

Modele diphasique isotherme non compositionnel

De grandes quantités d’hydrocarbures sont présentes dans des champs offshore [70] pour lesquels la méthode de production classique consiste à traiter le mélange triphasique d’eau, d’huile et de gaz sur la plate-forme. Cette opération consiste à séparer les hydrocarbures puis à transporter pétrole et gaz dans deux conduites distinctes jusqu’à terre. Outre le coût d’installation de ces conduites, le coût de maintenance des appareillages sur la plate-forme est élevé. Le transport polyphasique, dans lequel le mélange circule dans une seule conduite pétrolière, permet de réduire ces coûts en reportant le traitement sur des plates-formes situées soit en eaux peu profondes, soit à terre.

Pour simuler ces écoulements polyphasiques compositionnels, l’Institut Français du Pétrole (IFP) développe depuis plusieurs années le code TACITE¹ (voir figure 1). Il s’appuie sur une méthode numérique performante qui a été largement éprouvée sur de nombreux cas-tests industriels, dont certains cas très “raides”.

Dans ce secteur très pointu, le principal concurrent de Tacite est OLGA, un code norvégien, fondé sur un modèle mathématique différent de celui de Tacite. Les dernières difficultés majeures de la méthode Tacite étant sa relative lenteur et ses problèmes de robustesse, la mise au point de méthodes numériques plus performantes pourrait donner un avantage concurrentiel important au code de l’IFP.

Les conduites pétrolières, généralement immergées, guident sur des grandes distances un mélange composé de gaz, d’eau et de pétrole, depuis la plate-forme d’extraction jusqu’à un site de stockage, tous deux situés en surface. Elles reposent sur le fond marin et épousent donc les variations de topographie de celui-ci. Les changements d’inclinaison font que, à l’intérieur d’une même conduite, l’écoulement peut prendre des allures très différentes : annulaire, stratifié, dispersé, etc. À chaque régime correspond ainsi un modèle mathématique particulier.

Il est important de pouvoir prédire ce qui se passe le long des conduites, afin

- d’aider les opérateurs à mieux piloter le transport du mélange : en jouant sur les paramètres judicieux, on peut éviter des phénomènes indésirables comme le *slugging* (création de bouchons) ;
- de permettre aux constructeurs de mieux dimensionner les équipements : on peut ainsi réaliser des économies substantielles.

Le modèle développé dans Tacite est connu sous le nom de “Drift-Flux Model” (DFM). Dans le cas des écoulements diphasiques isothermes, il est fondé sur trois équations aux dérivées partielles. Les deux premières sont les équations de conservation de la masse de gaz et de liquide. La dernière est l’équation de conservation de la quantité de mouvement du mélange. Ces lois de conservation

¹Transient Analysis Code IFP Total Elf

sont complétées par des lois de fermetures thermodynamiques (pression) et hydrodynamique (écart de vitesse entre les phases ou encore *glissement*). Nous appelons ce système *gaz-liquide*.

Les lois physiques utilisées dans Tacite sont fort complexes. C’est le prix à payer pour garantir une bonne cohérence avec la réalité. De même, le schéma numérique de Tacite consomme beaucoup de temps calcul. C’est le prix à payer pour traiter avec rigueur toutes les difficultés inhérentes au problème.

A la recherche d’un schéma idéal

Le schéma numérique implémenté dans Tacite était jusqu’en 1994 celui de Lerat explicite [44]. Ce schéma, d’ordre 2 en espace et en temps présente le défaut d’engendrer des oscillations aux voisinages des discontinuités (caractère dispersif). Notons que, malgré ces défauts majeurs, ce schéma est encore utilisé dans [34].

Pour le stabiliser, un schéma hybride avait été proposé : le principe est de combiner le schéma de Lerat avec un schéma d’ordre 1 très diffusif, celui de Lax-Friedrichs. Malgré une très nette amélioration des solutions calculées par le schéma hybride, des oscillations de faible amplitude persistaient, dont une conséquence était de donner des masses négatives dans le cas d’écoulements monophasiques.

L’équipe Tacite a donc été amenée à développer le schéma VFRoe : ce schéma numérique ne nécessite, de la part du système de lois de conservation, que son flux et sa Jacobienne. Ce schéma décentré d’ordre 1 est classiquement monté à l’ordre 2 en espace par une technique de limitation de pente et à l’ordre 2 en temps par une méthode de Runge-Kutta. Mais ce schéma ne permet pas de simuler les cas les plus durs (conduite verticale). En effet, il est écrit dans Masella, Faille & Gallouët [49] : “*The VFRoe flux is therefore not a continuous function with respect to its arguments near states where an eigenvalue can have a change of its sign.*”. Une variante de ce schéma a alors été utilisée : en introduisant une diffusion numérique supplémentaire, les cas les plus raides sont traités par le schéma de Faille & Heintzé [26]. Nous appelons ce schéma VFRoe–Tacite.

Mais ce schéma possède deux inconvénients en ce qui concerne :

- la rapidité : le schéma Tacite est gourmand en temps calcul. Cela reste vrai malgré une implémentation partielle du schéma qui permet d’obtenir des pas de temps plus grands : explicite pour les ondes lentes, linéairement implicite pour les ondes rapides. C’est en particulier le calcul numérique des valeurs propres et des vecteurs propres du système qui consomme une grande partie du temps liée au schéma.
- la robustesse : le calcul des valeurs propres du système conduit parfois, dans les cas très difficiles, à des valeurs propres complexes. Dans ce dernier cas, la simulation s’arrête car le système n’est plus hyperbolique et la théorie de ce domaine ne permet plus de rien garantir... D’autre part, la positivité de la fraction massique de chaque constituant n’est pas garantie par le schéma actuel. Certes, le schéma Tacite est, de ce point de vue, plus robuste que le schéma de Lerat. Pourtant, dans le schéma Tacite, l’ajout de diffusion numérique pour stabiliser la méthode ne permet pas d’avoir d’argument théorique permettant d’assurer cette propriété.

La question scientifique qui se trouve à la base de ce travail est donc de trouver une méthode à la fois plus rapide et plus robuste.

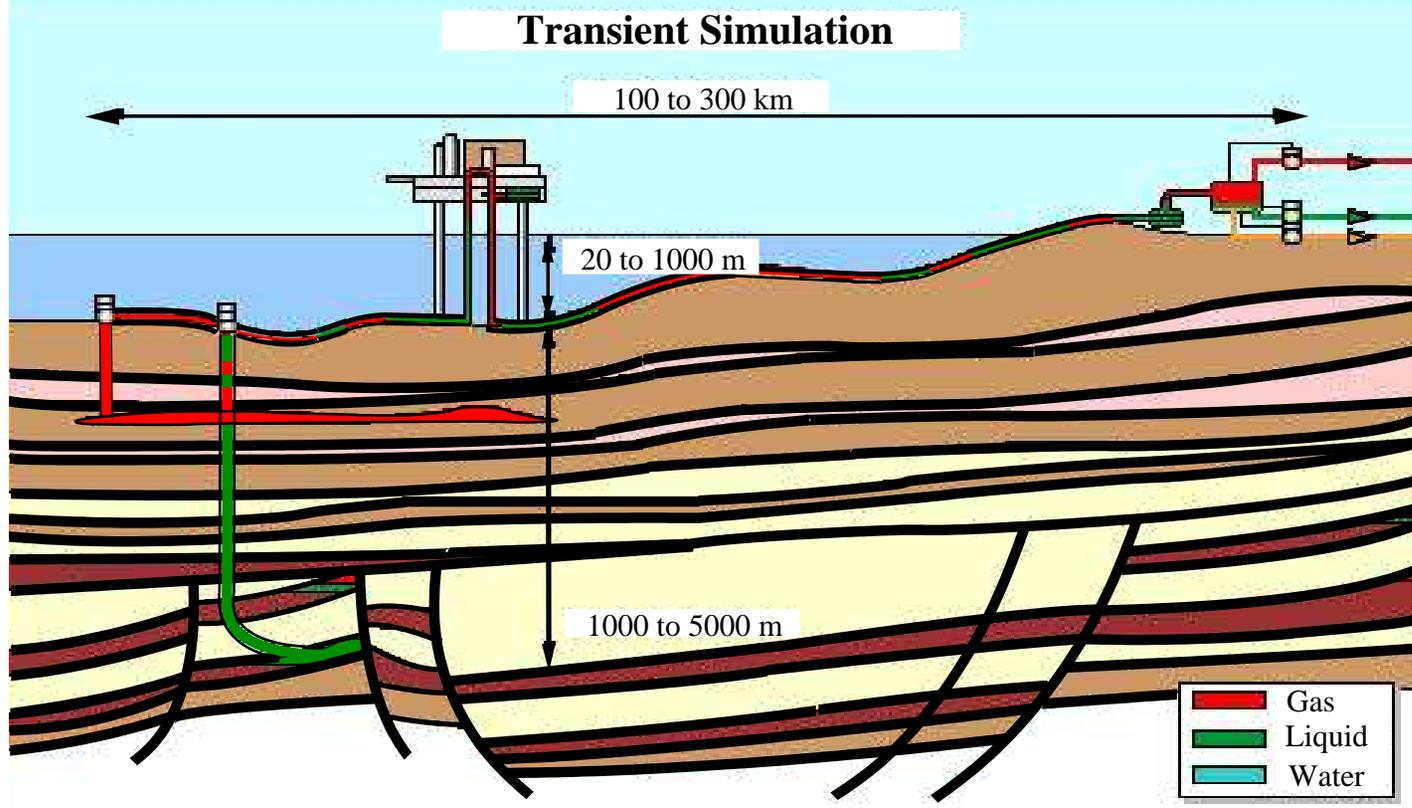


FIG. 1 – Le projet Tacite

Revue de divers travaux connexes

Notons que l'étude de Fjelde & Karlsen [27] contient une étude comparative de schéma numériques pour la simulation des écoulements diphasiques en conduite avec le modèle DFM.

Un schéma de Roe “entièrement numérique”

Ce schéma, proposé par Romate en 1998 dans [57] est fondé sur une méthode de Roe. Considérant qu'il n'est pas possible, avec le modèle DFM fondé sur une loi hydrodynamique complexe, de calculer analytiquement une matrice de Roe, l'auteur propose de la calculer numériquement. La matrice Jacobienne du système est calculée sur un état moyen (par exemple la moyenne des états gauche et droit) et décomposée en valeurs propres, vecteurs propres par des techniques numériques classiques. Puis, afin de satisfaire aux conditions de Roe, la matrice des valeurs propres est modifiée, ce qui mène à la résolution d'un système linéaire.

L'avantage de cette stratégie est qu'elle est entièrement numérique. L'inconvénient est qu'elle est relativement proche de la méthode VFRoe-Tacite et que donc elle pose les mêmes problèmes de coût (décomposition en éléments propres) et de robustesse. Ce dernier problème est en particulier souligné dans [27]. Dans cet article, les problèmes de positivité des fractions massiques sont traités d'une manière non-conservative (par troncature), ce qui n'est pas satisfaisant. D'autres remèdes ont été suggérés (voir [27]), mais il n'apparaît pas que cette stratégie, bien qu'elle donne des résultats satisfaisants dans un certain nombre de cas, puisse mener à un schéma peu coûteux et très robuste.

Un schéma hybride

Certains auteurs [28] tentent de diminuer le coût du schéma numérique. Ils disposent pour cela de deux schémas :

1. un schéma de Roe fondé sur les variables conservatives mais coûteux,
2. un schéma de Roe fondé sur les variables primitives (non-conservatives) peu coûteux mais incapable de détecter correctement les discontinuités.

Le schéma de base est le schéma fondé sur les variables primitives sauf pour les cellules pour lesquelles un critère portant sur la différence de pression est vérifié : pour ces cellules, c'est le schéma de Roe fondé sur les variables conservatives qui est utilisé. Ce schéma est appelé “primitif/conservatif”.

Cette idée a été testée avec succès sur une conduite horizontale avec une loi de glissement nul.

L'idée, malgré son bon fondement théorique dans les cas les plus simples, paraît limitée dans son utilisation pour deux raisons. Tout d'abord, il est difficile de concevoir un critère adéquat pour les cas plus difficiles. Comme tout schéma hybride “X/Y” (et comme celui de Lerat/Lax-Friedrichs), ce schéma porte en lui le problème du choix ; ni le schéma “X” ni le schéma “Y” ne sont parfaitement adaptés au problème. D'autre part, l'expérience de Tacite prouve l'instabilité du schéma de Roe conservatif dans le cas-test de la conduite verticale : le problème de robustesse n'est pas résolu.

Un principe du maximum sur les fractions massiques

Dans [41], B. Larrouturou s'intéresse à la simulation numérique des écoulements de mélanges de gaz réactifs. Il concentre ici son attention sur les équations d'Euler diphasique. Il s'agit du système de la dynamique des gaz couplé à une équation de transport sur la fraction massique de gaz Y (cette équation s'identifie avec l'équation d'évolution de Y du système Tacite lorsque le glissement entre

les phases est nul). Comprendre à fond les conclusions de cette étude est fondamental pour nous, car c'est la plus sérieuse étude sur la positivité d'un système diphasique.

Du point de vue du traitement de l'équation de transport sur Y , l'auteur distingue deux approches :

- (A) : **découplée** Elle consiste à traiter séparément les équations d'Euler et l'équation de transport sur Y . Pour les équations d'Euler, on utilise un des nombreux schémas (monophasiques) classiques. Pour l'équation de transport, on utilise un schéma amont de type "donor-cell".
- (B) : **couplée** Elle consiste à traiter le système comme un tout et à étendre à ce système plus grand les schémas amont qui ont été développés pour le cas monophasique. L'auteur présente les extensions diphasiques des schémas de Van Leer, Roe et Osher. Le schéma VFRoe–Tacite est à mettre dans cette classe de schémas.

L'approche (A) a l'avantage d'être simple et de respecter *la positivité de Y* (mais pas $Y \leq 1$). Les schémas de type (B) sont plus cher du point de vue du temps de calcul mais sont beaucoup plus précis. Toutefois, les schémas de Roe et d'Osher, ne satisfont pas le principe du maximum, sans toutefois s'en éloigner beaucoup (à 10^{-1} près). Le schéma de Van-Leer vérifie, lui, le principe du maximum.

Dans le but d'améliorer la version (B) des schémas d'Osher et de Roe, l'auteur propose alors une approche (C). Elle est fondée sur une analyse de la solution exacte du problème de Riemann, qui, dans ce cas, est connue. La solution consiste alors à utiliser un schéma de Godunov en modifiant la composante du flux selon Y de façon astucieuse.

Expliquons alors pourquoi nous ne pouvons pas utiliser directement les résultats de cette étude. D'abord, il n'est pas possible pour nous d'utiliser le schéma de Van Leer, car nous n'avons pas d'expression algébrique du flux physique à cause de nos lois de fermetures très complexes. En particulier, la loi de glissement est, dans notre système, non nulle alors que le système de Larroutou ne s'identifie à notre système que lorsque le glissement est nul. Cela est dû au fait que le modèle traité par Larroutou concerne des mélanges de gaz alors que nous traitons un mélange gaz-liquide.

Ensuite, il n'est pas possible d'utiliser l'approche (C) pour les schémas de Roe et d'Osher car nous n'avons pas la solution analytique du problème de Riemann du système gaz-liquide dans le cas général. Pourtant, nous verrons dans la suite pourquoi l'analyse de Larroutou est féconde dans le cas du système relaxé, dans lequel la solution du problème de Riemann est facilement déterminée.

Modèles alternatifs

D'autres auteurs ont préféré fabriquer des schémas numériques pour des modèles physiques différents. Une étude comparative des résultats numériques obtenus avec ces modèles est exposée dans [50].

Two-Fluid Model

Ce modèle (noté TFM), utilisé dans le code OLGA, est gouverné par un ensemble de quatre équations aux dérivées partielles, les deux premières expriment la conservation de la masse de chaque phase et les deux dernières représentent la conservation de quantité de mouvement de chaque phase. Dans certains cas particuliers, on peut démontrer que le système possède quatre valeurs propres réelles, c'est à dire que c'est un système hyperbolique.

La thèse de J.-M. Masella [48] est consacrée à la construction de schémas numériques pour ce système. Une analyse du comportement de ce schéma est présentée dans [49] (voir aussi [30]). Le schéma est basé sur une méthode de volumes finis pour laquelle la discrétisation en temps est explicite par rapport aux petites valeurs propres et linéairement implicite par rapport aux valeurs propres extrêmes.

Ce modèle possède deux inconvénients. Le premier est dû à la forme non-conservative des équations mise en jeu. Cela implique d'utiliser des schémas numériques spécifiques, utilisant des chemins de régularisation délicat à déterminer. D'autre part, l'ajout d'une équation impose d'ajouter également une condition limite supplémentaire.

No Pressure Wave

Faisons la généalogie de ce schéma numérique, qui est l'alternative la plus développée du système DFM. Elle est importante car nous pourrions mesurer ce qu'il est possible d'accomplir avec un système différent de DFM.

- [53], **1996** Le premier schéma numérique pour le modèle NPW, développé à l'IFP, est développé. Ce modèle prend pour point de départ le modèle DFM.

L'expérience des simulations numériques a montré que, dans la plupart des études, les ondes de pression n'ont pas d'effet majeur sur la genèse et le transport des ondes de taux de vide (ondes lentes). Par conséquent, dans une démarche de simplification, les auteurs de ce schéma désirent éliminer l'existence des ondes acoustiques dans le modèle.

Une étude préliminaire des ordres de grandeurs des termes de l'équation de conservation de la quantité de mouvement suggère que, dans les écoulements transitoires lents, il est légitime de négliger les termes d'inertie. On peut démontrer que le modèle qui en découle est, dans bien des cas, une bonne approximation de DFM. Il est de type mixte hyperbolique/ parabolique et possède une seule valeur propre finie.

S. Patault et Q.-H. Tran ont proposé dans [53] un schéma numérique appelé Tacite-NPW, fondé sur l'étude théorique de H. Viviani [61]. Le modèle discret consiste en un schéma numérique implicite qui se décompose en trois étapes : étiquetage des mailles, assemblage des équations, résolution du système non-linéaire par une méthode de Newton.

Les auteurs du rapport présentent les résultats numériques de ce schéma et obtiennent des temps CPU qui, par rapport au schéma VFRoe-Tacite, sont souvent inférieurs. Dans certains cas, le gain en temps CPU du schéma NPW peut aller jusqu'à 140! ([53], p.53) Toutefois, les auteurs soulignent que *“les comparaisons avec le code Tacite-DFM (VFRoe-Tacite) laissent apparaître, à maillage égal, une précision moins bonne du code Tacite-NPW, mais en revanche il semble que la raideur des front soient bien conservée, comme en témoignent les expériences sur le riser vertical. [...] Ces constatations nous semblent très positives et permettent d'envisager de nombreuses perspectives pour l'avenir de ce modèle au sein de la structure Tacite.”* Cependant, le schéma proposé a été spécifiquement construit pour le système diphasique isotherme et non compositionnel.

- [25], **1998**. Dans ce document, I. Faille s'intéresse au système diphasique isotherme compositionnel. Elle constate que le schéma numérique proposé précédemment est *“basé sur un traitement particulier de l'onde de taux de vide et ne semble pas facilement généralisable à plusieurs ondes.”* Elle propose alors un schéma centré implicite pour les termes qui confèrent aux équations leur type parabolique et un schéma décentré explicite pour les termes qui confèrent aux équations leur type hyperbolique. Ce schéma se rapproche de ceux utilisés dans les codes diphasiques bi-fluides tels que Olga ou Cathare. Les conclusions de cette étude sont positives à plus d'un titre. Les temps calculs restent très inférieurs à ceux du schéma VFRoe-TACITE. La prise en compte des conditions aux limites demeure aisée. Au titre des inconvénients du schéma, l'inversion du système linéaire par la méthode de Newton pose parfois des problèmes de convergence.

Dans [65] (**1999**) F. Willien tente de résoudre ces problèmes en modifiant la loi de fermeture

hydrodynamique et dans [66] (**2000**) elle intègre au schéma la modélisation d'équipements pétroliers. Dans [51] (**2002**), les auteurs améliorent la formulation du schéma (appel à la loi thermodynamique aux bords de maille) pour résoudre certains problèmes de robustesse.

- [67], **2000**. Dans ce document, F. Willien étend la méthode aux écoulements non isothermes par la prise en compte d'une équation d'énergie.
- [68], **2003**. Dans ce document, F. Willien étend le modèle aux écoulements triphasiques.

Nous constatons que l'écoulement le plus complexe c'est à dire à la fois triphasique, non isotherme et compositionnel est pris en compte par ce schéma. Nous voyons également les performances en temps calcul qui sont très avantageuses. Ces performances sont le fruit du schéma implicite qui a comme contrepartie de créer des problèmes de robustesse, dues à la convergence conditionnelle de la méthode de Newton.

Méthodologie adoptée

Dans l'idéal, nous devons écrire un schéma numérique capable de traiter un écoulement triphasique, non isotherme et compositionnel. Cela implique un grand nombre de difficultés tant au niveau numérique qu'au niveau de l'implémentation informatique. Au pire, nous devons écrire un schéma numérique capable de traiter un écoulement diphasique isotherme non compositionnel. Entre ces deux modèles extrêmes, il existe toute une famille de modèles qui intègrent partiellement les difficultés.

Nous avons choisi de traiter aussi profondément que possible le modèle le plus simple (diphasique isotherme non compositionnel). Puis, nous avons intégré à ce modèle chaque difficulté élémentaire pour évaluer notre méthode. Nous n'avons jamais cumulé deux difficultés de telle sorte que l'analyse s'en trouve simplifiée. Par ailleurs, le schéma numérique doit posséder à chaque étape les mêmes caractéristiques de base de telle sorte que l'assemblage final soit possible et facile.

Méthode proposée

Les schémas de type relaxation, qui ont fait leur preuve sur de nombreux systèmes d'équations provenant de la physique [18] et qui ont été introduites par Jin et Xin en 1995 [69], apparaissent comme un sérieux espoir d'atteindre les objectifs cités plus haut, à savoir la rapidité et la robustesse. Ainsi le but de cette thèse est-il d'explorer les stratégies de relaxation adaptées au problème diphasique de Tacite. Plus concrètement, nous allons proposer une méthode permettant d'améliorer :

- la rapidité. Au lieu de calculer valeurs et vecteurs propres, nous ne calculons que 2 coefficients scalaires.
- la robustesse. Ces coefficients de relaxation sont choisis de telle sorte que le système soit hyperbolique. Le problème des valeurs propres imaginaires est donc éliminé à sa base. Par ailleurs, nous garantissons, pour le schéma numérique explicite, la positivité des fractions massiques partielles. Ceci est possible grâce à l'ajustement des coefficients de relaxation.

Schéma de relaxation explicite

Ce travail est motivé par les sévères non-linéarités induites par les relations de fermeture algébriques réalistes, relatives aux lois thermodynamiques et hydrodynamiques. D'une part, ces non-linéarités

rendent le système étudié conditionnellement hyperbolique et interdisent en règle générale l'existence d'un couple d'entropie de Lax. D'autre part, ces mêmes non-linéarités font que l'extension des méthodes d'approximation classiques, basées sur les propriétés de la matrice Jacobienne de la fonction flux, présentent une complexité d'évaluation algébrique pénalisante dans les applications poursuivies.

Nous proposons une classe de modèles de relaxation pour le système étudié, permettant la définition de méthodes numériques robustes ne faisant intervenir les relations algébriques incriminées qu'une fois par cellule et par pas de temps. Ces modèles de relaxation sont qualifiés en exigeant que les systèmes proche équilibre, obtenus par un développement de Chapman-Enskog au premier ordre, constituent une régularisation visqueuse du système initial (*i.e.* à l'équilibre).

Par construction, le système du premier ordre extrait associé à chacun de ces modèles, est inconditionnellement hyperbolique et tous ses champs sont linéairement dégénérés. Cette dernière propriété rend triviale la résolution du problème de Riemann associé et conduit à définir une méthode d'approximation particulièrement peu coûteuse. Enfin, certains de ces modèles (explicitement connus) permettent d'assurer la validité d'un principe du maximum pour la fraction massique des constituants du mélange diphasique.

Dans ce travail, nous portons également un soin particulier à l'extension de ces méthodes au second ordre d'approximation ainsi qu'à la définition de conditions aux limites appropriées à l'étude de plusieurs problèmes d'intérêt. Enfin, le traitement des termes sources (gravitation, frottement) a fait l'objet d'une étude approfondie.

Schéma de relaxation semi-implicite linéaire

Dans le contexte des écoulements en conduites pétrolières, la description précise des phénomènes de transport de constituant est déterminante. Il est connu qu'un phénomène de vitesse de propagation donné est d'autant mieux décrit par un schéma d'intégration en temps que la condition CFL basée sur la vitesse considérée est proche de 1. Or les phénomènes de transport possèdent des vitesses caractéristiques de plusieurs ordres de grandeur inférieurs aux vitesses liées aux phénomènes acoustiques. En conséquence, un schéma d'intégration en temps explicite s'avère être inadapté à notre exigence de précision puisque la restriction CFL, indispensable à la stabilité de la méthode, est imposée par les vitesses les plus grandes.

Il est donc nécessaire d'adopter une stratégie d'intégration en temps implicite par rapport aux ondes rapides (acoustiques) et explicite par rapport aux ondes lentes (ondes de taux de vide) sous une condition CFL basée sur les vitesses lentes.

Une telle stratégie est possible et naturelle dès que la fonction flux numérique utilisée repose sur une linéarisée de Roe (ou de type VFRoe). Elle a été en particulier développée dans le code Tacite. Nous appellerons dans la suite cette stratégie : méthode semi-implicite linéarisée. Nous exposerons brièvement le principe sur l'exemple de la méthode VFRoe : indiquons simplement qu'elle nécessite l'inversion d'un système linéaire construit sur la linéarisée de Roe.

Nous montrons que la technique de relaxation explicite, peut être réinterprétée comme une méthode de Roe (pour le système de relaxation et non pas pour le système à l'équilibre). Une telle ré-interprétation est rendue possible par la propriété de dégénérescence linéaire de tous les champs associés au système de relaxation.

Il est dès lors possible d'envisager une méthode d'intégration temporelle semi-implicite linéarisée. Nous montrons qu'il est nécessaire d'utiliser des paramètres de relaxation a et b uniformes en espace. Puisque l'interprétation en terme de méthode de Roe porte sur le système de relaxation (5×5) et non sur le système à l'équilibre (3×3) une application directe de la technique d'implication partielle conduirait à un problème matriciel de plus grande taille que celui reposant sur la méthode Tacite pour le système d'équilibre. Nous montrons ici comment réduire la taille du problème matriciel en

adoptant une technique d'implicitation linéarisée des termes sources de relaxation. Cette technique a été très récemment développée par Chalons-Coquel en 2002 [15] pour d'autres raisons liées à l'obtention d'une solution stationnaire indépendante du pas de temps. Nous montrons qu'outre le bénéfice d'un problème matriciel réduit, cette technique améliore considérablement non seulement la solution stationnaire mais également la solution transitoire.

Apport et originalité de la thèse

L'étude de la bibliographie consacrée à ce domaine montre que le problème traité est d'une grande difficulté. Les très fortes non-linéarités du modèle, les problèmes de stabilité de tous les schémas numériques ainsi que le manque de connaissances théoriques sur le système nous suggèrent d'utiliser de nouvelles méthodes de résolution.

La méthode de relaxation proposée dans cette thèse est différente de celles qui ont vu le jour jusqu'à présent. Les méthodes de relaxation proposées jusque là reposaient sur l'existence de conditions sous-caractéristiques qui assurent à la méthode sa stabilité. Elle est ici assurée par une heuristique imposant que la matrice issue du calcul des équations équivalentes par le développement de Chapman-Enskog possède des valeurs propres positives.

D'autre part, les méthodes classiques utilisent les propriétés de l'entropie du système : ici, aucune entropie n'est connue. Enfin, la méthode présentée dans [69] relaxe toutes les non-linéarités du système : ici, seules les non-linéarités majeures sont relaxées.

Éléments du projet

Encadrement - collaborations

Ce travail de doctorat est réalisé sous la direction de Benoît Perthame, professeur à l'Université Paris VI et à l'École Normale Supérieure, en tant que directeur de thèse, de Frédéric Coquel, chargé de recherche au CNRS en tant que co-directeur de thèse, et de Quang Huy Tran, ingénieur de recherche à l'Institut Français du Pétrole, en tant que responsable IFP. Il a bénéficié de l'apport de Frédéric Daude [8] et Alexandre Fornel [9] en tant que stagiaires de fin d'étude de l'école Matmecca.

Financement

La thèse présentée ici a été effectuée dans sa totalité à l'Institut Français du Pétrole. Elle a été financée par une bourse CIFRE, système de bourses géré par l'ANRT (Association nationale de la recherche technique). *“L'entreprise [...] verse à son ”jeune Cifre” un salaire supérieur ou égal à 20 214 euros (salaire annuel, brut, hors charges patronales). Pendant les trois ans que dure la Convention, l'entreprise se voit attribuer une subvention forfaitaire annuelle de 14 635 euros, que lui verse l'Association nationale de la recherche technique (ANRT), responsable de la gestion et de l'animation des conventions Cifre, pour le compte du ministère chargé de la Recherche.”*

Outils

Cette recherche a donné lieu à l'implémentation d'un programme prototype en Fortran 90 d'environ 30 000 lignes de code. Ce code est auto-documenté grâce à l'outil de documentation automatique Robodoc. Une interface graphique en Tcl/Tk a été développée. L'ensemble du projet informatique, géré sous CVS, est l'objet d'un guide développeur/utilisateur.

Valorisation des résultats

Outre les présentations internes à l'IFP, deux présentations externes ont été faites :

- “*Méthode de relaxation pour la simulation des écoulements diphasiques dans les conduites pétrolières*”, SMAI 2001, Pompadour, France,
- “*A time semi-implicit relaxation scheme for two-phase flows in pipelines*”, ENUMATH 2003, Prague, République Tchèque.

Ces travaux font par ailleurs l'objet de trois articles :

- “*A relaxation method for two-phase flow models*”, M. BAUDIN, C. BERTHON, F. COQUEL, R. MASSON ET Q.-H. TRAN soumis à *Numerische Mathematik*,
- “*A semi-implicit relaxation scheme for modeling two-phase flow in a pipeline*”, M. BAUDIN, F. COQUEL ET Q.-H. TRAN en préparation,
- “*Relaxation methods via the Born-Infeld system*”, M. BAUDIN, F. COQUEL ET Q.-H. TRAN en préparation.

Les résultats partiels de cette étude sont par ailleurs exposés dans les rapports IFP [10] (2001), [4] (2002), [8] (2002) et [9] (2003).

Contenu de ce document

Le plan de ce document est le suivant.

Dans la première partie, nous considérons un modèle diphasique isotherme non compositionnel. Pour ce système de lois de conservation, nous proposons un schéma numérique explicite fondé sur une méthode de Godunov pour un système de relaxation bien choisi. Puis, après une interprétation de la méthode comme une méthode de Roe, rendue possible par dégénérescence linéaire des champs caractéristiques du système de relaxation, nous présentons le schéma de relaxation semi-implicite linéaire. Nous montrons des résultats numériques qui consistent en des tubes à choc ainsi que des cas (réalistes) impliquant des conditions aux limites. Enfin, nous exposons le calcul de la complexité des algorithmes ainsi qu'une analyse de la décomposition du temps d'exécution des expériences numériques.

Dans la seconde partie, nous présentons un schéma de relaxation pour les écoulements diphasiques *compositionnels*. Nous décrivons dans le détail la thermodynamique à 2 constituants que nous avons utilisé (bien que notre étude soit valable pour un nombre quelconque de constituants). Nous montrons que, dans ce cas particulier, la pression est une fonction non régulière de la variable conservative. Nous proposons un schéma de relaxation fondé sur un solveur de Godunov puis nous interprétons la méthode comme une méthode de Roe. Cette technique est utilisée dans la construction d'un schéma semi-implicite linéaire. Nos résultats numériques consistent en des tubes à chocs.

Dans l'annexe A, nous décrivons une méthode de relaxation fondée sur le système de Born-Infeld. La méthode s'appuie sur la dégénérescence linéaire des champs de ce système non linéaire. Nous appliquons notre technique à une équation scalaire (issu de la simplification du modèle diphasique) ainsi qu'au système diphasique lui-même. Nous mettons en évidence, dans ces deux cas, la condition de stabilité de Whitham. Nous présentons enfin des résultats numériques obtenus sur des problèmes de Riemann.

Dans l'annexe B, nous décrivons un schéma numérique de relaxation pour la simulation des écoulements triphasiques isotherme non compositionnels. Nous proposons un schéma de relaxation explicite fondé sur un solveur de Godunov. Dans le but de montrer que l'implicitation du schéma est possible, nous présentons l'interprétation de la méthode explicite comme une méthode de Roe. Cette étude ne contient pas de résultats numériques.

Dans l'annexe C, nous décrivons un schéma numérique de relaxation pour la simulation des

écoulements diphasiques non isothermes, non compositionnels. Nous proposons un schéma de relaxation explicite fondé sur un solveur de Godunov. Nous détaillons le calcul des coefficients de relaxation, qui est plus complexe qu'auparavant. Nous présentons également le calcul des invariants forts du système de relaxation, qui s'avère également plus délicat. Dans le but de montrer que l'implicitation du schéma est possible, nous présentons l'interprétation de la méthode explicite comme une méthode de Roe. Cette étude ne contient pas de résultats numériques.

Modèle diphasique isotherme non compositionnel

Chapitre 1

Introduction

Cette partie est consacré au système de lois de conservation qui a été l’objet des deux premières années de thèse. Son étendue s’explique par le fait qu’il était indispensable de s’assurer des qualités du schéma de relaxation sur le modèle polyphasique le plus “simple” possible, tout en contenant le coeur des non-linéarités du problème.

Nous considérons les hypothèses suivantes.

1. La température est constante.
2. Le mélange est composé de deux constituants.
3. Le constituant lourd est à l’état liquide, le constituant léger est à l’état de gaz.
4. Il n’y pas d’échanges de masse entre les phases.

Un tel modèle est souvent appelé “gaz-liquide isotherme”. Il est constitué de lois de conservation complétés par des lois de fermetures thermodynamiques et hydrodynamiques hautement non linéaires.

Le plan de cette partie est le suivant. Nous commençons par présenter le modèle continu c’est à dire essentiellement les lois de fermetures ainsi que les lois de conservation utilisées. Puis nous présentons le schéma de relaxation explicite puis des compléments concernant les coefficients de relaxation et le traitement aux limites. Nous présentons ensuite le schéma de relaxation semi-implicite linéaire. Nous validons ces schémas par des expériences numériques fondées sur des tubes à chocs et des variations de conditions aux limites. Enfin, nous analysons le temps d’exécution du schéma et calculons sa complexité algorithmique.

Chapitre 2

Modèle continu

2.1 Géométrie

La géométrie d'une conduite est caractérisée par la donnée de :

- sa longueur L ,
- son diamètre D ,
- son inclinaison θ .

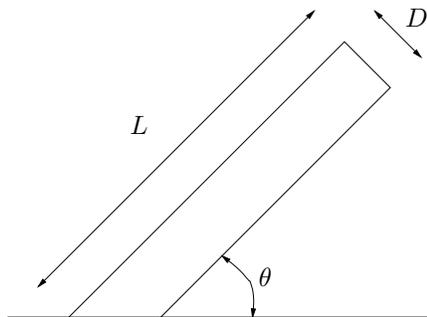


FIG. 2.1 – Conduite élémentaire

Sur chaque tronçon rectiligne, ces quantités sont uniformes vis-à-vis de la variable d'espace x . Une conduite est, par définition, la succession de plusieurs tronçons. A l'échelle d'une conduite, les grandeurs L , D et θ sont donc constantes par morceaux vis-à-vis de la variable x , qui représente maintenant l'abscisse curviligne le long de la conduite.

Dans toute la suite de ce document, on travaille avec *un seul tronçon*.

2.2 Variables

Les équations sont classiquement écrites dans les variables suivantes (on indicera respectivement par L et G les variables relatives au liquide et au gaz) :

- les masses volumiques $\rho_L, \rho_G,$
- les fractions surfaciques¹ $R_L, R_G,$
- les vitesses réelles $v_L, v_G,$
- la pression $p.$

Ces variables dépendent de l'abscisse x le long de la conduite et du temps t . Il est par ailleurs commode d'introduire les grandeurs suivantes :

- la masse volumique totale $\rho = \rho_L R_L + \rho_G R_G ;$
- la fraction massique du liquide $X = \rho_L R_L / \rho ;$
- la fraction massique du gaz $Y = \rho_G R_G / \rho ;$
- la vitesse superficielle $u_s = R_L v_L + R_G v_G ;$
- la vitesse massique du mélange $v = X v_L + Y v_G ;$
- le débit de liquide $q_L = \rho_L R_L v_L ;$
- le débit de gaz $q_G = \rho_G R_G v_G .$

Les égalités suivantes sont vérifiées

$$X + Y = 1, \quad R_L + R_G = 1, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{X}{\rho_L} + \frac{Y}{\rho_G}, \quad (2.1)$$

ainsi que les inégalités

$$0 \leq X \leq 1, \quad 0 \leq Y \leq 1, \quad 0 \leq R_L \leq 1, \quad 0 \leq R_G \leq 1. \quad (2.2)$$

2.3 Thermodynamique

Nous supposons que la température est constante ($T = T^0$). Le mélange est composé d'un gaz parfait et d'un liquide compressible modélisé dans ce cas par les équations d'état

$$\rho_G(p) = \frac{p}{a_G^2}, \quad \rho_L(p) = \rho_L^0 + \frac{p - p^0}{a_L^2}, \quad (2.3)$$

où ρ_G est la masse volumique du gaz, a_G la vitesse du son dans le gaz, ρ_L est la masse volumique du liquide, p^0 la pression atmosphérique, ρ_L^0 est la masse volumique du liquide pour $p = p^0$ et a_L la vitesse du son dans le liquide.

Dans la pratique, on cherche p en fonction de ρ et Y . La pression est alors donnée par l'inversion de l'égalité $\frac{1}{\rho} = \frac{X}{\rho_L} + \frac{Y}{\rho_G}$ où ρ_L et ρ_G sont des fonctions de p .

Si $a_L \rightarrow \infty$, on se trouve alors dans le cas d'un liquide incompressible c'est à dire tel que $\rho_L(p) = \rho_L^0$. La pression s'exprime alors simplement par

$$p(\rho, Y) = a_G^2 \frac{\rho Y}{1 - (1 - Y) \frac{\rho}{\rho_L^0}}. \quad (2.4)$$

Une analyse plus profonde de cette thermodynamique est détaillée dans le paragraphe 9.1.4.

2.4 Hydrodynamique

La loi hydrodynamique est censée exprimer une propriété caractéristique, mais souvent empirique, de l'écoulement considéré. La grande variété des régimes d'écoulement est illustrée sur les figures (2.2) et (2.3).

¹Sur une section de tuyau, ces fractions représentent la proportion surfacique de chaque phase par rapport à la surface totale. Ainsi, on a $R_L + R_G = 1$.

Définissons le glissement par

$$\varphi = v_L - v_G. \quad (2.5)$$

Notons que cette définition est de *signe contraire* à la convention habituelle $\varphi = v_G - v_L$, mais cela ne change pas fondamentalement les idées. Dans le code Tacite, la fonction φ est d'une grande complexité. Elle n'a pas d'expression algébrique simple et peut même être discontinue. Dans ce document, nous ne considérons que des lois de glissement continues.

Remarque 2.4.1 *Pourtant, le modèle hydrodynamique dit “complet”, utilisé dans le code Tacite, est discontinu. La construction de schémas numériques pour les systèmes diphasiques doit prendre en compte cette contrainte et la méthode de relaxation pourrait permettre de traiter cette difficulté. Dans le cadre du stage d’Alexandre Fornel [9], cette loi discontinue a été testée avec la méthode de relaxation. Notons que certains auteurs Norvégiens tels Evje, Fjelde, Karlsen, Klingenberg & Risebro, qui s’intéressent par ailleurs aux écoulements en conduites [24, 27], tentent d’évaluer la méthode de relaxation pour un flux discontinu dans [39].*

La complexité de la loi hydrodynamique implique qu’il est impossible d’avoir une expression analytique du flux numérique du système de lois de conservation. C’est un obstacle mathématique majeur, en particulier du point de vue du schéma numérique. C’est l’une des difficultés de la modélisation que les physiciens de Tacite cherchent à lever. D’une façon générale, quelle que soit la loi utilisée, on peut aisément établir que

$$v_L = v + Y\varphi, \quad v_G = v - X\varphi, \quad (2.6)$$

$$u_s = v + (YR_L - XR_G)\varphi, \quad (2.7)$$

sous la convention (2.5) pour le glissement. Ces relations sont très utiles tant sur le plan théorique que pour l’implémentation pratique.

Examinons quelques cas bien référencés.

2.4.1 Écoulements co-vitesse

Le glissement est nul, autrement dit

$$\varphi = 0. \quad (2.8)$$

Les deux phases se déplacent à la même vitesse. Ceci peut sembler physiquement peu intéressant. Toutefois, il peut être utile dans un cadre de validations d’étudier ce cas puisqu’alors on peut calculer analytiquement la solution du problème de Riemann (voir en annexe).

2.4.2 Écoulements dispersés

Ces écoulements sont caractérisés par la présence de phases sous forme d’émulsions. Typiquement dans ce cas on observe des petits bulles de gaz dans le liquide.

$$\varphi = -\frac{\delta}{R_L} \quad (2.9)$$

où $\delta = 1.53\sqrt{g\sigma/\rho_L}\sin\theta$ est la vitesse de dérive et σ la tension superficielle. Dans ce cas, il est également possible de calculer les éléments propres de la jacobienne, mais la solution du problème de Riemann est relativement ardue. Cette loi n’est valable que pour R_L proche de 1.

2.4.3 Écoulements intermittents

Ils sont modélisés par la loi de Zuber-Findlay [71].

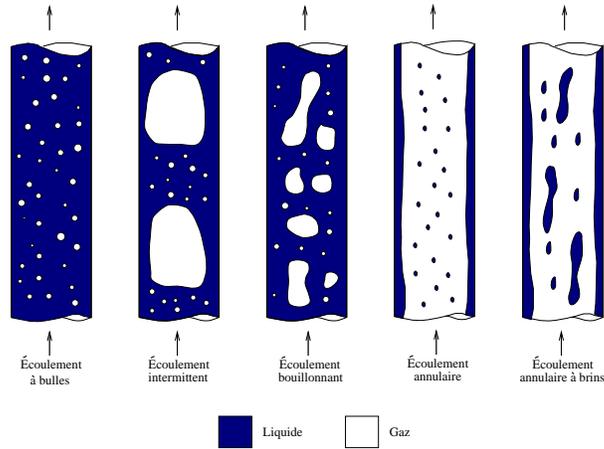


FIG. 2.2 – écoulements verticaux

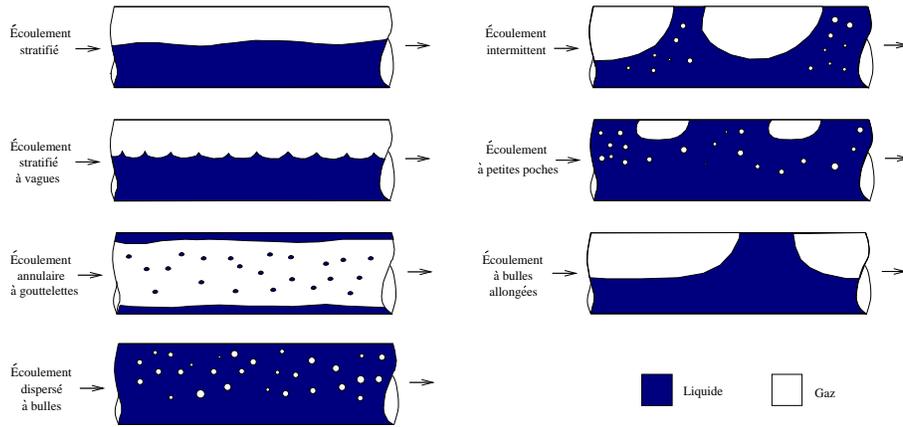


FIG. 2.3 – écoulements horizontaux

2.4.3.0.1 Zuber-Findlay C'est le modèle :

$$v_G = c_0 u_s + c_1, \quad (2.10)$$

valide pour $c_0 > 1$ et $R_G < 1/c_0$. Cette loi est utilisée dans [11] où la solution du problème de Riemann est déterminée analytiquement (voir en annexe). Elle présente pourtant l'inconvénient de ne pas pouvoir s'appliquer dans les écoulements monophasiques gaz : dans ce cas, $v_G = u_s$ donc $v_G = \frac{c_1}{1-c_0}$! C'est pour cela qu'on utilise dans ces cas là le modèle qu'on appellera ici Zuber-Findlay-IFP.

2.4.3.0.2 Zuber-Findlay-IFP C'est le modèle :

$$v_G = (1 + \mu R_L) u_s + \nu R_L, \quad (2.11)$$

avec $\mu = 0.2 \sin^2 \theta$ et $\nu = 0.35 \sqrt{gD} \sin \theta$. Dans ce modèle, si la conduite n'est pas inclinée, $\theta = 0$ implique $v_G = u_s = v_L$ et le glissement est nul.

2.5 Lois de conservation

Les équations aux dérivées partielles de base de Tacite sont obtenues en moyennant les lois de conservation classiques sur une section de la conduite.

La particularité de Tacite réside dans le fait qu'il n'y a qu'une seule équation de quantité de mouvement au lieu de deux (une pour chaque phase). Cette simplification nécessite l'introduction d'une relation supplémentaire, dite loi de fermeture, qui dépend de la configuration d'écoulement étudiée.

2.5.1 Variables naturelles

Les équations de conservation mises en œuvre dans Tacite sont les suivantes :

- la masse du liquide

$$\partial_t(\rho_L R_L) + \partial_x(\rho_L R_L v_L) = 0, \quad (2.12)$$

- la masse du gaz

$$\partial_t(\rho_G R_G) + \partial_x(\rho_G R_G v_G) = 0, \quad (2.13)$$

- la quantité de mouvement totale

$$\partial_t(\rho_L R_L v_L + \rho_G R_G v_G) + \partial_x(\rho_L R_L v_L^2 + \rho_G R_G v_G^2 + p) = S. \quad (2.14)$$

La source S prend en compte les forces de pesanteur et les forces de frottements. Souvent, on l'exprime comme

$$S = -\rho g \sin \theta - \frac{2C_f}{D} \rho v |v|, \quad (2.15)$$

où C_f représente un coefficient de frottement tandis que ρ et v ont été définis précédemment. D'après (2.15), la source S ne dépend que de ρ et v .

2.5.2 Variables conservatives

Il est traditionnel de simplifier le système d'équations précédent en introduisant la variable conservative $\mathbf{u} = (\rho, \rho v, \rho Y)^T$. Le triplet $(\rho, \rho v, \rho Y)$ constitue les variables de base en fonction desquelles on exprime toutes les autres grandeurs, et ce via les relations thermodynamiques. Par exemple, il vient que $R_L = \frac{\rho - \rho Y}{\rho_L}$, à partir de quoi l'on peut obtenir toutes les autres grandeurs par l'intermédiaire de (2.6–2.7).

Bien entendu, le glissement φ doit être considéré aussi comme une fonction de $(\rho, \rho v, \rho Y)$. Le système (2.12), (2.13) et (2.14) se réécrit alors sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + P(\mathbf{u})) = S(\mathbf{u}), \\ \partial_t(\rho Y) + \partial_x(\rho Y v - \sigma(\mathbf{u})) = 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

$$(2.17)$$

où

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{u}) &= \rho Y(1 - Y) \varphi(\mathbf{u}) && \text{est l'impulsion apparente;} \\ P(\mathbf{u}) &= p(\mathbf{u}) + \rho Y(1 - Y) \varphi(\mathbf{u})^2 && \text{est la pression apparente.} \end{aligned}$$

Le système précédent s'écrit sous la forme abstraite

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathcal{F}(\mathbf{u}) = \mathcal{S}(\mathbf{u}) \quad (2.18)$$

où les définitions sont évidentes.

La première équation de (2.16), résultant de la somme de (2.12) et (2.13), représente la conservation de la masse totale. La deuxième équation de (2.16) n'est autre que le bilan de quantité de mouvement totale (2.14). La troisième équation de (2.16) est la réécriture de l'équation de conservation de la masse de gaz (2.13).

2.6 Cadre mathématique

L'espace des états associé est

$$\Omega = \{ \mathbf{u} = (\rho, \rho v, \rho Y)^T \in \mathbb{R}^3; \rho > 0, v \in \mathbb{R}, Y \in [0, 1] \}.$$

On dit que le système (2.18) est **hyperbolique** si, pour tout \mathbf{u} admissible, la matrice jacobienne $\nabla \mathcal{F}$ admet des valeurs propres réelles et possède une base de vecteurs propres.

Dans le cas d'écoulements diphasiques régis par (2.16), on peut démontrer que l'hyperbolicité a lieu pour le glissement nul, le glissement dispersé et le glissement intermittent (Zuber-Findlay). Dans les autres cas, on ne sait rien dire. La complexité de la loi de glissement φ dans Tacite n'arrange pas la situation. Cependant, on observe numériquement qu'il y a hyperbolicité dans la plupart des écoulements, et que de plus, les valeurs propres sont de la forme :

$$\lambda^- = v - c^- < 0, \quad \lambda^0 = v + c^0, \quad \lambda^+ = v + c^+ > 0 \quad (2.19)$$

où c^- , c^0 et c^+ dépendent, certes, de l'expression précise de la loi de fermeture, mais que

$$\begin{aligned} c^- \text{ et } c^+ & \text{ sont positifs, de valeurs absolues très grandes devant } |v|; \\ c^0 & \text{ est de signe variable, de valeur absolue de l'ordre de } |v|. \end{aligned}$$

Les deux valeurs propres extrêmes, λ^- et λ^+ , sont relatives aux **ondes de pression** et se propagent grâce à la compressibilité du fluide, à des vitesses rapides. Quant à λ^0 dont le signe est variable, elle se rapporte aux ondes dites **cinématiques** ou de **taux de vide**, et se propagent avec la matière à des vitesses plus lentes.

2.7 Conditions aux limites et donnée initiale

Nous traiterons dans un premier temps des problèmes de Riemann pour lesquels la donnée initiale est, pour une conduite de longueur 100 mètres,

$$\mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}^L, & \text{si } 0 < x < 50, \\ \mathbf{u}^R, & \text{si } 50 < x < 100. \end{cases} \quad (2.20)$$

Pour ces cas, il n'y a pas de conditions aux limites.

Nous traiterons également des cas pour lesquels l'écoulement est induit par des variations de conditions aux limites. A l'entrée de la conduite ($x = 0$), les débits massiques sont donnés en fonction du temps, i.e.

$$(\rho_\alpha R_\alpha v_\alpha)(0, t) = q_\alpha^0(t), \quad t \geq 0, \quad \alpha = L, G,$$

et à la sortie de la conduite ($x = L$), la pression est donnée en fonction du temps, i.e.

$$p(L, t) = p^L(t), \quad t \geq 0.$$

Dans ces expériences, la donnée initiale est l'état stationnaire, calculé à partir de la valeur des conditions aux limites à la date $t = 0$.

2.8 Discrétisation

La conduite est décomposé en I mailles, notées M_i pour $i \in \{1, \dots, I\}$. Soit x_i le centre de la maille M_i , Δx sa longueur et $x_{i+1/2}$ l'interface séparant M_i et M_{i+1} , comme le montre la figure (2.4). On a donc $M_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ ainsi que les relations évidentes suivantes :

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= 0 && \text{bord gauche;} \\ x_{I+1/2} &= L && \text{bord droite;} \\ x_i &= \frac{1}{2}(x_{i+1/2} + x_{i-1/2}) && \text{centre de } M_i; \\ \Delta x_i &= x_{i+1/2} - x_{i-1/2} && \text{longueur de } M_i. \end{aligned}$$

Nous avons considéré des maillages pour lesquels le pas d'espace est constant : nous le noterons donc par la suite Δx .

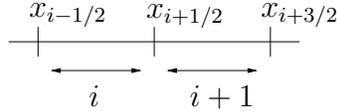


FIG. 2.4 – Discrétisation du domaine intérieur

Notons $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ le pas de temps.

2.9 Outils numériques de base

L'objet de ce paragraphe est de décrire certains outils numériques afin d'alléger la description du schéma numérique de relaxation explicite. Ces techniques ont été choisies car elles sont validées depuis plusieurs années dans le cadre du projet TACITE de l'IFP et sont celles utilisées dans [26] (et présentées d'un point de vue plus théorique dans [32, 45]). Supposons que nous savons construire un schéma volume finis du type

$$\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t^n} + \frac{\mathcal{F}_{i+1/2}^{n+1/2}(\mathbf{u}^n) - \mathcal{F}_{i-1/2}^{n+1/2}(\mathbf{u}^n)}{\Delta x} = 0. \quad (2.21)$$

2.9.1 Intégration des termes sources

Il est classique d'utiliser une technique de splitting qui conduit à l'écriture du schéma numérique explicite

$$\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t^n} + \frac{\mathcal{F}_{i+1/2}^{n+1/2}(\mathbf{u}^n) - \mathcal{F}_{i-1/2}^{n+1/2}(\mathbf{u}^n)}{\Delta x} = \mathcal{S}(\mathbf{u}^n). \quad (2.22)$$

2.9.2 Montée en ordre du schéma

En espace, la montée en ordre du schéma consiste en une reconstruction linéaire de type MUSCL. Elle conduit à considérer que la solution n'est plus constante par maille mais linéaire par morceau, comme le montre la figure (2.5). La limitation des pentes n'est pas effectuée sur la variable conservative \mathbf{u} mais sur la variable physique (p, v, Y) .

En temps, la montée en ordre du schéma se fait grâce à la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2. Notons \mathbb{L} l'opérateur d'évolution du premier ordre en temps défini par le schéma explicite. L'algorithme suit alors les étapes suivantes.

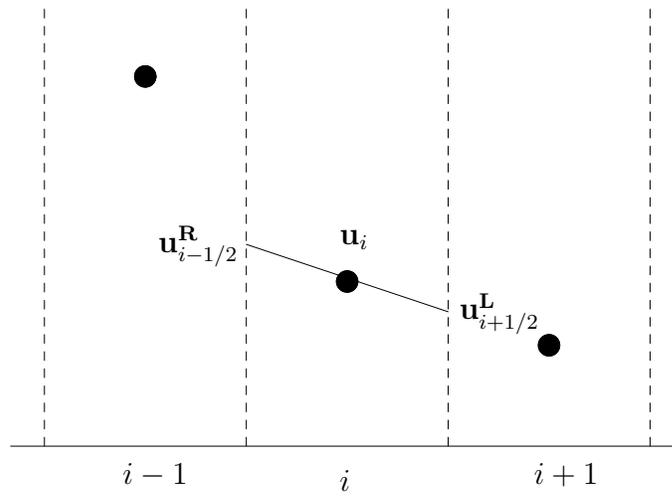


FIG. 2.5 – Reconstruction linéaire

- Premier demi-pas de temps : $\mathbf{u}^* = \mathbb{L}(\mathbf{u}^n)$.
- Deuxième demi-pas de temps : $\mathbf{u}^{**} = \mathbb{L}(\mathbf{u}^*)$.
- Mise à jour définitive : $\mathbf{u}^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{**})$.