

Equipé d'un ensemble d'attributs préférentiels défini par le décideur, il est possible de construire un modèle de préférences $\succsim$. Il convient à présent de s'intéresser à l'exploitation de ce modèle dans le cadre de la recherche des meilleures solutions d'un problème de choix donné.

La procédure qui permet d'obtenir des solutions du problème considéré est dénotée A. Bien que cette procédure puisse être quelconque (rien n'interdit qu'elle soit manuelle par exemple), il s'agit généralement d'un algorithme d'optimisation multi-objectif. En outre, la méthode pour comparer des alternatives au sens de $\succsim$ est notée MCDA. Dans le cadre de cette étude, A est un algorithme de résolution d'un problème de planification avec préférences (cf. section 1.2.2). Les alternatives sont donc les plans retournées par A.

La procédure A et la méthode MCDA peuvent être articulées de différentes manières (cf. figure 2.1). Dans une approche *a posteriori* (cf. [35] par exemple), la procédure A est mise en œuvre pour obtenir un ensemble X de solutions du problème. La méthode MCDA est ensuite utilisée sur X afin de déterminer l'ensemble des solutions préférées $X^{\succsim}$. Dans une approche *a priori* (voir [97, 98] par exemple), la méthode MCDA retourne un modèle de préférences qui devient alors un paramètre de la procédure A. Cette dernière peut ensuite être invoquée pour obtenir un ensemble de solutions préférées $X^{\succsim}$. Il convient également de mentionner les approches *interactives* [145] qui permettent de trouver un ensemble de solutions préférées sans construire entièrement le modèle de préférences. Ces dernières ne sont pas considérées car elles nécessitent une forte implication du décideur lors de la recherche des solutions ce qui ne correspond pas aux cas applicatifs envisagés pour cette étude.

L'approche a posteriori est généralement employée lorsque les informations préférentielles du décideur ne sont pas disponibles au moment de la résolution du problème. Dans le cas contraire, on privilégie l'approche a priori puisqu'elle permet de construire un ensemble des solutions préférées $X^{\succsim}$ sans avoir à générer d'ensemble de solutions X au préalable. En effet, cette étape peut s'avérer extrêmement coûteuse notamment dans le cas où l'ensemble X obtenu contient toutes les solutions du problème considéré. Le problème de la planification avec préférences étant fortement combinatoire, il n'est pas envisageable de construire l'ensemble de ses solutions. Par conséquent, l'approche a priori est le paradigme retenu dans le cadre de cette étude.

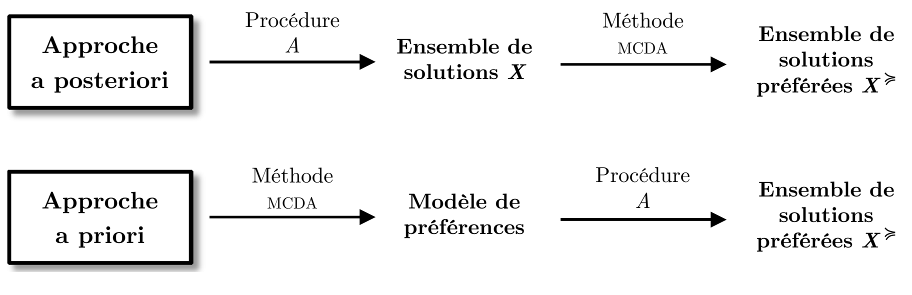

Figure 2.1 – Couplage d'une procédure A et d'une méthode MCDA [60]

Domaine de la gestion de crise
Proposer des plans d'action aux décideurs de la gestion de crise constitue une activité d'aide à la décision. En effet, il faut pour cela choisir un ou plusieurs plans (le ou les meilleurs par rapport à un modèle de préférences) parmi l'ensemble des plans pouvant adresser le problème.

Lors de la réponse à une situation de crise, les décideurs mobilisés sont fortement sollicités et peu disponibles. Une approche a priori est donc parfaitement indiquée puisqu'elle n'est que peu chronophage pour ces derniers ; la modélisation de leurs préférences pouvant avoir été réalisée au moins partiellement en amont de la crise.

2.2 Théorie de l'Utilité Multi-Attribut

Cette section s'intéresse uniquement à la question de la modélisation des préférences du décideur dans le cadre de la théorie de l'utilité multi-attribut. Les attributs préférentiels et leurs espaces de définition (tout deux requis pour cette étape) sont supposés préalablement déterminés.

2.2.1 Modèle MAUT

La théorie MAUT appartient à la classe des méthodes de critère unique de synthèse. Ainsi, elle associe à chaque alternative $x \in X$ une valeur numérique appelée *utilité* qui traduit le degré de qualité de x au sens des préférences du décideur et s'exprime sur une *échelle de satisfaction commune* $\xi \subset \mathbb{R}$.

Définition 2.2 - Modèle MAUT [45]
Soit X un ensemble d'alternatives, Ω un espace d'attributs et Y l'ensemble des alternatives X dans l'espace des attributs Ω défini par $Y = \{z(x) \mid x \in X\}$. Le modèle MAUT définit un pré-ordre complet $\succsim$ sur X par :

$$\begin{cases} x^a \succsim x^b \;\Leftrightarrow\; U(y^a) \geq U(y^b) \\ U(y) = \psi(u_1(y_1), \cdots, u_p(y_p)) \end{cases}$$

Avec $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'utilité MAUT construite à partir de :

- $u_k : \Omega_k \rightarrow \xi$ des fonctions d'utilité partielles ;
- $\psi : \xi^p \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'agrégation.

Un *critère* k est la donnée d'un attribut $k \in P$ et d'une *fonction d'utilité partielle* u_k. Par abus de langage, P sera utilisé indifféremment pour désigner l'ensemble des attributs et celui des critères. Les critères peuvent être rendus commensurables puisque tous définis sur l'échelle de satisfaction commune ξ.

2.2.2 Fonctions d'utilité partielles

Les fonctions d'utilité partielles $u_k : \Omega_k \rightarrow \xi$ sont des fonctions à valeur dans l'échelle de satisfaction commune. Afin de les caractériser, il faut donc préciser la nature de l'ensemble $\xi \subset \mathbb{R}$.

Plusieurs approches peuvent être utilisées pour définir des degrés de satisfaction sur ξ. Une échelle de satisfaction est dite unipolaire [93, 94] s'il est possible de définir pour tout $k \in P$, deux éléments $\mathbf{0}_k$ et $\mathbf{1}_k$ de Ω_k tels que $\mathbf{0}_k$ (respectivement $\mathbf{1}_k$) est considéré comme totalement insatisfaisant (respectivement parfaitement satisfaisant) par le décideur pour le critère k.

De même, une échelle de satisfaction est dite bipolaire [72] s'il est possible de définir pour tout $k \in P$, un élément neutre $\mathbf{N}_k$ tel que les éléments de Ω_k préférés à (respectivement moins préférés que) $\mathbf{N}_k$ sont considérés « bons » (respectivement « mauvais ») par le décideur.

La nature de l'échelle de satisfaction choisie traduit un choix de modélisation. Dans ces travaux, l'échelle de satisfaction unipolaire $\xi = [0, 1]$ a été retenue. Cette échelle est l'une des plus utilisée notamment parce qu'elle est relativement intuitive pour les décideurs. De plus, par convention, l'utilité associée à $\mathbf{0}_k$ et $\mathbf{1}_k$ est définie de sorte que $u_k(\mathbf{0}_k) = 0$ et $u_k(\mathbf{1}_k) = 1$. Il convient néanmoins de préciser que tous les résultats présentés dans ce chapitre sont généralisables au cas de l'utilisation d'une échelle bipolaire [73].

A présent que la nature de l'échelle de satisfaction ξ est connue, il reste à préciser l'expression des fonctions u_k. Dans une première approche, il est possible d'utiliser une fonction d'utilité partielle linéaire définie par $u_k(y_k) = \lambda_k \times y_k,\ \forall y_k \in \Omega_k$. Ce modèle n'est malheureusement pas pleinement satisfaisant puisque la satisfaction du décideur n'évolue pas nécessairement de façon linéaire. Ainsi, dans le cadre de l'évaluation d'étudiants, un décideur peut largement préférer une note de 16 à une note de 12 mais ne préférer que modérément une note de 20 à une note de 16.

Pour outrepasser cette limite, il est possible de considérer des fonctions d'utilité partielles continues et *linéaires par morceaux*. Ces fonctions d'utilité possèdent un grand pouvoir expressif puisqu'elles permettent d'approximer n'importe quelle autre fonction arithmétique.

Définition 2.3 - Fonction d'utilité linéaire par morceaux [85]
Soit $u_k : \Omega_k \to \xi$ la fonction d'utilité partielle de l'attribut $k \in P$ et $\xi = [0, 1]$ une échelle de satisfaction. L'ensemble Ω_k est divisé en n intervalles dont les bornes $z_k^0 = 0, \cdots, z_k^n = 1$ sont définies telles que : $\forall i \in \{0, \cdots, n-1\},\ z_k^i < z_k^{i+1}$.

L'utilité d'une alternative $x \in X$ sur le critère k est définie par l'interpolation linéaire de $z_k(x) \in [z_k^i,\ z_k^{i+1}]$ avec $i \in \{1, \cdots, n\}$:

$$u_k(y_k) = u_k(z_k^i) + \frac{u_k(z_k^{i+1}) - u_k(z_k^i)}{z_k^{i+1} - z_k^i} \times (z_k(x) - z_k^i)$$

Dans la définition 2.3, l'utilité des différentes bornes $u_k(z_k^1), \cdots, u_k(z_k^n)$ est définie préalablement. Ainsi, il est possible de traiter le cas où Ω_k est un ensemble discret en considérant qu'à chaque valeur $\omega \in \Omega_k$ correspond une borne z_k^i dont la valeur est connue (l'interpolation linéaire qui n'est pas définie quand Ω_k est discret n'est alors plus nécessaire).

La construction des fonctions d'utilité (et notamment le calcul de l'utilité des bornes) peut être réalisée à l'aide de la méthode présentée en section 2.4.

2.2.3 Fonction d'agrégation

Dans le cadre MAUT, le rôle de la fonction d'agrégation $\psi : \xi^p \rightarrow \xi$ est de déterminer l'utilité d'une alternative sur la base de la valeur des critères retournés par les fonctions d'utilité partielles u_k. La somme pondérée est couramment utilisée comme fonction d'agrégation car elle possède l'avantage d'être facile à mettre en œuvre.

Définition 2.4 - Somme pondérée
Soit un vecteur $a \in \mathbb{R}^p$ et un vecteur de poids $w \in [0,1]^p$ tel que $\sum_{k=1}^{p} w_k = 1$ avec $w_k \geq 0$. La somme pondérée $S_w : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$S_w(a_1, \cdots, a_p) = \sum_{k=1}^{p} w_k \, a_k$$

Il est aussi possible d'utiliser d'autres opérateurs d'agrégation usuels tels que le minimum, le maximum ou encore la somme pondérée ordonnée (OWA) [148].

2.2.4 Exemple illustratif

Pour illustrer les propos de cette section, l'exemple (inspiré de [71]) d'un directeur de faculté souhaitant évaluer ses étudiants est utilisé. Dans ce contexte, les alternatives du problème de décision sont les étudiants et les attributs préférentiels du décideur sont les notes des étudiants en mathématique (M), physique (P) et langue (L). Les attributs préférentiels (M) et (P) sont exprimées sur l'espace de définition $\Omega_{MP} = [0, 20]$ et l'attribut (L) est exprimé sur l'espace de définition discret $\Omega_L = \{A, B, C, D, E\}$. Le décideur souhaite comparer trois étudiants E_a, E_b et E_c dont les notes sont renseignées dans le tableau suivant.

	Mathématique (M)	Physique (P)	Langue (L)
Etudiant E_a	16	16	B
Etudiant E_b	18	18	C
Etudiant E_c	16	15	B

TABLEAU 2.1 – Exemple : Notes des étudiants

Un modèle de préférence MAUT est à présent réalisé pour préciser les notions introduites précédemment. Le directeur utilise la même fonction d'utilité partielle $u_{MP} : [0, 20] \to [0, 1]$ pour les critères (M) et (P). Il est parfaitement satisfait lorsque la note d'un étudiant vaut $\mathbf{1}_{MP} = 20$. En revanche, si la note d'un étudiant est inférieure ou égale à $\mathbf{0}_{MP} = 8$, le directeur est totalement insatisfait. Par définition, $u_{MP}(8) = 0$ et $u_{MP}(20) = 1$. En outre, il préfère fortement une note de 16 à une note de 12 alors qu'il ne préfère que modérément une note de 12 (respectivement 20) à une note de 8 (respectivement 16). En ce qui concerne le critère (L), le directeur est parfaitement satisfait si l'étudiant a obtenu la note $\mathbf{1}_L = A$ et totalement insatisfait s'il a obtenu la note $\mathbf{0}_L = E$. Par définition, $u_L(E) = 0$ et $u_L(A) = 1$. En outre, le niveau de satisfaction du directeur varie linéairement entre A et E. Les fonctions d'utilité u_{MP} et u_L (cf. figure 2.2) modélisent les préférences du décideur et peuvent être construites à l'aide de la méthode présentée dans la section 2.4.1.

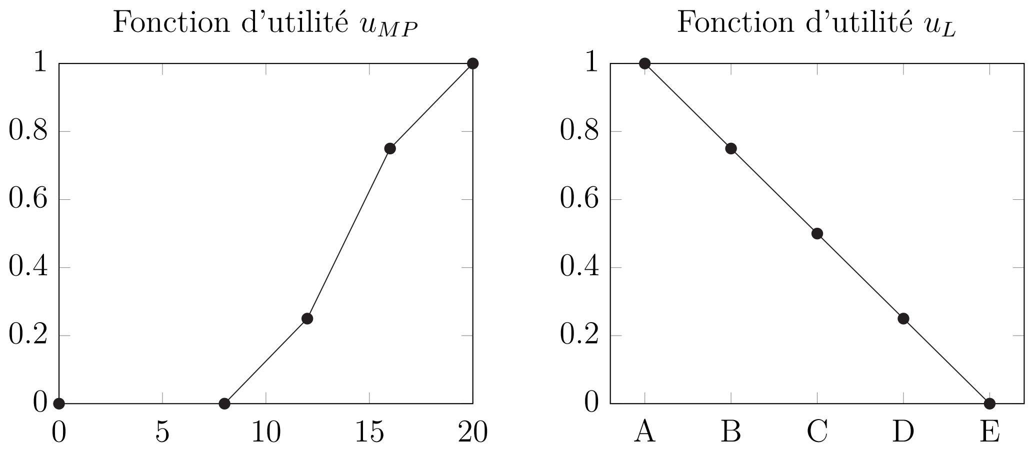

FIGURE 2.2 – Exemple : Fonctions d'utilité partielles u_{MP} et u_L

En utilisant u_{MP} et u_L, la valeur des différents critères peut être calculée :

	Mathématique (M)	Physique (P)	Langue (L)
Etudiant E_a	0.75	0.75	0.75
Etudiant E_b	0.875	0.875	0.5
Etudiant E_c	0.75	0.625	0.75

TABLEAU 2.2 – Exemple : Valeurs d'utilités partielles

Pour compléter le modèle MAUT, il faut à présent définir une fonction d'agrégation qui va permettre de déterminer l'utilité associée à chaque étudiant. Le directeur utilise pour cela une somme pondérée S_w dont le vecteur de poids est $w = (w_M, w_P, w_L) = (0.3, 0.3, 0.4)$. Ce choix traduit la volonté du directeur d'accorder la même importance aux mathématiques et à la physique dans son évaluation. De plus, le poids accordé aux langues (40% de la pondération) est élevé car le décideur préfère les étudiants au profil équilibré plutôt que les étudiants performants uniquement en sciences. L'utilisation de S_w fournit les résultats suivants :

	Etudiant E_a	Etudiant E_b	Etudiant E_c
Utilité	0.75	0.725	0.7125

TABLEAU 2.3 – Exemple : Utilités calculées à l'aide d'une somme pondérée

Ainsi, au sens de ce modèle MAUT construit à partir de u_{MP}, u_L et S_w, les préférences du directeur au regard de ses étudiants sont : $E_a \succsim E_b \succsim E_c$.

2.3 Intégrale de Choquet

La section 2.1 a introduit les trois étapes de la résolution des problèmes de décision. La modélisation des préférences du décideur (deuxième étape de la résolution) peut être réalisée en utilisant la théorie MAUT comme présenté dans la section 2.2.1. Cette section complète la section 2.2.1 en présentant une fonction d'agrégation pouvant être utilisée dans le cadre MAUT.

2.3.1 Limites de la somme pondérée

La somme pondérée bien que couramment utilisée est un opérateur d'agrégation aux possibilités limitées qui ne peut représenter certaines préférences des décideurs. Les limites de la somme pondérée peuvent être illustrées (exemple emprunté à [73]) à l'aide de deux critères dont les fonctions d'utilités u_1 et u_2 sont connues et de trois alternatives x^a, x^b et x^c à comparer telles que :

$$\begin{array}{lll} u_1(x_1^a) = 0.4 & u_1(x_1^b) = 0 & u_1(x_1^c) = 1 \\ u_2(x_2^a) = 0.4 & u_2(x_2^b) = 1 & u_2(x_2^c) = 0 \end{array}$$

Si le décideur souhaite qu'aucune alternative ne comporte de critères non satisfaits ($\forall k \in P,\ u_k(x) \neq 0$), alors ses préférences sont $x^a \succ x^b \sim x^c$. Soit une somme pondérée S_w caractérisée par le vecteur de poids (w_1, w_2), les préférences du décideur induisent les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} x^b \sim x^c \quad &\Leftrightarrow \quad w_1 = w_2 \\ x^a \succ x^b \quad &\Leftrightarrow \quad 0.4\,(w_1 + w_2) > w_2 \end{aligned}$$

Ces deux relations considérées conjointement démontrent que la somme pondérée ne peut représenter les préférences de ce décideur puisqu'elles imposent $0.8\,w_2 > w_2$ ce qui est impossible.

2.3.2 Modèle basé sur l'intégrale de Choquet

Afin d'aboutir à un modèle plus général et plus expressif, la notion de *fonction de capacité* [36] (ou *capacité* ou encore mesure floue [132]) est introduite. Cette dernière généralise l'idée de poids de la somme pondérée en définissant un poids non seulement pour chaque critère mais également pour chaque ensemble de critères qu'il est possible de former à partir de P. La fonction de capacité μ est donc définie sur l'ensemble des parties de P noté $\mathfrak{P}(P)$.

Définition 2.5 - Fonction de capacité [73]
Soit P un ensemble de critères, la fonction d'ensemble $\mu : \mathfrak{P}(P) \rightarrow [0, 1]$ est une fonction de capacité si :

- $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(P) = 1$
- $\forall A, B \subseteq P,\ A \subseteq B \ \Rightarrow\ \mu(A) \leq \mu(B)$

Au regard de ces deux propriétés, la fonction de capacité est dite normalisée et monotone ce qui s'interprète naturellement. En effet, le poids de l'ensemble vide est nul alors que le poids de l'ensemble des critères P est maximal. De plus, si l'ensemble de critères A est un sous ensemble de B alors son poids est nécessairement inférieur ou égal à celui de B. Par mesure de simplicité, le poids du critère k sera noté $\mu(k)$ plutôt que $\mu(\{k\})$. Pour deux critères 1 et 2, la propriété de monotonicité impose donc : $\mu(1) \leq \mu(\{1, 2\})$.

Equipé de la notion de capacité, il est à présent possible de définir l'*intégrale de Choquet* [36]. Dans le cadre de cette étude, cet outil mathématique est utilisé comme une fonction d'agrégation.

Définition 2.6 - Intégrale de Choquet [73]
Soit un vecteur $a \in \mathbb{R}_+^p$ et μ une fonction de capacité définie sur P. L'intégrale de Choquet $C_\mu : \mathbb{R}_+^p \to \mathbb{R}_+$ est définie par :

$$C_\mu(a_1, \cdots, a_p) = \sum_{k=1}^{p} \mu(\{\sigma(k), \cdots, \sigma(p)\}) \times [\, a_{\sigma(k)} - a_{\sigma(k-1)} \,]$$

Avec σ une permutation sur P telle que $a_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq a_{\sigma(p)}$ et $a_{\sigma(0)} = 0$.

Si la notion de capacité s'interprète naturellement comme une généralisation de l'idée de poids d'une somme pondérée, l'interprétation de l'intégrale de Choquet n'est pas évidente de prime abord. Ainsi, le lecteur curieux peut légitimement se demander pourquoi l'intégrale de Choquet fait-elle l'objet d'une attention particulière au sein de la communauté MCDA ?

L'ensemble $X_A = \{\, (\mathbf{1}_A, \mathbf{0}_{-A}) \mid A \subseteq P \,\}$ est appelé ensemble des *alternatives binaires*. Les alternatives binaires correspondent à des alternatives qui seraient parfaitement satisfaisantes sur tous les critères $k \in A$ et totalement insatisfaisantes sur les autres. Etant donné que $u_k(\mathbf{1}_k) = 1$ et $u_k(\mathbf{0}_k) = 0$, l'utilité d'une alternative binaire se réduit à $\psi(1_A, 0_{-A})$. En outre, la définition de μ permet d'écrire que $\psi(1_A, 0_{-A}) = \mu(A)$. De plus, puisque μ est définie sur $\mathfrak{P}(P)$, elle précise l'utilité de l'ensemble des alternatives binaires de P et détermine ainsi ψ sur tous les sommets de l'hypercube $[0,1]^p$. Par conséquent, la recherche des valeurs de ψ peut être vue comme un problème d'interpolation entre les sommets de l'hypercube $[0,1]^p$. La solution de ce problème la plus simple (interpolation linéaire utilisant le moins de sommets possible pour chaque point) est unique et n'est autre que l'intégrale de Choquet [100, 103, 127].

L'intégrale de Choquet généralise les principales fonctions d'agrégation usuelles telles que le min, le max, la somme pondérée et la somme pondérée ordonnée OWA [68]. De plus, elle constitue une fonction d'agrégation très puissante puisqu'elle permet de modéliser la pondération, la complémentarité et la substituabilité de critères (ainsi que la notion de véto [70] par conséquence).

L'exemple illustrant les limites de la somme pondérée [73] qui a été présenté dans la section précédente peut facilement être résolu à l'aide de l'intégrale de Choquet. Les préférences du décideurs imposent cette fois :

$$\begin{aligned} x^b \sim x^c \quad &\Leftrightarrow \quad \mu(1) = \mu(2) \\ x^a \succ x^b \quad &\Leftrightarrow \quad 0.4\ \mu(\{1,2\}) > \mu(2) \end{aligned}$$

Par définition, $\mu(\{1,2\}) = 1$ car $P = \{1,2\}$. En prenant $\mu(1) = \mu(2) = 0.3$, il est donc possible de construire un modèle des préférences du décideur.

2.3.3 Interprétation du modèle

Le modèle de préférences basé sur une capacité et l'intégrale de Choquet est très riche. Malheureusement, ce grand pouvoir expressif a été obtenu au détriment de la simplicité du modèle. En effet, $2^p - 2$ paramètres sont à présent nécessaires pour déterminer la fonction de capacité entièrement (*i.e.* les différentes valeurs de μ sur $\mathfrak{P}(P)$ à l'exception des ensembles $\emptyset$ et P).

Afin de faciliter l'interprétation de μ (et donc *in fine* son élicitation), les notions de *valeur de Shapley* (ou *indice d'importance*) [126] et d'*indice d'interaction entre critères* [70] sont introduites. Ces deux notions seront particulièrement utiles lorsque le modèle sera simplifié dans la section 2.3.4.

La valeur de Shapley $\phi(k)$ exprime l'importance globale du critère k pour la capacité μ. Il convient de ne pas confondre $\phi(k)$ qui représente le poids total du critère k avec $\mu(k)$ qui traduit l'importance du critère k seul.

Définition 2.7 - Valeur de Shapley [126]
Soit μ une capacité, la valeur de Shapley du critère $k \in P$ est définie par :

$$\phi(k) = \sum_{B \subseteq P \setminus k} \frac{(|P| - |B| - 1)!\ |B|!}{|P|!} \times \Big[\mu(B \cup k) - \mu(B)\Big]$$

L'*indice d'interaction entre critères* généralise la valeur de Shapley (il suffit de remarquer que $I(\{k\}) = \phi(k)$) et apporte les informations complémentaires qui sont requises pour interpréter complètement le modèle. Il exprime le fait que l'importance d'un ensemble de critères $A \subseteq P$ ne se réduit pas à la somme des importances des critères $k \in A$.

Définition 2.8 - Indice d'interaction entre critères [70]
Soit μ une capacité, l'indice d'interaction de l'ensemble $A \subseteq P$ est défini par :

$$I(A) = \sum_{B \subseteq P \setminus A} \frac{(|P| - |B| - |A|)!\ |B|!}{(|P| - |A| + 1)!} \times \sum_{K \subseteq A} (-1)^{|A \setminus K|}\ \mu(B \cup K)$$

L'exemple proposé dans [74] illustre le phénomène d'interaction entre critères dans le cas $p = 2$. Soit deux critères ayant le même indice d'importance et quatre alternatives x^a, x^b, x^c, x^d (cf. figure 2.3) telles que :

$$y^a = (\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2) \qquad y^b = (\mathbf{0}_1, \mathbf{1}_2) \qquad y^c = (\mathbf{1}_1, \mathbf{0}_2) \qquad y^d = (\mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2)$$

Il apparait clairement que $x^d \succ x^a$ mais le cas des alternatives x^b et x^c est plus complexe. Si le décideur considère que $x^a \sim x^b \sim x^c$ (cf. figure 2.3(a)), cela signifie que les deux critères doivent être satisfaits conjointement pour qu'une alternative soit jugée satisfaisante. Les critères sont alors dit *complémentaires* et leur indice d'interaction I est positif.

Si le décideur considère que $x^b \sim x^c \sim x^d$ (cf. figure 2.3(b)), alors il n'est nécessaire de satisfaire qu'un seul des deux critères pour qu'une alternative soit jugée satisfaisante. Les critères sont alors dit *substituables* et leur indice d'interaction I est négatif.

Dans le cas représenté sur la figure 2.3(c), chaque critère apporte sa propre contribution à la satisfaction générale de l'alternative. Les critères sont alors dits *indépendants* (comme dans le cas de la somme pondérée) et leur indice d'interaction I est nul.

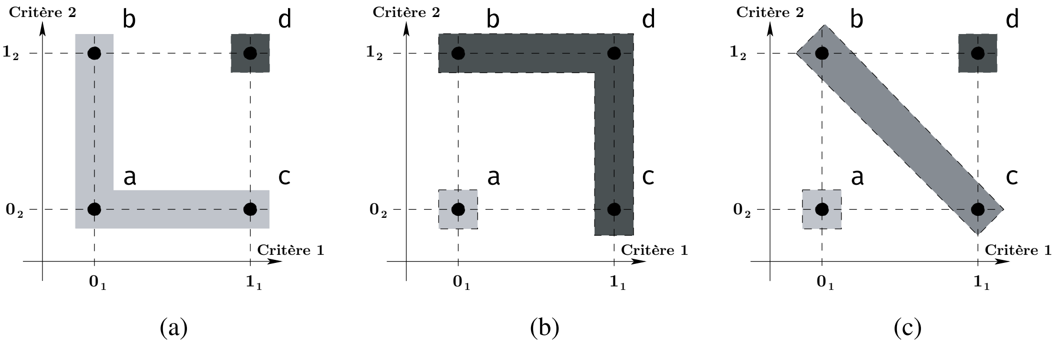

FIGURE 2.3 – Interaction entre deux critères ; d'après [74]

2.3.4 Simplification du modèle

L'objectif de cette section est de simplifier le modèle (en dégradant le moins possible son pouvoir expressif) afin de ne pas avoir à exprimer les $2^p - 2$ paramètres nécessaires à la description de μ. Les notions de *transformation de Möbius* et de *capacités k-additives* sont introduites à cette fin.

Définition 2.9 - Transformation de Möbius [122]
La transformation de Möbius $m : \mathfrak{P}(P) \to \mathbb{R}$ de la capacité μ est définie par :

$$m(A) = \sum_{K \subseteq A} (-1)^{|A \setminus K|} \, \mu(K)$$

L'expression de l'indice d'interaction d'un ensemble de critères (et par conséquent celle de la valeur de Shapley) peut être grandement simplifiée à l'aide de la transformation de Möbius [69] :

$$I(A) = \sum_{B \subseteq P \setminus A} \frac{1}{|B| + 1} \times m(A \cup B) \tag{2.1}$$

Définition 2.10 - K-additivité [70]
Une capacité μ est dite k-additive si sa transformation de Möbius vérifie :

- $\forall A \in \mathfrak{P}(P),\ |A| > k \Rightarrow m(A) = 0$
- $\exists A \in \mathfrak{P}(P),\ |A| = k$ et $m(A) \neq 0$

Les capacités k-additives sont particulièrement intéressantes car elles peuvent être exprimées à l'aide de seulement $\sum\limits_{i=1}^{k} \binom{p}{i}$ paramètres. Dans la littérature, les capacités 2-additives sont souvent considérées comme l'un des meilleurs compromis entre expressivité et complexité du modèle [73]. En effet, seuls $\frac{p\,(p+1)}{2}$ paramètres sont nécessaires à leur description et elles permettent de représenter des interactions entre paires de critères (les interactions entre des ensembles de critères plus grands étant de toute façon complexes à appréhender pour le décideur).

Par mesure de simplicité, les notations ϕ_i, m_i, m_{ij} et I_{ij} sont utilisées à la place de $\phi(i)$, $m(\{i\})$, $m(\{i,j\})$ et $I(\{i,j\})$ dans la suite du document. De plus, $\wedge$ et $\vee$ désignent respectivement les opérateurs min et max. Ainsi, pour une capacité 2-additive, l'équation 2.1 permet d'écrire :

$$I_{ij} = m_{ij} \tag{2.2}$$

$$\phi_i = m_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} I_{ij} \tag{2.3}$$

L'intégrale de Choquet d'une capacité 2-additive peut alors être exprimée à partir des valeurs de Shapley ϕ_i et des indices d'interactions I_{ij}.

Définition 2.11 - Intégrale de Choquet 2-additive [73]
Soit un vecteur $a \in \mathbb{R}^p$ et μ une fonction de capacité définie sur P. L'intégrale de Choquet 2-additive $C_\mu : \mathbb{R}_+^p \to \mathbb{R}_+$ est définie par :

$$C_\mu(a) = \sum_{I_{ij}>0} (a_i \wedge a_j) \times I_{ij} + \sum_{I_{ij}<0} (a_i \vee a_j) \times |I_{ij}| + \sum_{i \in P} a_i \times \Big[\, \phi_i - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} |I_{ij}| \,\Big]$$

Sous cette forme, l'interprétation de l'intégrale de Choquet 2-additive est facilitée. Si l'indice d'interaction entre critères I_{ij} est positif, les critères sont agrégés par l'opérateur min puisqu'ils sont complémentaires. En revanche, lorsque l'indice d'interaction I_{ij} est négatif, les critères sont agrégés par l'opérateur max puisqu'ils sont substituables l'un par rapport à l'autre. Le troisième terme de l'expression constitue la partie linéaire de l'intégrale de Choquet et n'est autre que la somme pondérée des valeurs de Shapley ϕ_i à laquelle la somme des interactions relatives au critère i a été retranchée.

Par réécriture de la définition 2.11, l'intégrale de Choquet peut s'exprimer uniquement en fonction de la capacité m. Cette forme bien que moins intuitive que la précédente évite le calcul de ϕ_i et facilite ainsi l'implémentation de C_μ.

$$C_\mu(a) = \sum_{m_{ij}>0} (a_i \wedge a_j) \times m_{ij} + \sum_{m_{ij}<0} (a_i \vee a_j) \times |m_{ij}| + \sum_{i \in P} a_i \times \Big[m_i - \sum_{\substack{j \neq i \\ m_{ij}<0}} |m_{ij}| \Big]$$

Pour conclure, il convient de préciser que certaines préférences ne peuvent être représentées avec le modèle proposé (voir [71] par exemple). Ces dernières peuvent néanmoins être traitées en utilisant une échelle de satisfaction ξ bipolaire (qui généralise la notion d'échelle unipolaire) [73]. Il faut toutefois employer des modèles qui requièrent plus d'informations préférentielles et qui sont plus complexes à réaliser.

2.3.5 Retour sur l'exemple illustratif

L'exemple de la comparaison d'étudiants présentés à la section 2.2.4 est reconsidéré. Les notes des étudiants et les fonctions d'utilités partielles du décideur demeurent inchangées mais la fonction d'agrégation utilisée est à présent une intégrale de Choquet 2-additive.

La valeur des critères mathématique (M), physique (P) et langue (L) obtenue par chaque étudiant est rappelée dans le tableau suivant.

	Mathématique (M)	Physique (P)	Langue (L)
Etudiant E_a	0.75	0.75	0.75
Etudiant E_b	0.875	0.875	0.5
Etudiant E_c	0.75	0.625	0.75

TABLEAU 2.4 – Exemple : Notes des étudiants

Les préférences du décideur sont modélisées par une capacité μ choisie telle que l'importance d'un critère k seul soit égale au poids w_k de ce dernier dans l'exemple initial (cf. section 2.4.2 pour plus de détails sur la construction d'une fonction de capacité).

$\mathfrak{P}(P)$	$\emptyset$	M	P	L	MP	ML	PL	MPL
μ	0	0.3	0.3	0.4	0.4	0.8	0.8	1
m	0	0.3	0.3	0.4	-0.2	0.1	0.1	0

TABLEAU 2.5 – Exemple : Fonction de capacité considérée

La transformation de Möbius de la capacité 2-additive μ (troisième ligne de la figure 2.5) est obtenue à partir de l'équation 2.1. Dans le cas 2-additif, l'indice d'interaction d'une paire de critères est égal à son coefficient de Möbius (cf. équation 2.2) ce qui permet de dire que les critères M et P sont substituables alors que les critères M et L (respectivement P et L) sont complémentaires. Cette fonction de capacité traduit la préférence du décideur pour les étudiants au profil équilibré : redondance entre les notes de sciences et complémentarité de la note de langue avec les notes de mathématiques et de physique.

A titre d'exemple, l'utilité de E_b (respectivement de E_c) est calculée avec la définition 2.6 et μ (respectivement la définition 2.11 et m) :

$$
\begin{aligned}
C_\mu(y^b) &= \mu(\{\sigma(M), \sigma(P), \sigma(L)\}) \times [\, y^b_{\sigma(M)} - y^b_{\sigma(0)} \,] + \\
&\quad \mu(\{\sigma(P), \sigma(L)\}) \times [\, y^b_{\sigma(P)} - y^b_{\sigma(M)} \,] + \\
&\quad \mu(\{\sigma(L)\}) \times [\, y^b_{\sigma(L)} - y^b_{\sigma(P)} \,] \\
&= y^b_L \ + \mu(\{M, P\}) \times [\, y^b_P - y^b_L \,] \ + \mu(\{M\}) \times [\, y^b_M - y^b_P \,] \\
&= 1 \times 0.5 \ + \ 0.4 \times 0.375 \ + \ 0.3 \times 0 \\
&= 0.65
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_\mu(y^c) &= (y^c_M \ \wedge \ y^c_L) \times m_{ML} \ + \ (y^c_P \ \wedge \ y^c_L) \times m_{PL} \ + \\
&\quad (y^c_M \ \vee \ y^c_P) \times |m_{MP}| \ + \ y^c_M \times [\, m_M - |m_{MP}| \,] \ + \\
&\quad y^c_P \times [\, m_P - |m_{MP}| \,] \ + \ y^c_L \times m_L \\
&= 0.75 \times 0.1 \ + \ 0.625 \times 0.1 \ + \ 0.75 \times 0.2 \ + \\
&\quad 0.75 \times 0.1 \ + \ 0.625 \times 0.1 \ + \ 0.75 \times 0.4 \\
&= 0.725
\end{aligned}
$$

Ainsi, les résultats obtenus lorsque C_μ est utilisée sont les suivants :

	Etudiant E_a	Etudiant E_b	Etudiant E_c
Utilité	0.75	0.65	0.725

TABLEAU 2.6 – Exemple : Utilités calculées à l'aide d'une intégrale de Choquet

Au sens de ce modèle MAUT construit à partir de u_{MP}, u_L et C_μ, les préférences du directeur au regard de ses étudiants sont : $E_a \succsim E_c \succsim E_b$. Il convient de noter que ce modèle représente mieux les préférences du directeur que celui basé sur la somme pondérée puisqu'ici l'étudiant E_c (profil équilibré) est préféré à l'étudiant E_b (performance en sciences uniquement). En outre, puisque la capacité a été choisie de sorte que $\mu(k) = w_k$, il apparait clairement que ce gain en pouvoir expressif provient de l'information supplémentaire que l'intégrale de Choquet peut modéliser à savoir les interactions entre critères.

Domaine de la gestion de crise

Les critères MAUT *peuvent être considérés comme des points de vue selon lesquels une solution est analysée. Il est possible d'agréger ces derniers les uns aux autres afin de déterminer le score associé aux solutions du problème considéré. Leur grande expressivité est particulièrement intéressante pour le domaine de la gestion de crise puisqu'ils peuvent être utilisés pour modéliser des préférences relativement variées. A titre d'exemple, le choix de la ministre de la santé française d'acquérir en masse et de façon préventive des vaccins contre la grippe H1N1 avait été fortement critiqué en 2009 en raison de son fort coût économique. En revanche, analysé selon un critère visant à maximiser les mesures de précaution, cette décision peut apparaître comme satisfaisante.*

Les préférences MAUT *sont par nature relativement différentes des préférences* PDDL3 *utilisées en planification. Il reste donc à déterminer si ces deux formalismes peuvent cohabiter l'un avec l'autre. La réponse à cette interrogation est affirmative comme expliqué dans la section 3.1 qui décrit une solution pour encoder des préférences* PDDL3 *à l'aide de critères* MAUT.