

Modèle de syntrophie avec croissance monotone des bactéries méthanogènes

Dans ce chapitre, on étudie un modèle décrivant une relation de syntrophie de deux espèces microbiennes avec deux substrats à l'entrée, incluant les termes de mortalité et l'inhibition de la première espèce par un excès du deuxième substrat. Ce modèle peut être considéré comme une version réduite et simplifiée du processus de la digestion anaérobie. On détermine les conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres opératoires du système (le taux de dilution D et les concentrations des deux substrats à l'entrée s_0^{in} et s_1^{in}) pour l'existence et la stabilité des équilibres. En utilisant les diagrammes opératoires, on décrit le comportement asymptotique du modèle en fonction des paramètres de contrôle et on étudie l'effet d'un deuxième substrat à l'entrée.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans le paragraphe 4.1, on présente un modèle à deux étapes avec deux substrats à l'entrée où le taux de croissance spécifique à la seconde espèce est monotone et on donne un résultat préliminaire sur la positivité et la bornitude des solutions sous des hypothèses générales sur les fonctions de croissance. Dans le paragraphe 4.2, on décrit les équilibres du modèle et on discute leur stabilité. Ensuite, dans le paragraphe 4.3, on illustre l'effet de l'ajout du second substrat à l'entrée, en traçant les diagrammes opératoires en fonction des paramètres opératoires. Ces paramètres sont s_0^{in} , la concentration du premier substrat à l'entrée, s_1^{in} , la concentration du second substrat à l'entrée et D le taux de dilution. Dans un premier lieu, on fixe s_1^{in} et on décrit les diagrammes opératoires dans le plan défini par s_0^{in} et D . En second lieu, on fixe s_0^{in} et on décrit les diagrammes opératoires dans le plan défini par s_1^{in} et D . Finalement, on fixe D et on présente les résultats par des diagrammes opératoires dans le plan défini par s_0^{in} et s_1^{in} . Enfin, dans le paragraphe 4.4, des simulations numériques sont présentées pour illustrer les résultats dans les différents cas.

4.1 Le modèle de la digestion anaérobie à deux étapes

Le modèle à deux étapes qu'on se propose d'étudier est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds_0}{dt} = D(s_0^{in} - s_0) - \mu_0(s_0, s_1)x_0 \\ \frac{dx_0}{dt} = -Dx_0 + \mu_0(s_0, s_1)x_0 - a_0x_0 \\ \frac{ds_1}{dt} = D(s_1^{in} - s_1) + \mu_0(s_0, s_1)x_0 - \mu_1(s_1)x_1 \\ \frac{dx_1}{dt} = -Dx_1 + \mu_1(s_1)x_1 - a_1x_1 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Les fonctions $\mu_0(.,.)$ et $\mu_1(.)$ satisfont :

$$\mathbf{H1} \quad \forall s_0 > 0 \text{ et } s_1 \geq 0, \mu_0(s_0, s_1) > 0, \mu_0(0, s_1) = 0 \text{ et } \sup_{s_0 \geq 0} \mu_0(s_0, s_1) < +\infty.$$

$$\mathbf{H2} \quad \forall s_1 > 0, \mu_1(s_1) > 0, \mu_1(0) = 0 \text{ et } m_1 := \sup_{s_1 \geq 0} \mu_1(s_1) < +\infty.$$

$$\mathbf{H3} \quad \forall s_0 > 0 \text{ et } s_1 > 0, \frac{\partial \mu_0}{\partial s_0}(s_0, s_1) > 0 \text{ et } \frac{\partial \mu_0}{\partial s_1}(s_0, s_1) < 0.$$

Pour s_1 fixé, on note :

$$m_0(s_1) = \sup_{s_0 \geq 0} \mu_0(s_0, s_1).$$

On suppose que $m_0(.)$ est dérivable pour tout $s_1 \geq 0$. Notons que, l'hypothèse **H3** implique que $m_0'(s_1) \leq 0, \forall s_1 \geq 0$.

L'hypothèse **H1** signifie qu'il n'y a pas de croissance de l'espèce x_0 sans le substrat s_0 . L'hypothèse **H2** signifie que la production de s_1 est nécessaire pour la croissance de l'espèce x_1 . L'hypothèse **H3** signifie que le taux de croissance de l'espèce x_0 croît avec le substrat s_0 mais il est inhibé par la production de s_1 .

Dans ce chapitre, on considère que la croissance de l'espèce x_1 croît avec la production de s_1 par x_0 , ce qui se traduit par une fonction de croissance μ_1 croissante. On suppose donc que :

$$\mathbf{H4} \quad \forall s_1 > 0, \frac{d\mu_1}{ds_1}(s_1) > 0.$$

Dans un premier temps, on peut montrer que :

Proposition 4.1.1. *Pour des valeurs initiales positives, les solutions du système (4.1) restent positives et bornées, pour tout $t \geq 0$.*

Preuve Pour toute condition initiale positive $s_0(0) \geq 0$, s'il existe un premier temps $t_0 > 0$ tel que $s_0(t_0) = 0$, alors on a $\frac{ds_0}{dt}(t_0) = Ds_0^{in} > 0$. Par suite $s_0(t) > 0$ pour tout $t > t_0$. Comme $s_0(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, t_0]$, alors $s_0(t) \geq 0, \forall t \geq 0$.

D'autres part, pour toutes conditions initiales $x_i(0) \geq 0$ pour $i = 1, 2$, s'il existe un premier temps $t_0 > 0$ tel que $x_i(t_0) = 0$, alors on a $\frac{dx_i}{dt}(t_0) = 0$, donc $x_i(t)$ est nul à partir de ce temps t_0 , par conséquent $x_i(t) \geq 0, \forall t \geq 0$.

Finalement, pour toute condition initiale $s_1(0) \geq 0$, s'il existe un premier temps $t_0 > 0$ tel que $s_1(t_0) = 0$, on obtient $\frac{ds_1}{dt}(t_0) = \mu_0(s_0, 0)x_0 + Ds_1^{in} > 0$, d'après **H1**. Par suite

$s_1(t) \geq 0$ pour tout $t > t_0$. Comme $s_1(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, t_0]$, alors $s_1(t) \geq 0, \forall t \geq 0$. Ceci montre la positivité des solutions de (4.1).

Pour montrer que les solutions de (4.1) sont bornées, on pose $z = 2s_0 + x_0 + s_1 + x_1$ alors

$$\frac{dz}{dt} = D(2s_0^{in} + s_1^{in} - z) - a_0x_0 - a_1x_1.$$

En déduit que, $\frac{dz}{dt} \leq D(2s_0^{in} + s_1^{in} - z)$. on pose maintenant

$$v = z - 2s_0^{in} - s_1^{in},$$

alors, $\frac{dv}{dt} \leq -Dv$. En appliquant le lemme de Gronwall, on obtient $v(t) \leq v(0)e^{-Dt}$ et par conséquent

$$z(t) \leq (2s_0^{in} + s_1^{in}) + (-2s_0^{in} - s_1^{in} + z(0))e^{-Dt}, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

On a : si $z(0) \geq 2s_0^{in} + s_1^{in}$ alors $z(t) \leq z(0)$ et si $z(0) \leq 2s_0^{in} + s_1^{in}$ alors $z(t) \leq 2s_0^{in} + s_1^{in}$. On déduit que

$$z(t) \leq \max(z(0), 2s_0^{in} + s_1^{in}), \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Par conséquent, les solutions de (4.1) sont bornées, pour tout $t \geq 0$.

□

4.2 L'analyse du modèle

4.2.1 L'analyse des équilibres

Les équilibres du modèle (4.1) sont les solutions du système algébrique non linéaire obtenu en annulant les termes à droite des équations de (4.1) :

$$D(s_0^{in} - s_0) - \mu_0(s_0, s_1)x_0 = 0 \tag{4.2}$$

$$-Dx_0 + \mu_0(s_0, s_1)x_0 - a_0x_0 = 0 \tag{4.3}$$

$$D(s_1^{in} - s_1) + \mu_0(s_0, s_1)x_0 - \mu_1(s_1)x_1 = 0 \tag{4.4}$$

$$-Dx_1 + \mu_1(s_1)x_1 - a_1x_1 = 0 \tag{4.5}$$

Comme toutes les variables sont des concentrations, l'équilibre $E = (s_0, x_0, s_1, x_1)$ existe si et seulement si toutes ses composantes sont positives ou nulles. D'après l'équation (4.3), on déduit que :

$$x_0 = 0 \quad \text{ou} \quad \mu_0(s_0, s_1) = D + a_0,$$

et d'après l'équation (4.5), on déduit que :

$$x_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \mu_1(s_1) = D + a_1.$$

On a donc quatre équilibres définis par :

SS0 : $x_0 = 0, x_1 = 0$ où il y a lessivage des deux espèces.

SS1 : $x_0 > 0, x_1 = 0$ où l'espèce x_1 est lessivée tandis que l'espèce x_0 survit.

SS2 : $x_0 > 0, x_1 > 0$ où les deux espèces coexistent.

SS3 : $x_0 = 0$, $x_1 > 0$ où l'espèce x_0 est lessivée tandis que x_1 survit.

Pour la description des équilibres, on a besoin des notations suivantes :
 Comme la fonction $s_1 \mapsto \mu_1(s_1)$ est croissante, elle possède une fonction inverse $y \mapsto M_1(y)$,
 donc, pour tout $s_1 \geq 0$ et $y \in [0, m_1[$

$$s_1 = M_1(y) \iff y = \mu_1(s_1).$$

Soit s_1 fixé. Comme la fonction $s_0 \mapsto \mu_0(s_0, s_1)$ est croissante, elle possède une fonction
 inverse $y \mapsto M_0(y, s_1)$, donc, pour tout $s_0, s_1 \geq 0$, et $y \in [0, m_0(s_1)[$

$$s_0 = M_0(y, s_1) \iff y = \mu_0(s_0, s_1).$$

Par suite, on a le résultat suivant :

Proposition 4.2.1. *Sous les hypothèses **H3-H4**, on a :*

- Pour tout $y \in [0, m_0(s_1)[$ et $s_1 \geq 0$, $\frac{\partial M_0}{\partial y}(y, s_1) > 0$ et $\frac{\partial M_0}{\partial s_1}(y, s_1) > 0$.
- Pour tout $y \in [0, m_1[$, $\frac{dM_1}{dy}(y) > 0$.

Preuve

D'après l'équivalence

$$s_0 = M_0(y, s_1) \iff y = \mu_0(s_0, s_1),$$

on a, pour tout $y \in [0, m_0(s_1)[$ et $s_1 \geq 0$,

$$\mu_0(M_0(y, s_1), s_1) = y. \tag{4.6}$$

En dérivant l'équation (4.6) par rapport à y et en utilisant **H3**, on obtient :

$$\frac{\partial M_0}{\partial y}(y, s_1) = \left[\frac{\partial \mu_0}{\partial s_0}(M_0(y, s_1), s_1) \right]^{-1} > 0.$$

Maintenant, si on dérive l'équation (4.6) par rapport à s_1 et en utilisant **H3**, on obtient :

$$\frac{\partial M_0}{\partial s_1}(y, s_1) = - \left[\frac{\partial \mu_0}{\partial s_1}(M_0(y, s_1), s_1) \right] \left[\frac{\partial \mu_0}{\partial s_0}(M_0(y, s_1), s_1) \right]^{-1} > 0.$$

Finalement, d'après l'équivalence $s_1 = M_1(y) \iff y = \mu_1(s_1)$, on a pour tout $y \in [0, m_1[$,
 $\mu_1(M_1(y)) = y$. En dérivant cette équation par rapport à y et en utilisant **H4**, on obtient :

$$\frac{dM_1}{dy}(y) = \left[\frac{d\mu_1}{ds_1}(M_1(y)) \right]^{-1} > 0.$$

□

La Proposition 4.2.1 est nécessaire pour avoir les résultats de la Proposition 4.2.2.

Proposition 4.2.2. *Sous les hypothèses **H1-H4**, (4.1) possède au maximum quatre équi-*
libres :

- $SS0 = (s_0^{in}, 0, s_1^{in}, 0)$. Il existe toujours.
- $SS1 = (s_{01}, x_{01}, s_{11}, 0)$, avec s_{01} est la solution de l'équation :

$$\mu_0(s_{01}, (s_0^{in} + s_1^{in}) - s_{01}) = D + a_0,$$

$$x_{01} = \frac{D}{D+a_0}(s_0^{in} - s_{01}) \text{ et } s_{11} = (s_0^{in} + s_1^{in}) - s_{01}.$$

Il existe si et seulement si $s_0^{in} > M_0(D + a_0, s_1^{in})$.

- $SS2 = (s_{02}, x_{02}, s_{12}, x_{12})$, avec $s_{02} = M_0(D + a_0, M_1(D + a_1))$,

$$x_{02} = \frac{D}{D+a_0}(s_0^{in} - s_{02}), s_{12} = M_1(D + a_1)$$

$$\text{et } x_{12} = \frac{D}{D+a_1}((s_0^{in} + s_1^{in}) - s_{02} - s_{12}).$$

Il existe si et seulement si $s_0^{in} > M_0(D + a_0, M_1(D + a_1))$ et

$$s_0^{in} + s_1^{in} > M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)) + M_1(D + a_1).$$

- $SS3 = (s_0^{in}, 0, M_1(D + a_1), \frac{D}{D+a_1}(s_1^{in} - M_1(D + a_1)))$. Il existe si et seulement si $s_1^{in} > M_1(D + a_1)$.

Preuve

Un équilibre (s_0, x_0, s_1, x_1) de (4.1) est solution des équations (4.2)-(4.5).

- Pour $SS0$, $x_0 = 0, x_1 = 0$. D'après (4.2) et (4.4), on déduit que $s_0 = s_0^{in}$ et $s_1 = s_1^{in}$. $SS0 = (s_0^{in}, 0, s_1^{in}, 0)$ existe toujours.
- Pour $SS1$, $x_0 \neq 0, x_1 = 0$. D'après (4.3), on déduit que $\mu_0(s_0, s_1) = D + a_0$. On a

$$D(s_0^{in} - s_0) = \mu_0(s_0, s_1)x_0 \quad \text{et} \quad D(s_1 - s_1^{in}) = \mu_0(s_0, s_1)x_0.$$

Donc, $x_0 = \frac{D}{D+a_0}(s_0^{in} - s_0)$ et $D(s_0^{in} - s_0) = D(s_1 - s_1^{in})$, par conséquent $s_0 + s_1 = s_0^{in} + s_1^{in}$. Par suite, s_0 est une solution de l'équation

$$\mu_0(s_0, s_0^{in} + s_1^{in} - s_0) = D + a_0.$$

$SS1$ existe si et seulement si cette équation a une solution dans l'intervalle $]0, s_0^{in} + s_1^{in}[$. Définissons la fonction :

$$s_0 \mapsto \psi(s_0) = \mu_0(s_0, s_0^{in} + s_1^{in} - s_0).$$

ψ est strictement croissante car sa dérivée

$$\frac{d\psi}{ds_0}(s_0) = \frac{\partial \mu_0}{\partial s_0}(s_0, s_1) - \frac{\partial \mu_0}{\partial s_1}(s_0, s_1)$$

est positive.

Comme $\psi(0) = 0$ et $\psi(s_0^{in} + s_1^{in}) = \mu_0(s_0^{in} + s_1^{in}, 0)$, l'équation

$$\mu_0(s_0, s_0^{in} + s_1^{in} - s_0) = D + a_0$$

possède une solution dans l'intervalle $]0, s_0^{in} + s_1^{in}[$ si et seulement si

$$\psi(s_0^{in} + s_1^{in}) = \mu_0(s_0^{in} + s_1^{in}, 0) > D + a_0,$$

ce qui signifie que :

$$s_0^{in} + s_1^{in} > M_0(D + a_0, 0).$$

Maintenant, SS1 existe si et seulement si toutes ses composantes sont strictement positives. Pour cela, il suffit que $s_0 < s_0^{in}$ car $s_0^{in} < s_0^{in} + s_1^{in}$. En appliquant ψ qui est strictement croissante, on obtient : $D + a_0 < \mu_0(s_0^{in}, s_1^{in})$ ce qui est équivalent à :

$$s_0^{in} > M_0(D + a_0, s_1^{in})$$

De même, en utilisant les mêmes arguments, on obtient :

$$\mu_0(s_0^{in}, s_1^{in}) < \mu_0(s_0^{in} + s_1^{in}, 0).$$

Donc, si

$$D + a_0 < \mu_0(s_0^{in}, s_1^{in}),$$

alors, nécessairement

$$D + a_0 < \mu_0(s_0^{in} + s_1^{in}, 0)$$

Par suite, SS1 existe si et seulement si

$$s_0^{in} > M_0(D + a_0, s_1^{in}).$$

Alors, $SS1 = (s_{01}, x_{01}, s_{11}, 0)$, avec s_{01} est la solution de cette équation :

$$\mu_0(s_{01}, (s_0^{in} + s_1^{in}) - s_{01}) = D + a_0, \quad x_{01} = \frac{D}{D+a_0}(s_0^{in} - s_{01}) \text{ et } s_{11} = (s_0^{in} + s_1^{in}) - s_{01}.$$

Il existe si et seulement si $s_0^{in} > M_0(D + a_0, s_1^{in})$.

- Pour SS2, $x_0 \neq 0$ et $x_1 \neq 0$. D'après (4.3) et (4.5), on déduit que s_0 et s_1 sont solutions des équations

$$\mu_0(s_0, s_1) = D + a_0, \quad \mu_1(s_1) = D + a_1.$$

En appliquant M_1 , on obtient $s_1 = M_1(D + a_1)$ et s_0 est la solution de l'équation

$$\mu_0(s_0, M_1(D + a_1)) = D + a_0.$$

En appliquant M_0 , on obtient $s_0 = M_0(D + a_0, M_1(D + a_1))$. Maintenant, d'après (4.2) et (4.4)

$$x_0 = \frac{D}{D+a_0}(s_0^{in} - s_0), \quad x_1 = \frac{D}{D+a_1}(s_0^{in} + s_1^{in} - s_0 - s_1).$$

SS2 existe si et seulement si $s_0^{in} + s_1^{in} > s_0 + s_1$ et $s_0^{in} > s_0$. Ce qui est équivalent à :

$$s_0^{in} + s_1^{in} > M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)) + M_1(D + a_1)$$

et

$$s_0^{in} > M_0(D + a_0, M_1(D + a_1))$$

Alors, $SS2 = (s_{02}, x_{02}, s_{12}, x_{12})$, avec $s_{02} = M_0(D + a_0, M_1(D + a_1))$,

$$x_{02} = \frac{D}{D+a_0}(s_0^{in} - s_{02}), \quad s_{12} = M_1(D + a_1) \text{ et } x_{12} = \frac{D}{D+a_1}((s_0^{in} + s_1^{in}) - s_{02} - s_{12}).$$

Il existe si et seulement si $s_0^{in} > M_0(D + a_0, M_1(D + a_1))$ et

$$s_0^{in} + s_1^{in} > M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)) + M_1(D + a_1).$$

- Pour SS3, $x_0 = 0$ et $x_1 \neq 0$. D'après (4.2) et (4.5), on déduit que $s_0 = s_0^{in}$ et s_1 est la solution de l'équation

$$\mu_1(s_1) = D + a_1$$

En appliquant M_1 , on obtient

$$s_1 = M_1(D + a_1)$$

D'après (4.4), on a :

$$x_1 = \frac{D}{D + a_1} (s_1^{in} - M_1(D + a_1)).$$

Alors, $SS3 = (s_0^{in}, 0, M_1(D + a_1), \frac{D}{D+a_1} (s_1^{in} - M_1(D + a_1)))$. Il existe si et seulement si $s_1^{in} > M_1(D + a_1)$.

□

Par rapport à [24], un nouveau équilibre SS3 existe. Notons que, si $s_1^{in} = 0$ la condition $\mu_1(s_1^{in}) > a_1$ n'est pas satisfaite donc SS3 n'existe pas. Dans la section suivante, on analyse la stabilité locale des équilibres.

4.2.2 L'analyse de la stabilité locale

La stabilité des équilibres est donnée par le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice Jacobienne ou par le critère de Routh-Hurwitz (dans le cas SS2). Dans la suite, on utilise l'abréviation LES pour localement exponentiellement stable.

Proposition 4.2.3. *Sous les hypothèses H1–H4. La stabilité locale des équilibres de (4.1) est donnée par :*

- SS0 est LES si et seulement si $s_1^{in} < M_1(D + a_1)$ et $s_0^{in} < M_0(D + a_0, s_1^{in})$.
- SS1 est LES si et seulement si

$$s_0^{in} + s_1^{in} < M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)) + M_1(D + a_1).$$

- SS2 est LES dès qu'il existe.
- SS3 est LES si et seulement si $s_0^{in} < M_0(D + a_0, M_1(D + a_1))$.

Preuve

La stabilité locale de chaque équilibre dépend du signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice Jacobienne correspondante. Pour chaque équilibre (s_0, x_0, s_1, x_1) , La matrice Jacobienne est donnée par :

$$J = \begin{bmatrix} -D - Ex_0 & -\mu_0 & Fx_0 & 0 \\ Ex_0 & \mu_0 - D - a_0 & -Fx_0 & 0 \\ Ex_0 & \mu_0 & -D - Fx_0 - Gx_1 & -\mu_1 \\ 0 & 0 & Gx_1 & \mu_1 - D - a_1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

avec

$$E = \frac{\partial \mu_0}{\partial s_0}(s_0, s_1) > 0, \quad F = -\frac{\partial \mu_0}{\partial s_1}(s_0, s_1) > 0, \quad G = \frac{d\mu_1}{ds_1}(s_1) > 0.$$

Les valeurs propres de (4.7) sont les solutions de son polynôme caractéristique $\det(J - \lambda I)$. Notons qu'on a utilisé le signe opposé de la dérivée partielle

$$F = -\frac{\partial \mu_0}{\partial s_1}(s_0, s_1),$$

pour que toutes les constantes qui interviennent dans le calcul deviennent positives, ce qui simplifie l'analyse du polynôme caractéristique de (4.7).

— Pour $SS0 = (s_0^{in}, 0, s_1^{in}, 0)$, la matrice Jacobienne (4.7) s'écrit :

$$J_0 = \begin{bmatrix} -D & -\mu_0(s_0^{in}, s_1^{in}) & 0 & 0 \\ 0 & \mu_0(s_0^{in}, s_1^{in}) - D - a_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_0(s_0^{in}, s_1^{in}) & -D & -\mu_1(s_1^{in}) \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1(s_1^{in}) - D - a_1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Les valeurs propres de J_0 sont $\lambda_1 = \mu_0(s_0^{in}, s_1^{in}) - D - a_0$, $\lambda_2 = \mu_1(s_1^{in}) - D - a_1$ et $\lambda_3 = \lambda_4 = -D$. Pour que $SS0$ soit stable, il faut et il suffit que $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$. Par suite, $SS0$ est stable si et seulement si

$$\mu_0(s_0^{in}, s_1^{in}) < D + a_0$$

et

$$\mu_1(s_1^{in}) < D + a_1.$$

Pour s_1 fixé, comme la fonction $s_0 \mapsto \mu_0(s_0, s_1)$ est croissante, on obtient l'équivalence suivante :

$$\mu_0(s_0^{in}, s_1^{in}) < D + a_0 \iff s_0^{in} < M_0(D + a_0, s_1^{in}).$$

La fonction $s_1 \mapsto \mu_1(s_1)$ est croissante, alors on a :

$$\mu_1(s_1^{in}) < D + a_1 \iff s_1^{in} < M_1(D + a_1).$$

Par suite, $SS0$ est LES si et seulement si $s_1^{in} < M_1(D + a_1)$ et $s_0^{in} < M_0(D + a_0, s_1^{in})$.

— Pour $SS1 = (s_{01}, x_{01}, s_{11}, 0)$, avec s_{01} est la solution de l'équation :

$$\mu_0(s_{01}, (s_0^{in} + s_1^{in}) - s_{01}) = D + a_0, \quad x_{01} = \frac{D}{D + a_0}(s_0^{in} - s_{01})$$

et $s_{11} = (s_0^{in} + s_1^{in}) - s_{01}$, la matrice Jacobienne (4.7) devient :

$$J_1 = \begin{bmatrix} -D - Ex_0 & -D - a_0 & Fx_0 & 0 \\ Ex_0 & 0 & -Fx_0 & 0 \\ Ex_0 & D + a_0 & -D - Fx_0 & -\mu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1 - D - a_1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Le polynôme caractéristique est :

$$\det(J_1 - \lambda I) = (\lambda - \mu_1 + D + a_1)(\lambda + D) (\lambda^2 + [D + (E + F)x_0] \lambda + (D + a_0)(E + F)x_0)$$

Les valeurs propres de J_1 sont $\lambda_1 = \mu_1 - D - a_1$, $\lambda_2 = -D$ et λ_3 et λ_4 sont les racines de l'équation quadratique suivante :

$$\lambda^2 + [D + (E + F)x_0] \lambda + (D + a_0)(E + F)x_0 = 0$$

Comme $\lambda_3\lambda_4 = (D + a_0)(E + F)x_0 > 0$ et $\lambda_3 + \lambda_4 = -[D + (E + F)x_0] < 0$, la partie réelle de λ_3 et de λ_4 est négative. Alors, pour que SS1 soit stable, il faut et il suffit que $\lambda_1 < 0$. Par suite, SS1 est stable si et seulement si

$$\mu_1(s_0^{in} + s_1^{in} - s_0) < D + a_1$$

avec s_0 est la solution de $\mu_0(s_0, (s_0^{in} + s_1^{in}) - s_0) = D + a_0$. Comme la fonction $s_1 \mapsto \mu_1(s_1)$ est croissante, on a l'équivalence suivante :

$$\mu_1(s_0^{in} + s_1^{in} - s_0) < D + a_1 \iff s_0 > s_0^{in} + s_1^{in} - M_1(D + a_1).$$

Comme la fonction $s_0 \mapsto \psi(s_0) = \mu_0(s_0, s_0^{in} + s_1^{in} - s_0)$ est croissante, on déduit que $\psi(s_0) > \psi(s_0^{in} + s_1^{in} - M_1(D + a_1))$. Comme

$$\psi(s_0) = \mu_0(s_0, s_0^{in} + s_1^{in} - s_0) = D + a_0,$$

la condition de stabilité de SS1 est équivalente à :

$$D + a_0 > \mu_0(s_0^{in} + s_1^{in} - M_1(D + a_1), M_1(D + a_1))$$

et équivalente à

$$s_0^{in} + s_1^{in} - M_1(D + a_1) < M_0(D + a_0, M_1(D + a_1))$$

car la fonction $s_0 \mapsto \mu_0(s_0, M_1(D + a_1))$ est croissante, ce qui s'écrit :

$$s_0^{in} + s_1^{in} < M_1(D + a_1) + M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)).$$

Par suite, SS1 est LES si et seulement si

$$s_0^{in} + s_1^{in} < M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)) + M_1(D + a_1).$$

- Pour $SS2 = (s_{02}, x_{02}, s_{12}, x_{12})$, avec $s_{02} = M_0(D + a_0, M_1(D + a_1))$, $x_{02} = \frac{D}{D+a_0}(s_0^{in} - s_{02})$, $s_{12} = M_1(D + a_1)$ et $x_{12} = \frac{D}{D+a_1}((s_0^{in} + s_1^{in}) - s_{02} - s_{12})$. Pour $SS2$, la matrice jacobienne est donnée par :

$$J_2 = \begin{bmatrix} -D - Ex_0 & -D - a_0 & Fx_0 & 0 \\ Ex_0 & 0 & -Fx_0 & 0 \\ Ex_0 & D + a_0 & -D - Fx_0 - Gx_1 & -D - a_1 \\ 0 & 0 & Gx_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Le polynôme caractéristique de J_2 est :

$$\det(J_2 - \lambda I) = \lambda^4 + f_1\lambda^3 + f_2\lambda^2 + f_3\lambda + f_4$$

avec

$$f_1 = Gx_1 + (E + F)x_0 + 2D$$

$$f_2 = EGx_0x_1 + (2D + a_0)(E + F)x_0 + (2D + a_1)Gx_1 + D^2$$

$$f_3 = (2D + a_0 + a_1)EGx_0x_1 + D(D + a_0)(E + F)x_0 + D(D + a_1)Gx_1$$

$$f_4 = (D + a_0)(D + a_1)EGx_0x_1.$$

On utilise le critère de Routh-Hurwitz pour la stabilité de $SS2$. En utilisant les mêmes arguments que dans ([24], Appendix D), on a :

$$f_i > 0 \text{ pour } i = 1 \cdots 4. \quad (4.11)$$

Puisque la quantité $E + F$ se intervient souvent dans les calculs, nous utilisons la notation $H = E + F$. On a

$$f_1 f_2 - f_3 = 2D^3 + D^2[3Hx_0 + 3Gx_1 - Hx_0 - Hx_1] + D[4Hx_0Gx_1 + 2G^2x_1^2 + 2H^2x_0^2 + a_0Hx_0 + a_1Gx_1] + EG^2x_0x_1^2 + Hx_0EGx_0x_1 + Gx_1(a_0 + a_1)(H - E)x_0 + a_1G^2x_1^2 + a_0H^2x_0^2. \text{ D'où}$$

$$f_1 f_2 - f_3 = 2D^3 + \alpha_2 D^2 + \alpha_1 D + \alpha_0$$

avec

$$\alpha_2 = 4(Hx_0 + Gx_1)$$

$$\alpha_1 = 2(Hx_0 + Gx_1)^2 + a_0Hx_0 + a_1Gx_1$$

$$\alpha_0 = EG(Hx_0 + Gx_1)x_0x_1 + a_0H^2x_0^2 + (a_0 + a_1)FGx_0x_1 + a_1G^2x_1^2$$

Donc,

$$f_1 f_2 - f_3 > 0 \quad (4.12)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} f_1 f_2 f_3 = & 2(Hx_0 + Gx_1)D^5 + [5(Hx_0 + Gx_1)^2 + 2(2EGx_0x_1 + a_0Hx_0 + a_1Gx_1)]D^4 + \\ & [2(a_0 + a_1)EGx_0x_1 + 2(Hx_0 + Gx_1)^3 + 12EGx_0x_1(Hx_0 + Gx_1) + 7(Hx_0 + Gx_1)(a_0Hx_0 \\ & + a_1Gx_1)]D^3 + [10(a_0 + a_1)EGx_0x_1 + 2((Hx_0 + Gx_1)^2 + a_0Hx_0 + a_1Gx_1 + EGx_0x_1) \\ & (2EGx_0x_1 + a_0Hx_0 + a_1Gx_1) + (Hx_0 + Gx_1)(EG(Hx_0 + Gx_1)x_0x_1 + a_0H^2x_0^2 + a_1G^2x_1^2 \\ & + (a_0 + a_1)Hx_0Gx_1)]D^2 + [4(a_0 + a_1)EGx_0x_1((Hx_0 + Gx_1)^2 + a_0Hx_0 + a_1Gx_1 \\ & + EGx_0x_1) + (2EGx_0x_1 + a_0Hx_0 + a_1Gx_1)(EG(Hx_0 + Gx_1)x_0x_1 + a_0H^2x_0^2 \\ & + a_1G^2x_1^2 + (a_0 + a_1)Hx_0Gx_1)]D + 2(a_0 + a_1)EGx_0x_1[EG(Hx_0 + Gx_1)x_0x_1 + a_0H^2x_0^2 \\ & + a_1G^2x_1^2 + (a_0 + a_1)Hx_0Gx_1]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1^2 f_4 = & 4D^4EGx_0x_1 + D^3[4(a_0 + a_1)EGx_0x_1 + 4EGHx_0^2x_1] + D^2[EG^3x_0x_1^3 + \\ & 2EHG^2x_0^2x_1 + EGH^2x_0^3x_1 + 4(a_0 + a_1)EGHx_0^2x_1 + 4a_0a_1EGx_0x_1] + D[(a_0 + a_1) \\ & EG^3x_0x_1^3 + 2EHG^2x_0^2x_1^2 + EGH^2x_0^3x_1 + 4a_0a_1EGHx_0^2x_1] + a_0a_1[EG^3x_0x_1^3 \\ & + 2EHG^2x_0^2x_1^2 + EGH^2x_0^3x_1]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3^2 = & D^4(Hx_0 + Gx_1)^2 + D^3 2(Hx_0 + Gx_1)(2EGx_0x_1 + a_0Hx_0 + a_1Gx_1) + D^2[2EGx_0x_1 \\ & (Hx_0 + Gx_1)(a_0 + a_1) + (2EGx_0x_1 + a_0Hx_0 + a_1Gx_1)^2] + D[2EGx_0x_1(a_0 + a_1) \\ & (2EGx_0x_1 + a_0Hx_0 + a_1Gx_1)] + (a_0 + a_1)^2 E^2 G^2 x_0^2 x_1^2. \end{aligned}$$

Donc

$$f_1 f_2 f_3 - f_1^2 f_4 - f_3^2 = \beta_5 D^5 + \beta_4 D^4 + \beta_3 D^3 + \beta_2 D^2 + \beta_1 D + \beta_0$$

avec

$$\beta_5 = 2(Hx_0 + Gx_1)$$

$$\beta_4 = 4(Hx_0 + Gx_1)^2 + 2a_0Hx_0 + 2a_1Gx_1$$

$$\begin{aligned} \beta_3 = & 2(Hx_0 + Gx_1)^3 + 4EG(Hx_0 + Gx_1)x_0x_1 + 5a_0H^2x_0^2 + (a_0 + a_1)(3E + 5F)Gx_0x_1 \\ & + 5a_1G^2x_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_2 &= 4EG(Hx_0 + Gx_1)^2x_0x_1 + 3a_0H^3x_0^3 + (a_0E + 2a_1E + 6a_0H + 3a_1F)GHx_0^2x_1 \\
 &+ (2a_0E + a_1E + 3a_0F + 6a_1H)G^2x_0x_1^2 + 3a_1G^3x_1^3 + a_0^2F(F + 2E)x_0^2 + (a_0Ex_0 - a_1Gx_1)^2 \\
 &\quad + 2a_0a_1GFx_0x_1 \\
 \beta_1 &= 2E^2G^2(Hx_0 + Gx_1)x_0^2x_1^2 + (4a_0 + a_1)EGH^2x_0^3x_1 + (a_0 + a_1)(3E + 5F)EG^2x_0^2x_1^2 \\
 &+ (a_0 + 4a_1)EG^3x_0x_1^3 + a_0^2(3E^2 + 3EF + F^2)Fx_0^3 + a_0(2a_0E + a_0F + 2a_1F)GFx_0^2x_1 \\
 &\quad + (Ex_0 + Gx_1)(a_0Ex_0 - a_1Gx_1)^2 + (2a_0a_1 + a_1^2)G^2Fx_0x_1^2 \\
 \beta_0 &= (a_0 + a_1)E^2G^2(Hx_0 + Gx_1)x_0^2x_1^2 + a_0^2(2E + F)EFGx_0^3x_1 + (a_0^2 + a_1^2)EFG^2x_0^2x_1^2 \\
 &\quad + (a_0Ex_0 - a_1Gx_1)^2EGx_0x_1.
 \end{aligned}$$

Par suite,

$$f_1f_2f_3 - f_1^2f_4 - f_3^2 > 0. \quad (4.13)$$

D'après (4.11), (4.12) and (4.13) le critère de Routh-Hurwitz est satisfait. Par suite, SS2 est stable si et seulement si $x_0 = x_{02} > 0$ et $x_1 = x_{12} > 0$. Ce qui est équivalent à $s_0^{in} > M_0(D + a_0, M_1(D + a_1))$ et

$$s_0^{in} + s_1^{in} > M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)) + M_1(D + a_1).$$

Par conséquent, SS2 est stable dès qu'il existe.

— Pour $SS3 = \left(s_0^{in}, 0, M_1(D + a_1), \frac{D}{D+a_1}(s_1^{in} - M_1(D + a_1))\right)$, la matrice Jacobienne (4.7) s'écrit :

$$J_3 = \begin{bmatrix} -D & -\mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_0 - D - a_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_0 & -D - Gx_1 & -D - a_1 \\ 0 & 0 & Gx_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Le polynôme caractéristique de J_3 est :

$$\det(J_3 - \lambda I) = (-D - \lambda)(\mu_0 - D - a_0 - \lambda)([D + Gx_1 + \lambda]\lambda + (D + a_1)Gx_1).$$

Les valeurs propres de J_3 sont $\lambda_1 = -D$, $\lambda_2 = \mu_0 - D - a_0$ et λ_3 et λ_4 sont les racines de l'équation quadratique suivante :

$$\lambda^2 + [D + Gx_1]\lambda + (D + a_1)Gx_1 = 0.$$

Comme $\lambda_3\lambda_4 = (D + a_1)Gx_1 > 0$ et $\lambda_3 + \lambda_4 = -(D + Gx_1) < 0$, la partie réelle de λ_3 et de λ_4 est négative. Par suite, SS3 est LES si et seulement si $\lambda_2 < 0$, ce qui est équivalent à :

$$\mu_0(s_0^{in}, M_1(D + a_1)) < D + a_0$$

et à

$$s_0^{in} < M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)).$$

□

Dans la suite, nous utilisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} F_0(D) &= M_0(D + a_0, s_1^{in}) \\ F_1(D) &= M_1(D + a_1) + M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)) \\ F_2(D) &= M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Les domaines de définition de F_0 , F_1 et F_2 sont déterminés dans la Proposition 4.2.4. Soit Φ_1 la fonction définie par :

$$\Phi_1(D) := m_0(M_1(D + a_1)) - D - a_0$$

Sans perte de généralité, on suppose que $m_1 > a_1$.

Proposition 4.2.4. *On a :*

1. F_0 est définie dans $[0, D_0[$, avec $D_0 = m_0(s_1^{in}) - a_0$. Cet intervalle est non vide si et seulement si $a_0 < m_0(s_1^{in})$.
2. F_1 est définie sur $[0, D_2[$ avec $D_2 = m_1 - a_1$ si $m_0(M_1(m_1)) - a_0 > m_1 - a_1$ et D_2 est l'unique solution de l'équation $\Phi_1(D) = 0$ si $m_0(M_1(m_1)) - a_0 \leq m_1 - a_1$ et $a_0 < m_0(M_1(a_1))$.
3. F_2 est définie sur $[0, D_2[$.

Preuve

1. F_0 est définie si et seulement si $M_0(D + a_0, s_1^{in})$ est définie. Ce qui est équivalent à dire que, $D + a_0 < m_0(s_1^{in})$ ou $D < m_0(s_1^{in}) - a_0 = D_0$.
2. F_1 est définie si et seulement si $M_1(D + a_1)$ et $M_0(D + a_0, M_1(D + a_1))$ sont définies, ce qui est équivalent à $D + a_1 < m_1$ et $D + a_0 < m_0(M_1(D + a_1))$. Par suite, F_1 est définie si et seulement si $D \in [0, m_1 - a_1[$ et $\Phi_1(D) > 0$. On a

$$\Phi_1'(D) = m_0'(M_1(D + a_1))M_1'(D + a_1) - 1.$$

Rappelons que, l'hypothèse **H3** implique que $m_0'(s_1) \leq 0, \forall s_1 \geq 0$.

Donc, $\Phi_1'(D)$ est négative grâce à la proposition 4.2.1 et l'hypothèse **H3**. Par suite, Φ_1 est décroissante. Deux cas se présentent :

- Si $\Phi_1(m_1 - a_1) > 0$, ce qui est équivalent à $m_0(M_1(m_1)) - a_0 > m_1 - a_1$, alors, $\Phi_1(D) > 0$ pour tout $D \in [0, m_1 - a_1[$. Par suite, si $m_0(M_1(m_1)) - a_0 > m_1 - a_1$ alors F_1 est définie sur $[0, m_1 - a_1[$.
 - Si $\Phi_1(m_1 - a_1) \leq 0$, ce qui est équivalent à $m_0(M_1(m_1)) - a_0 \leq m_1 - a_1$, et si de plus, $\Phi_1(0) > 0$, ce qui est équivalent à dire que $a_0 < m_0(M_1(a_1))$, alors, $\Phi_1(D) = 0$ possède une unique solution D_2 . On déduit que $\Phi_1(D) > 0$ pour tout $D \in [0, D_2[$. Par suite, si $m_0(M_1(m_1)) - a_0 \leq m_1 - a_1$, alors F_1 est définie sur $[0, D_2[$ si et seulement si $a_0 < m_0(M_1(a_1))$ avec D_2 est l'unique solution de l'équation $\Phi_1(D) = 0$.
3. On a $F_2(D) = F_1(D) - M_1(D + a_1)$. Donc, F_2 est définie si $F_1(D)$ et $M_1(D + a_1)$ sont définies. Par suite, F_2 est définie sur $[0, D_2[$.

□

Notons que :

$$s_1^{in} < M_1(D + a_1) \iff D > \mu_1(s_1^{in}) - a_1.$$

En utilisant les notations (4.15), les résultats de la Proposition 4.2.2 et de la Proposition 4.2.3 se résument dans le Tableau 4.1.

Équilibre	Condition d'existence	Condition de stabilité
SS0	existe toujours	$s_0^{in} < F_0(D)$ et $D > \mu_1(s_1^{in}) - a_1$
SS1	$s_0^{in} > F_0(D)$	$s_0^{in} + s_1^{in} < F_1(D)$
SS2	$s_0^{in} + s_1^{in} > F_1(D)$ et $s_0^{in} > F_2(D)$	stable lorsqu'il existe
SS3	$\mu_1(s_1^{in}) > a_1$ et $D < \mu_1(s_1^{in}) - a_1$	$s_0^{in} < F_2(D)$

TABLE 4.1 – L'existence et la stabilité locale des équilibres.

4.3 Les diagrammes opératoires

Les diagrammes opératoires montrent comment le système se comporte en variant les trois paramètres de contrôle s_0^{in} , s_1^{in} et D . Ces diagrammes sont spécialement utilisés par les opérateurs, en particulier pour estimer, pour un triplet donné s_0^{in} , s_1^{in} et D , la marge de stabilité qu'ils ont, par rapport à une région de l'espace où l'équilibre correspondant au lessivage d'au moins une biomasse est stable.

4.3.1 Le diagramme opératoire dans le plan (s_0^{in}, D) et s_1^{in} fixé

Dans un premier temps, on fixe s_1^{in} et on illustre les domaines d'existence et de stabilité des équilibres dans le plan (s_0^{in}, D) . On définit la courbe γ_0 d'équation $s_0^{in} = F_0(D)$, la courbe γ_1 d'équation $s_0^{in} = F_1(D) - s_1^{in}$ et la courbe γ_2 d'équation $s_0^{in} = F_2(D)$. On note $\bar{D} = \mu_1(s_1^{in}) - a_1$, voir Tableau 4.1.

Ces courbes avec la droite $D = \bar{D}$ séparent le plan (s_0^{in}, D) en au maximum six régions, illustrées dans la Fig. 4.1 et notées R^1, \dots, R^6 .

Le théorème 4.3.1 montre l'existence et la stabilité locale des équilibres SS0, \dots , SS3 dans les régions R^1, \dots, R^6 , pour un s_1^{in} donné, en conséquence de la Proposition 4.2.3. Les régions R^i , $i = 1, \dots, 6$ des diagrammes opératoires sont colorées par quatre couleurs différentes. Chaque couleur correspond à un seul équilibre stable : dans la région R^4 , R^5 et R^6 , SS2 existe et est stable. Dans R^5 , tous les autres équilibres existent mais sont instables. Dans la région R^4 , (respectivement R^6), l'équilibre SS1 (respectivement SS3) n'existe pas et les autres équilibres existent. Donc, ces régions sont colorées par la même couleur (jaune). De même, la région R^2 (en vert) est la région de stabilité de l'équilibre de lessivage SS0, la région R^1 (en bleu) est la région de stabilité de SS1 et R^3 (en violet) est la région de stabilité de SS3.

A présent, il est utile de montrer les propriétés suivantes sur les fonctions F_i , $i = 0, 1, 2$.

Lemme 4.3.1. *On a*

- Si $\mu_1(s_1^{in}) < a_1$ alors $F_0(D) < F_1(D) - s_1^{in}$.
- Si $\mu_1(s_1^{in}) > a_1$ et $D > \mu_1(s_1^{in}) - a_1$ alors $F_0(D) < F_1(D) - s_1^{in}$.
- Si $\mu_1(s_1^{in}) > a_1$ et $D < \mu_1(s_1^{in}) - a_1$ alors $F_2(D) < F_0(D)$.

Preuve

- Si $\mu_1(s_1^{in}) < a_1 < D + a_1$ alors $s_1^{in} < M_1(D + a_1)$. M_0 est croissante par rapport à la seconde variable alors $M_0(D + a_0, s_1^{in}) < M_0(D + a_0, M_1(D + a_1))$. Comme

$s_1^{in} < M_1(D + a_1)$, ce qui est équivalent à $M_1(D + a_1) - s_1^{in} > 0$, on obtient

$$M_0(D + a_0, s_1^{in}) < M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)) + M_1(D + a_1) - s_1^{in}.$$

Par suite, $F_0(D) < F_1(D) - s_1^{in}$, pour tout $D > 0$.

- Si $\mu_1(s_1^{in}) > a_1$ et $D > \bar{D}$ alors $\mu_1(s_1^{in}) < D + a_1$. Donc, $s_1^{in} < M_1(D + a_1)$ et $M_0(D + a_0, s_1^{in}) < M_0(D + a_0, M_1(D + a_1))$. Comme $M_1(D + a_1) > s_1^{in}$, on obtient

$$M_0(D + a_0, s_1^{in}) < M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)) + M_1(D + a_1) - s_1^{in}.$$

Par suite, $F_0(D) < F_1(D) - s_1^{in}$, pour tout $D > 0$.

- Si $\mu_1(s_1^{in}) > a_1$ et $D < \bar{D}$ alors $M_1(D + a_1) < s_1^{in}$. D'où, on a

$$M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)) < M_0(D + a_0, s_1^{in}).$$

Par suite, $F_2(D) < F_0(D)$, pour tout $D > 0$.

□

La figure 4.1 montre les positions relatives des courbes γ_i , $i = 0, 1$ et 2, et de la droite $D = \bar{D}$.

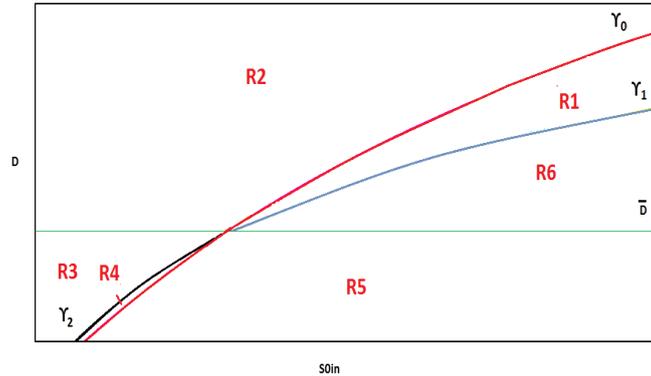


FIGURE 4.1 – Diagramme opératoire du modèle (4.1)

On peut maintenant montrer le résultat suivant :

Théorème 4.3.1. *Les propriétés d'existence et de stabilité du système (4.1), dans le plan (s_0^{in}, D) , se résument dans les tableaux suivants :*

Condition	Région	SS0	SS1	SS2
$F_0(D) < s_0^{in} < F_1(D) - s_1^{in}$	$(s_0^{in}, D) \in R^1$	I	S	
$s_0^{in} < F_0(D)$	$(s_0^{in}, D) \in R^2$	S		
$F_1(D) - s_1^{in} < s_0^{in}$	$(s_0^{in}, D) \in R^6$	I	I	S

TABLE 4.2 – Le cas $\mu_1(s_1^{in}) < a_1$

	Condition	Région	SS0	SS1	SS2	SS3
$D > \bar{D}$	$F_0(D) < s_0^{in} < F_1(D) - s_1^{in}$	$(s_0^{in}, D) \in R^1$	I	S		
	$s_0^{in} < F_0(D)$	$(s_0^{in}, D) \in R^2$	S			
	$F_1(D) - s_1^{in} < s_0^{in}$	$(s_0^{in}, D) \in R^6$	I	I	S	
$D < \bar{D}$	$s_0^{in} < F_2(D)$	$(s_0^{in}, D) \in R^3$	U			S
	$F_2(D) < s_0^{in} < F_0(D)$	$(s_0^{in}, D) \in R^4$	I		S	I
	$s_0^{in} > F_0(D)$	$(s_0^{in}, D) \in R^5$	I	I	S	I

TABLE 4.3 – Le cas $\mu_1(s_1^{in}) > a_1$

Preuve

Le Théorème 4.3.1 se déduit du Lemme 4.3.1 et des inégalités suivantes :

- Si $\mu_1(s_1^{in}) < a_1$ et $F_1(D) - s_1^{in} < s_0^{in}$ alors $F_2(D) < s_0^{in}$, pour tout $D > 0$.
En effet, si $\mu_1(s_1^{in}) < a_1$ alors $M_1(D + a_1) - s_1^{in} > 0$. Donc,

$$M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)) < M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)) + M_1(D + a_1) - s_1^{in} = F_1(D) - s_1^{in}.$$

Comme $F_1(D) - s_1^{in} < s_0^{in}$ alors $F_2(D) < s_0^{in}$.

- Si $\mu_1(s_1^{in}) > a_1$, $D > \bar{D}$ et $F_1(D) - s_1^{in} < s_0^{in}$ alors $F_2(D) < s_0^{in}$, pour tout $D > 0$.
En effet,

$$D > \bar{D} \Leftrightarrow \mu_1(s_1^{in}) < D + a_1 \Leftrightarrow M_1(D + a_1) - s_1^{in} > 0$$

Donc,

$$M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)) < M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)) + M_1(D + a_1) - s_1^{in} = F_1(D) - s_1^{in}.$$

Finalement, $F_1(D) - s_1^{in} < s_0^{in}$ implique que $F_2(D) < s_0^{in}$.

- Si $\mu_1(s_1^{in}) > a_1$, $D < \bar{D}$ et $F_0(D) < s_0^{in}$ alors $F_1(D) - s_1^{in} < s_0^{in}$, pour tout $D > 0$.
En effet,

$$D < \bar{D} = \mu_1(s_1^{in}) - a_1 \Leftrightarrow M_1(D + a_1) < s_1^{in}.$$

Comme $F_0(D) = M_0(D + a_0, s_1^{in}) < s_0^{in}$, alors

$$F_1(D) - s_1^{in} = M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)) + M_1(D + a_1) - s_1^{in} < M_0(D + a_0, s_1^{in}),$$

ce qui implique que $F_1(D) - s_1^{in} < s_0^{in}$.

- Si $\mu_1(s_1^{in}) > a_1$, $D < \bar{D}$ et $F_2(D) < s_0^{in}$ alors $F_1(D) - s_1^{in} < s_0^{in}$, pour tout $D > 0$.
En effet,

$$D < \bar{D} = \mu_1(s_1^{in}) - a_1 \Leftrightarrow M_1(D + a_1) < s_1^{in}.$$

Comme $F_2(D) = M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)) < s_0^{in}$, alors

$$F_1(D) - s_1^{in} = M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)) + M_1(D + a_1) - s_1^{in} < M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)).$$

Finalement, on obtient

$$F_1(D) - s_1^{in} < s_0^{in}.$$

□

Les résultats du Théorème 4.3.1 sont essentiellement les mêmes qui sont présentés dans le Tableau 4.1. Notons que le Tableau 4.2 est identique à le Tableau 2 de [24]. Il correspond au cas où la concentration s_1^{in} est petite ou égale à zéro. Le Tableau 4.3 émerge en raison de la présence de s_1^{in} : trois régions - dans lesquelles SS3 existe - apparaissent. De plus, dans les régions R^i , $i = 1, \dots, 6$, on a un seul équilibre stable et les autres équilibres sont instables ou n'existent pas.

4.3.2 Le diagramme opératoire dans le plan (s_1^{in}, D) et s_0^{in} fixé

Dans ce paragraphe, la concentration s_0^{in} est fixée. Comme la fonction $s_1 \mapsto \mu_0(s_0, s_1)$ est décroissante, elle admet une fonction inverse décroissante $z \mapsto M_2(s_0, z)$, définie, pour tout $s_0, s_1 \geq 0$, et $z \in [0, \sup \mu_0(s_0, \cdot)]$ par :

$$s_1 = M_2(s_0, z) \Leftrightarrow z = \mu_0(s_0, s_1).$$

Pour la suite, on a besoin de définir la fonction :

$$F_3(D) = M_2(s_0^{in}, D + a_0) \tag{4.16}$$

On a le résultat suivant :

Proposition 4.3.1. *En utilisant H3, on a pour tout $s_0 \geq 0$ et $z \in [0, m_0(s_1)]$,*

$$\frac{\partial M_2}{\partial z}(s_0, z) < 0.$$

Preuve

D'après l'équivalence

$$s_1 = M_2(s_0, z) \Leftrightarrow z = \mu_0(s_0, s_1),$$

on a :

$$\text{pour tout } z \in [0, m_0(s_1)] \text{ et } s_0 \geq 0, \quad \mu_0(s_0, M_2(s_0, z)) = z. \tag{4.17}$$

En dérivant (4.17) par rapport à z et en utilisant H3, on obtient :

$$\frac{\partial M_2}{\partial z}(s_0, z) = \left[\frac{\partial \mu_0}{\partial s_1}(s_0, M_2(s_0, z)) \right]^{-1} < 0.$$

□

Soit \bar{D}_1 la plus grande solution de $F_2(D) = s_0^{in}$, si elle existe, $\bar{D}_2 = \min(m_1 - a_1, D_2)$ et \bar{D}_3 la solution de $F_3(D) = 0$, si elle existe. Comme F_3 est décroissante, alors $\bar{D}_3 < 0$ implique que $F_3(D) < 0$, pour $D > 0$.

Pour illustrer les régions d'existence et de stabilité des équilibres dans le plan (s_1^{in}, D) , on exprime les conditions du Tableau 4.1 en fonction de s_1^{in} et de D , s_0^{in} étant supposé fixé, ce qui donne le tableau suivant :

Equilibre	Condition d'existence	Condition de stabilité
SS0	existe toujours	$s_1^{in} > F_3(D)$ et $s_1^{in} < F_1(D) - F_2(D)$
SS1	$\bar{D}_3 > 0$ et $s_1^{in} < F_3(D)$	$s_1^{in} < F_1(D) - s_0^{in}$
SS2	$s_1^{in} > F_1(D) - s_0^{in}$, $\bar{D}_1 > 0$ et $D < \bar{D}_1$	stable dès qu'il existe
SS3	$s_1^{in} > F_1(D) - F_2(D)$	$D > \bar{D}_1$

TABLE 4.4 – Existence et stabilité locale des équilibres en fonction de s_1^{in} et de D .

Il est utile, pour la suite, de montrer les propriétés suivantes sur les fonctions F_i , $i = 1, 2, 3$.

Lemme 4.3.2. *On suppose que $\bar{D}_2 > 0$. Alors, on a*

- Si $D > \bar{D}_1$ alors $F_3(D) < F_1(D) - F_2(D) < F_1(D) - s_0^{in}$.
- Si $D < \bar{D}_1$ et $\bar{D}_1 > 0$ alors $F_1(D) - s_0^{in} < F_1(D) - F_2(D) < F_3(D)$.

De plus, les trois courbes des fonctions $F_1 - F_2$, $F_1 - s_0^{in}$ et F_3 s'intersectent en $D = \bar{D}_1$ qui satisfait $\bar{D}_1 < \bar{D}_3$.

Preuve

— Si $D > \bar{D}_1$ alors $F_2(D) > F_2(\bar{D}_1) = s_0^{in}$ et on obtient

$$F_1(D) - s_0^{in} > F_1(D) - F_2(D).$$

D'autre part, on a $M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)) > s_0^{in}$. Comme μ_0 est croissante par rapport à la première variable alors $D + a_0 > \mu_0(s_0^{in}, M_1(D + a_1))$. M_2 est décroissante par rapport à la seconde variable alors

$$M_2(s_0^{in}, D + a_0) < M_1(D + a_1).$$

Finalement, on obtient

$$F_1(D) - F_2(D) > F_3(D).$$

— Si $D < \bar{D}_1$ et $\bar{D}_1 > 0$, alors $F_2(D) < F_2(\bar{D}_1) = s_0^{in}$ et on obtient

$$F_1(D) - s_0^{in} < F_1(D) - F_2(D).$$

Maintenant, $M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)) < s_0^{in}$ implique que

$$D + a_0 < \mu_0(s_0^{in}, M_1(D + a_1)).$$

M_2 est décroissante par rapport à la seconde variable, donc

$$M_2(s_0^{in}, D + a_0) > M_1(D + a_1).$$

Finalement, on obtient

$$F_1(D) - F_2(D) < F_3(D).$$

- On a $F_2(\bar{D}_1) = s_0^{in}$ alors $F_1(\bar{D}_1) - F_2(\bar{D}_1) = F_1(\bar{D}_1) - s_0^{in}$. Ceci implique que $F_1 - F_2$ et $F_1 - s_0^{in}$ s'intersectent en la valeur de $D = \bar{D}_1$. D'autre part, $F_2(\bar{D}_1) = s_0^{in}$ est équivalente à $M_0(\bar{D}_1 + a_0, M_1(\bar{D}_1 + a_1)) = s_0^{in}$. Donc, on a

$$\mu_0(s_0^{in}, M_1(\bar{D}_1 + a_1)) = \bar{D}_1 + a_0$$

. Maintenant, $F_3(\bar{D}_1) = M_2(s_0^{in}, \bar{D}_1 + a_0)$, ce qui est équivalent à $\mu_0(s_0^{in}, F_3(\bar{D}_1)) = \bar{D}_1 + a_0$. Les deux dernières égalités donnent $F_3(\bar{D}_1) = M_1(\bar{D}_1 + a_1)$. Ainsi, $F_3(\bar{D}_1) = F_1(\bar{D}_1) - F_2(\bar{D}_1) = F_1(\bar{D}_1) - s_0^{in}$. Par conséquent, F_3 , $F_1 - F_2$ et $F_1 - s_0^{in}$ s'intersectent en $D = \bar{D}_1$. Comme F_3 est décroissante, alors $\bar{D}_3 = \sup_D F_3(D) > \bar{D}_1$.

□

Les régions R^i , $i = 1 \dots 6$, sont délimitées dans le plan (s_1^{in}, D) par les courbes suivantes :

Γ_0 est la courbe de la fonction $s_1^{in} = F_1(D) - s_0^{in}$, Γ_1 est la courbe de la fonction $s_1^{in} = F_1(D) - F_2(D)$ et Γ_2 est la courbe de la fonction $s_1^{in} = F_3(D)$.

Ces courbes avec la droite d'équation $D = \bar{D}_1$ divisent le plan opératoire (s_1^{in}, D) en au plus six régions, voir Figure 4.2. Notons que la région R^1 est divisée en deux sous-régions : $R^1 = R_1^1 \cup R_2^1$. D'après le Lemme 4.3.2, les positions relatives des courbes Γ_i , $i = 0, 1$ et 2, et \bar{D}_i , $i = 1, 2$, sont illustrées dans la Figure 4.2.

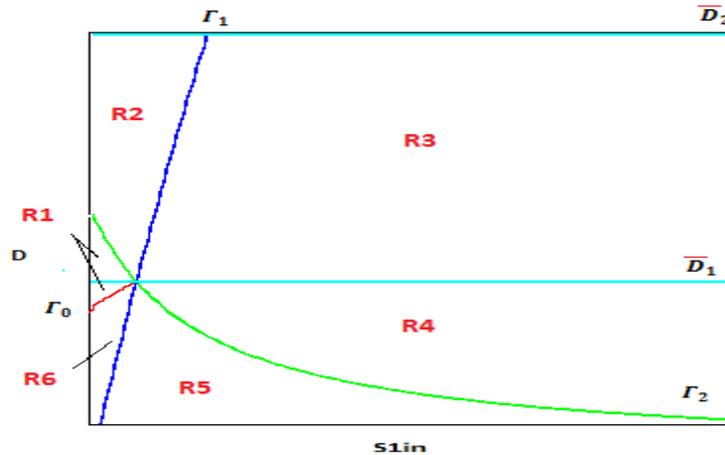


FIGURE 4.2 – Positions relatives des courbes dans le plan (s_1^{in}, D)

On peut maintenant montrer le résultat suivant :

Théorème 4.3.2. *Les propriétés d'existence et de stabilité du système (4.1), dans le plan (s_1^{in}, D) , sont données dans les tableaux suivants :*

Condition	Région	SS0	SS3
$s_1^{in} < F_1(D) - F_2(D)$	$(s_1^{in}, D) \in R^2$	S	
$F_1(D) - F_2(D) < s_1^{in}$	$(s_1^{in}, D) \in R^3$	I	S

TABLE 4.5 – Le cas $\bar{D}_1 < 0$, $\bar{D}_3 < 0$ et $0 < D < \bar{D}_2$

Condition	Région	SS0	SS1	SS3
$s_1^{in} < F_3(D)$	$(s_1^{in}, D) \in R_1^1$	I	S	
$F_3(D) < s_1^{in} < F_1(D) - F_2(D)$	$(s_1^{in}, D) \in R^2$	S		
$F_1(D) - F_2(D) < s_1^{in}$	$(s_1^{in}, D) \in R^3$	I		S

TABLE 4.6 – Le cas $\bar{D}_1 < 0$, $\bar{D}_3 > 0$ et $0 < D < \bar{D}_2$

	Conditions	Région	SS0	SS1	SS2	SS3
$\bar{D}_1 < D$	$s_1^{in} < F_3(D)$	$(s_1^{in}, D) \in R_1^1$	I	S		
	$F_3(D) < s_1^{in} < F_1(D) - F_2(D)$	$(s_1^{in}, D) \in R^2$	S			
	$F_1(D) - F_2(D) < s_1^{in}$	$(s_1^{in}, D) \in R^3$	I			S
$D < \bar{D}_1$	$F_3(D) < s_1^{in}$	$(s_1^{in}, D) \in R^4$	I		S	I
	$F_1(D) - F_2(D) < s_1^{in} < F_3(D)$	$(s_1^{in}, D) \in R^5$	I	I	S	I
	$F_1(D) - s_0^{in} < s_1^{in} < F_1(D) - F_2(D)$	$(s_1^{in}, D) \in R^6$	I	I	S	
	$s_1^{in} < F_1(D) - s_0^{in}$	$(s_1^{in}, D) \in R_2^1$	I	S		

TABLE 4.7 – Le cas $\bar{D}_1 > 0$, $\bar{D}_3 > 0$ et $0 < D < \bar{D}_2$

Le Théorème 4.3.2 est une conséquence du Lemme 4.3.2. Notons que si $\bar{D}_3 < 0$ alors $F_3(D) < 0$ et comme $\bar{D}_1 < \bar{D}_3$, le cas $\bar{D}_1 > 0$ et $\bar{D}_3 < 0$ ne se produit jamais.

□

4.3.3 Le diagramme opératoire dans le plan (s_0^{in}, s_1^{in}) et D fixé

On fixe à présent le taux de dilution D et on définit la fonction suivante :

$$F_4(s_0^{in}) = M_2(s_0^{in}, D + a_0)$$

F_4 est croissante et est définie pour $s_0^{in} \geq M_0(D + a_0, 0)$ et $D \in [0, D_0[$ avec

$$D_0 = m_0(s_1^{in}) - a_0.$$

Si on dérive (4.17) par rapport à s_0 et on utilise **H3**, on a le résultat suivant :

Proposition 4.3.2. *En utilisant l'hypothèse **H3**, on a pour tout $s_0 \geq 0$ et $z \in [0, m_0(s_1)]$,*

$$\frac{\partial M_2}{\partial s_0}(s_0, z) > 0.$$

□

Soit \bar{D}_4 la droite d'équation $s_0^{in} = F_2(D)$, \bar{D}_5 la droite d'équation $s_1^{in} = F_1(D) - F_2(D)$, \bar{D}_6 la droite d'équation $s_1^{in} = F_1(D) - s_0^{in}$ et φ la courbe d'équation $s_1^{in} = F_4(s_0^{in})$.

Pour illustrer les régions d'existence et de stabilité des équilibres dans le plan (s_0^{in}, s_1^{in}) , on exprime les conditions du Tableau 4.1 en fonction de s_1^{in} et s_0^{in} , ce qui donne le Tableau 4.8 : On a besoin pour la suite de montrer les propriétés suivantes sur les fonctions F_i ,

Equilibre	Condition d'existence	Condition de stabilité
SS0	Existe toujours	$s_1^{in} > F_4(s_0^{in})$ et $s_1^{in} < F_1(D) - F_2(D)$
SS1	$s_1^{in} < F_4(s_0^{in})$ et $s_0^{in} > M_0(D + a_0, 0)$	$s_1^{in} < F_1(D) - s_0^{in}$ et $s_0^{in} < F_1(D)$
SS2	$s_1^{in} > F_1(D) - s_0^{in}$ et $s_0^{in} > F_2(D)$	stable dès qu'il existe
SS3	$s_1^{in} > F_1(D) - F_2(D)$	$s_0^{in} < F_2(D)$

TABLE 4.8 – Existence et stabilité locale des équilibres en fonction de s_1^{in} et s_0^{in} .

$i = 1, 2, 4$.

Lemme 4.3.3. *On a*

- Si $s_0^{in} > F_2(D)$ alors $F_1(D) - s_0^{in} < F_1(D) - F_2(D) < F_4(s_0^{in})$.
- Si $s_0^{in} < F_2(D)$ alors $F_4(s_0^{in}) < F_1(D) - F_2(D) < F_1(D) - s_0^{in}$.

D'autre part, les trois droites $\bar{D}_4, \bar{D}_5, \bar{D}_6$ et la courbe φ s'intersectent en $s_0^{in} = F_2(D)$.

Preuve

— Si $s_0^{in} > F_2(D)$ alors $F_1(D) - s_0^{in} < F_1(D) - F_2(D)$. D'autre part, on a

$$M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)) < s_0^{in}.$$

Comme μ_0 est croissante par rapport à la première variable, alors $D + a_0 < \mu_0(s_0^{in}, M_1(D + a_1))$. M_2 est décroissante par rapport à la seconde variable, donc

$$M_2(s_0^{in}, D + a_0) > M_1(D + a_1).$$

Finalement, on obtient

$$F_1(D) - F_2(D) < F_4(s_0^{in}).$$

— Si $s_0^{in} < F_2(D)$ alors $F_1(D) - s_0^{in} > F_1(D) - F_2(D)$. D'autre part, on a

$$M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)) > s_0^{in}.$$

Comme μ_0 est croissante par rapport à la première variable, alors $D + a_0 > \mu_0(s_0^{in}, M_1(D + a_1))$. M_2 est décroissante par rapport à la seconde variable, donc

$$M_2(s_0^{in}, D + a_0) < M_1(D + a_1).$$

Finalement, on obtient

$$F_1(D) - F_2(D) > F_4(s_0^{in}).$$

— Comme $F_2(D) = s_0^{in}$, alors

$$M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)) = s_0^{in} \iff D + a_0 = \mu_0(s_0^{in}, M_1(D + a_1)),$$

ce qui est équivalent à $M_2(s_0^{in}, D + a_0) = M_1(D + a_1)$. Finalement, comme $s_0^{in} = F_2(D)$, on a

$$F_4(s_0^{in}) = F_1(D) - F_2(D) = F_1(D) - s_0^{in}.$$

□

La courbe φ et les droites \bar{D}_4 , \bar{D}_5 et \bar{D}_6 séparent le plan (s_0^{in}, s_1^{in}) en six régions qui sont représentées dans la Figure 4.3.

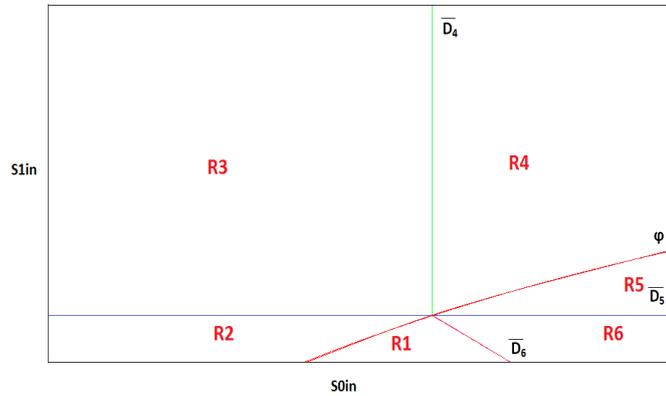


FIGURE 4.3 – Positions relatives des courbes dans le plan (s_0^{in}, s_1^{in})

Notons $\bar{D}_0 = m_0(0) - a_0$. On peut alors énoncer le résultat suivant :

Théorème 4.3.3. *Les propriétés d'existence et de la stabilité du système (4.1), dans le plan (s_0^{in}, s_1^{in}) avec $D \in [0, \min(\bar{D}_0, D_1)[$, se résument dans le tableau suivant :*

	Condition	Région	SS0	SS1	SS2	SS3
	$s_0^{in} < F_2(D)$	$(s_0^{in}, s_1^{in}) \in R^3$	I			S
$s_1^{in} > F_1(D) - F_2(D)$	$F_2(D) < s_0^{in}$ et $s_1^{in} > F_4(s_0^{in})$	$(s_0^{in}, s_1^{in}) \in R^4$	I		S	I
	$F_2(D) < s_0^{in}$ et $s_1^{in} < F_4(s_0^{in})$	$(s_0^{in}, s_1^{in}) \in R^5$	I	I	S	I
	$s_1^{in} > F_1(D) - s_0^{in}$ et $F_2(D) < s_0^{in}$	$(s_0^{in}, s_1^{in}) \in R^6$	I	I	S	
$s_1^{in} < F_1(D) - F_2(D)$	$s_1^{in} < F_1(D) - s_0^{in}$ et $s_1^{in} < F_4(s_0^{in})$	$(s_0^{in}, s_1^{in}) \in R^1$	I	S		
	$s_1^{in} > F_4(s_0^{in})$	$(s_0^{in}, s_1^{in}) \in R^2$	S			

TABLE 4.9 – Les régions d'existence et de stabilité des équilibres du modèle (4.1).

Preuve

Le Théorème 4.3.3 est une conséquence du Lemme 4.3.3. F_2 est définie pour $D \in [0, D_2[$. F_1 est définie pour $D \in [0, D_1[$ avec $D_1 = \min(m_1 - a_1, D_2)$. $M_0(D + a_0, 0)$ est définie pour $D \in [0, \bar{D}_0[$. Par conséquent, $M_0(D + a_0, 0)$, F_1 et F_2 sont définies pour $D \in [0, \min(\bar{D}_0, D_1)[$.

□

4.4 Simulations

Pour les simulations, on utilise les fonctions de croissance suivantes :

$$\mu_0(s_0, s_1) = \frac{m_0 s_0}{K_0 + s_0} \frac{1}{1 + s_1/K_i}, \quad \mu_1(s_1) = \frac{m_1 s_1}{K_1 + s_1}$$

et les paramètres du Tableau 4.10, qui sont utilisés dans [24], Tableau 3 et dans [37], Tableau 1.

Paramètres	Unités	Valeurs nominales
m_0	d ⁻¹	0.52
K_0	kg COD/m ³	0.124
m_1	d ⁻¹	2.10
K_1	kg COD/m ³	0.25
K_i	kg COD/m ³	0.035
a_0	d ⁻¹	0.02
a_1	d ⁻¹	0.02

TABLE 4.10 – Les valeurs nominales des paramètres pour le modèle (4.1)

Les fonctions inverses $M_1(\cdot)$ et $M_0(\cdot, s_1)$ des fonctions $\mu_1(\cdot)$ et $\mu_0(\cdot, s_1)$ peuvent être calculées explicitement. On a

$$\forall y \in [0, m_1[, M_1(y) = \frac{K_1 y}{m_1 - y},$$

$$\forall y \in \left[0, \frac{m_0}{1 + s_1/K_i} \right], M_0(y, s_1) = \frac{K_0 y}{\frac{m_0}{1 + s_1/K_i} - y}$$

Les fonctions $F_0(D)$, $F_1(D)$ et $F_2(D)$ sont données explicitement par

$$\begin{aligned} F_0(D) &= \frac{K_0(D + a_0)(1 + \frac{s_1^{in}}{K_i})}{m_0 - (D + a_0)(1 + \frac{s_1^{in}}{K_i})} \\ F_1(D) &= \frac{K_1(D + a_1)}{m_1 - (D + a_1)} + \frac{K_0(D + a_0)(1 + \frac{M_1(D+a_1)}{K_i})}{m_0 - (D + a_0)(1 + \frac{M_1(D+a_1)}{K_i})} \\ F_2(D) &= \frac{K_0(D + a_0)(1 + \frac{M_1(D+a_1)}{K_i})}{m_0 - (D + a_0)(1 + \frac{M_1(D+a_1)}{K_i})} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$F_0 \text{ est définie pour } D < \frac{m_0 - a_0(1 + \frac{s_1^{in}}{K_i})}{1 + \frac{s_1^{in}}{K_i}} \text{ et } \frac{(m_0 - a_0)K_i}{a_0} \geq s_1^{in}$$

F_1 et F_2 sont définies pour $D \in [0, D_2[$ avec $D_2 = \bar{D}_2$ est la solution positive de l'équation :

$$(K_i - K_1)D^2 + ((K_i - K_1)(a_0 + a_1) - K_i(m_1 + m_0))D + ((m_0 - a_0)K_i(m_1 - a_1) - a_0 a_1 K_1) = 0.$$

4.4.1 Le diagramme opératoire dans le plan (s_0^{in}, D) et s_1^{in} fixé

Les Figures 4.4, 4.5, 4.6 et 4.7 représentent les diagrammes opératoires pour des valeurs de s_1^{in} croissantes. Lorsque s_1^{in} est suffisamment petit, par exemple $s_1^{in} = 0.005$, les régions les plus grandes sont les régions R^i , $i = 1, 2, 6$, (voir Fig. 4.4). Ces régions correspondent à celles obtenues dans le cas $s_1^{in} = 0$, voir (Figure 1.1 de [24]). En augmentant la valeur de s_1^{in} , il y a apparition des régions, R^i , $i = 3, 4, 5$, d'existence de l'équilibre SS3 et réduction de la région R^1 et R^6 , (voir Figure 4.5 et 4.6). Ainsi, l'ajout d'un deuxième substrat à l'entrée conduit à l'apparition de nouvelles régions reliées au nouveau équilibre SS3 et au changement de taille des régions d'existence et de stabilité des autres équilibres.

Le substrat s_1^{in} est mesuré en $KgCODm^{-3}$ et le taux de dilution en d^{-1} .

L'inclusion de s_1^{in} dans le modèle change peu le diagramme opératoire de [24]. D'un côté, lorsque s_1^{in} croît, \bar{D} croît (on peut vérifier que $\frac{d\bar{D}}{ds_1^{in}} > 0$). La région de stabilité de SS2 sous la courbe γ_2 reste la même (car γ_2 ne dépend pas de s_1^{in}). D'un autre côté, la région de stabilité R^3 de SS3, qui correspond à l'extinction de la première espèce, augmente de taille. Quand la valeur du taux de dilution D est petite et celle de S_{0in} est élevée, l'équilibre de co-existence est stable. Si D est grand et S_{0in} est faible, alors l'équilibre de lessivage est stable.

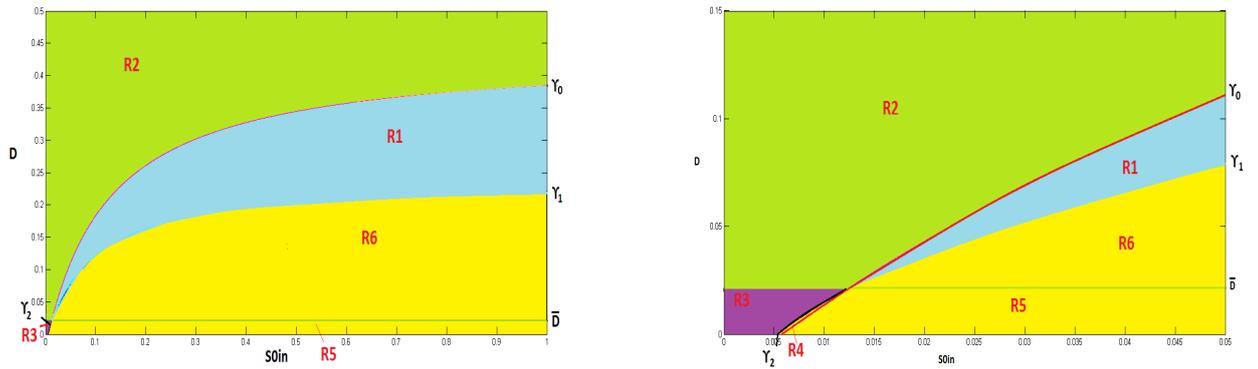


FIGURE 4.4 – Diagramme opératoire du modèle (4.1) pour $s_1^{in} = 0.005$ et $\bar{D} = 0.021$ (la figure à droite est un agrandissement du bas de la figure à gauche).

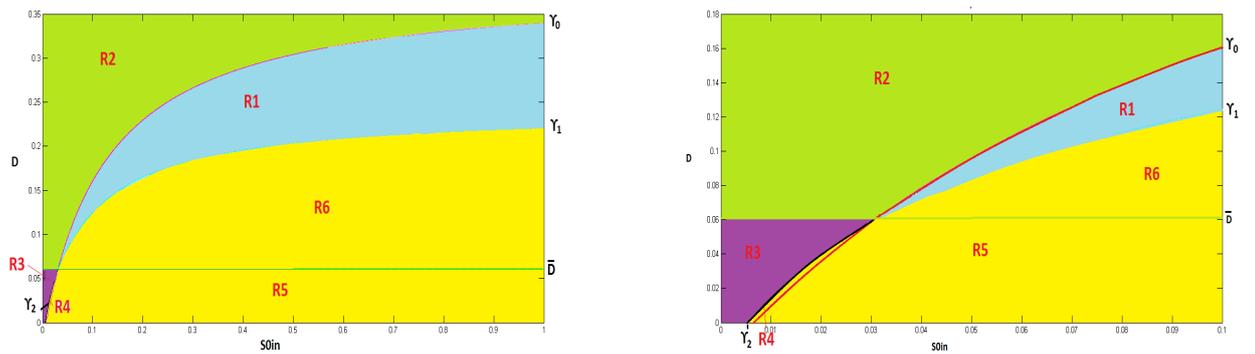


FIGURE 4.5 – Diagramme opératoire du modèle (4.1) pour $s_1^{in} = 0.01$ et $\bar{D} = 0.06$ (la figure à droite est un agrandissement du bas de la figure à gauche).

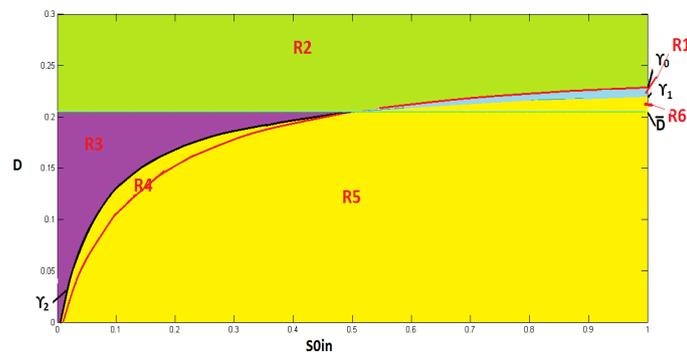
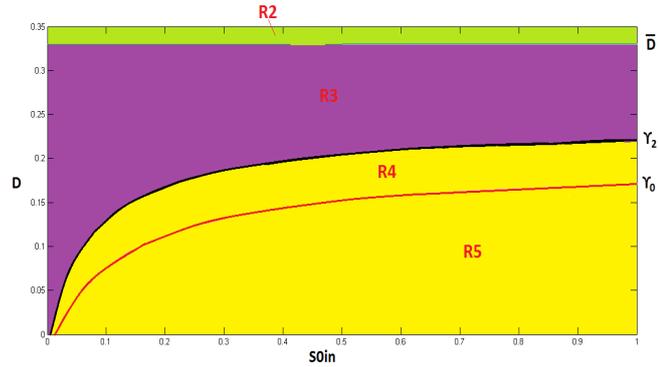


FIGURE 4.6 – Diagramme opératoire du modèle (4.1) pour $s_1^{in} = 0.03$ et $\bar{D} = 0.205$.


 FIGURE 4.7 – Diagramme opératoire du modèle (4.1) pour $s_1^{in} = 0.05$ et $\bar{D} = 0.33$.

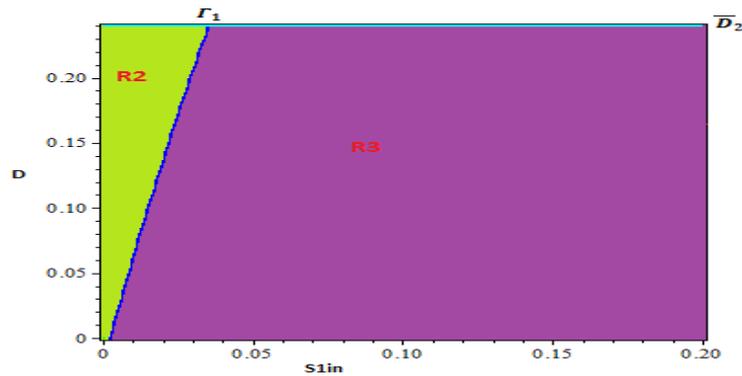
4.4.2 Le diagramme opératoire dans le plan (s_1^{in}, D) et s_0^{in} fixé

Les régions de stabilité des équilibres, dans le plan (s_1^{in}, D) , sont données par les diagrammes opératoires des Figures 4.8, \dots , 4.11, pour différentes valeurs de s_0^{in} . La fonction F_3 est donnée par :

$$F_3(D) = \frac{m_0 K_i s_0^{in}}{(D + a_0)(K_0 + s_0^{in})} - K_i.$$

F_3 est positive si

$$\frac{m_0 K_i s_0^{in} - a_0 K_i (K_0 + s_0^{in})}{K_i (K_0 + s_0^{in})} \geq D \quad \text{et} \quad s_0^{in} \geq \frac{a_0 K_0}{m_0 - a_0}.$$


 FIGURE 4.8 – Diagramme opératoire du modèle (4.1) pour $s_0^{in} = 0.005$.

Lorsque s_0^{in} croît, \bar{D}_1 croît et de nouvelles régions R^4, \dots, R^6 apparaissent sous la droite d'équation $D = \bar{D}_1$ et Γ_0 . Ces régions correspondent aux régions de stabilité de l'équilibre de coexistence $SS2$. Ici, la valeur de \bar{D}_2 est de $0.24 d^{-1}$, elle ne dépend pas des valeurs de s_0^{in} . Quand \bar{D}_1 augmente les régions R^1, R^2 et R^3 deviennent très petites, voir Fig. 4.11.

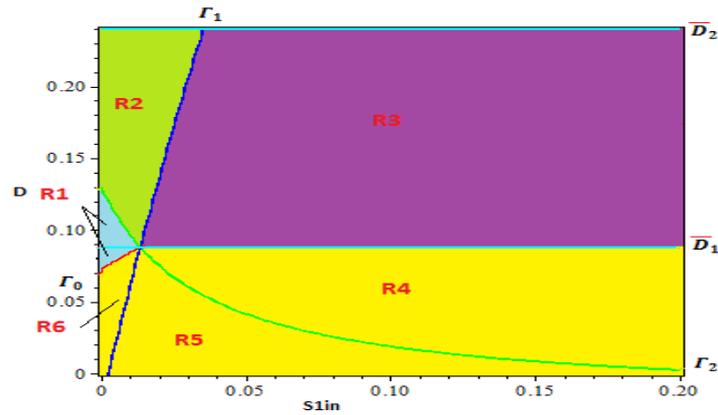


FIGURE 4.9 – Diagramme opératoire du modèle (4.1) pour $s_0^{in} = 0.05$.

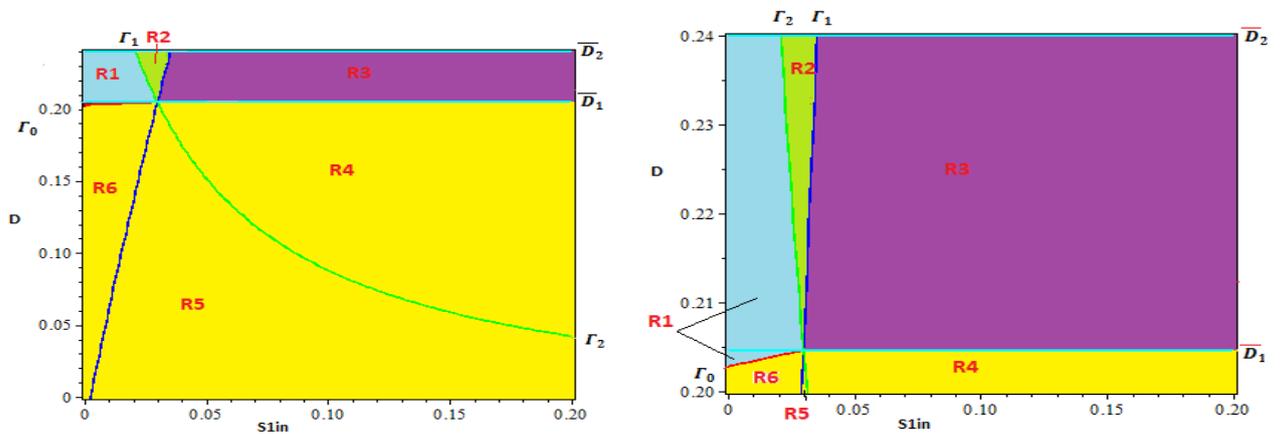


FIGURE 4.10 – Diagramme opératoire du modèle (4.1) pour $s_0^{in} = 0.5$ (la figure à droite est un agrandissement du haut de la figure à gauche).

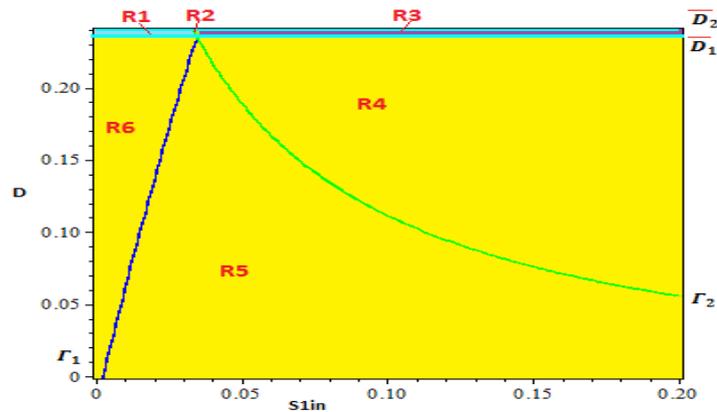


FIGURE 4.11 – Diagramme opératoire du modèle (4.1) pour $s_0^{in} = 5$.

4.4.3 Le diagramme opératoire dans le plan (s_0^{in}, s_1^{in}) et D fixé

Les régions de stabilité des équilibres, dans le plan (s_0^{in}, s_1^{in}) , sont données par les diagrammes opératoires des Figures 4.12, \dots , 4.14, pour différentes valeurs de D . La fonction F_4 est donnée par :

$$F_4(s_0^{in}) = \frac{m_0 K_i s_0^{in}}{(D + a_0)(K_0 + s_0^{in})} - K_i.$$

F_4 est positive si $s_0^{in} \geq \frac{K_0(D+a_0)}{m_0-(D+a_0)}$ et $D < m_0 - a_0$.

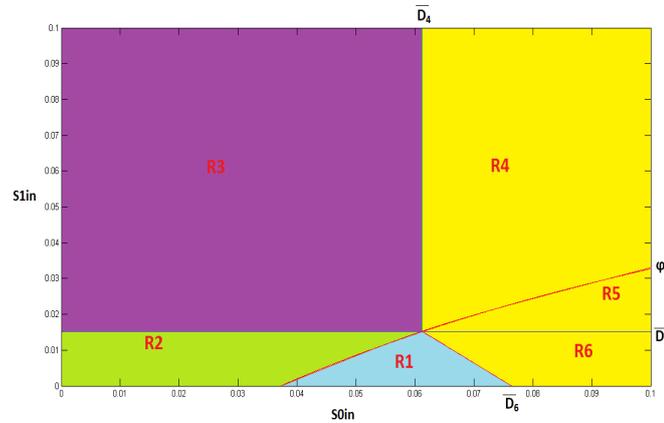


FIGURE 4.12 – Diagramme opératoire du modèle (4.1) pour $D = 0.1$.

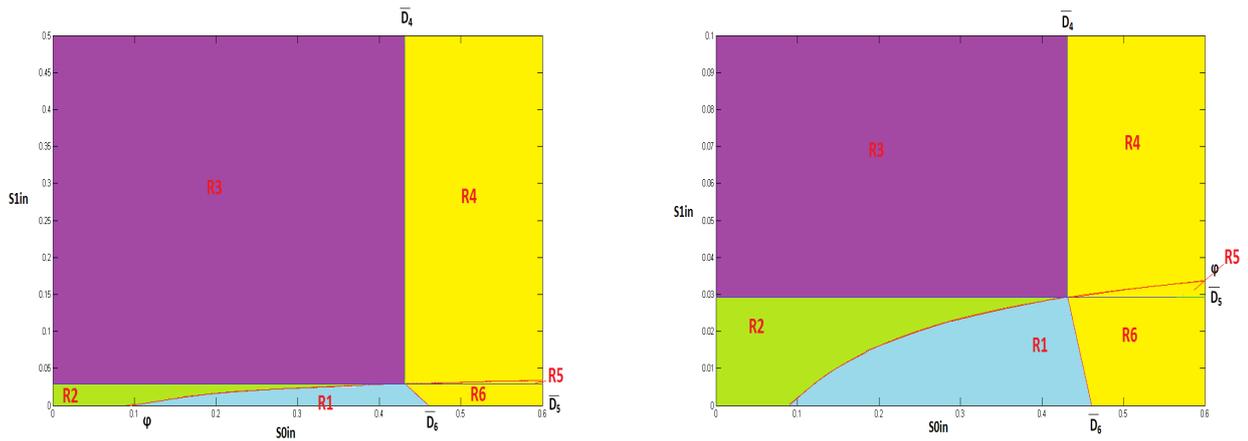


FIGURE 4.13 – Diagramme opératoire du modèle (4.1) pour $D = 0.2$ (la figure à droite est un agrandissement du bas de la figure à gauche).

Lorsque D croît de 0 à $\min(\bar{D}_0, D_1)$, les droites \bar{D}_4 , \bar{D}_5 et \bar{D}_6 s'éloignent de l'axe horizontal dans le sens positif. L'intersection entre \bar{D}_4 , \bar{D}_5 , \bar{D}_6 et φ reste sur la droite

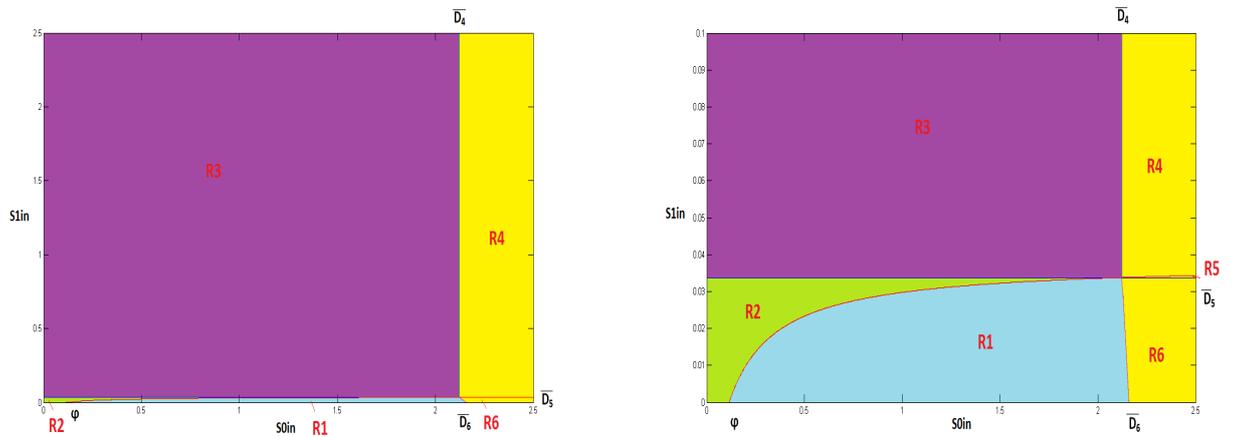


FIGURE 4.14 – Diagramme opératoire du modèle (4.1) pour $D = 0.23$ (la figure à droite est un agrandissement du bas de la figure à gauche).

d'équation : $s_0^{in} + s_1^{in} = F_1(D)$. Dans ce cas, le plan (s_0^{in}, s_1^{in}) est subdivisé en six régions R^1, \dots, R^6 . La région R^3 représente la région de stabilité du nouveau équilibre $SS3$ et les régions R^4, R^5 et R^6 représentent les régions de stabilité de l'équilibre de coexistence $SS2$. Elles augmentent de taille avec D et dominent l'espace.

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons analysé le modèle de [24] en ajoutant un nouveau substrat à l'entrée s_1^{in} . On a mis en évidence l'existence d'un nouveau point d'équilibre qui correspond au lessivage de la première espèce et l'existence de la seconde. Dans tous les cas, on a remarqué que, quelle que soit la région de l'espace considéré, il existe un seul équilibre LES. Les diagrammes opératoires qui illustrent ces régions peuvent être utilisés pour interpréter des résultats expérimentaux. Les principaux résultats de ce chapitre sont publiés, voir [8].