

Modèle de digestion anaérobie avec compartiment hydrolytique microbien

On considère, dans ce chapitre, le modèle (2.1) en considérant un compartiment hydrolytique microbien pour modéliser la phase d'hydrolyse. La vitesse de réaction est alors $r_0(t) = g_0(X_0(t))X_S(t)$ avec $g_0(\cdot)$ est le taux de croissance microbienne spécifique de X_S sur X_0 . Vu la complexité de l'étude dans ce cas, nous nous limitons au cas sans inhibition. Nous considérons que le chémostat fonctionne en mode continu, dont le débit d'entrée Q est égal au débit de sortie. On note par $D = \frac{Q}{V}$ le taux de dilution, avec V est le volume du réacteur. D'après le principe de conservation de la matière, on a :

$$\int_{t_1}^{t_2} k_0 r_0 V d\tau \leq \int_{t_1}^{t_2} r_0 V d\tau \Leftrightarrow k_0 \leq 1$$

Ce qui est équivalent à dire que pendant une unité de temps, la quantité de X_0 dégradée est supérieure ou égale à la quantité de S produite. De la même manière, on a

$$1 + \gamma_{sv} + \gamma_{sa} + \gamma_{sh} \leq \frac{1}{c_s}$$

C'est à dire que la quantité de S dégradée est supérieure ou égale à la quantité de X_S qui s'est développée et de V, A et H produite.

$$1 + \gamma_{va} + \gamma_{vh} \leq \frac{1}{c_v}$$

Ce qui explique que la quantité de V dégradée est supérieure ou égale à la quantité de X_V qui s'est développée et de A et H produite.

$$1 \leq \frac{1}{c_a}$$

Ce qui veut dire que la quantité de A dégradée est supérieure ou égale à la quantité de X_A qui s'est développée.

$$1 \leq \frac{1}{c_h}$$

Ce qui est équivalent à dire que la quantité de H dégradée est supérieure ou égale à la quantité de X_H qui s'est développée.

Remarquons que l'évolution des trois premières variables X_0 , S et X_S est indépendante de l'évolution des autres variables V , X_V , H , X_H , A et X_A . Par suite, les trois premières équations du système (2.1) peuvent être découplées des autres équations. Nous étudions, dans la section 3.1, le sous-modèle à trois équations puis le modèle complet (2.1), dans la section 3.2.

3.1 L'analyse du sous-modèle

On s'intéresse donc, dans un premier temps, au sous-modèle :

$$\begin{cases} \frac{dX_0}{dt} = D(X_{0in} - X_0) - g_0(X_0)X_S \\ \frac{dS}{dt} = D(S_{in} - S) - \frac{1}{c_s}g_S(S)X_S + k_0g_0(X_0)X_S \\ \frac{dX_S}{dt} = (g_S(S) - D)X_S \end{cases} \quad (3.1)$$

On suppose que :

$$(H8) \quad \forall 0 < X_0 < X_{0in}, \quad g_0(0) = 0, \quad \frac{dg_0}{dX_0}(X_0) > 0 \text{ et } \frac{d^2g_0}{dX_0^2}(X_0) \leq 0.$$

L'hypothèse (H8) est vérifiée pour les fonctions de croissance de type Monod. Les solutions du système (3.1) vérifient le résultat suivant :

Proposition 3.1.1. *Pour des valeurs initiales positives, les solutions du système (3.1) restent positives et bornées, pour tout $t \geq 0$.*

Preuve : On suit le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 2.1.1. Pour toute condition initiale $X_0(0) \geq 0$, s'il existe un premier temps $t_0 > 0$ tel que $X_0(t_0) = 0$, alors on a $\frac{dX_0}{dt}(t_0) = DX_{0in} > 0$. Donc, $X_0(t) > 0$, pour tout $t > t_0$. Comme $X_0(t) \geq 0$, pour tout $t \in [0, t_0]$, alors $X_0(t) \geq 0$, pour tout $t \geq 0$.

D'autre part, pour toute condition initiale $X_S(t) \geq 0$, s'il existe un premier temps $t_0 > 0$ tel que $X_S(t_0) = 0$, alors on a $\frac{dX_S}{dt}(t_0) = 0$. Par suite, $X_S(t)$ est nul à partir de t_0 , donc $X_S(t) \geq 0$, pour tout $t \geq 0$.

Pour toute condition initiale $S(0) \geq 0$, s'il existe $t_0 > 0$ tel que $S(t_0) = 0$, alors on a

$$\frac{dS}{dt}(t_0) = DS_{in} + k_0g_0(X_0)X_S(t_0).$$

et donc $\frac{dS}{dt}(t_0) > 0$, d'après (H8). D'où, $S(t) \geq 0$, pour tout $t > t_0$. Comme $S(t) \geq 0$, pour tout $t \in [0, t_0]$, par suite $S(t) \geq 0$, pour tout $t \geq 0$. Ceci prouve la positivité des solutions de (3.1).

Pour démontrer que toutes les solutions de (3.1) sont bornées, on suit la même démarche que dans la preuve de la proposition 2.1.1. On pose

$$Z = k_0X_0 + S + \frac{1}{c_s}X_S.$$

Par suite,

$$\frac{dZ}{dt} = D(k_0X_{0in} + S_{in}) - D(k_0X_0 + S + \frac{1}{c_s}X_S).$$

On déduit que, $\frac{dZ}{dt} = D(S_{in}^\dagger - Z)$, avec $S_{in}^\dagger = k_0X_{0in} + S_{in}$.

Maintenant, on pose

$$V = D(Z - S_{in}^\dagger),$$

alors, $\frac{dV}{dt} = -DV$. En appliquant le lemme de Gronwall, on obtient $V(t) = V(0)e^{-Dt}$, pour tout $t \geq 0$. Par conséquent,

$$Z(t) = S_{in}^\dagger + (Z(0) - S_{in}^\dagger)e^{-Dt}, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

On déduit que

$$Z(t) = k_0X_{0in} + S_{in} + (Z(0) - (k_0X_{0in} + S_{in}))e^{-Dt}, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Finalement, on obtient :

$$Z(t) \leq \max(Z(0), k_0X_{0in} + S_{in}), \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Donc, les solutions de (3.1) sont bornées, pour tout $t \geq 0$.

□

Le sous-modèle (3.1) correspond au modèle (3) de [11] où $k_1 = \frac{1}{c_s}$ et $\alpha = 1$. Nous rappelons ici les principales étapes de l'étude. L'équilibre de lessivage où $X_S = 0$ est donnée par $F_0 = (X_{0in}, S_{in}, 0)$. Cet équilibre existe toujours. Maintenant, si $X_S \neq 0$ alors $S = \lambda_S$ et X_0 est l'intersection de la courbe de la fonction :

$$\zeta(X_0) = \frac{D(X_{0in} - X_0)}{g_0(X_0)}$$

et de la droite Δ d'équation :

$$X_S = \delta(X_0) = c_s[(S_{in} - \lambda_S) + k_0(X_{0in} - X_0)].$$

La recherche des équilibres strictement positifs revient à trouver les zéros de la fonction H définie par :

$$H(X_0) = \zeta(X_0) - \delta(X_0), \quad X_0 \geq 0.$$

Notons que $\frac{dH(X_0)}{dX_0} = 0$ si et seulement si $\frac{d\zeta(X_0)}{dX_0} = -c_s k_0$.

Lemme 3.1.1. *Sous l'hypothèse (H8), ζ s'annule pour $X_0 = X_{0in}$, et est décroissante et convexe.*

Preuve : Pour $0 < X_0 < X_{0in}$, on a

$$\frac{d\zeta(X_0)}{dX_0} = -\frac{D}{g_0(X_0)} - \frac{\zeta(X_0)}{g_0(X_0)} \frac{dg_0}{dX_0}(X_0) < 0.$$

et

$$\frac{d^2\zeta(X_0)}{dX_0^2} = -\frac{\zeta(X_0)}{g_0(X_0)} \frac{d^2g_0}{dX_0^2}(X_0) - 2\frac{\frac{d\zeta(X_0)}{dX_0}}{g_0(X_0)} \frac{dg_0}{dX_0}(X_0) > 0.$$

D'où le résultat.

□

Lemme 3.1.2. *L'équation, $\frac{d\zeta(X_0)}{dX_0} = -c_s k_0$ admet une unique solution $0 < \bar{X}_0 < X_{0in}$ si et seulement si $\frac{d\zeta(X_{0in})}{dX_0} > -c_s k_0$.*

Preuve : Pour $0 < X_0 < X_{0in}$, $\frac{d\zeta(X_0)}{dX_0}$ est strictement croissante et $\frac{d\zeta(X_0)}{dX_0} < 0$. Par suite, $\lim_{X_0 \rightarrow 0} \frac{d\zeta(X_0)}{dX_0} = -\infty$. Alors, il existe une unique solution $0 < \bar{X}_0 < X_{0in}$ de l'équation $\frac{d\zeta(X_0)}{dX_0} = -c_s k_0$ si et seulement si $\frac{d\zeta(X_{0in})}{dX_0} > \frac{d\zeta(\bar{X}_0)}{dX_0} = -c_s k_0$. D'où le résultat.

□

Notons que :

$$\frac{d\zeta(X_{0in})}{dX_0} > -c_s k_0 \Leftrightarrow g_0(X_{0in}) > \frac{D}{c_s k_0}.$$

Pour déterminer les équilibres strictement positifs du système (3.1), deux cas se présentent : le cas $g_0(X_{0in}) \leq \frac{D}{c_s k_0}$ et le cas $g_0(X_{0in}) > \frac{D}{c_s k_0}$.

3.1.1 Le cas $g_0(X_{0in}) \leq \frac{D}{c_s k_0}$

Dans ce cas, l'intersection entre Δ et le graphe de ζ est soit vide soit un unique point (X_0^*, X_S^*) qui correspond à l'équilibre $F_1^* = (X_0^*, \lambda_S, X_S^*)$. En effet, H est décroissante sur $]0, X_0^{in}]$, $H(X_{0in}) = -c_s(S_{in} - \lambda_S)$ et $\lim_{X_0 \rightarrow 0} H(X_0) = +\infty$. Nous pouvons donc déduire que :

Proposition 3.1.2. *Sous les hypothèses (H1) et (H8), on a :*

1. Si $S_{in} > \lambda_S$ alors il existe un unique équilibre strictement positif $F_1^* = (X_0^*, \lambda_S, X_S^*)$ où X_0^* est la solution de $\zeta(X_0) = \delta(X_0)$ et $X_S^* = \delta(X_0^*)$.
2. Si $S_{in} \leq \lambda_S$ alors il n'existe pas d'équilibre strictement positif.

Preuve :

D'après le Lemme 3.1.1, $\frac{d\zeta(X_0)}{dX_0} < \frac{d\zeta(X_{0in})}{dX_0} \leq -c_s k_0$, donc $\frac{dH(X_0)}{dX_0} = \frac{d\zeta(X_0)}{dX_0} + c_s k_0 < 0$. Par suite, H est strictement décroissante sur $]0, X_{0in}[$. De plus, $\lim_{X_0 \rightarrow 0} H(X_0) = +\infty$, d'où,

1. Si $S_{in} > \lambda_S$ alors $H(X_{0in}) = -c_s(S_{in} - \lambda_S) < 0$. Donc il existe une unique solution $X_0^* \in]0, X_{0in}[$ de l'équation $\zeta(X_0) = \delta(X_0)$, avec $X_S^* = \delta(X_0^*)$.
2. Si $S_{in} \leq \lambda_S$ alors $H(X_{0in}) = -c_s(S_{in} - \lambda_S) \geq 0$. Comme H est strictement décroissante sur $]0, X_{0in}[$ alors l'équation $\zeta(X_0) = \delta(X_0)$ n'admet pas de solution sur $]0, X_{0in}[$. Dans ce cas, l'équilibre strictement positif n'existe pas.

D'où le résultat.

□

Remarquons que, lorsque $S_{in} = \lambda_S$ alors F_1^* coïncide avec F_0 .

En calculant les valeurs propres de la matrice Jacobienne en F_0 et en utilisant le critère de Routh-Hurwitz pour l'équilibre F_1^* , on peut montrer le résultat suivant :

Proposition 3.1.3. *Sous les hypothèses (H1) et (H8), les conditions d'existence et de stabilité des équilibres du système (3.1) sont données par :*

L'équilibre	Conditions d'existence	Conditions de stabilité locale
$F_0 = (X_{0in}, S_{in}, 0)$	existe toujours	$S_{in} < \lambda_S$
$F_1^* = (X_0^*, \lambda_S, X_S^*)$	$S_{in} > \lambda_S$	dès qu'il existe

TABLE 3.1 – Les conditions d'existence et de stabilité des équilibres du système (3.1), dans le cas $g_0(X_{0in}) \leq \frac{D}{c_s k_0}$.

Preuve

Pour déterminer la condition de stabilité locale de chaque équilibre, on détermine le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice Jacobienne J.

La matrice Jacobienne associée à l'équilibre F_0 est

$$J_{F_0} = \begin{bmatrix} -D & 0 & -g_0(X_{0in}) \\ 0 & -D & k_0 g_0(X_{0in}) - \frac{1}{c_s} g_S(S_{in}) \\ 0 & 0 & g_S(S_{in}) - D \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de J_{F_0} sont : $-D$, $-D$ et $g_S(S_{in}) - D$. Par suite, F_0 est LES si et seulement si $g_S(S_{in}) < D$, ce qui est équivalent à $S_{in} < \lambda_S$.

La matrice Jacobienne associée à l'équilibre F_1^* est :

$$J_{F_1^*} = \begin{bmatrix} -m_{11} & 0 & -m_{13} \\ m_{21} & -m_{22} & \theta \\ 0 & m_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

avec $m_{11} = D + \frac{dg_0}{dX_0}(X_0^*)X_S^*$, $m_{13} = g_0(X_0^*)$, $m_{21} = k_0 \frac{dg_0}{dX_0}(X_0^*)X_S^*$, $m_{22} = D + \frac{1}{c_s} \frac{dg_S}{dS}(\lambda_S)X_S^*$, $m_{32} = \frac{dg_S}{dS}(\lambda_S)X_S^*$ et $\theta = \frac{-D}{c_s} + k_0 g_0(X_0^*)$.

Le polynôme caractéristique de $J_{F_1^*}$ est :

$$P_{J_{F_1^*}} = -\lambda^3 - (m_{11} + m_{22})\lambda^2 - (m_{11}m_{22} - \theta m_{32})\lambda - m_{32}(-m_{11}\theta + m_{21}m_{13}).$$

On pose $c_0 = -1$, $c_1 = -(m_{11} + m_{22})$, $c_2 = -(m_{11}m_{22} - \theta m_{32})$ et $c_3 = m_{32}(-m_{11}\theta + m_{21}m_{13})$.

On a $c_0 < 0$ et $c_1 < 0$. c_2 et c_3 sont négatifs si $\dot{\zeta}(X_0^*) < -c_s k_0$. Un simple calcul donne $c_1 c_2 - c_0 c_3 > 0$. Par suite, le critère de Routh-Hurwitz est satisfait si la condition $\dot{\zeta}(X_0^*) < -c_s k_0$ est vérifiée. On conclut que l'équilibre F_1^* est localement stable dès qu'il existe.

□

3.1.2 Le cas $g_0(X_{0in}) > \frac{D}{c_s k_0}$

Dans ce cas, si l'intersection de Δ et du graphe de ζ n'est pas vide alors elle comporte un ou deux points. L'équation $\zeta'(X_0) = -c_s k_0$ représente le cas où Δ est tangente au graphe de ζ . Cette équation admet une unique solution notée \bar{X}_0 . Soit $\bar{X}_S = \zeta(\bar{X}_0)$ et $\bar{F}_1 = (\bar{X}_0, \lambda_S, \bar{X}_S)$ l'équilibre strictement positif correspondant. On note par \bar{S}_{in} la valeur de S_{in} pour laquelle $\bar{X}_S = \zeta(\bar{X}_0)$. D'où, $\bar{S}_{in} = (\frac{\bar{X}_S}{c_s} + k_0 \bar{X}_0 + \lambda_S) - k_0 X_{0in}$. On peut donc montrer le résultat suivant :

- Proposition 3.1.4.**
1. Si $\lambda_S \leq S_{in}$ alors il existe un unique équilibre strictement positif F_1^* .
 2. Si $\max(0, \bar{S}_{in}) < S_{in} < \lambda_S$ alors il existe deux équilibres strictement positifs F_1^* et F_1^{**} .
 3. Si $S_{in} = \bar{S}_{in}$ alors il existe un unique équilibre strictement positif \bar{F}_1 .
 4. Si $S_{in} < \max(0, \bar{S}_{in})$ alors il n'existe pas d'équilibre strictement positif.

Preuve :

D'après le Lemme 3.1.1, H est convexe et $\lim_{X_0 \rightarrow 0} H(X_0) = +\infty$. Alors,

1. Si $S_{in} \geq \lambda_S$ alors $H(X_{0in}) \leq 0$. Par suite, il existe une unique solution $X_0^* \in]0, X_{0in}[$ de l'équation $H(X_0) = 0$.
2. Si $S_{in} > \max(0, \bar{S}_{in})$ alors $0 = \min_{X \in]0, X_{0in}[} \bar{H}(X) > \min_{X \in]0, X_{0in}[} H(X)$. De plus, H est convexe et pour $S_{in} < \lambda_S$ on obtient $H(X_{0in}) > 0$. Alors, il existe deux solutions X_0^* et X_0^{**} dans $]0, X_{0in}[$ de l'équation $H(X_0) = 0$.
3. Si $S_{in} = \bar{S}_{in}$. On considère la fonction

$$\bar{H}(X_0) = \zeta(X_0) - c_s [(\bar{S}_{in} - \lambda_S) + k_0(X_{0in} - X_0)].$$

Comme $\frac{d\bar{H}}{dX_0}(X_0) = \frac{dH}{dX_0}(X_0)$ alors $\frac{d\bar{H}}{dX_0}(X_0) = 0$, ce qui est équivalent à : $\frac{d\zeta(X_0)}{dX_0} = -c_s k_0$. Cette équation admet une unique solution $\bar{X}_0 \in]0, X_{0in}[$ d'après le Lemme 1.4.2. De plus, \bar{H} convexe et $\bar{H}(\bar{X}_0) = 0 = \min_{X \in]0, X_{0in}[} \bar{H}(X)$. D'où, $\bar{H}(X_0) = 0$ admet une unique solution $\bar{X}_0 \in]0, X_{0in}[$.

4. Si $S_{in} < \max(0, \bar{S}_{in})$ alors $H(X_0) > \bar{H}(X_0) \geq \min_{X \in]0, X_{0in}[} \bar{H}(X)$. Par suite, l'équation $H(X_0) = 0$ n'admet pas de solution.

□

En calculant les valeurs propres de la matrice Jacobienne en F_0 et en utilisant le critère de Routh-Hurwitz pour l'équilibre F_1^* et F_1^{**} , on peut montrer le résultat suivant :

Proposition 3.1.5. *Sous les hypothèses (H1) et (H8), les conditions d'existence et de stabilité des équilibres du système (3.1) sont données par :*

L'équilibre	Conditions d'existence	Conditions de stabilité locale
$F_0 = (X_{0in}, S_{in}, 0)$	existe toujours	$S_{in} < \lambda_S$
$F_1^* = (X_0^*, \lambda_S, X_S^*)$	$S_{in} > \max(0, \bar{S}_{in})$	$\frac{d\zeta(X_0^*)}{dX_0} < -c_s k_0$
$F_1^{**} = (X_0^{**}, \lambda_S, X_S^{**})$	$\max(0, \bar{S}_{in}) < S_{in} < \lambda_S$	instable

TABLE 3.2 – Les conditions d'existence et de stabilité des équilibres du système (3.1), dans le cas $g_0(X_{0in}) > \frac{D}{c_s k_0}$

Preuve

Pour déterminer les conditions de stabilité locale de chaque équilibre, on détermine le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice Jacobienne J_{F_0} et on utilise le critère de Routh-Hurwitz pour les deux autres équilibres. le critère de Routh-Hurwitz est satisfait si la condition $\dot{\zeta}(X_0^*) < -c_s k_0$ est vérifiée, F_1^* est donc LES. Or l'équilibre F_1^{**} vérifie $\dot{\zeta}(X_0^{**}) > -c_s k_0$ alors le critère de Routh-Hurwitz n'est pas satisfait. Par suite, F_1^{**} est instable.

□

3.2 L'analyse du modèle complet de la digestion anaérobie

On suppose, dans cette section, que $g_V(V) = g_V(V, 0)$, $g_H(H) = g_H(H, 0)$ et que g_A vérifie l'hypothèse **(H3)**. Le système complet sans inhibition s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_0}{dt} = D(X_{0in} - X_0) - g_0(X_0)X_S \\ \frac{dS}{dt} = D(S_{in} - S) - \frac{1}{c_s}g_S(S)X_S + k_0g_0(X_0)X_S \\ \frac{dX_S}{dt} = (g_S(S) - D)X_S \\ \frac{dV}{dt} = -DV + \gamma_{sv}g_S(S)X_S - \frac{1}{c_v}g_V(V)X_V \\ \frac{dX_V}{dt} = (g_V(V) - D)X_V \\ \frac{dA}{dt} = -DA + \gamma_{sa}g_S(S)X_S + \gamma_{va}g_V(V)X_V - \frac{1}{c_a}g_A(A)X_A \\ \frac{dX_A}{dt} = (g_A(A) - D)X_A \\ \frac{dH}{dt} = -DH + \gamma_{sh}g_S(S)X_S + \gamma_{vh}g_V(V)X_V - \frac{1}{c_h}g_H(H)X_H \\ \frac{dX_H}{dt} = (g_H(H) - D)X_H. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

3.2.1 Analyse des équilibres

A partir de l'étude du sous modèle (3.1) et en utilisant les résultats de la section 3.1, nous pouvons déduire les équilibres du modèle complet (3.2). À l'équilibre, si $X_S = 0$ alors $V = X_V = A = X_A = H = X_H = 0$, $X_0 = X_{0in}$ et $S = S_{in}$. L'équilibre de l'extinction de toutes les espèces et qui existe toujours est $F_l = (X_{0in}, S_{in}, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Les équilibres du modèle (3.2) sont donnés dans la proposition suivante :

Proposition 3.2.1. *Sous les hypothèses **(H1)** - **(H4)** et **(H8)**, les équilibres du système (3.2) sont donnés par :*

Équilibre	X_0	S	X_S	V	X_V	A	X_A	H	X_H
F_l	X_{0in}	S_{in}	0	0	0	0	0	0	0
F_{0*}	X_0^*	λ_S	X_S^*	$V^{(0)}$	0	$A^{(0)}$	0	$H^{(0)}$	0
F_{H*}	X_0^*	λ_S	X_S^*	$V^{(0)}$	0	$A^{(0)}$	0	λ_H	$c_h(H^{(0)} - \lambda_H)$
F_{A*}	X_0^*	λ_S	X_S^*	$V^{(0)}$	0	λ_A	$c_a(A^{(0)} - \lambda_A)$	$H^{(0)}$	0
F_{AH*}	X_0^*	λ_S	X_S^*	$V^{(0)}$	0	λ_A	$c_a(A^{(0)} - \lambda_A)$	λ_H	$c_h(H^{(0)} - \lambda_H)$
F_{V*}	X_0^*	λ_S	X_S^*	λ_V	$c_v(V^{(0)} - \lambda_V)$	\bar{A}	0	\bar{H}	0
F_{VH*}	X_0^*	λ_S	X_S^*	λ_V	$c_v(V^{(0)} - \lambda_V)$	\bar{A}	0	λ_H	$c_h(\bar{H} - \lambda_H)$
F_{VA*}	X_0^*	λ_S	X_S^*	λ_V	$c_v(V^{(0)} - \lambda_V)$	λ_A	$c_a(\bar{A} - \lambda_A)$	\bar{H}	0
F_*	X_0^*	λ_S	X_S^*	λ_V	$c_v(V^{(0)} - \lambda_V)$	λ_A	$c_a(\bar{A} - \lambda_A)$	λ_H	$c_h(\bar{H} - \lambda_H)$
F_{0**}	X_0^{**}	λ_S	X_S^{**}	$V^{(0)*}$	0	$A^{(0)*}$	0	$H^{(0)*}$	0
F_{H**}	X_0^{**}	λ_S	X_S^{**}	$V^{(0)*}$	0	$A^{(0)*}$	0	λ_H	$c_h(H^{(0)*} - \lambda_H)$
F_{A**}	X_0^{**}	λ_S	X_S^{**}	$V^{(0)*}$	0	λ_A	$c_a(A^{(0)*} - \lambda_A)$	$H^{(0)*}$	0
F_{AH**}	X_0^{**}	λ_S	X_S^{**}	$V^{(0)*}$	0	λ_A	$c_a(A^{(0)*} - \lambda_A)$	λ_H	$c_h(H^{(0)*} - \lambda_H)$
F_{V**}	X_0^{**}	λ_S	X_S^{**}	λ_V	$c_v(V^{(0)*} - \lambda_V)$	\bar{A}^*	0	\bar{H}^*	0
F_{VH**}	X_0^{**}	λ_S	X_S^{**}	λ_V	$c_v(V^{(0)*} - \lambda_V)$	\bar{A}^*	0	λ_H	$c_h(\bar{H}^* - \lambda_H)$
F_{VA**}	X_0^{**}	λ_S	X_S^{**}	λ_V	$c_v(V^{(0)*} - \lambda_V)$	λ_A	$c_a(\bar{A}^* - \lambda_A)$	\bar{H}^*	0
F_{**}	X_0^{**}	λ_S	X_S^{**}	λ_V	$c_v(V^{(0)*} - \lambda_V)$	λ_A	$c_a(\bar{A}^* - \lambda_A)$	λ_H	$c_h(\bar{H}^* - \lambda_H)$

TABLE 3.3 – Les équilibres du système (3.2).

où

- X_0^* et X_0^{**} sont les solutions de $\zeta(X_0) = \delta(X_0)$, $X_S^* = \delta(X_0^*)$ et $X_S^{**} = \delta(X_0^{**})$
- $V^{(0)} = \gamma_{sv}X_S^*$, $A^{(0)} = \gamma_{sa}X_S^*$, $H^{(0)} = \gamma_{sh}X_S^*$
- $\bar{A} = A^{(0)} + \gamma_{va}c_v(V^{(0)} - \lambda_V)$, $\bar{H} = H^{(0)} + \gamma_{vh}c_v(V^{(0)} - \lambda_V)$
- $V^{(0)*} = \gamma_{sv}X_S^{**}$, $A^{(0)*} = \gamma_{sa}X_S^{**}$, $H^{(0)*} = \gamma_{sh}X_S^{**}$
- $\bar{A}^* = A^{(0)*} + \gamma_{va}c_v(V^{(0)*} - \lambda_V)$, $\bar{H}^* = H^{(0)*} + \gamma_{vh}c_v(V^{(0)*} - \lambda_V)$

□

3.2.1.1 Le cas $g_0(X_{0in}) \leq \frac{D}{c_s k_0}$

On déduit les conditions d'existence des équilibres du modèle (3.2) à partir de la proposition 3.1.3 et la proposition 2.1.3.

Proposition 3.2.2. *Sous les hypothèses (H1) - (H4) et (H8), les conditions d'existence des équilibres du système (3.2) sont données par :*

L'équilibre	Conditions d'existence
F_l	Existe toujours
F_0^*	$S_{in} > \lambda_S$
F_H^*	$S_{in} > \lambda_S$ et $H^{(0)} > \lambda_H$
F_A^*	$S_{in} > \lambda_S$ et $A^{(0)} > \lambda_A$
F_{AH}^*	$S_{in} > \lambda_S$, $A^{(0)} > \lambda_A$ et $H^{(0)} > \lambda_H$
F_V^*	$S_{in} > \lambda_S$ et $V^{(0)} > \lambda_V$
F_{VH}^*	$S_{in} > \lambda_S$, $\bar{H} > \lambda_H$ et $V^{(0)} > \lambda_V$
F_{VA}^*	$S_{in} > \lambda_S$, $\bar{A} > \lambda_A$ et $V^{(0)} > \lambda_V$
F^*	$S_{in} > \lambda_S$, $\bar{H} > \lambda_H$, $\bar{A} > \lambda_A$ et $V^{(0)} > \lambda_V$

TABLE 3.4 – Les conditions d'existence des équilibres du système (3.2), dans le cas $g_0(X_{0in}) \leq \frac{D}{c_s k_0}$

On déduit les conditions de stabilité locale des équilibres du modèle (3.2) à partir de la proposition 3.1.3 et la proposition 2.1.3.

Proposition 3.2.3. *Sous les hypothèses (H1) - (H4) et (H8), les conditions de stabilité des équilibres du système (3.2) sont données par :*

L'équilibre	Conditions de stabilité locale
F_l	$S_{in} < \lambda_S$
F_0^*	$A^{(0)} < \lambda_A$, $H^{(0)} < \lambda_H$ et $V^{(0)} < \lambda_V$
F_H^*	$A^{(0)} < \lambda_A$ et $V^{(0)} < \lambda_V$
F_A^*	$H^{(0)} < \lambda_H$ et $V^{(0)} < \lambda_V$
F_{AH}^*	$V^{(0)} < \lambda_V$
F_V^*	$\bar{A} < \lambda_A$ et $\bar{H} < \lambda_H$
F_{VH}^*	$\bar{A} < \lambda_A$
F_{VA}^*	$\bar{H} < \lambda_H$
F^*	Lorsqu'il existe

TABLE 3.5 – Les conditions de stabilité des équilibres du système (3.2), dans le cas $g_0(X_{0in}) \leq \frac{D}{c_s k_0}$

3.2.1.2 Le cas $g_0(X_{0in}) > \frac{D}{c_s k_0}$

On déduit les conditions d'existence et de stabilité locale des équilibres du modèle (3.2) à partir de la proposition 3.1.5 et la proposition 2.1.3.

Proposition 3.2.4. *Sous les hypothèses (H1) - (H4) et (H8), les conditions d'existence des équilibres du système (3.2) sont données par :*

L'équilibre	Conditions d'existence
F_l	Existe toujours
F_0^*	$S_{in} > \max(0, \bar{S}_{in})$
F_H^*	$S_{in} > \max(0, \bar{S}_{in})$ et $H^{(0)} > \lambda_H$
F_A^*	$S_{in} > \max(0, \bar{S}_{in})$ et $A^{(0)} > \lambda_A$
F_{AH}^*	$S_{in} > \max(0, \bar{S}_{in})$, $A^{(0)} > \lambda_A$ et $H^{(0)} > \lambda_H$
F_V^*	$S_{in} > \max(0, \bar{S}_{in})$ et $V^{(0)} > \lambda_V$
F_{VH}^*	$S_{in} > \max(0, \bar{S}_{in})$, $\bar{H} > \lambda_H$ et $V^{(0)} > \lambda_V$
F_{VA}^*	$S_{in} > \max(0, \bar{S}_{in})$, $\bar{A} > \lambda_A$ et $V^{(0)} > \lambda_V$
F^*	$S_{in} > \max(0, \bar{S}_{in})$, $\bar{H} > \lambda_H$, $\bar{A} > \lambda_A$ et $V^{(0)} > \lambda_V$
F_0^{**}	$\max(0, \bar{S}_{in}) < S_{in} < \lambda_S$
F_H^{**}	$\max(0, \bar{S}_{in}) < S_{in} < \lambda_S$ et $H^{(0)*} > \lambda_H$
F_A^{**}	$\max(0, \bar{S}_{in}) < S_{in} < \lambda_S$ et $A^{(0)*} > \lambda_A$
F_{AH}^{**}	$\max(0, \bar{S}_{in}) < S_{in} < \lambda_S$, $A^{(0)*} > \lambda_A$ et $H^{(0)*} > \lambda_H$
F_V^{**}	$\max(0, \bar{S}_{in}) < S_{in} < \lambda_S$ et $V^{(0)*} > \lambda_V$
F_{VH}^{**}	$\max(0, \bar{S}_{in}) < S_{in} < \lambda_S$, $\bar{H}^* > \lambda_H$ et $V^{(0)*} > \lambda_V$
F_{VA}^{**}	$\max(0, \bar{S}_{in}) < S_{in} < \lambda_S$, $\bar{A}^* > \lambda_A$ et $V^{(0)*} > \lambda_V$
F^{**}	$\max(0, \bar{S}_{in}) < S_{in} < \lambda_S$, $\bar{H}^* > \lambda_H$, $\bar{A}^* > \lambda_A$ et $V^{(0)*} > \lambda_V$

TABLE 3.6 – Les conditions d'existence des équilibres du système (3.2), dans le cas $g_0(X_{0in}) > \frac{D}{c_s k_0}$.

Proposition 3.2.5. *Sous les hypothèses (H1) - (H4) et (H8), les conditions de stabilité des équilibres du système (3.2) sont données par :*

L'équilibre	Conditions de stabilité locale
F_l	$S_{in} < \lambda_S$
F_0^*	$\frac{d\zeta(X_0^*)}{dX_0} < -c_s k_0$, $V^{(0)} < \lambda_V$, $A^{(0)} < \lambda_A$ et $H^{(0)} < \lambda_H$
F_H^*	$\frac{d\zeta(X_0^*)}{dX_0} < -c_s k_0$, $A^{(0)} < \lambda_A$ et $V^{(0)} < \lambda_V$
F_A^*	$\frac{d\zeta(X_0^*)}{dX_0} < -c_s k_0$, $H^{(0)} < \lambda_H$ et $V^{(0)} < \lambda_V$
F_{AH}^*	$\frac{d\zeta(X_0^*)}{dX_0} < -c_s k_0$, et $V^{(0)} < \lambda_V$
F_V^*	$\frac{d\zeta(X_0^*)}{dX_0} < -c_s k_0$, $\bar{A} < \lambda_A$ et $\bar{H} < \lambda_H$
F_{VH}^*	$\frac{d\zeta(X_0^*)}{dX_0} < -c_s k_0$, et $\bar{A} < \lambda_A$
F_{VA}^*	$\frac{d\zeta(X_0^*)}{dX_0} < -c_s k_0$ et $\bar{H} < \lambda_H$
F^*	$\frac{d\zeta(X_0^*)}{dX_0} < -c_s k_0$
F_0^{**} , F_H^{**} , F_A^{**} , F_{AH}^{**} , F_V^{**} , F_{VH}^{**} , F_{VA}^{**} et F^{**}	Instable

TABLE 3.7 – Les conditions de stabilité des équilibres du système (3.2), dans le cas $g_0(X_{0in}) > \frac{D}{c_s k_0}$.

3.2.2 Diagrammes opératoires

Nous étudions le comportement du système complet dans le plan (D, S_{in}) pour X_{0in} fixé. Soit $X_{0in} = 1$. Nous nous plaçons dans le cas où $g_0(X_{0in}) \leq \frac{D}{c_s k_0}$. Cette condition est équivalente à l'inégalité $D \geq c_s k_0 g_0(1)$. Notons $F_{01} = c_s k_0 g_0(1)$. Soient les fonctions $F_{LS}, F_{V01}, F_{V02}, F_{H01}, F_{H02}, F_{A01}, F_{A02}, F_{H1}, F_{H2}, F_{A1}$ et F_{A2} définies par les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} S_{in} > \lambda_S &\Leftrightarrow S_{in} > F_{LS}(D), \\ V^{(0)} > \lambda_V &\Leftrightarrow F_{V02}(D) < S_{in} < F_{V01}(D), \\ H^{(0)} > \lambda_H &\Leftrightarrow F_{H02}(D) < S_{in} < F_{H01}(D), \\ A^{(0)} > \lambda_A &\Leftrightarrow F_{A02}(D) < S_{in} < F_{A01}(D), \\ \bar{H} > \lambda_H &\Leftrightarrow F_{H1}(D) < S_{in} < F_{H2}(D), \\ \bar{A} > \lambda_A &\Leftrightarrow F_{A1}(D) < S_{in} < F_{A2}(D), \end{aligned}$$

Pour le jeu de paramètres choisi dans [34], (voir [34], Tableau A1), on a $F_{01} = 0.1$. En utilisant la proposition 3.2.2 et la proposition 3.2.3, on a le résultat suivant :

Proposition 3.2.6. *Le plan (D, S_{in}) est divisé en onze régions décrites dans le tableau 3.8 :*

Condition	Région	F_l	F_0^*	F_H^*	F_A^*	F_{AH}^*	F_V^*	F_{VH}^*	F_{VA}^*	F_*
$S_{in} < F_{LS}(D)$	R_1	S								
$(S_{in} > F_{LS}(D)$ et $S_{in} < F_{H02}(D)$) ou $(S_{in} > F_{H01}(D), S_{in} < F_{A02}(D)$ et $S_{in} < F_{V02}(D)$) ou $(S_{in} > F_{A01}(D))$	R_2	I	S							
$S_{in} > F_{LS}(D), S_{in} < F_{V02}(D)$ et $F_{H02}(D) < S_{in} < F_{H01}(D)$	R_3	I	I	S						
$S_{in} > F_{LS}(D), S_{in} > F_{V02}(D),$ $S_{in} < F_{H01}(D)$ et $S_{in} < F_{A02}(D)$	R_4	I	I	I			I	S		
$S_{in} > F_{LS}(D), S_{in} < F_{H01}(D)$ $S_{in} > F_{A02}(D)$ et $S_{in} < F_{Abar1}(D)$	R_5	I	I	I	I	I	I	S		
$S_{in} > F_{LS}(D),$ $S_{in} > F_{Abar1}(D)$ et $S_{in} < F_{H01}(D)$	R_6	I	I	I	I	I	I	I	I	S
$S_{in} > F_{H01}(D),$ $S_{in} > F_{Abar1}(D)$ et $S_{in} < F_{Hbar2}(D)$	R_7	I	I		I		I	I	I	S
$S_{in} > F_{V02}(D), S_{in} > F_{A02}(D),$ $S_{in} > F_{H01}(D), S_{in} < F_{Abar1}(D)$ et $S_{in} < F_{Hbar2}(D)$	R_8	I	I		I		I	S		
$S_{in} > F_{V02}(D),$ $F_{H01}(D) < S_{in}$ et $S_{in} < F_{A02}(D)$	R_9	I	I				I	S		
$(S_{in} > F_{A02}(D)$ et $S_{in} < F_{V02}(D))$ ou $(F_{V01}(D) < S_{in}$ et $S_{in} < F_{A01}(D))$	R_{10}	I	I		S					
$S_{in} > F_{Hbar2}(D)$ et $S_{in} < F_{V01}(D)$	R_{11}	I	I		I		I		S	

TABLE 3.8 – Existence et stabilité des équilibres du système (3.2) selon (D, S_{in}) , avec $D \geq F_{01}$

Preuve

D'après les inégalités suivantes, on déduit le résultat de la proposition 3.2.6 : on a

$$\begin{aligned}
 S_{in} > \lambda_S &\Leftrightarrow S_{in} > F_{LS}(D), \\
 V^{(0)} > \lambda_V &\Leftrightarrow F_{V02}(D) < S_{in} < F_{V01}(D), \\
 H^{(0)} > \lambda_H &\Leftrightarrow F_{H02}(D) < S_{in} < F_{H01}(D), \\
 A^{(0)} > \lambda_A &\Leftrightarrow F_{A02}(D) < S_{in} < F_{A01}(D), \\
 \bar{H} > \lambda_H &\Leftrightarrow F_{H1}(D) < S_{in} < F_{H2}(D), \\
 \bar{A} > \lambda_A &\Leftrightarrow F_{A1}(D) < S_{in} < F_{A2}(D).
 \end{aligned}$$

De plus, en utilisant les valeurs des paramètres de [34], on peut déduire les inégalités suivantes :

- $F_{LS}(D) < F_{H01}(D) < F_{H2}(D) < F_{V01}(D) < F_{A01}(D) < F_{A2}(D)$.
- $F_{H02}(D) < F_{H01}(D)$.
- $F_{V01}(D) > F_{V02}(D) > F_{H02}(D)$.
- $F_{H2}(D) > F_{H1}(D)$.
- $F_{A1}(D) > F_{A02}(D)$, $F_{A1}(D) > F_{V02}(D)$ et $F_{H2}(D) > F_{V02}(D)$.
- $F_{A2}(D) > F_{A1}(D)$.
- $F_{V02}(D) < F_{A01}(D)$ et $F_{A02}(D) < F_{A01}(D)$.
- $F_{H01}(D) < F_{V02}(D)$ pour $D \in]D_{int1}, +\infty[$ avec $D_{int1} = \{D > 0.1 \mid F_{H01}(D) = F_{V02}(D)\}$.
- $F_{H01}(D) < F_{A02}(D)$ pour $D \in]D_{int2}, +\infty[$ avec $D_{int2} = \{D > 0.1 \mid F_{H01}(D) = F_{A02}(D)\}$.
- $F_{H01}(D) < F_{A1}(D)$ pour $D \in]D_{int3}, +\infty[$ avec $D_{int3} = \{D > 0.1 \mid F_{H01}(D) = F_{A1}(D)\}$.
- $F_{A1}(D) < F_{H2}(D)$ pour $D \in]0.1, D_{int4}[$ avec $D_{int4} = \{D > 0.1 \mid F_{A1}(D) = F_{H2}(D)\}$.
- $F_{V02}(D) < F_{A02}(D)$ pour $D \in]0.1, D_{int5}[$ avec $D_{int5} = \{D > 0.1 \mid F_{V02}(D) = F_{A02}(D)\}$.
- $F_{LS}(D) > F_{V02}(D)$ pour $D \in]0.1, D_{int6}[$ avec $D_{int6} = \{D > 0.1 \mid F_{V02}(D) = F_{LS}(D)\}$.

□

Pour les valeurs des paramètres choisies dans [34], les équilibres F_{AH}^* et F_V^* , s'ils existent, sont instables.

Pour $X_{0in} = 1$, on trace le diagramme opératoire dans le plan (D, S_{in}) . Les Figures 3.1, 3.2 et 3.3 représentent des diagrammes opératoires dans le plan (D, S_{in}) . La Figure 3.2 est un agrandissement de la partie gauche de la Figure 3.1 et la Figure 3.3 est un agrandissement du bas de la Figure 3.2.

Pour $l = S, V, A$ et H , on prend les fonctions de croissance g_l du Chapitre 2, section 2.1.2 et $g_0(X_0) = \frac{m_{00}X_0}{k_{00} + X_0}$, avec $m_{00} = 2.5$ et $K_{00} = 1.5$.

Les régions R_{10} , $R_4 \cup R_5 \cup R_8 \cup R_9$ et R_{11} sont les régions de stabilité des équilibres F_A^* , F_{VH}^* et F_{VA}^* , alors que les équilibres E_A , E_{VH} et E_{VA} du modèle avec hydrolyse enzymatique sont instables.

De même, l'équilibre F_{AH}^* existe et est instable dans $R_5 \cup R_6$, il correspond à l'équilibre E_{AH} qui peut être stable. Donc, selon la modélisation de l'hydrolyse, enzymatique par un compartiment hydrolytique microbien, nous avons mis en évidence un comportement asymptotique des équilibres différent. L'hydrolyse affecte la nature et les zones de stabilité des équilibres.

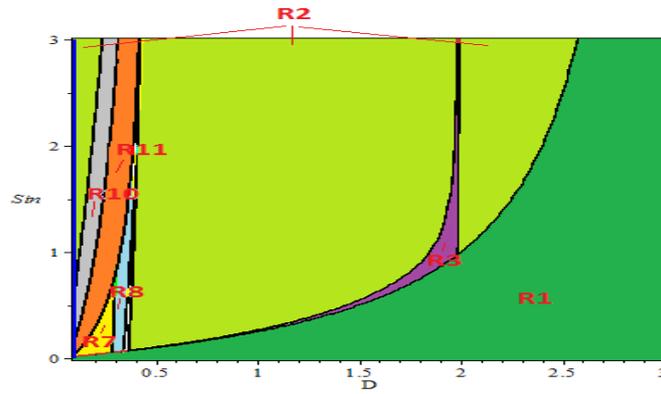


FIGURE 3.1 – Diagramme opératoire pour $X_{0in} = 1$ et $D \geq F_{01}$

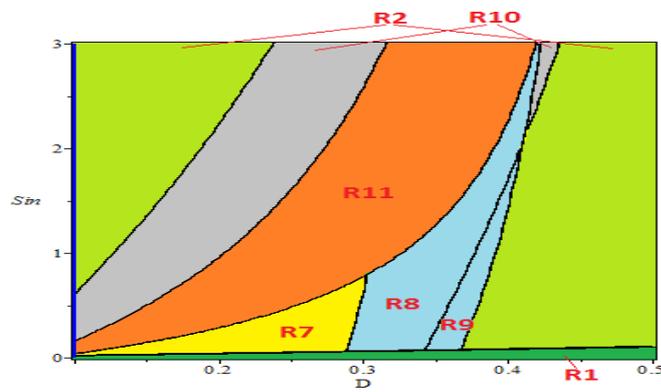


FIGURE 3.2 – Diagramme opératoire pour $X_{0in} = 1$ et $D \geq F_{01}$, (agrandissement de la partie gauche de la Figure 3.1)

Pour $X_{0in} = 0$, on obtient les diagrammes opératoires du modèle avec hydrolyse enzymatique sans inhibition, voir Figure 2.1.

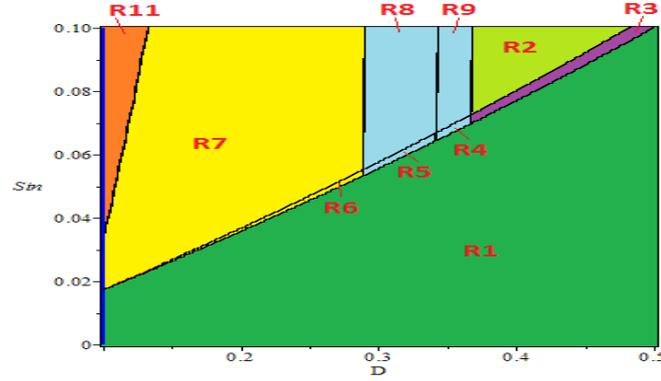


FIGURE 3.3 – Diagramme opératoire pour $X_{0in} = 1$ et $D \geq F_{01}$, (agrandissement du bas de la Figure 3.2)

3.2.3 Taux de biogaz produit

3.2.3.1 Taux de méthane produit

Le taux de méthane produit est donné par la formule suivante :

$$Q_{CH_4} = \alpha_1 g_A (A|_{A=A^*}) X_A|_{X_A=X_A^*} + \alpha_2 g_H (H|_{H=H^*}) X_H|_{X_H=X_H^*}$$

avec $\alpha_1 = \frac{1-c_a}{c_a}$ et $\alpha_2 = \frac{1-c_h}{c_h}$.

En se plaçant dans le cas où $g_0(X_{0in}) \leq \frac{D}{c_s k_0}$. Le taux de méthane produit, pour chaque équilibre, est donnée dans le Tableau 3.9 :

Équilibre	Q_{CH_4}
F_l^*, F_0^* et F_V^*	0
F_H^*	$\alpha_2 c_h D (H^{(0)} - \lambda_H)$
F_A^*	$\alpha_1 c_a D (A^{(0)} - \lambda_A)$
F_{AH}^*	$\alpha_1 c_a D (A^{(0)} - \lambda_A) + \alpha_2 c_h D (H^{(0)} - \lambda_H)$
F_{VH}^*	$\alpha_2 c_h D (\bar{H} - \lambda_H)$
F_{VA}^*	$\alpha_1 c_a D (\bar{A} - \lambda_A)$
F^*	$\alpha_1 c_a D (\bar{A} - \lambda_A) + \alpha_2 c_h D (\bar{H} - \lambda_H)$

TABLE 3.9 – Taux de méthane produit pour chaque équilibre du modèle (3.2)

On rappelle que $\bar{A} = A^{(0)} + \gamma_{va} c_v (V^{(0)} - \lambda_V)$, $\bar{H} = H^{(0)} + \gamma_{vh} c_v (V^{(0)} - \lambda_V)$, $V^{(0)} = \gamma_{sv} X_S^*$, $A^{(0)} = \gamma_{sa} X_S^*$, $H^{(0)} = \gamma_{sh} X_S^*$, $X_S^* = \delta(X_0^*)$ et X_0^* est la solution de $\zeta(X_0) = \delta(X_0)$.

- 1) Dans le cas où $V^{(0)} < \lambda_V$: les équilibres F_{VH}^* , F_{VA}^* et F^* n'existent pas et on a $\bar{A} < A^{(0)}$ et $\bar{H} < H^{(0)}$. Par suite, le taux maximal de méthane est donné soit par l'équilibre F_{AH}^* , soit par F_H^* , soit par F_A^* .
 Si $H^{(0)} > \lambda_H$ et $A^{(0)} > \lambda_A$ alors le taux maximal de méthane est donné par F_{AH}^* .
 Notons que si ces conditions sont vérifiées alors F_{AH}^* est stable.
 Si $H^{(0)} > \lambda_H$ et $A^{(0)} < \lambda_A$ alors le taux maximal de méthane est donné par F_H^* .
 Ces conditions sont vérifiées pour (D, S_{in}) dans la région R_3 .
 Si $H^{(0)} < \lambda_H$ et $A^{(0)} > \lambda_A$ alors le taux maximal de méthane est donné par F_A^* .
 Ces conditions sont vérifiées pour (D, S_{in}) dans la région R_{10} .

- 2) Dans le cas où $V^{(0)} > \lambda_V$, on a $\bar{A} > A^{(0)}$ et $\bar{H} > H^{(0)}$. Le taux maximal de méthane est alors donné soit par l'équilibre F_{VH}^* , soit par F_{VA}^* , soit par F^* .
 Si $\bar{H} > \lambda_H$ et $\bar{A} > \lambda_A$ alors le taux maximal de méthane est donné par F^* . Ces conditions sont vérifiées pour (D, S_{in}) dans les régions R_6 ou R_7 où F^* est stable.
 Si $V^{(0)} > \lambda_V$, $\bar{H} < \lambda_H$ et $\bar{A} > \lambda_A$ alors le taux maximal de méthane est donnée par F_{VA}^* . Ces conditions sont vérifiées dans la région R_{11} .
 Si $V^{(0)} > \lambda_V$, $\bar{H} > \lambda_H$ et $\bar{A} < \lambda_A$ alors le taux maximal de méthane est donnée par F_{VH}^* . Ces conditions sont vérifiées dans les régions R_4 , R_5 , R_8 ou R_9 , où F_{VH}^* est stable.

On représente, dans les Figures 3.4, 3.5, 3.6 et 3.7, le taux maximal du méthane produit en fonction de la dilution D . On varie le substrat sous forme particulaire X_{0in} et le substrat sous forme soluble S_{in} de telle manière à maintenir la somme constante. Cette somme est égale à 10 pour les figures 3.4 et 3.6 et est égale à 20 pour les figures 3.5 et 3.7. On prend $k_0 = 1$ pour les figures 3.4 et 3.5 et $k_0 = 0.5$ pour les figures 3.6 et 3.7. Les valeurs des paramètres sont celles du Tableau A1. de [34].

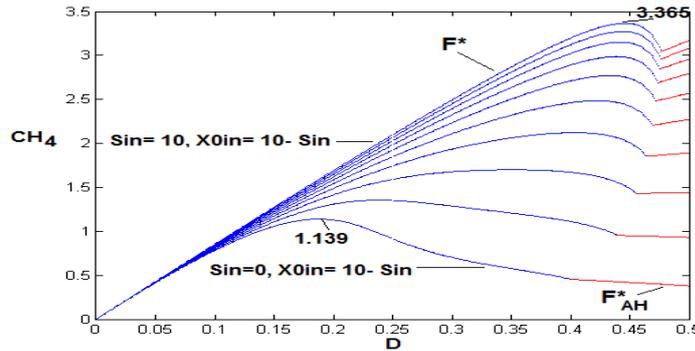


FIGURE 3.4 – La variation du taux de méthane pour $S_{in} + X_{0in} = 10$, $0 \leq X_{0in} \leq 10$ et $k_0 = 1$ pour le modèle (3.2)

Le taux maximal du méthane est donnée soit par l'équilibre F^* ou soit par l'équilibre F_{AH}^* . En augmentant la somme des substrat soluble et solide de dix à vingt, le taux de méthane augmente. En diminuant la coefficient d'hydrolyse k_0 de 1 à 0.5, le taux du méthane diminue. Le taux du méthane est plus élevé avec le substrat soluble qu'avec le substrat solide, en maintenant la somme $X_{0in} + S_{in}$ constante.

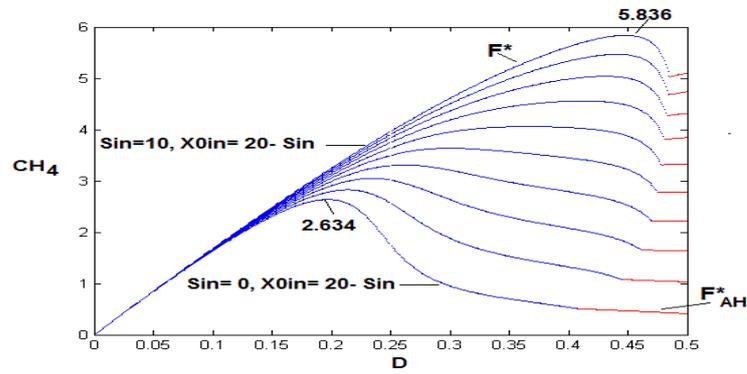


FIGURE 3.5 – La variation du taux de méthane pour $S_{in} + X_{0in} = 20$, $0 \leq S_{in} \leq 10$ et $k_0 = 1$ pour le modèle (3.2)

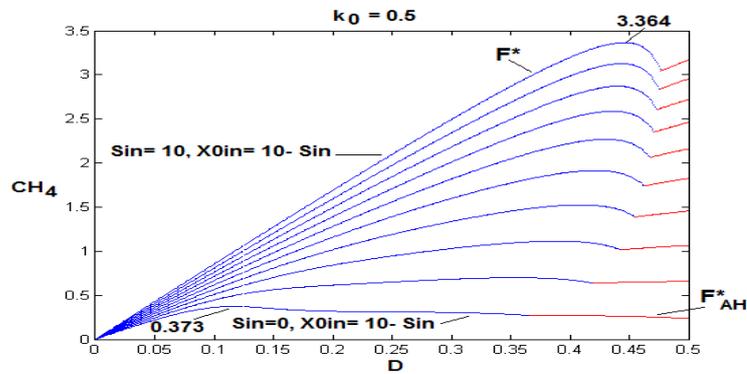


FIGURE 3.6 – La variation du taux de méthane pour $S_{in} + X_{0in} = 10$, $0 \leq X_{0in} \leq 10$ et $k_0 = 0.5$ pour le modèle (3.2)

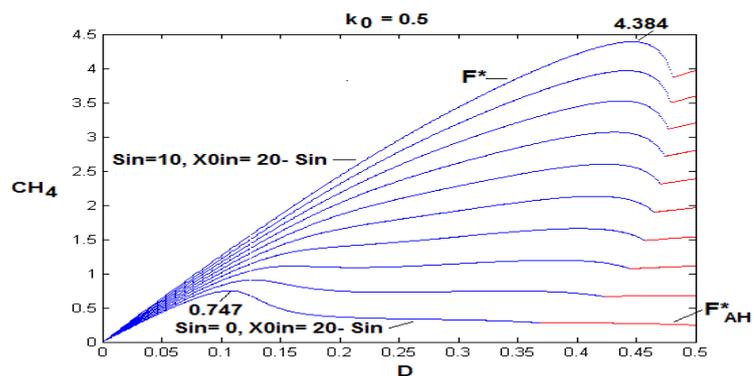


FIGURE 3.7 – La variation du taux de méthane pour $S_{in} + X_{0in} = 20$, $0 \leq S_{in} \leq 10$ et $k_0 = 0.5$ pour le modèle (3.2)

3.2.3.2 Taux d'hydrogène produit

Le taux d'hydrogène produit est donné par la formule suivante :

$$Q_{H2} = \alpha_{3gS}(S_{|S=S^*})X_{S|X_S=X_S^*} + \alpha_{4gV}(V_{|V=V^*})X_{V|X_V=X_V^*}$$

avec $\alpha_3 = \frac{1-c_s}{c_s}$ et $\alpha_4 = \frac{1-c_v}{c_v}$.

En se plaçant dans le cas où $g_0(X_{0in}) \leq \frac{D}{c_s k_0}$. Le tableau 3.10 donne le taux d'hydrogène produit en chaque équilibre.

Équilibre	Q_{H_2}
F_l	0
F_0^*, F_H^*, F_A^* et F_{AH}^*	$\alpha_3 D X_S^* = Q_{H_{21}}$
$F_V^*, F_{VH}^*, F_{VA}^*$ et F^*	$\alpha_3 D X_S^* + \alpha_4 D c_v (V^{(0)} - \lambda_V) = Q_{H_{22}}$

TABLE 3.10 – Taux d'hydrogène produit pour chaque équilibre du modèle (3.2)

- 1) Dans le cas, $V^{(0)} < \lambda_V$, les équilibres $F_V^*, F_{VH}^*, F_{VA}^*$ et F^* n'existent pas et on a $Q_{H_{21}} > Q_{H_{22}}$. Par suite, le taux maximal de l'hydrogène est donné soit par l'équilibre F_{AH}^* , soit par F_H^* , soit par F_A^* , soit par F_0^* .
 Si $S_{in} > \lambda_S$, $A^{(0)} < \lambda_A$ et $H^{(0)} < \lambda_H$ alors le taux maximal d'hydrogène est donné par F_0^* . Cet équilibre est stable dans la région R_2 .
 Si $S_{in} > \lambda_S$, $A^{(0)} < \lambda_A$ et $H^{(0)} > \lambda_H$ alors le taux maximal d'hydrogène est donné par F_H^* . Ces conditions sont vérifiées dans la région R_3 où F_H^* est stable.
 Si $S_{in} > \lambda_S$, $A^{(0)} > \lambda_A$ et $H^{(0)} < \lambda_H$ alors le taux maximal d'hydrogène est donné par F_A^* qui est stable dans la région R_{10} .
 Si $S_{in} > \lambda_S$, $A^{(0)} > \lambda_A$ et $H^{(0)} > \lambda_H$ alors le taux maximal d'hydrogène est donné par F_{AH}^* . Notons que si ces conditions sont vérifiées alors F_{AH}^* est stable.
- 2) Dans le cas, $V^{(0)} > \lambda_V$, $Q_{H_{22}} > Q_{H_{21}}$. Par suite, le taux maximal de l'hydrogène est donné soit par l'équilibre F_{VH}^* , soit par F_{VA}^* , soit par F_V^* , soit par F^* .
 Si $S_{in} > \lambda_S$, $\bar{H} > \lambda_H$ et $\bar{A} > \lambda_A$ alors F^* existe et le taux maximal d'hydrogène est donné par cet équilibre. F^* est stable dans les régions R_6 ou R_7 .
 Si $S_{in} > \lambda_S$, $\bar{H} < \lambda_H$ et $\bar{A} > \lambda_A$ alors F_{VA}^* existe et le taux maximal d'hydrogène est donné par cet équilibre. Cet équilibre est stable dans la région R_{11} .
 Si $S_{in} > \lambda_S$, $\bar{H} > \lambda_H$ et $\bar{A} < \lambda_A$ alors F_{VH}^* existe et le taux maximal d'hydrogène est donné par cet équilibre. Cet équilibre est stable dans la région R_4, R_5, R_8 ou R_9 .
 Si $S_{in} > \lambda_S$, $\bar{H} < \lambda_H$ et $\bar{A} < \lambda_A$ alors le taux maximal d'hydrogène est donné par F_V^* . Notons que si ces conditions sont vérifiées alors F_V^* est stable.

On représente, dans les Figures 3.8, 3.9, 3.10 et 3.11, le taux maximal de l'hydrogène produit en fonction de la dilution D . On varie le substrat sous forme particulière X_{0in} et le substrat sous forme soluble S_{in} de telle manière à maintenir la somme constante. Cette somme est égale à 10 pour les figures 3.8 et 3.10 et est égale à 20 pour les figures 3.9 et 3.11. On prend $k_0 = 1$ pour les figures 3.8 et 3.9 et $k_0 = 0.5$ pour les figures 3.10 et 3.11.

Le taux maximal d'hydrogène est donné soit par l'équilibre F^* , soit par l'équilibre F_{AH}^* . En augmentant la somme des substrat soluble et solide de 10 à 20, le taux d'hydrogène augmente. En diminuant le coefficient d'hydrolyse k_0 de 1 à 0.5, le taux d'hydrogène diminue. Le taux d'hydrogène est plus élevé avec le substrat soluble qu'avec le substrat solide, en maintenant la somme $X_{0in} + S_{in}$ constante.

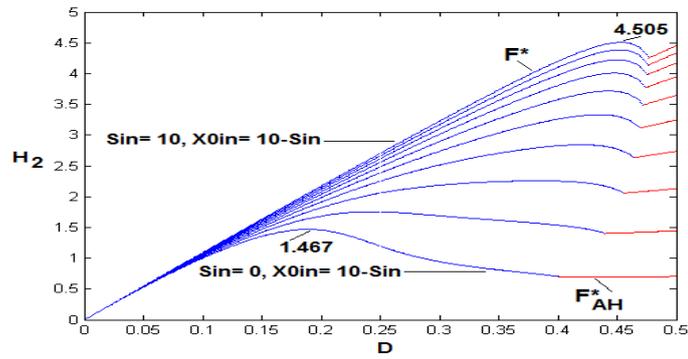


FIGURE 3.8 – La variation du taux d’hydrogène pour $S_{in} + X_{0in} = 10$, $0 \leq X_{0in} \leq 10$ et $k_0 = 1$ pour le modèle (3.2)

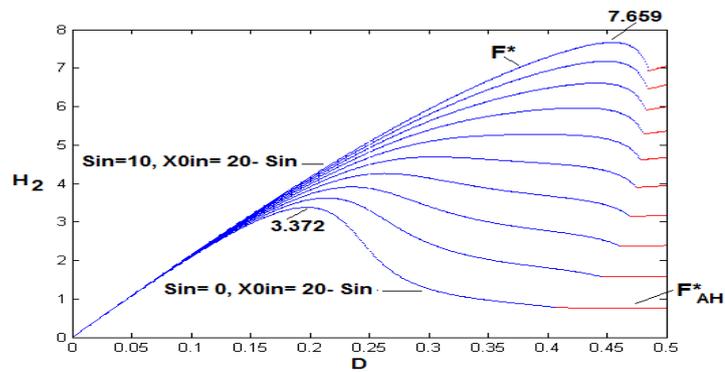


FIGURE 3.9 – La variation du taux d’hydrogène pour $S_{in} + X_{0in} = 20$, $0 \leq S_{in} \leq 10$ et $k_0 = 1$ pour le modèle (3.2)

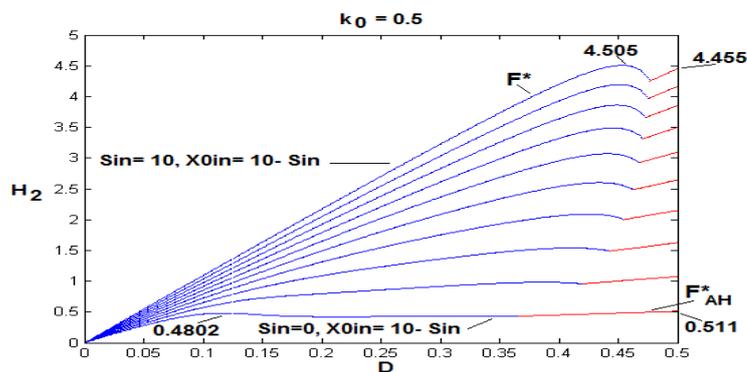


FIGURE 3.10 – La variation du taux d’hydrogène pour $S_{in} + X_{0in} = 10$, $0 \leq X_{0in} \leq 10$ et $k_0 = 0.5$ pour le modèle (3.2)

Conclusion