

Modélisation de la propagation non-linéaire dans une fibre optique

Un des objectifs de cette thèse est l'étude de la régénération optique à base de fibres optiques non-linéaires. Mes travaux de thèse ont débuté avec la modélisation d'un régénérateur utilisant le phénomène d'auto-modulation de phase dans une fibre optique non-linéaire (voir chapitre 4). L'équation qui permet de modéliser ce phénomène est l'équation non-linéaire de Schrödinger (ENLS). Elle se résout en général numériquement et une des méthodes les plus couramment utilisées, en raison de sa simplicité et de son efficacité, est la méthode dite split-step Fourier (SSF).

Si le temps de calcul de la solution numérique de l'ENLS est quasi immédiat pour un signal impliquant une seule impulsion par exemple, ce temps de calcul devient vite un handicap lorsqu'on veut traiter des signaux de 1024 impulsions, 2048 impulsions, voir plus. Or, comme nous le verrons au chapitre 4, c'est le genre de signaux que nous chercherons à propager au cours d'une des approches concernant l'étude théorique du régénérateur. Nous avons donc recherché, parmi les différentes méthodes SSF proposées dans la littérature, celles qui optimisent le temps de calcul de la solution numérique de l'ENSL. Nous nous sommes aperçus que, moyennant quelques modifications astucieuses de leur algorithme, certaines des méthodes les plus performantes pouvaient encore être améliorées afin d'augmenter leur efficacité. Nous avons également proposé une méthode qui, pour la première fois à notre connaissance, permet de résoudre l'ENLS avec une précision choisie.

Nous débuterons ce chapitre par la présentation de l'ENLS. Nous poursuivrons par l'explication de la méthode SSF de base permettant de résoudre numériquement l'ENSL. Nous étudierons ensuite les facteurs qui limitent la précision de la méthode SSF de base pour un temps de calcul donné. Nous verrons alors quelles méthodes ont été développées dans la littérature afin d'améliorer la précision de la méthode SSF avec des temps de calcul acceptables. Nous évaluerons ensuite les performances des différentes méthodes présentées au paragraphe précédent en retenant celles qui auront un intérêt pour nous, à savoir la méthode SSF symétrique trapézoïdale, la méthode SSF symétrique moyenne et la méthode

SSF symétrique à erreur locale.

Dans la suite du chapitre nous présenterons nos contributions originales permettant d'augmenter l'efficacité des trois méthodes citées précédemment. Nous présenteront également notre méthode originale permettant de résoudre l'ENLS avec une précision choisie. Enfin nous ferons le bilan des différentes méthodes présentées dans ce chapitre et tenterons d'éclairer un utilisateur potentiel sur le choix d'une méthode face à un problème donné.

2.1 L'équation non-linéaire de Schrödinger

L'équation non-linéaire de Schrödinger est une équation qui gouverne la propagation des impulsions dans la fibre optique. Elle est obtenue à partir des équations de Maxwell, qui gouvernent la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu. Cette équation est valable pour des impulsions plus larges qu'une picoseconde [22].

Si on ne tient pas compte des effets Raman et Brillouin, la propagation d'impulsions dans une fibre optique monomode est affectée par trois phénomènes principaux : les pertes, la dispersion de vitesse de groupe (ou dispersion chromatique) et la non-linéarité de type Kerr. Les influences de ces phénomènes sont décrites par l'équation non-linéaire de Schrödinger (ENLS). La forme usuelle de cette équation est la suivante [22] :

$$i \frac{\partial U(z, \tau)}{\partial z} + i \frac{\alpha}{2} U(z, \tau) - \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 U(z, \tau)}{\partial \tau^2} + \gamma |U(z, \tau)|^2 U(z, \tau) = 0, \quad (2.1)$$

où $U(z, \tau)$ est l'enveloppe lentement variable du champ électrique, z la distance de propagation, α les pertes, β_2 la dispersion chromatique, τ le temps (défini dans un repère qui se propage à la même vitesse de groupe que l'impulsion) et γ le coefficient non-linéaire qui est décrit par l'équation (1.30).

L'ENLS possède une autre forme où les paramètres sont normalisés et les pertes négligées. Cette forme normalisée est très utile dans le traitement de la transmission soliton [22] :

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\beta_2}{|\beta_2|} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial T^2} + |u|^2 u = 0, \quad (2.2)$$

où ξ est la distance normalisée $\xi = z/L_D$, L_D est la longueur de dispersion définie à l'équation (1.24), $T = \tau/T_0$ est le temps normalisé et u le champ électrique normalisé :

$$u = N \frac{U}{\sqrt{P_0}} \quad (2.3)$$

où N est l'ordre soliton défini par :

$$N^2 = \frac{L_D}{L_{NL}} \quad (2.4)$$

avec L_{NL} la longueur non-linéaire définie à l'équation (1.32).

Lorsque les effets non-linéaires d'ordre supérieur et les effets dispersifs d'ordre supérieur ne sont plus négligés (par exemple si la durée de impulsions est très inférieure à la picoseconde

et/ou la dispersion β_2 de la fibre est négligeable), l'équation (2.1) prend la forme généralisée suivante [22] :

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\alpha}{2}U + \frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{i}{6}\beta_3 \frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3} = i\gamma[|U|^2U + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial \tau}(|U|^2U) - T_R U \frac{\partial |U|^2}{\partial \tau}] \quad (2.5)$$

où β_3 est la dispersion du troisième ordre, $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$ la fréquence angulaire et T_R la constante de temps Raman.

Si l'on prend en compte le phénomène de modulation de phase croisée ou la biréfringence de la fibre, l'ENLS devient dégénérée en deux ENLS couplées [22]. Si l'on prend en compte le gain éventuel de la fibre (fibre dopée aux terres rares tels que Er^{3+} , Yb^{3+} ...), l'ENLS devient l'équation de Ginzburg-Landau [89–91].

Quelle que soit la forme de l'ENLS, les méthodes numériques pour la résoudre reposent presque toutes sur le même principe. Nous ne décrivons donc ces méthodes de résolution que dans le cas de la version simplifiée de l'ENLS donnée par la relation (2.1). Cette relation est une équation différentielle du deuxième ordre en temps et différentielle du premier ordre en distance. Cette équation ne possède pas de solution analytique, sauf dans le cas de la transmission soliton [22], lorsque les pertes sont négligées, où la méthode dite *inverse scattering method* peut être utilisée. Dans le cas général, des méthodes numériques doivent être utilisées. Parmi elles, la méthode split-step Fourier (SSF) est la plus utilisée en raison de sa simplicité et de son efficacité [92].

Par la suite, nous allons présenter cette méthode en détail.

2.2 La méthode split step Fourier de base

La méthode SSF a été utilisée pour la première fois par Hasegawa [93]. Depuis, elle est devenue très populaire [22, 94, 95]. Pour résoudre l'ENLS, il est commode de réécrire (2.1) comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial z} = (\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{N}})U \quad (2.6)$$

où $\hat{\mathbf{L}}$ est l'opérateur linéaire, défini par :

$$\hat{\mathbf{L}} = -\frac{1}{2} \left(\alpha + i\beta_2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \quad (2.7)$$

$\hat{\mathbf{N}}$ est l'opérateur non-linéaire, défini par :

$$\hat{\mathbf{N}} = i\gamma|U|^2 \quad (2.8)$$

Supposons que la distance h de propagation soit très petite de telle sorte que l'opérateur $\hat{\mathbf{N}}$ puisse être considéré comme constant sur la distance h . La solution de (2.6) peut donc s'écrire :

$$U(h, \tau) \simeq \exp \left[h(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{N}}) \right] U(0, \tau) \quad (2.9)$$

Notons que dans le cas où l'opérateur $\hat{\mathbf{N}}$ est indépendant de la distance z , la relation (2.9) devient la solution exacte de (2.6).

Pour une distance de propagation plus grande, on divise la ligne de transmission en petits tronçons de taille h . Pour chaque tronçon on utilise la formule 2.9.

Pour un tronçon quelconque de z à $z + h$, on a :

$$U(z + h, \tau) \simeq \exp \left[h(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{N}}) \right] U(z, \tau) \quad (2.10)$$

L'opération de partition du milieu de propagation en tronçons élémentaires est appelée "split-step".

Comme nous le verrons au paragraphe 2.3.2, du fait que h soit petit, on considère que les opérateurs $\hat{\mathbf{L}}$ et $\hat{\mathbf{N}}$ commutent. Le membre de droite de l'équation (2.10) peut être décomposé comme :

$$\exp \left[h(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{N}}) \right] U(z, \tau) \simeq \exp(h\hat{\mathbf{L}})\exp(h\hat{\mathbf{N}})U(z, \tau) \quad (2.11)$$

L'équation (2.10) devient :

$$U(z + h, \tau) \simeq \exp(h\hat{\mathbf{L}})\exp(h\hat{\mathbf{N}})U(z, \tau) \quad (2.12)$$

L'équation (2.12) peut être résolue en considérant consécutivement les deux équations suivantes :

$$V(z + h, \tau) \simeq \exp(h\hat{\mathbf{N}})U(z, \tau), \quad (2.13)$$

$$U(z + h, \tau) = \exp(h\hat{\mathbf{L}})V(z + h, \tau), \quad (2.14)$$

L'opérateur $\hat{\mathbf{N}}$ est un facteur multiplicatif dans le domaine du temps. L'équation (2.13) est donc facile à résoudre. L'équation (2.14) est moins évidente à résoudre car l'opérateur $\hat{\mathbf{L}}$ contient un opérateur différentiel du deuxième ordre en temps. Pour résoudre cette équation on passe dans le domaine des fréquences en utilisant la transformée de Fourier. L'opérateur $\partial^2/\partial^2\tau$ devient donc une multiplication par le terme $(i\omega)^2$. Après avoir traité l'opérateur $\hat{\mathbf{L}}$ comme une simple multiplication, on repasse dans le domaine temporel en utilisant la transformée de Fourier inverse.

Au final, la solution de l'équation (2.1) devient :

$$U(z + h, \tau) \simeq F^{-1} \left[\exp \left(-\frac{i\hbar}{2}\beta_2(i\omega)^2 \right) F \left[\exp(i\hbar\gamma|U|^2) U(z, \tau) \right] \right], \quad (2.15)$$

où F représente la transformée de Fourier et F^{-1} la transformée de Fourier inverse.

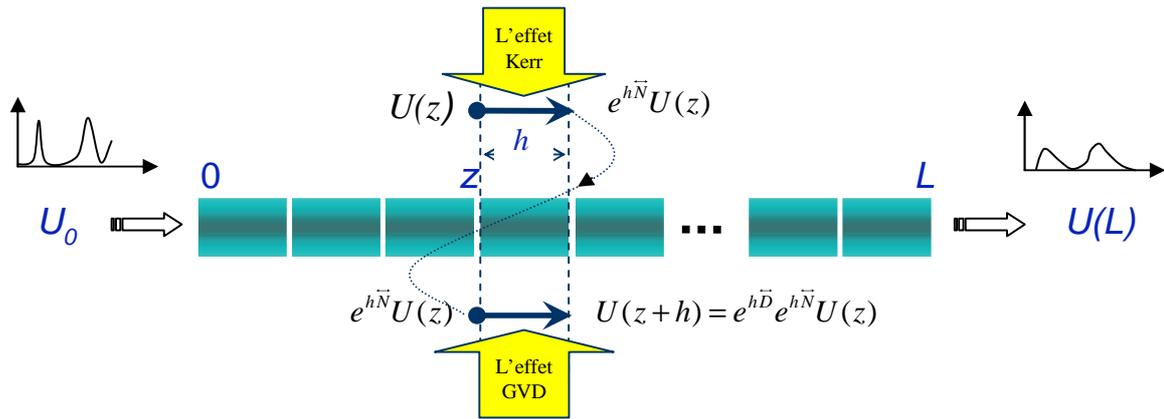


FIG. 2.1 – Schématisation de la méthode SSF de base.

La combinaison du processus *split step* et de la transformée de Fourier a donné naissance à l'appellation de *split step Fourier* pour cette méthode de résolution de l'ENLS.

La figure 2.1 permet de se représenter de façon schématique la méthode SSF. Du point de vue de l'interprétation physique de la méthode SSF, celle-ci implique que l'effet Kerr et l'effet de la dispersion s'appliquent non pas de manière simultanée sur l'impulsion, mais l'un après l'autre. Notons que d'après la solution (2.15), l'effet Kerr est exécuté avant l'effet de dispersion. On peut cependant échanger l'ordre de l'exécution sans influence sur le résultat.

2.3 Les principales limitations de la méthode SSF

Nous venons de décrire la méthode SSF de base dans laquelle certaines approximations ont été utilisées. Ces approximations influencent la précision de la résolution en provoquant un écart plus ou moins important entre la solution numérique et la solution exacte. De plus, l'échantillonnage du signal, lié à la résolution numérique, est une source supplémentaire d'erreur.

Par la suite, nous considérons en détail les facteurs qui influencent la précision du résultat de la méthode SSF ainsi que des solutions qui ont été développées dans la littérature pour limiter les erreurs.

2.3.1 La résolution et la fenêtre temporelle du signal

Dans les simulations numériques ainsi que dans l'utilisation de la méthode SSF, la détermination de la résolution en temps et en fréquence ainsi que la fenêtre temporelle et spectrale pour décrire le signal est très importante. Un *bon choix* des paramètres pour échantillonner le signal va réduire les erreurs de simulation. C'est le choix de ces paramètres qui permet d'obtenir les résultats numériques les moins erronés possible dans un temps de calcul acceptable. Il est évident que plus la résolution est fine, moins les résultats sont erronés, mais plus les calculs sont longs. Il y a donc un compromis à respecter. Nous rappelons ici que ce

compromis est dicté par les quelques règles de base suivantes.

- Pour le calcul de la transformée de Fourier, la méthode SSF utilise un algorithme qui s'appelle FFT (Fast Fourier Transform) [96]. Pour optimiser l'utilisation de cet algorithme, le signal doit être échantillonné uniformément par 2^m échantillons.
- Selon le théorème de Nyquist [97], il faut prendre une fréquence d'échantillonnage égale à au moins deux fois la fréquence maximale du signal pour pouvoir reproduire le signal à partir de ces échantillons. La résolution en temps du signal dépend donc du signal à simuler.
- Au cours de la transmission, le signal à simuler peut être élargi sous l'influence de la dispersion. Pour que l'élargissement du signal ne déborde pas de la fenêtre du signal, la fenêtre temporelle doit être assez grande. Généralement, il est conseillé de prendre un rapport d'environ 20 à 30 entre la fenêtre temporelle et la durée à mi-hauteur du signal [22].

Si l'on respecte ces quelques règles de base, on s'assure que les erreurs de simulation ne seront pas dictées par un mauvais fenêtrage du signal.

2.3.2 La non-commutativité des opérateurs

Dans ce paragraphe nous présentons l'erreur de simulation liée à la non-commutativité des opérateurs linéaires et non-linéaires et présentons les méthodes SSF d'ordre supérieur qui permettent de limiter cette erreur.

Au cours du passage de l'équation (2.10) à l'équation (2.12), nous avons supposé que les opérateurs $\hat{\mathbf{L}}$ et $\hat{\mathbf{N}}$ commutent. En général, ils ne sont pas commutatifs et pour la décomposition du membre de droite de l'équation (2.10), une méthode plus rigoureuse consiste à appliquer la formule de Baker-Hausdorff [98,99]. Pour deux opérateurs $\hat{\mathbf{L}}$ et $\hat{\mathbf{N}}$ quelconques, cette relation permet d'écrire :

$$\exp(\hat{\mathbf{L}})\exp(\hat{\mathbf{N}}) = \exp \left\{ \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{N}} + \frac{1}{2!}[\hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{N}}] + \frac{1}{3!} \left([\hat{\mathbf{L}}, [\hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{N}}]] + [[\hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{N}}], \hat{\mathbf{N}}] \right) + \dots \right\} \quad (2.16)$$

où $[\hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{N}}] = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{N}} - \hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{L}}$ est le commutateur de $\hat{\mathbf{L}}$ et $\hat{\mathbf{N}}$.

On constate alors que l'équation (2.11) est une approximation au premier ordre de l'équation (2.10). La précision de cette approximation est du second ordre en h . En effet, l'erreur liée à l'approximation au premier ordre s'écrit :

$$\epsilon = \frac{1}{2!}[h\hat{\mathbf{L}}, h\hat{\mathbf{N}}] = h^2 \frac{1}{2!}[\hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{N}}] \sim h^2 \quad (2.17)$$

La méthode SSF obtenue en utilisant l'approximation au premier ordre (2.11) s'appelle la méthode SSF du premier ordre (f-SSF pour first-order SSF).

En raison de la non-commutativité des deux opérateurs, pour améliorer la précision de la méthode SSF, il faut augmenter l'ordre d'approximation dans la décomposition de la partie droite de l'équation (2.10). Plus l'ordre de l'approximation est élevé, plus la solution

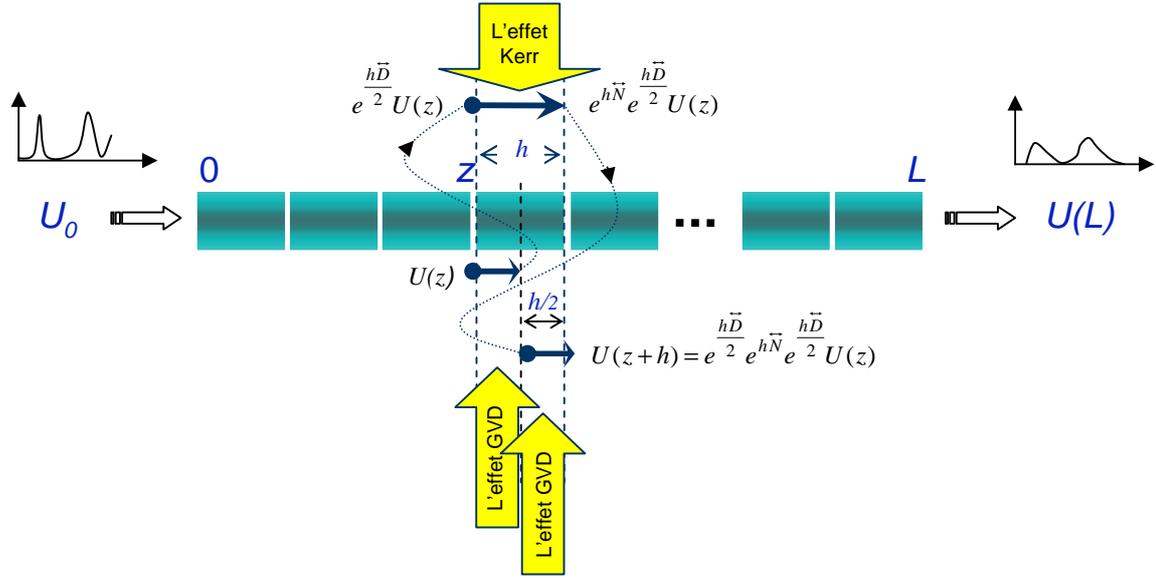


FIG. 2.2 – Schématisation de la méthode s-SSF.

est précise [100]. Cependant, l'algorithme SSF sera plus complexe et son temps de calcul sera plus long. Pour cette raison, la plupart des utilisateurs se limitent à la méthode SSF du deuxième ordre (s-SSF pour second-order SSF). Elle se présente sous la forme suivante [22, 101] :

$$U(z+h, \tau) \simeq \exp\left(\frac{h}{2}\hat{\mathbf{L}}\right) \exp(h\hat{\mathbf{N}}) \exp\left(\frac{h}{2}\hat{\mathbf{L}}\right) U(z, \tau) \quad (2.18)$$

Cette solution est précise au troisième ordre en h . En effet :

$$\begin{aligned} & \exp\left(\frac{h}{2}\hat{\mathbf{L}}\right) \exp(h\hat{\mathbf{N}}) \exp\left(\frac{h}{2}\hat{\mathbf{L}}\right) = \\ &= \exp\left(\frac{h}{2}\hat{\mathbf{L}}\right) \exp\left[h\hat{\mathbf{N}} + \frac{h}{2}\hat{\mathbf{L}} + \frac{h^2}{4}\hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{L}} - \frac{h^2}{4}\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{N}} + O(h^3)\right] \\ &= \exp\left[\frac{h}{2}\hat{\mathbf{L}} + h\hat{\mathbf{N}} + \frac{h}{2}\hat{\mathbf{L}} + \frac{h^2}{4}\hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{L}} - \frac{h^2}{4}\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{N}} + \frac{h^2}{4}\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{N}} + \frac{h^2}{4}\hat{\mathbf{L}}^2 - \frac{h^2}{4}\hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{L}} - \frac{h^2}{4}\hat{\mathbf{L}}^2 + O(h^3)\right] \\ &= \exp\left[h\hat{\mathbf{N}} + h\hat{\mathbf{L}} + O(h^3)\right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

Donc, pour une même taille de tronçon h , la méthode s-SSF donne un résultat plus précis que celui donné par la méthode f-SSF.

Du point de vue physique, au cours de la propagation, les impulsions simulées par la méthode s-SSF subissent l'effet linéaire et l'effet non-linéaire de façon intermittente sur chaque tronçon. L'effet non-linéaire est accumulé au milieu du tronçon tandis que l'effet linéaire est appliqué sur chaque demi-tronçon (voir figure 2.2).

Pour différencier les méthodes s-SSF et f-SSF, nous présentons, sur la figure 2.3, les différentes étapes d'exécution des opérateurs linéaire et non-linéaire pour chacune des deux méthodes. Nous constatons que la méthode s-SSF est plus complexe à mettre en œuvre (elle

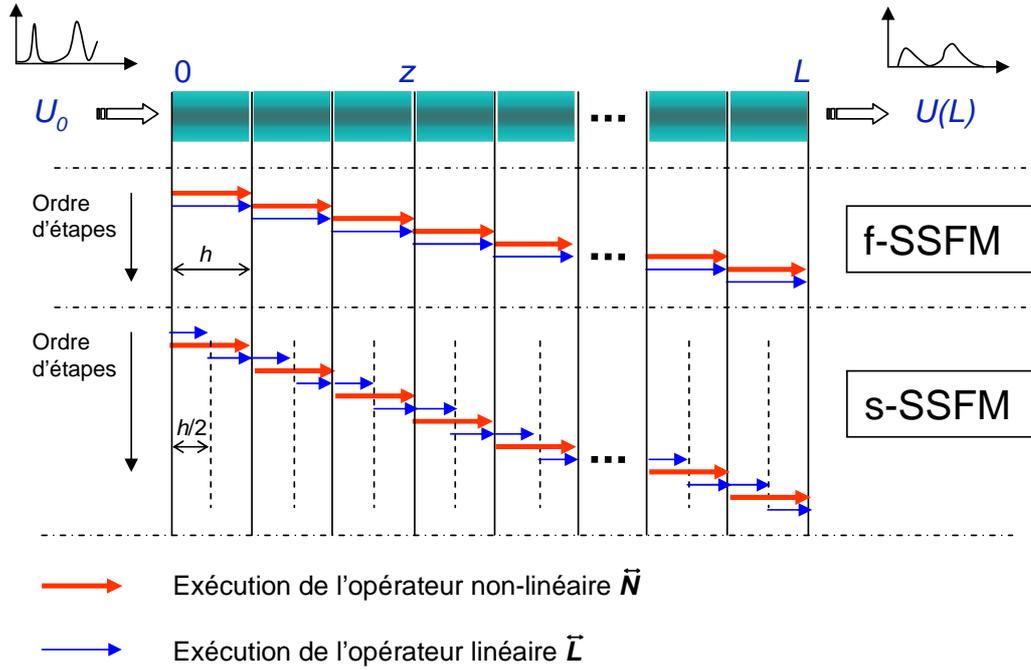


FIG. 2.3 – Schématisation de la procédure pour les méthodes f-SSF et s-SSF.

nécessite un opérateur de plus sur chaque tronçon). Par contre, elle est plus efficace dans la plupart de cas.

2.3.3 La dépendance en z de l'opérateur non-linéaire

Dans ce paragraphe nous présentons l'erreur de simulation liée à la dépendance en z de l'opérateur non-linéaire et présentons les méthodes SSF symétriques qui permettent de limiter cette erreur.

Pour obtenir l'équation (2.10) à partir de l'équation (2.6), nous avons dû supposer que l'opérateur \hat{N} ne dépendait pas de la distance z sur un petit tronçon h . En réalité, l'opérateur non-linéaire dépend directement de l'intensité du signal qui varie pendant la propagation. Cette hypothèse d'indépendance de l'opérateur \hat{N} introduit des erreurs dans les résultats de simulations. Cela veut dire que si la dépendance en z pouvait être estimée dans le calcul de l'opérateur \hat{N} , la précision de la méthode SSF pourrait être améliorée.

Afin de prendre en compte la dépendance en z de l'opérateur \hat{N} dans l'équation (2.18), on remplace le terme $\exp(h\hat{N})$ par la terme $\exp\left[\int_z^{z+h} \hat{N}(z)dz\right]$ [22, 101, 102] :

$$U(z+h, \tau) \simeq \exp\left(\frac{h}{2}\hat{L}\right) \exp\left(\int_z^{z+h} \hat{N}(z)dz\right) \exp\left(\frac{h}{2}\hat{L}\right) U(z, \tau) \quad (2.20)$$

Cette méthode est connue sous le nom de méthode SSF symétrique (S-SSF pour Symmetrized SSF) [22, 101]. Pour calculer le terme intégral dans l'équation (2.20), la règle de quadrature des trapèzes peut être appliquée [22, 102, 103] :

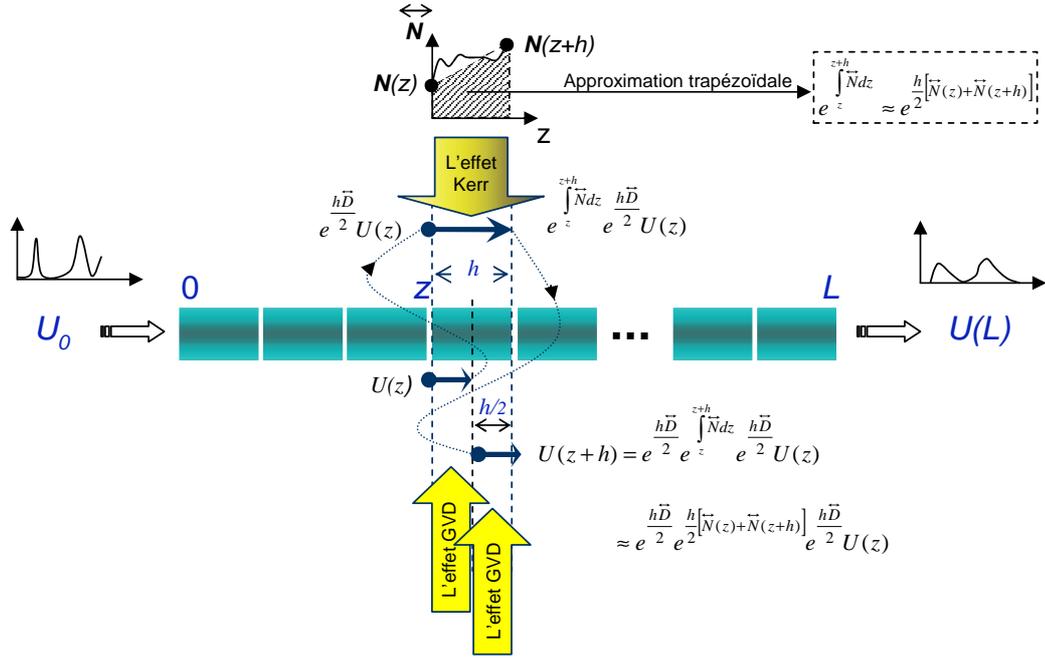


FIG. 2.4 – Schématisation de la méthode S-SSF trapézoïdale.

$$\int_z^{z+h} \hat{N} dz = \frac{h}{2} [\hat{N}(z+h) + \hat{N}(z)] \quad (2.21)$$

Cette approximation utilisant une règle trapézoïdale donne une solution plus exacte que la solution donnée par l'équation (2.18). Nous appelons cette méthode la méthode *S-SSF trapézoïdale* :

$$U(z+h, \tau) \simeq \exp\left(\frac{h}{2} \hat{\mathbf{L}}\right) \exp\left(\frac{h}{2} [\hat{N}(z+h) + \hat{N}(z)]\right) \exp\left(\frac{h}{2} \hat{\mathbf{L}}\right) U(z, \tau) \quad (2.22)$$

Le schéma de la figure 2.4 résume la procédure de la méthode S-SSF trapézoïdale.

L'exécution de l'équation (2.21) est moins simple qu'il n'y paraît puisque $\hat{N}(z+h)$ n'est pas déterminé au moment où l'on veut calculer $U(z+h, \tau)$ dans la mesure où $\hat{N}(z+h)$ est calculé à partir de $|U(z+h, \tau)|^2$.

Pour contourner ce problème, on doit effectuer une procédure itérative en deux étapes :

- Dans la première étape, $\hat{N}(z+h)$ dans l'équation (2.22) est remplacé par $\hat{N}(z)$ pour estimer une valeur temporaire de $U(z+h, \tau)$. A l'aide de cette valeur temporaire de $U(z+h, \tau)$, $\hat{N}(z+h)$ est déterminé.
- Dans la deuxième étape, cette valeur de $\hat{N}(z+h)$ est introduite dans l'équation (2.22) pour trouver la valeur définitive de $U(z+h, \tau)$.

La succession des étapes de calculs dans l'algorithme de cette procédure itérative est présentée par la figure 2.5. Pour chaque pas, trois calculs de l'opérateur linéaire et deux calculs de l'opérateur non-linéaire sont effectués.

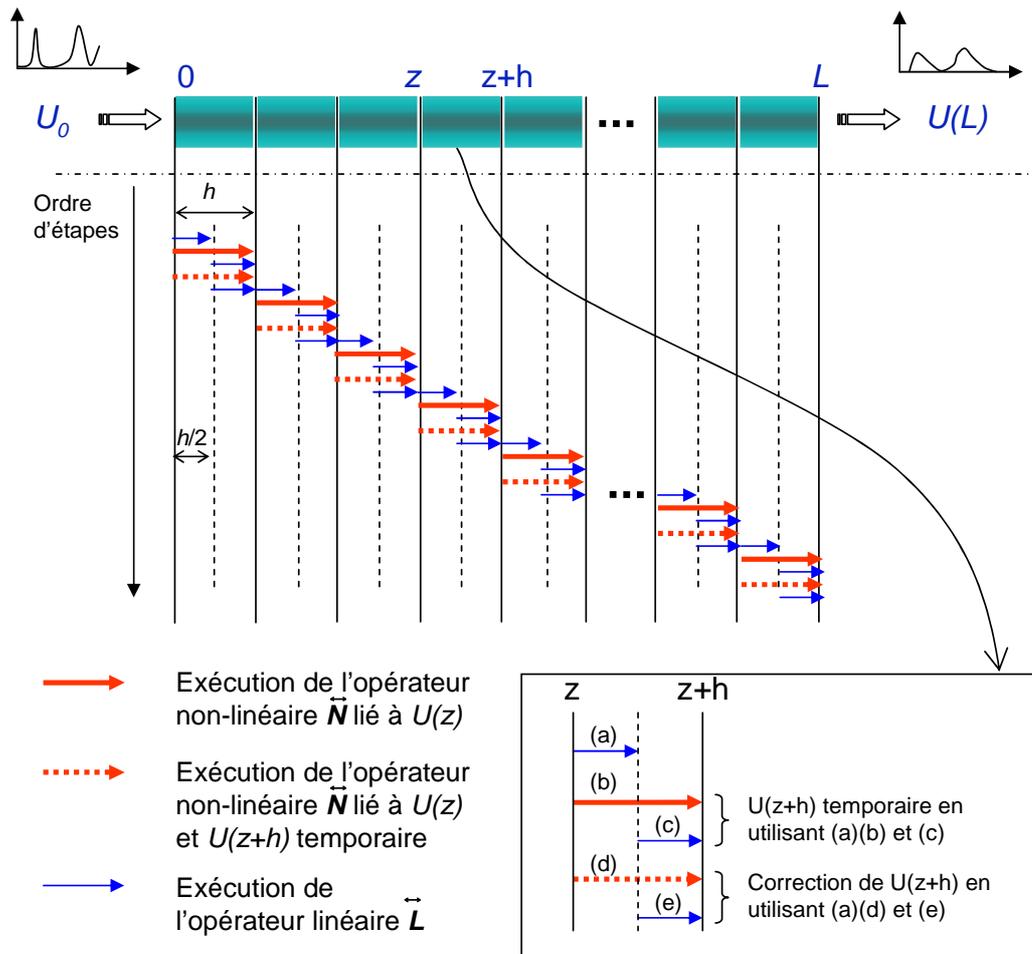


FIG. 2.5 – Schématisation de la procédure pour la méthode S-SSF trapézoïdale incluant les procédures itératives à chaque tronçon.

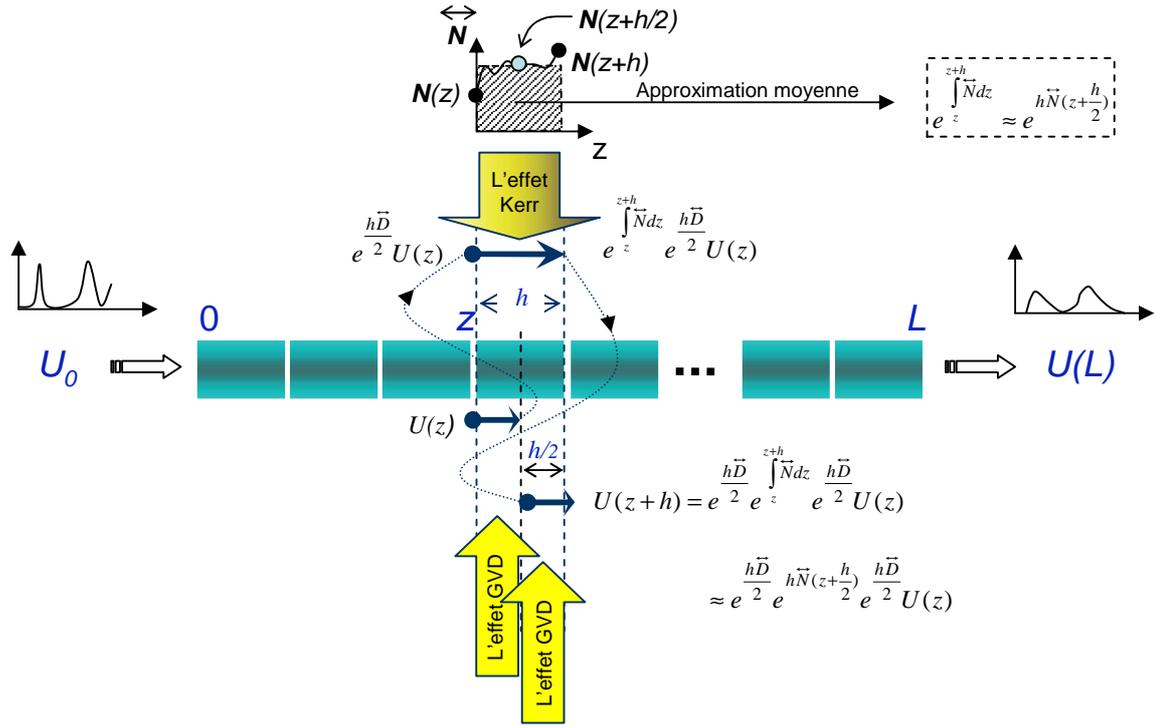


FIG. 2.6 – Schéma de la méthode S-SSF moyenne.

Avec les mêmes tailles de tronçon, le temps de calcul de la méthode S-SSF trapézoïdale est trois fois plus grand que celui de la méthode f-SSF. En effet, le temps de calcul des méthodes SSF dépend principalement du nombre de fonctions FFT utilisées dans l'opérateur $\hat{\mathbf{L}}$ à chaque tronçon. Or, pour la méthode S-SSF trapézoïdale, on utilise, à chaque tronçon, trois évaluations de l'opérateur $\hat{\mathbf{L}}$ contre une évaluation pour la méthode f-SSF. Malgré cet inconvénient, la méthode S-SSF trapézoïdale est plus efficace que la méthode f-SSF parce qu'elle permet d'utiliser des tronçons de taille plus grande que ceux utilisés par la méthode f-SSF en gardant la même précision dans les résultats.

Il existe une autre technique pour évaluer le terme intégral dans l'équation (2.20). C'est l'approximation par une valeur constante moyenne calculée au milieu du tronçon [104, 105] :

$$U(z+h, \tau) \simeq \exp\left(\frac{h}{2}\hat{\mathbf{L}}\right) \exp\left(h\hat{\mathbf{N}}(z+h/2)\right) \exp\left(\frac{h}{2}\hat{\mathbf{L}}\right) U(z, \tau) \quad (2.23)$$

Le schéma de la figure 2.6 résume la procédure de cette méthode que nous appellerons méthode *S-SSF moyenne*. Pour pouvoir exécuter l'équation (2.23), il faut connaître la valeur de $U(z+h/2)$. Comme l'on ne connaît que celle de $U(z)$, il faut une étape supplémentaire. C'est le calcul de $U(z+h/2)$ en utilisant la méthode f-SSF :

$$U(z+h/2, \tau) \simeq \exp\left(\frac{h}{2}\hat{\mathbf{L}}\right) \exp\left(\frac{h}{2}\hat{\mathbf{N}}\right) U(z, \tau). \quad (2.24)$$

Cette technique d'approximation est plus précise que la méthode f-SSF mais nécessite

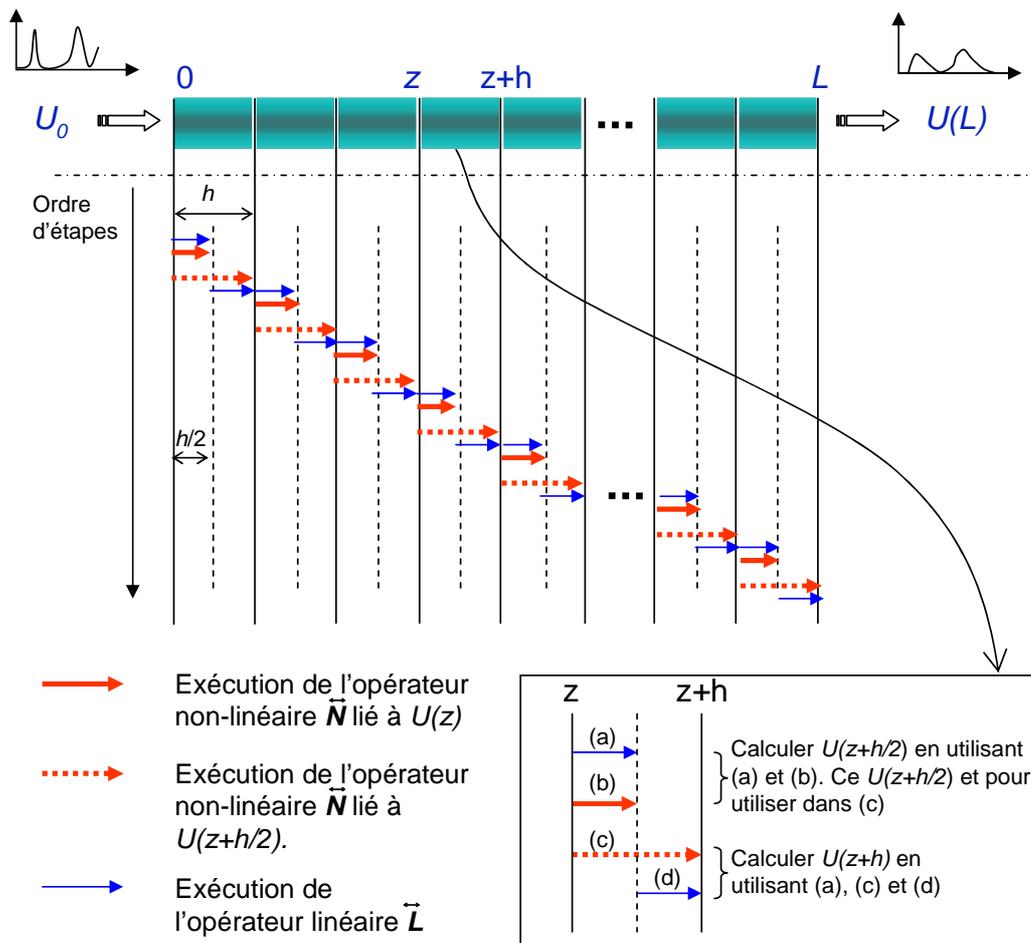


FIG. 2.7 – Schématisation de la procédure pour la méthode S-SSF moyenne.

deux fois plus de temps de calcul car elle utilise deux fois l'opérateur linéaire à chaque tronçon.

La succession des étapes de calculs dans l'algorithme de la méthode S-SSF moyenne est présentée par la figure 2.7.

Notons que l'étape qui consiste à évaluer la valeur de $\hat{N}(z+h/2)$ est une estimation du premier ordre tandis que celle de la méthode S-SSF trapézoïdale (calcul de $\hat{N}(z+h)$) est une estimation du deuxième ordre.

2.3.4 La distribution spatiale des tronçons

Dans ce paragraphe nous présentons l'erreur de simulation liée à la distribution spatiale des tronçons et présentons les méthodes SSF à pas variable qui permettent de limiter cette erreur.

La taille du tronçon joue un rôle très important pour la détermination de la précision de la solution numérique. Plus les tailles de tronçon sont petites, plus la précision de la méthode SSF est bonne. Si la taille du tronçon tend vers zéro, la solution numérique de

l'équation ENLS devient la solution exacte.

D'un autre côté, plus la taille du tronçon est petite, plus le nombre de tronçons augmente. Par conséquent, le temps de calcul augmente.

Pour chercher le compromis entre le choix de la taille du tronçon et le temps de calcul, on peut chercher à adapter les tailles de tronçon. En effet, durant la propagation les propriétés du signal (forme, puissance, etc) changent. Aux endroits de la transmission où le changement du signal est rapide, on a intérêt à prendre de petits tronçons pour pouvoir suivre ce changement. Cependant, si le changement est lent, ce n'est pas nécessaire.

Ainsi, pour augmenter la précision tout en gardant un temps de calcul raisonnable, il est recommandé d'avoir une bonne connaissance de la transmission pour pouvoir trouver la bonne distribution des tailles de tronçons.

Plusieurs travaux sur le choix du schéma de distribution spatiale des tronçons ont été menés [106]. Différents schémas ont été proposés et ont conduit à différentes variantes de méthode SSF à pas variable. Nous en présenterons quelques unes, telles que la méthode à rotation de phase et la méthode de l'erreur locale.

2.3.4.1 La méthode SSF à rotation de phase

Dans la méthode SSF à rotation de phase, la taille du tronçon est choisie de telle manière à ce que le changement de phase dû à la non-linéarité ne dépasse pas un certain seuil limite. Après propagation sur une longueur h de fibre, le déphasage, dû à la SPM, d'un signal $U(\tau)$ vaut [22] :

$$\phi_{NL}(h, \tau) = \gamma |U(0, \tau)|^2 \frac{1 - \exp(-\alpha h)}{\alpha} \quad (2.25)$$

Donc le déphasage maximal ϕ_{NL}^{max} correspond à une puissance maximale P_{max} :

$$\phi_{NL}^{max} = \gamma P_{max} \frac{1 - \exp(-\alpha h)}{\alpha} \quad (2.26)$$

Selon l'équation (2.26), on voit que le déphasage du signal ne dépasse pas ϕ_{NL}^{max} si l'on choisit la taille du tronçon comme une fonction de la puissance maximale :

$$h = - \frac{\ln \left(1 - \frac{\alpha \phi_{NL}^{max}}{\gamma P_{max}} \right)}{\alpha} \quad (2.27)$$

En supposant les pertes négligeables ($\alpha \simeq 0$), l'équation (2.27) devient :

$$h = \frac{\phi_{NL}^{max}}{\gamma P_{max}} \quad (2.28)$$

La figure 2.8 schématise le choix des tailles de tronçon selon la méthode à rotation de phase.

Clairement, la méthode SSF à rotation de phase est adaptée aux simulation de transmission où la SPM est importante, comme par exemple, les études concernant la transmission des solitons.

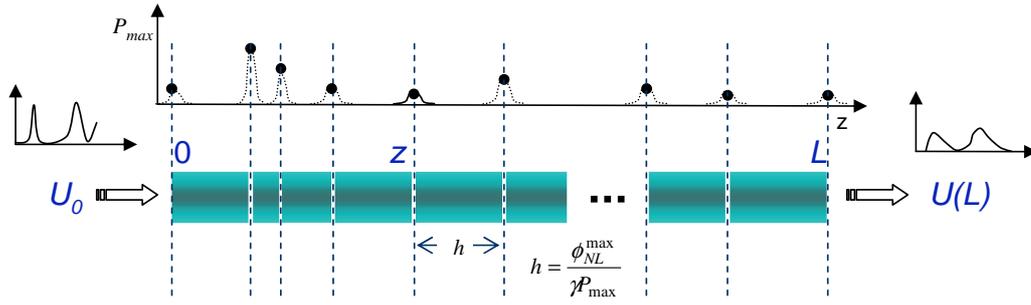


FIG. 2.8 – La méthode SSF à rotation de phase.

2.3.4.2 La méthode SSF à erreur locale

Généralement, les méthodes SSF à pas variable telles que les méthodes présentées précédemment dépendent du système étudié parce que l'on doit connaître certaines propriétés du système. En 2003, Sinkin *et al.* ont proposé une méthode, appelé méthode SSF à erreur locale (LEM pour Local Error Method) qui fonctionne quelque soit le système pour lequel elle est appliquée [106].

Le but de la méthode LEM est de fournir une stratégie pour le choix de la taille optimale de tronçons quelque soient le type de systèmes. Cette méthode assure que les erreurs locales (erreurs dans chaque tronçon) sont limitées par une certaine valeur δ_G (l'erreur locale donnée). Un ordre de précision supplémentaire est obtenu grâce à cette méthode alors qu'elle n'utilise que 50% de temps de calcul supplémentaire par rapport à la méthode SSF de base [106]. Les étapes de l'algorithme de la méthode LEM sont :

Étape 1 . Chercher la solution brute U_c à $z + 2h$ en appliquant la méthode S-SSF pour $U(z, \tau)$ avec une taille du tronçon de $2h$. Poser ensuite $U_c = U_t(z + 2h, \tau) + C(2h)^3 + O(h^4)$, où $U_t(z + 2h, \tau)$ est la solution exacte à $z + 2h$, et C une constante.

Étape 2 . Chercher la solution U_f à $z + 2h$ en utilisant la méthode S-SSF pour $U(z, \tau)$ avec deux tronçons de taille h . Comme pour l'étape 1, poser $U_f = U_t(z + 2h, \tau) + 2Ch^3 + O(h^4)$.

Étape 3 . Effectuer l'évaluation de l'erreur locale relative définie par :

$$\delta = \frac{\|U_f - U_c\|}{\|U_f\|} \quad (2.29)$$

avec $\|U(\tau)\| = \sqrt{\int |U(\tau)|^2 d\tau}$.

Étape 4 . Déterminer la solution optimale à $z + 2h$:

$$U(z + 2h, \tau) = \frac{4}{3}U_f - \frac{1}{3}U_c = U_t(z + 2h, \tau) + O(h^4) \quad (2.30)$$

Étape 5 . Déterminer la taille du prochain tronçon en comparant δ et δ_G :

- Si $\delta > 2\delta_G$, éliminer la solution $U(z + 2h, \tau)$ et la re-calculer en prenant la moitié de la taille du tronçon.

- Si $\delta_G < \delta \leq 2\delta_G$, la taille du prochain tronçon est égale à la taille du tronçon actuel divisée par $\sqrt[3]{2}$.
- Si $\delta_G/2 < \delta \leq \delta_G$, garder la même taille de tronçon.
- Si $\delta \leq \delta_G/2$ la taille du prochain tronçon est égale à la taille du tronçon actuel multipliée par $\sqrt[3]{2}$.

Grâce à la méthode LEM, la taille des tronçons est adaptée au cours de la propagation de manière à ce que l'erreur locale sur un tronçon soit inférieure à une valeur donnée, quelque soit le système étudié.

Comme nous le verrons au paragraphe 2.8, où nous comparerons les différentes méthodes SSF, la méthode LEM est une des méthodes les plus efficaces. Toutefois, nous voulons faire les remarque suivantes. Premièrement, la taille des tronçons n'est pas modifiée sur une large gamme de valeur de l'erreur locale ($\delta_G/2 < \delta \leq \delta_G$). Ceci conduit à une évolution de la taille des tronçons en forme de "marches d'escalier". Deuxièmement, le facteur d'augmentation ou de réduction de la taille des tronçons, est toujours égal à la même valeur $\sqrt[3]{2}$ ce qui rend la méthode moins adaptative qu'elle n'y parait. Enfin, lors de la condition $\delta > 2\delta_G$, la solution numérique sur un tronçon est calculée, éliminée puis re-calculée avec une nouvelle taille de tronçon. Mais la réduction de cette nouvelle taille de tronçon par un facteur 2 n'assure pas toujours d'éviter la condition $\delta > 2\delta_G$. Ceci a évidemment un coût supplémentaire sur le temps de calcul.

Nous proposerons, au paragraphe 2.6, une amélioration de la méthode LEM qui évite ces inconvénients.

2.4 Evaluation des performances

Dans le paragraphe 2.3, nous avons étudié non seulement les différentes causes possibles pouvant introduire des erreurs dans les résultats de simulation mais également les méthodes SSF modifiées permettant de réduire ces erreurs.

Dans cette partie nous présentons un moyen d'évaluer l'erreur finale définie comme l'erreur entre la solution exact et la solution numérique au terme de la propagation. Ceci nous permettra de comparer les performances de différentes méthodes SSF.

Au cours de la simulation, nous choisissons de traiter le signal optique échantillonné U comme un vecteur de dimension k : $U = [U_1, U_2, U_3, U_4 \dots U_k]$ où U_i est un échantillon du signal. Dans l'espace à k dimension, l'énergie du signal est égale au carré de la norme euclidienne de U :

$$\|U\| = \sqrt{\int |U(\tau)|^2 d\tau} = \sqrt{\sum_{i=1}^k U_i^2} = \sqrt{E} \quad (2.31)$$

où E est l'énergie du signal.

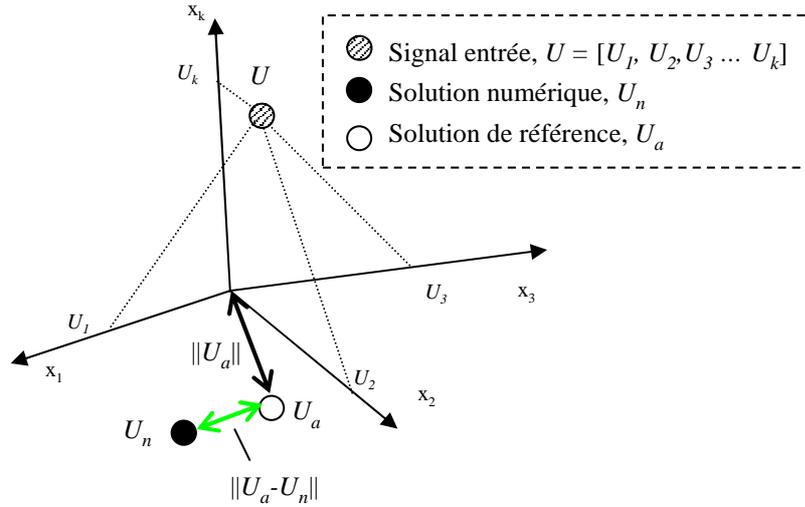


FIG. 2.9 – Représentation du signal échantillonné et de la solution numérique et solution de référence en sortie de fibre.

Après la transmission, en sortie de fibre, on obtient la solution numérique $U_n = [U_{n1}, U_{n2}, U_{n3}, U_{n4} \dots U_{nk}]$. Supposons que cette transmission ait une solution analytique $U_a = [U_{a1}, U_{a2}, U_{a3}, U_{a4} \dots U_{ak}]$. Pour évaluer la précision relative de la solution numérique, on peut se baser sur le rapport de la norme euclidienne de l'écart entre U_a et U_n sur la norme euclidienne de U_a :

$$\delta = \frac{\|U_a - U_n\|}{\|U_a\|} \quad (2.32)$$

Cependant, U_a ne peut pas être obtenu par une méthode analytique dans la plupart des cas [22]. Par la suite, U_a sera considérée comme une solution numérique de référence avec une résolution spatiale très élevée : par exemple, le cas d'une transmission d'impulsions de quelques picosecondes avec une taille de tronçon de l'ordre du centimètre.

Pour évaluer l'erreur d'une solution numérique, il faut d'abord calculer la solution numérique, puis la solution de référence. Cette dernière demande un très grand temps de calcul, mais cette étape est nécessaire si l'on veut connaître la précision de la solution numérique.

La représentation du signal dans un espace à k dimensions est donnée à la figure 2.9. Cette figure représente également la solutions numérique U_n et la solution de référence U_a en sortie de fibre, ainsi que la distance $U_n - U_a$.

En se basant sur cette définition de l'erreur entre la solution numérique et la solution de référence, des comparaisons entre les performances de différentes méthodes SSF peuvent être effectuées facilement.

Le critère pour évaluer les performances est basé sur l'évolution du temps de calcul de la solution numérique en fonction de la précision de la solution numérique. Il est utile de trouver un critère qui ne dépend que de l'algorithme pour évaluer le temps de calcul. En général, on choisit le nombre de fonctions FFT exécutées par le programme de calcul puisque

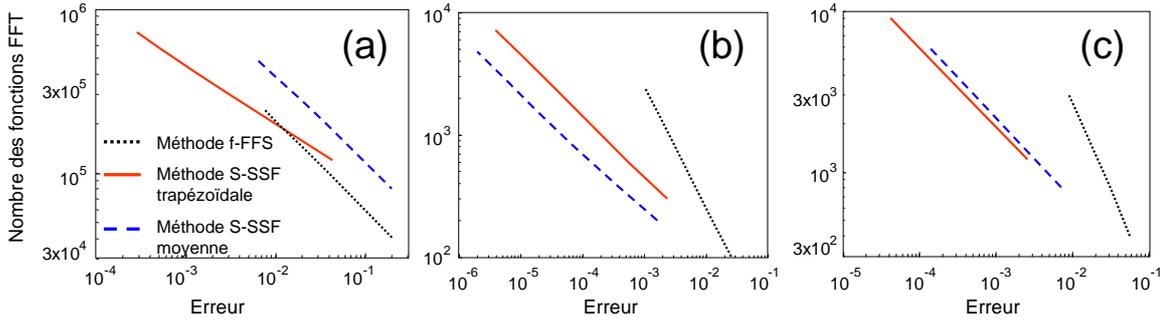


FIG. 2.10 – Comparaison des performances des méthodes f-SSF, S-SSF trapézoïdale et S-SSF moyenne dans trois cas : (a) $N^2 = 10$, (b) $N^2 = 0.1$ et (c) $N^2 = 1$.

la plus grosse partie du temps de calcul est consommée pour exécuter les fonctions FFT.

Nous utiliserons ce critère pour comparer les performances de différentes méthodes SSF. La figure 2.10 compare les performances des méthode f-SSF, S-SSF trapézoïdale et S-SSF moyenne.

Les paramètres de simulation sont : fibre de type SMF, $L = 50$ km, $D = 17$ ps/nm/km, $\gamma = 1,3$ W⁻¹km⁻¹, $\alpha = 0,2$ dB/km. L'impulsion est de type sécante hyperbolique avec $T_{FWHM} = 10$ ps, $T_{fenetre} = 320$ ps. Nous utilisons 2048 échantillons pour décrire ce signal. Trois cas de simulations sont considérés en changeant la puissance optique : (a) la non-linéarité de la fibre est dominante ($N^2 = 10$), (b) la dispersion de la fibre est dominante ($N^2 = 1/10$) et (c) les deux phénomènes sont comparables ($N = 1$). Le signal de référence a été obtenu en employant la méthode S-SSF trapézoïdale avec une taille de pas de 5 centimètres.

Les courbes présentent le nombre de FFT nécessaire en fonction de la précision de la solution numérique sont en général des droites en échelle logarithmique. Plus la pente de la droite est faible, plus la méthode est performante.

Selon les pentes des courbes de la figure 2.10, nous constatons que la précision de la méthode S-SSF trapézoïdale est du deuxième ordre, la précision de la méthode f-SSF est du premier ordre et la précision de la méthode S-SSF moyenne est parfois du deuxième ordre et parfois au premier ordre. Ce dernier point vient du fait que la méthode S-SSF moyenne utilise le mélange de deux méthodes : s-SSF et f-SSF. Elle utilise la méthode f-SSF pour approximer l'opérateur \hat{N} en prenant en compte la dépendance en z de \hat{N} (voir l'équation (2.24)). Ceci explique pourquoi la méthode S-SSF moyenne devient une méthode du premier ordre dans le cas de transmission très non-linéaire (figure 2.10.a).

2.5 Optimisation des algorithmes des méthodes S-SSF

D'après les figures illustrant les algorithmes des méthodes S-SSF trapézoïdale (figure 2.5) et S-SSF moyenne (figure 2.7), nous constatons que l'opérateur linéaire \hat{L} (nécessitant les FFT) est exécuté deux fois de manière consécutive, de part et d'autre de la frontière entre les

deux tronçons. Si l'on pouvait trouver un moyen de n'exécuter qu'une seule fois l'opérateur $\hat{\mathbf{L}}$, on diminuerait le temps de calcul.

L'idée de regrouper les deux opérateurs linéaires de deux tronçons consécutifs n'est pas nouvelle. Elle est mentionnée en 1994 dans la référence [105]. La difficulté à réaliser cette astuce réside dans le fait que le champ $U(z, \tau)$ doit être connue à chaque extrémité de tronçon pour la réalisation des méthodes SSF trapézoïdale ou moyenne. Jusqu'à maintenant, nous n'avons relevé dans la littérature aucune méthode permettant d'évaluer le champ à chaque extrémité de tronçon et de s'affranchir de la double exécution de l'opérateur $\hat{\mathbf{L}}$ de part et d'autre de la frontière entre deux tronçons.

Dans les paragraphes suivants, nous présentons notre méthode permettant de résoudre ce problème pour les méthodes S-SSF trapézoïdale et S-SSF moyenne.

2.5.1 Optimisation de la méthode S-SSF trapézoïdale

On remarque d'après la figure 2.5, que pour la méthode S-SSF trapézoïdale, l'opérateur linéaire $\hat{\mathbf{L}}$ n'est exécuté que par demi tronçons. A la fin de chaque tronçon et au début du tronçon suivant il est notamment exécuté deux fois consécutivement. La raison qui empêche de regrouper ses deux opérations en une seule opération (sur une longueur deux fois plus grande) est que, selon l'algorithme, la valeur définitive du champ doit être calculée à la fin de chaque tronçon.

La solution que nous proposons permet de s'affranchir de la connaissance de la valeur du champ électrique à chaque extrémité de tronçon et permet donc d'exécuter l'opérateur linéaire $\hat{\mathbf{L}}$ sur une longueur h incluant la limite entre les tronçons. L'idée est la suivante. A une distance z quelconque, plutôt que d'estimer une valeur temporaire $U(z+h, \tau)$ à partir de la valeur définitive $U(z, \tau)$, nous estimons la valeur temporaire de $U(z+h, \tau)$ à partir de la valeur temporaire $U(z, \tau)$ qui avait été établie à partir de $U(z-h, \tau)$. En d'autres termes, nous évitons le calcul des valeurs définitives qui nécessitaient l'exécution de l'opérateur $\hat{\mathbf{L}}$ sur des demi tronçons [107].

L'illustration de l'algorithme d'optimisation de la méthode S-SSF trapézoïdale est présentée à la figure 2.11

Les figures 2.12 et 2.13 comparent les performances de notre nouvelle méthode, dite S-SSF trapézoïdale optimisée, avec la méthode S-SSF trapézoïdale ordinaire dans les simulations de transmission sur 50 km de fibre SMF. Ces résultats prouvent que notre technique ne sacrifie que peu de précision (figure 2.12.a) pour un gain en temps de calcul significatif (figure 2.12.b et figure 2.13). Au final, elle est plus efficace que la méthode S-SSF trapézoïdale ordinaire : avec une même précision, elle diminue d'environ 33% le temps de calcul (proportionnel à la réduction du nombre des fonctions FFT effectuées) par rapport à la méthode S-SSF trapézoïdale ordinaire dans tous les cas de transmission du signal.

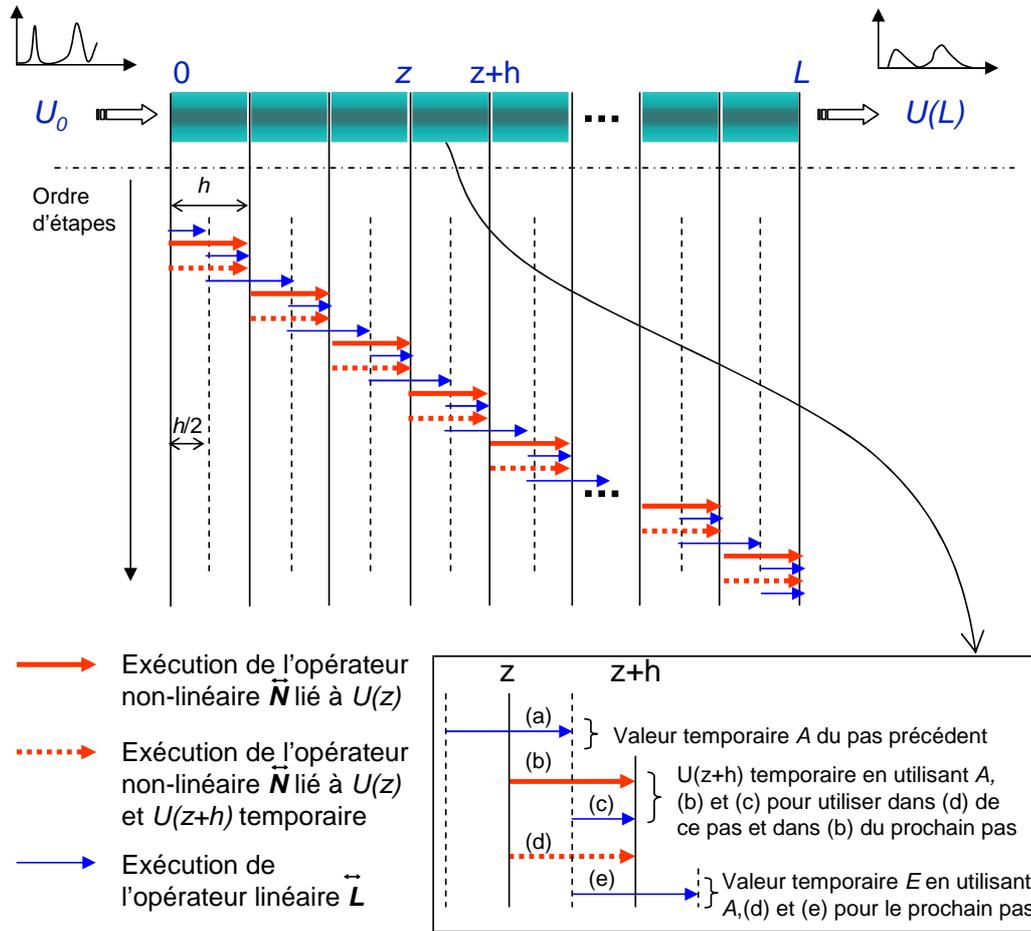


FIG. 2.11 – Schéma de la procédure d'optimisation de la méthode S-SSF trapézoïdale.

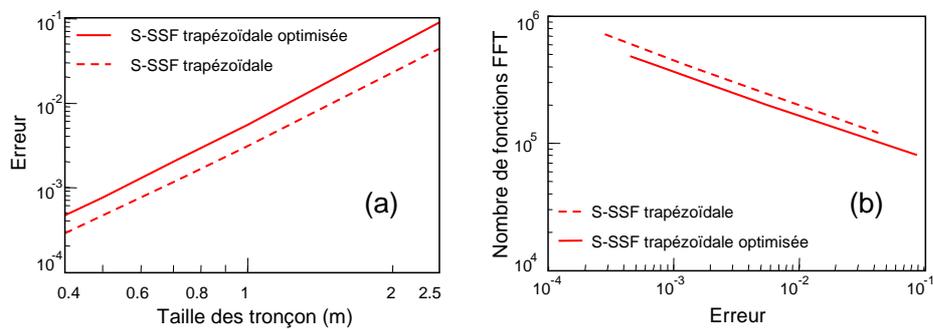


FIG. 2.12 – Erreur en fonction des tailles des tronçons (a) et nombre de fonctions FFT en fonction de l'erreur pour la méthode S-SSF trapézoïdale et pour la méthode S-SSF trapézoïdale optimisée.

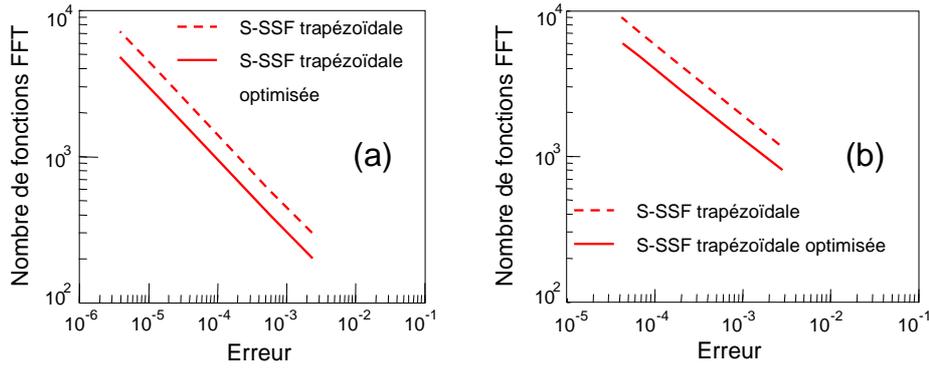


FIG. 2.13 – Comparaison des performances entre la méthode S-SSF trapézoïdale et la méthode S-SSF trapézoïdale optimisée dans quelques cas de transmission sur 50 km de fibre SMF : $N^2 = 1/10$ (a) et $N = 1$ (b).

2.5.2 Optimisation de la méthode S-SSF moyenne

Comme pour la méthode S-SSF trapézoïdale, l'algorithme de la méthode S-SSF moyenne nécessite la connaissance des valeurs définitives du champ à chaque extrémité de tronçons ce qui implique d'exécuter deux fois de suite l'opérateur linéaire $\hat{\mathbf{L}}$. Afin d'éviter cette double opération très coûteuse en temps de calcul, nous proposons, de la même manière que précédemment, une méthode qui permet de s'affranchir du calcul des valeurs définitives à la fin de chaque tronçon.

D'après la figure 2.7, on remarque qu'en z , on applique l'opérateur non-linéaire de z à $z + h/2$ en utilisant la valeur de $\hat{\mathbf{N}}(z)$ calculée à partir de $U(z, \tau)$. Puisque dans la méthode que nous proposons, nous voulons éviter d'avoir à calculer la valeur $U(z, \tau)$, nous allons appliquer l'opérateur non-linéaire de z à $z + h/2$ mais en supposant que $\hat{\mathbf{N}}(z)$ est égal à $\hat{\mathbf{N}}(z - h/2)$. Ceci nous permet de calculer une valeur de $U(z + h/2, \tau)$ qui nous permet ensuite de calculer $\hat{\mathbf{N}}(z + h/2)$. Ce que nous proposons est d'utiliser cette valeur pour estimer l'opérateur non-linéaire $\hat{\mathbf{N}}(z)$ grâce à la règle trapézoïdale suivante : $\hat{\mathbf{N}}(z) = [\hat{\mathbf{N}}(z - h/2) + \hat{\mathbf{N}}(z + h/2)]/2$. La connaissance de $\hat{\mathbf{N}}(z)$ nous permet de poursuivre la procédure normalement. Cette astuce a permis de s'affranchir de la double exécution de l'opérateur linéaire $\hat{\mathbf{L}}$.

Nous avons fait des simulations pour savoir si notre approche affectait la précision des calculs. Les résultats montrent que les méthodes S-SSF moyennes ordinaire et optimisée donnent la même précision lorsque nous prenons la même taille de tronçons. Cela signifie que notre modification, appliquée à la méthode S-SSF moyenne diminue d'environ 50% le temps de calcul tout en gardant la même précision des résultats.

L'illustration de l'algorithme d'optimisation de la méthode S-SSF moyenne est présentée dans la figure 2.14.

L'efficacité de cette optimisation est illustrée dans la figure 2.15. Nous constatons que notre approche diminue bien de moitié le temps de calcul (proportionnel au nombre des fonctions FFT effectuées) par rapport à la S-SSF moyenne ordinaire dans tous les cas de la

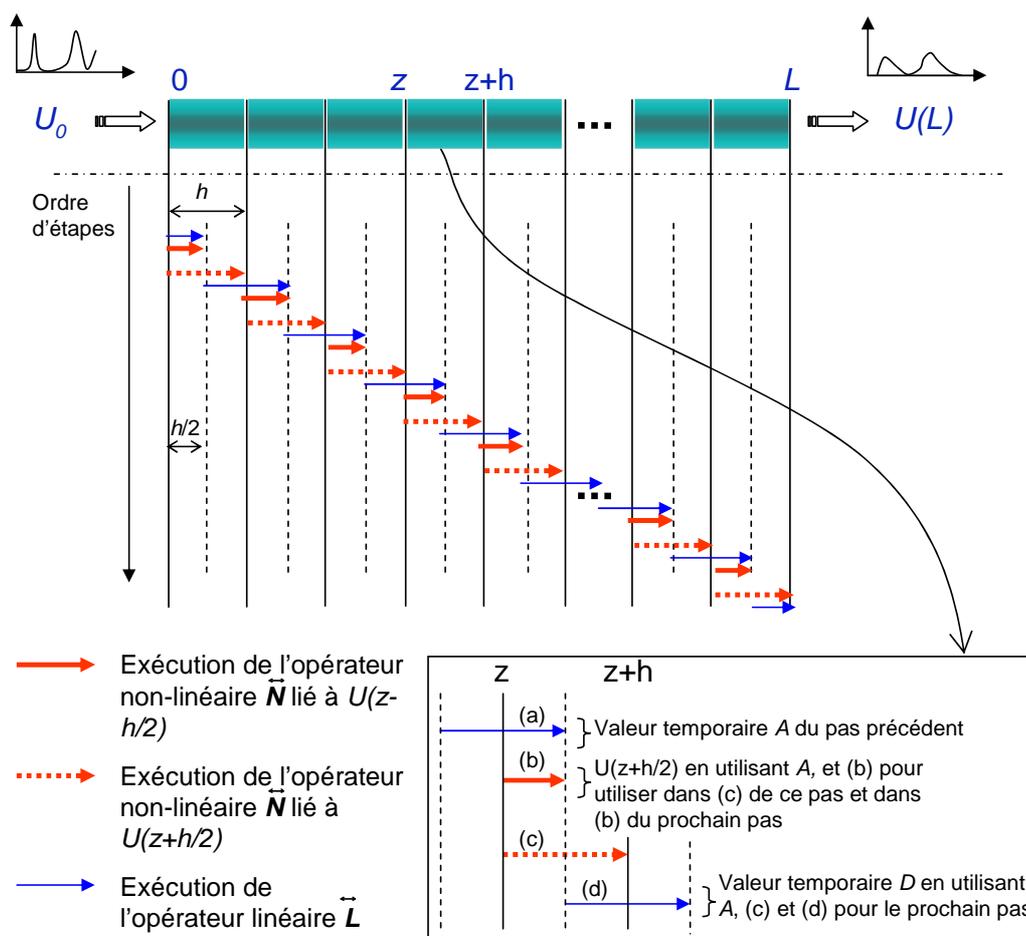


FIG. 2.14 – Schéma de la procédure d'optimisation de la méthode S-SSF moyenne.

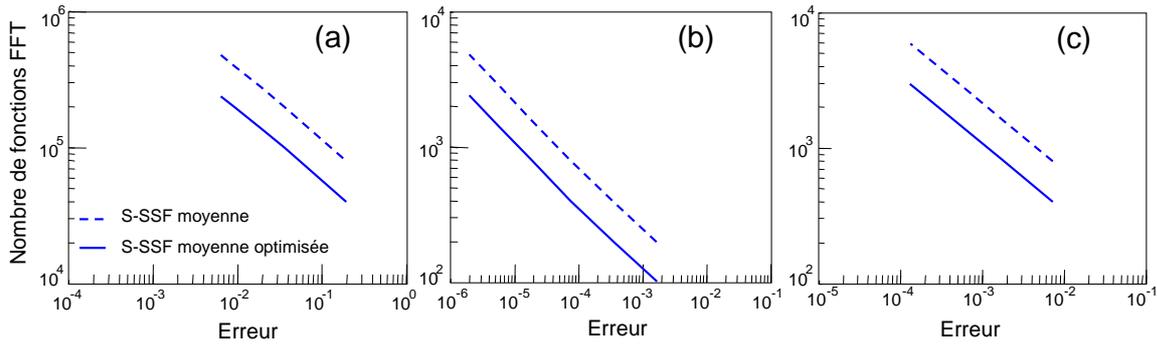


FIG. 2.15 – Comparaison des performances entre la méthode S-SSF moyenne et la méthode S-SSF moyenne optimisée dans trois cas de transmission sur 50 km de fibre SMF : $N^2 = 10$ (a), $N^2 = 1/10$ (b) et $N = 1$ (c).

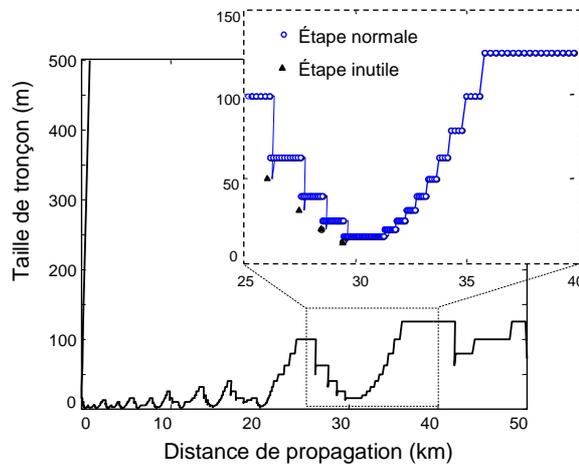


FIG. 2.16 – Distribution en "marches d'escalier" de la taille des tronçons le long d'une transmission soliton ($N^2 = 10$) sur 50 km en utilisant la méthode LEM.

transmission du signal.

2.6 Amélioration de la méthode LEM

L'algorithme de la méthode LEM permet d'adapter la taille des tronçons de manière à diminuer l'erreur locale (voir paragraphe 2.3.4.2). Cependant, la distribution des tailles de pas le long de la ligne de transmission n'est pas continue mais en "marches d'escalier". De plus, cette méthode conduit à un certain nombre d'étapes inutiles quand la taille du tronçon est trop grande.

La figure 2.16 montre une illustration de la distribution de la taille des tronçons le long de la fibre dans le cas d'une transmission soliton ($N^2 = 10$) sur 50 km de fibre SMF. Dans cet exemple, la taille du tronçon initiale est de 500 m et l'erreur locale δ_G est de 5×10^{-5} .

Nous observons que dans la ligne de transmission entre 25 km à 40 km par exemple, il y a 4 étapes inutiles et il y a des endroits où la taille des tronçons n'adapte pas à la distance

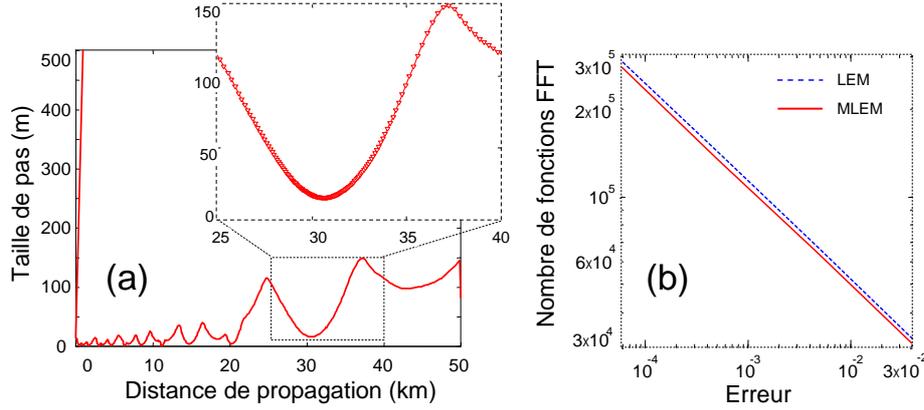


FIG. 2.17 – (a) Distribution continue de taille des tronçon le long de transmission et (b) comparaison des performances des méthodes MLEM et LEM. Les paramètres de simulation sont identiques à ceux utilisés dans la figure 2.16.

de la propagation.

Nous proposons une modification de la procédure de la méthode LEM de telle sorte que la distribution des tailles de pas soit continue le long de la ligne de transmission. En outre, notre proposition évite les nombreuses étapes inutiles occasionnées lors de la méthode LEM ordinaire. Ceci conduit à une méthode plus efficace et plus robuste [108]. Nous l'appellerons la méthode SSF à erreur locale modifiée (MLEM pour Modified Local Error Method).

La clé de notre modification est de se concentrer sur le choix de la taille du tronçon dans l'étape numéro 5 de la méthode LEM [108] :

Etape 5 . Comparez le δ et δ_G pour déterminer la taille du prochain tronçon :

- Si $\delta > 2\delta_G$, éliminer la solution de l'étape 4 et la recalculer avec une taille de tronçon divisé par $\sqrt[3]{F}$ avec $F = \delta_G/\delta$.
- Si $\delta \leq 2\delta_G$, la taille du tronçon actuelle est divisée par $\sqrt[3]{F}$ pour la prochaine taille de tronçon.

Notre proposition réduit la complexité de l'algorithme de la méthode LEM dans l'étape consistant à choisir la taille du tronçon suivant. Grâce à cette modification, les tailles des tronçons sont ajustées de manière continue et les étapes inutiles ont disparues (figure 2.17.a). La figure 2.17.b montre l'amélioration des performances de la méthode MLEM par rapport à la méthode LEM pour les mêmes conditions que celles de la figure 2.16.

La figure 2.18 compare les performances des méthodes LEM et MLEM pour un autre exemple de simulation dans 3 cas de transmission RZ sur 25 km avec les paramètres de simulation suivants : la fibre de transmission est une fibre SMF (dispersion : $D = 17$ ps/nm/km ; coefficient non-linéaire : $\gamma = 1,3$ W⁻¹km⁻¹ ; pertes de fibre : $\alpha = 0,2$ dB/km). Trois cas sont considérés : (a) la non-linéarité de la fibre est dominante ($N^2 = 10$), (b) la dispersion de la fibre est dominante ($N^2 = 1/10$) et (c) les deux phénomènes sont comparables ($N = 1$). L'impulsion de durée de 10 ps est représentée dans une fenêtre de 320 ps. Le nombre d'échantillons est de 2048 [108].

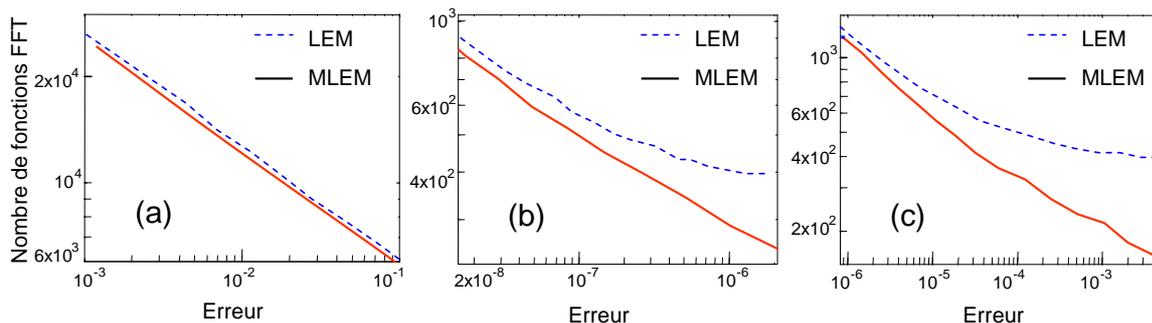


FIG. 2.18 – Comparaison des performances des méthodes LEM et MLEM dans le cas d’une transmission sur 25 km de fibre SMF : (a) $N^2 = 0, 1$, (a) $N^2 = 1$ et (c) $N^2 = 10$.

Ces résultats montrent une nette amélioration des performances de la méthode MLEM dans les cas de transmission où l’effet non-linéaire n’est pas très important. De plus, dans ces cas-là, l’amélioration des performances est d’autant plus grande que l’erreur est élevée. Ce point est intéressant puisqu’une des faiblesses de la méthode LEM est qu’elle est moins performante dans les cas où l’erreur est plus grande [106].

2.7 La méthode SSF avec une précision choisie

Jusqu’à maintenant, aucune méthode SSF n’est capable de donner un critère permettant de choisir la taille des tronçons de manière à ce que le résultat final soit donné avec une précision voulue (10^{-3} ou 10^{-4} par exemple). Lorsqu’ils veulent connaître la précision de leurs calculs, les programmeurs doivent comparer leurs résultats à la solution dite analytique qui, comme nous l’avons vu, est en réalité une solution numérique calculée avec un très grand nombre de tronçons. Cette opération est donc très coûteuse en temps de calcul. En 2001, Rasmussen a proposé une méthode permettant de réduire d’un facteur 64 le temps de calcul de la solution de référence [109]. Le temps de calcul reste cependant élevé et, à notre connaissance, aucune méthode n’a été proposée pour permettre aux programmeurs d’effectuer un calcul numérique avec une précision décidée à l’avance.

Dans le paragraphe suivant, nous allons proposer une telle méthode.

2.7.1 La méthode SSF à erreur locale contrôlée

La figure 2.19 présente l’évolution d’un signal le long de la fibre sans perte au bout de trois tronçons. Après chaque tronçon, nous avons représenté la solution numérique (points noirs, calculés à partir de la solution numérique du tronçon précédent), la solution de référence (points blancs, calculés à partir de la solution de référence du tronçon précédent) et la solution de référence locale (points blancs barrés, calculés de la même manière que la solution de référence mais à partir de la solution numérique du tronçon précédent).

L’erreur locale après chaque tronçon est définie comme l’erreur entre la solution numérique locale et la solution de référence locale :

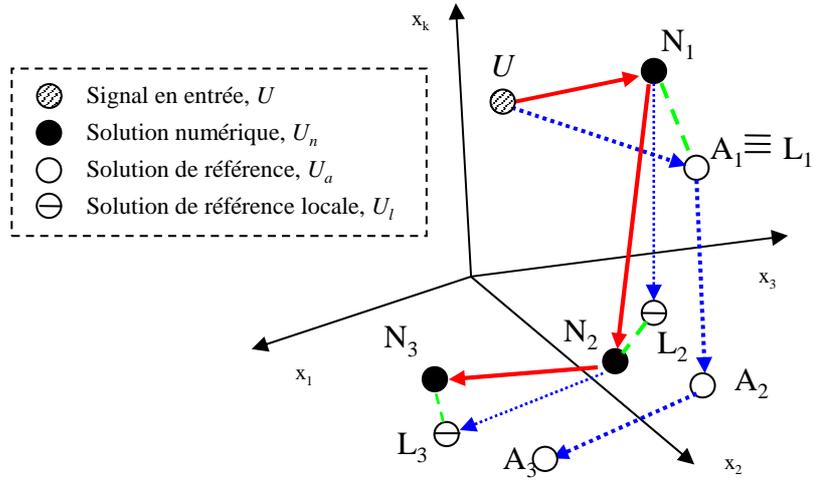


FIG. 2.19 – Evolution d'un signal au cours de la transmission.

$$\delta_i^{local} = \frac{\|U_{a,i}^{local} - U_{n,i}\|}{\|U_{a,i}^{local}\|} \quad (2.33)$$

où $i = 1, 2, \dots, K$ avec K le nombre des tronçon.

Reprenons l'exemple de la transmission de la figure 2.19. Supposons qu'il y ait trois tronçons le long de la fibre. Le point N_3 représente la solution numérique finale en sortie de fibre sur la sphère de rayon \sqrt{E} , le point A_3 représente la solution de référence finale.

Dans le triangle $N_3L_3A_3$, il est apparaît que :

$$\overline{N_3A_3} \leq \overline{N_3L_3} + \overline{L_3A_3} \quad (2.34)$$

Avec la même logique, dans le triangle $N_2L_2A_2$, nous avons :

$$\overline{N_2A_2} \leq \overline{N_2L_2} + \overline{L_2A_2} \quad (2.35)$$

Nous considérons que la distance entre N_2 et A_2 est suffisamment petite pour que l'on puisse écrire $\overline{L_3A_3} \simeq \overline{N_2A_2}$. De la même manière, nous écrirons $\overline{L_2A_2} \simeq \overline{N_1A_1}$. De ce fait, et compte tenu de (2.35), l'inégalité (2.34) devient :

$$\begin{aligned} \overline{N_3A_3} &\leq \overline{N_3L_3} + \overline{N_2A_2} \\ &\leq \overline{N_3L_3} + \overline{N_2L_2} + \overline{L_2A_2} \\ &\simeq \overline{N_3L_3} + \overline{N_2L_2} + \overline{N_1A_1} \end{aligned} \quad (2.36)$$

ou encore :

$$\overline{N_3A_3} \leq \overline{N_3L_3} + \overline{N_2L_2} + \overline{N_1L_1} \quad (2.37)$$

La relation (2.37) peut être réécrite comme :

$$\frac{\overline{N_3 A_3}}{E} \leq \frac{\overline{N_3 L_3}}{E} + \frac{\overline{N_2 L_2}}{E} + \frac{\overline{N_1 L_1}}{E} \quad (2.38)$$

ou encore :

$$\delta^{final} \leq \delta_3^{local} + \delta_2^{local} + \delta_1^{local} \quad (2.39)$$

En conclusion, sur une ligne de transmission de K tronçons, nous avons une inégalité entre l'erreur finale et les erreurs locales de la forme :

$$\delta^{final} \leq \sum_{i=1}^K \delta_i^{local} \quad (2.40)$$

Au cours d'une transmission sans perte, l'erreur finale est donc toujours inférieure à la somme de toutes les erreurs locales.

Dans le cas où la fibre possède un coefficient de perte α , nous récrivons la relation (2.37) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\overline{N_3 A_3}}{E_3} &\leq \frac{\overline{N_3 L_3}}{E_3} + \frac{\overline{N_2 L_2}}{E_3} + \frac{\overline{N_1 L_1}}{E_3} \\ &\leq \frac{\xi_3 \overline{N_3 L_3}}{E_3} + \frac{\xi_2 \overline{N_2 L_2}}{E_2} + \frac{\xi_1 \overline{N_1 L_1}}{E_1} \end{aligned} \quad (2.41)$$

avec

$$\xi_i = \sqrt{\frac{E_i}{E_3}} = \exp\left(\frac{\alpha(L - L_i)}{2}\right) \quad (2.42)$$

où E_i est l'énergie du signal après le tronçon numéro i , L la longueur de la fibre et L_i la position à l'entrée du tronçon i .

La relation (2.41) peut être réécrite comme suit :

$$\delta^{final} \leq \xi_3 \delta_3^{local} + \xi_2 \delta_2^{local} + \xi_1 \delta_1^{local} \quad (2.43)$$

Nous appellerons $\xi_i \delta_i^{local}$ l'erreur locale effective $\delta_i^{local-eff}$.

D'une manière similaire au cas de la fibre sans perte, nous pouvons écrire :

$$\delta^{final} \leq \sum_{i=1}^K \delta_i^{local-eff} \quad (2.44)$$

L'erreur finale est donc toujours inférieure à la somme des erreurs locales effectives. Nous en déduisons que si nous pouvons contrôler les erreurs locales effectives de manière à ce que la somme de toutes les erreurs locales effectives soit égale à une valeur donnée, nous pourrions limiter l'erreur finale de la solution numérique en dessous de cette erreur donnée.

Pour contrôler la somme des erreurs locales effectives, nous appliquerons une technique de résolution à pas variable. La taille d'un tronçon quelconque est déterminée de telle sorte

que la somme des erreurs locales effectives cumulées (au cours des tronçons précédentes) et d'erreur anticipée soit égale à l'erreur donnée. L'erreur anticipée est la somme des erreurs locales effectives cumulées sur l'ensemble des tronçons restant à parcourir en supposant que le reste de la transmission s'effectue à pas constant avec la même erreur locale. Grâce à cette technique, nous distribuons les erreurs locales le long de la fibre de telle sorte que l'erreur cumulée entre l'entrée et la sortie de la fibre soit égale à l'erreur donnée.

Nous appellerons cette méthode la méthode SSF à erreur locale contrôlée (ou CLEM pour Controlled Local Error Method). L'algorithme d'application de la méthode CLEM avec une erreur donnée δ_G est le suivant :

Étape 1 . Effectuer le calcul de $U(z, \tau)$ avec une taille de tronçon h pour trouver la solution à $z + h$, appelée solution brute U_c

Étape 2 . Effectuez le calcul de $U(z, \tau)$ avec 2 tronçons de taille $h/2$ pour trouver la solution à $z + h$, appelée solution de référence locale U_a^{local} . La précision de U_a^{local} est d'environ 2^3 fois supérieures à la précision de U_c .

Étape 3 . Effectuer l'évaluation de l'erreur locale :

$$\delta^{local} = \frac{\|U_a^{local} - U_c\|}{\|U_a^{local}\|} \quad (2.45)$$

Étape 4 . Calculer le rapport F entre l'erreur prévue δ_{prevue} (avec l'hypothèse que le reste de la transmission s'effectue avec un nombre $(L - z)/h$ de tronçons et la même erreur que le tronçon actuel) et l'erreur maximum autorisée δ_{max} :

$$F = \frac{\delta_{prevue}}{\delta_{max}} \quad (2.46)$$

avec

$$\begin{aligned} \delta_{prevue} &= \sum_{i=1}^{\frac{L-z}{h}} \delta^{local-eff} \\ &= \sum_{i=1}^{\frac{L-z}{h}} \delta^{local} e^{i \frac{\alpha h}{2}} \\ &= \delta^{local} e^{\frac{\alpha h}{2}} \left[\frac{e^{\alpha(L-z)/2} - 1}{e^{\alpha h/2} - 1} \right] \end{aligned} \quad (2.47)$$

et

$$\begin{aligned} \delta_{max} &= \delta_G - \int_0^z \delta^{local-eff} dz \\ &= \delta_G - \int_0^z \delta^{local} e^{\alpha(L-z)/2} dz \end{aligned} \quad (2.48)$$

	Erreur ($\delta_G = 10^{-2}$)	Erreur ($\delta_G = 10^{-3}$)	Erreur ($\delta_G = 10^{-4}$)
$N^2 = 10$	$0,75 \times 10^{-2}$	$0,70 \times 10^{-3}$	$0,69 \times 10^{-4}$
$N^2 = 1/10$	$0,24 \times 10^{-2}$	$0,35 \times 10^{-3}$	$0,30 \times 10^{-4}$
$N^2 = 1$	$0,20 \times 10^{-2}$	$0,25 \times 10^{-3}$	$0,24 \times 10^{-4}$

TAB. 2.1 – Erreurs de la solution numérique en utilisant la méthode CLEM avec des erreurs données.

Étape 5 . Déterminer la taille du prochain tronçon :

- Si $F > 2$, éliminer la solution de l'étape 1 et la recalculer avec la nouvelle taille de tronçon qui est calculée en divisant la taille du tronçon actuel h par $\sqrt[3]{F}$.
- Si $F \leq 2$, prendre la nouvelle taille de tronçon, qui est calculée en divisant la taille du tronçon actuel h par $\sqrt[3]{F}$, pour le prochain tronçon. La solution à $z + h$ est U_c .

Dans le calcul de la nouvelle taille du tronçon, le choix du facteur $\sqrt[3]{F}$ vient du fait que la précision de la méthode S-SSF est du troisième ordre par rapport à la taille du tronçon.

Pour valider notre méthode CLEM, nous avons effectué des simulations de transmission d'une impulsion de type sécante hyperbolique sur 50 km de fibre SMF. Trois cas de transmission ont été considérés : (a) la non-linéarité de la fibre est dominante ($N^2 = 10$), (b) la dispersion de la fibre est dominante ($N^2 = 1/10$) et (c) les deux phénomènes sont comparables ($N = 1$). L'impulsion a une durée de 10 ps. Elle est représentée dans une fenêtre de 320 ps. Nous utilisons 2048 échantillons pour décrire ce signal. Le signal de référence a été obtenu en employant la méthode S-SSF trapézoïdale optimisée avec des tailles de tronçons de 5 cm.

Le tableau (2.1) présente les résultats des simulations de la transmission pour des précisions données de 10^{-2} , 10^{-3} et 10^{-4} . Nous constatons que, dans tous les cas, les erreurs finales des résultats numériques sont effectivement limitées par les valeurs données .

Grâce à notre méthode, la taille de chaque tronçon est choisie de manière à limiter l'accumulation des erreurs locales (effectives). Cette méthode distribue les tailles de tronçon de manière adaptative le long de la ligne de transmission.

La figure 2.20.a montre l'évolution de l'erreur locale effective cumulée le long de la fibre pour un exemple de simulation utilisant la méthode CLEM avec une précision donnée de 10^{-1} . Pour ce même exemple, la figure 2.20.b illustre l'évolution de la taille des tronçons durant la propagation.

2.7.2 Modification de la méthode CLEM

Par rapport à l'algorithme d'une méthode SSF ordinaire, celui de la méthode CLEM effectue une tâche supplémentaire consistant à calculer la solution de référence locale à chaque segment. Ceci peut augmenter le temps de calcul de la méthode CLEM. Pour le réduire, nous avons élaboré une modification dans l'algorithme de la méthode CLEM. Cette

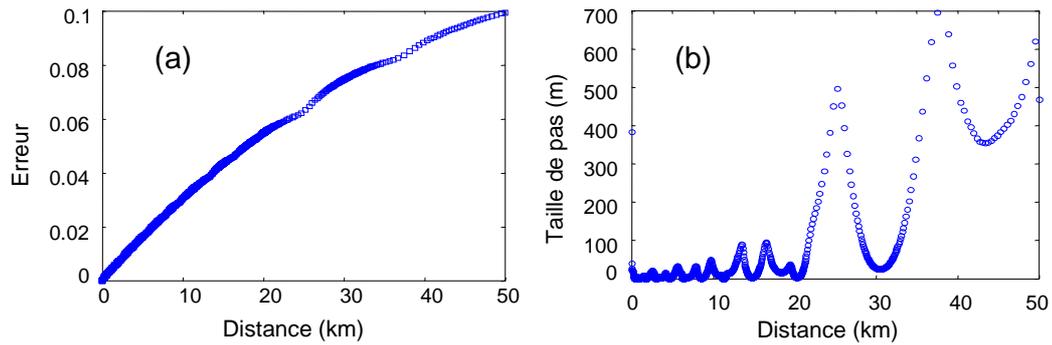


FIG. 2.20 – Evolution de l’erreur locale effective cumulée le long de la fibre (a) et évolution de la taille des tronçons durant la propagation (b) dans un exemple de simulation utilisant la méthode CLEM ($L = 50$ km, fibre SMF, $N^2 = 10$ et $\delta_G = 10^{-1}$).

modification permet de réduire le temps de calcul de la méthode CLEM d’environ 17%. Nous appellerons cette nouvelle méthode MCLEM (pour Modified Controlled Local Error Method).

La figure 2.21 illustre le fait que la solution de référence locale est calculée, à partir de la solution numérique précédente, au moyen de deux pas de taille $h/2$ alors que la solution numérique est calculée à partir de la solution numérique précédente au moyen d’un pas de taille h .

Par exemple, d’après la figure 2.21 : la solution de référence locale au tronçon 4 est calculée à partir de la solution numérique au tronçon 3 au moyen de deux pas de taille $h/2$ et la solution numérique au tronçon 3 est calculée à partir de la solution numérique au tronçon 2 au moyen d’un pas de taille h . En d’autres termes, la solution de référence au tronçon 4 est calculée à partir de la solution numérique au tronçon 2 au moyen de trois pas dont un est de taille h et les deux autres de taille $h/2$. Notre idée est la suivante. Si, à partir de la solution de référence au tronçon 3 (qui est calculée à partir de la solution numérique au tronçon 2 au moyen de deux pas $h/2$), nous calculons une solution au moyen d’un pas h alors cette solution devrait être très peu différente de la solution de référence au tronçon 4 puisque l’on a réalisé le calcul à partir de la solution numérique au tronçon 2 et au moyen de trois pas dont un est de taille h et les deux autres de taille $h/2$ (figure 2.21.b). Nous avons donc trouvé un moyen d’estimer la solution de référence au tronçon 4 en économisant le temps de calcul.

Le calcul de la solution de référence locale est donc exécuté au moyen de deux pas de taille $h/2$ à partir de la solution numérique précédente aux points impairs et au moyen d’un seul pas de taille h à partir de la solution de référence locale précédente aux points pairs.

La méthode MCLEM peut réduire le temps de calcul d’environ $(6 - 5)/6 \times 100 = 17\%$ par rapport à celui de la CLEM. L’utilisation de la méthode MCLEM permet d’obtenir des résultats très similaires à la méthode CLEM. Ils sont résumés dans le tableau 2.2.

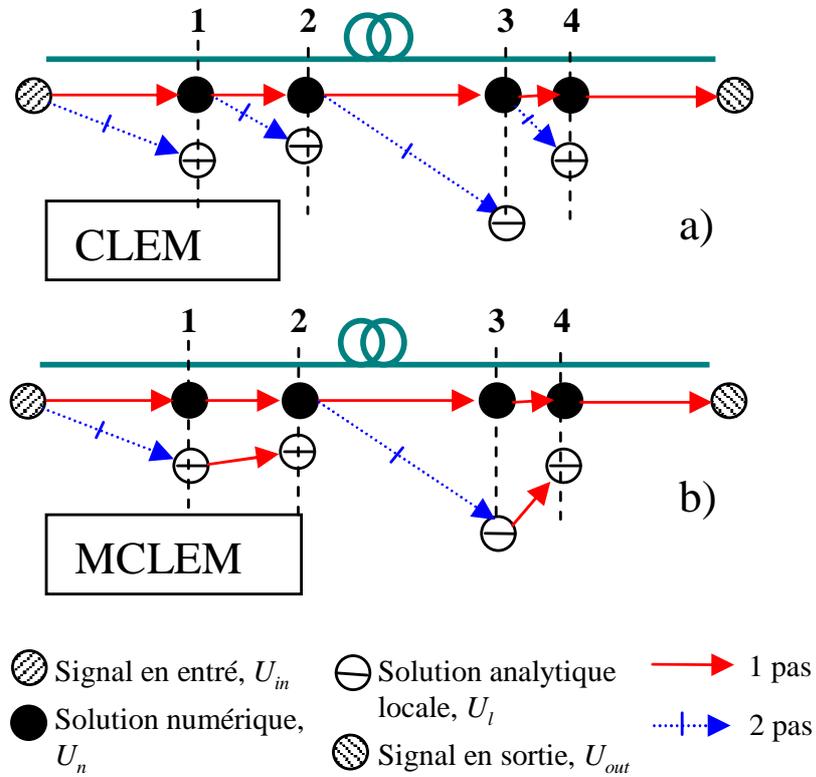


FIG. 2.21 – La manière de calculer les solutions numériques et les solutions analytiques locales dans les méthodes CLEM (a) et MCLEM (b).

	Erreur ($\delta_G = 10^{-2}$)	Erreur ($\delta_G = 10^{-3}$)	Erreur ($\delta_G = 10^{-4}$)
$N^2 = 10$	$0,75 \times 10^{-2}$	$0,69 \times 10^{-3}$	$0,70 \times 10^{-4}$
$N^2 = 1/10$	$0,24 \times 10^{-2}$	$0,40 \times 10^{-3}$	$0,30 \times 10^{-4}$
$N^2 = 1$	$0,20 \times 10^{-2}$	$0,24 \times 10^{-3}$	$0,24 \times 10^{-4}$

TAB. 2.2 – Erreurs de la solution numérique en utilisant la méthode MCLEM avec des erreurs données.

Méthode	Nombre de FFT ($N^2 = 10$)	Nombre de FFT ($N^2 = 1$)	Nombre de FFT ($N^2 = 1/10$)
f-SSF	$7,2 \times 10^5$	$22,0 \times 10^3$	$22,0 \times 10^2$
S-SSF trapézoïdale	$4,6 \times 10^5$	$1,8 \times 10^3$	$4,3 \times 10^2$
S-SSF trapézoïdale optimisée	$3,5 \times 10^5$	$1,2 \times 10^3$	$3,0 \times 10^2$
S-SSF moyenne	$12,0 \times 10^5$	$2,0 \times 10^3$	$2,4 \times 10^2$
S-SSF moyenne optimisée	$6,1 \times 10^5$	$1,0 \times 10^3$	$1,2 \times 10^2$
LEM	$1,1 \times 10^5$	$0,8 \times 10^3$	$5,1 \times 10^2$
MLEM	$1,0 \times 10^5$	$0,7 \times 10^3$	$2,0 \times 10^2$
CLEM	$8,8 \times 10^5$	$8,8 \times 10^3$	$17,0 \times 10^2$
MCLEM	$6,7 \times 10^5$	$6,7 \times 10^3$	$14,1 \times 10^2$

TAB. 2.3 – Comparaison des performance les méthodes SSF décrites précédemment.

2.8 Quelle méthode choisir ?

Dans les paragraphes précédents, nous avons présenté plusieurs méthodes SSF. Une question se pose alors : quel critère va permettre à l'utilisateur de choisir une méthode plutôt qu'une autre ?

Pour tenter de répondre à cette question, nous avons comparé les performances des différentes méthodes (tableau 2.3) dans les mêmes conditions de simulation (propagation sur 50 km de fibre SMF dans les trois cas habituels : la non-linéarité de la fibre est dominante ($N^2 = 10$), la dispersion de la fibre est dominante ($N^2 = 1/10$) et les deux phénomènes sont comparables ($N = 1$)). Le critère de comparaison est le nombre de fonctions FFT utilisées (proportionnel au temps de calcul) pour avoir la même précision de 10^{-3} . Cette valeur est un bon compromis entre une précision acceptable et un temps de calcul raisonnable.

Les résultats donnés dans le tableau 2.3 nous permettent de faire les commentaires suivants.

- La méthode f-SSF est la méthode la moins efficace dans tous les cas. Cette méthode étant moins élaborée (elle utilise une approximation du premier ordre et est à pas constant), elle requiert beaucoup plus de tronçons que les autres méthodes pour atteindre la même précision.
- Les méthodes S-SSF trapézoïdale, S-SSF moyenne, LEM, CLEM sont plus efficaces après avoir été optimisées par les techniques que nous avons présentées dans ce chapitre. Un gain de 2,5 en temps de calcul a notamment été obtenu avec la méthode MLEM en utilisant notre optimisation pour $N^2 = 1/10$.
- La méthode S-SSF moyenne optimisée est la méthode la plus efficace dans le cas d'une transmission où la GVD domine.
- La méthode MLEM est la méthode la plus efficace dans le cas d'une transmission où l'effet non-linéaire est dominant et dans le cas où l'effet non-linéaire et la GVD sont comparables.
- La méthode MCLEM prend presque 7 fois plus de fonctions FFT que la méthode

MLEM. En ce sens elle semble moins efficace que les autres méthodes. Cependant, nous devons signaler que pour connaître la précision des autres méthodes, (excepté la méthode CLEM), nous avons dû effectuer un calcul de la solution de référence prenant près de 4×10^6 fonctions FFT. Ceci signifie que, à partir du moment où le programmeur doit connaître la précision de son résultat, la méthode MCLEM lui permet de réduire considérablement son temps de calcul. Par, exemple, dans le cas $N^2 = 1/10$, le temps de calcul est réduit d'un facteur 3000.

Par la suite, pour nos travaux concernant des modélisation de la transmission des impulsions dans les fibres optiques, nous utiliserons toujours la méthode MCLEM avec une précision donnée de 10^{-3} . Ceci nous permettra d'obtenir des résultats de simulation avec une erreur inférieure à 10^{-3} en un temps de calcul acceptable.

2.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'équation non-linéaire de Schrödinger gouvernant la propagation d'un signal sous l'influence d'effets linéaires et non-linéaires dans une fibre optique.

Nous avons ensuite présenté la méthode numérique split-step Fourier qui permet de résoudre l'ENLS. Cette méthode suppose un découpage de la ligne de transmission en plusieurs petits tronçons. Sur chaque tronçon les effets linéaires et non-linéaires sont traités séparément.

Nous avons alors présenté quelles étaient les causes limitant la précision de la méthode SSF. L'origine des erreurs numériques de la méthode SSF sont la non-commutativité des opérateurs linéaire et non-linéaire, la dépendance en z de l'opérateur non-linéaire et la stratégie de distribution spatiale des tronçons.

Pour chaque type d'erreurs, nous avons présenté des solutions, proposées dans la littérature, permettant d'améliorer la précision de la méthode SSF. Ce sont les méthodes SSF du deuxième ordre, SSF symétriques et SSF à pas variable.

Puis, nous avons présenté nos propositions pour optimiser les méthodes SSF symétriques trapézoïdale et moyenne ainsi que la méthode SSF symétrique à erreur locale [107, 108]. Nos résultats de simulation ont démontré que nos modifications améliorent de manière significative les performances des ces méthodes.

Enfin, nous avons proposé une nouvelle méthode permettant de simuler la propagation non-linéaire avec une précision choisie [110, 111]. Cette méthode permet d'éviter le calcul fastidieux de la solution de référence d'un système afin d'évaluer la précision de la solution numérique. Une telle méthode n'a, à notre connaissance, jamais été proposée auparavant.

Nous devons signaler que nos nouvelles méthodes ont été testées dans le cas de la propagation d'une impulsion unique. Nos études devront être élargies au cas de la propagation d'un train d'impulsions afin de prendre en compte les interactions entre impulsions voisines.

Grâce à ces études approfondies des mécanismes de résolution numériques de l'ENSL,

nous avons pu nous forger de solides compétences en matière de méthodes numériques. Les codes que nous avons développés pour l'étude du régénérateur optique à base de fibres optiques non-linéaires sont basés sur cette expérience.

Quittons maintenant l'univers de la simulation numérique pour nous intéresser à la caractérisation expérimentale de fibres optiques fortement non-linéaires.