Méthode duale pour le problème d' optimisation de portefeuille

Sommaire

3.1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre précédent, comment les méthodes de programmation dynamique et de contrôle stochastique, nous ont permis d'établir des équations aux dérivées partielles non linéaires (équations de HJB) que doivent satisfaire les fonctions valeurs d'un problème d'optimisation de portefeuille. Mais le principe de cette méthode repose sur le fait que le marché était supposé markovien, c'est-à-dire que les paramètres du modèles sont des fonctions déterministes du temps et de l'état du système (cours des actifs) ainsi que la solution v.

L'introduction par Ross [99], Harrison et Kreps [41], et Harison et Pliska [40] des mesures martingales équivalentes a permis de considérer un modèle plus général où le marché n'est plus supposé markovien. Cette nouvelle technique est basée sur l'approche par dualité du problème d'optimisation de portefeuille. Le cadre du marché complet, où l'ensemble des mesures martingales est réduit à un seul élément, a été développé, essentiellement, par Cox et Huang [11], Karatzas, Lechoczky et Shreve [53] et Pliska [97]. Le modèle plus compliqué de marché incomplet a été considéré par He et Pearson [42], Karatzas et Shreve et Xu [54] puis par Kramkov et Shachamayer [60, 61].

Le but de ce chapitre est d'étudier le problème d'optimisation de portefeuille d'un point de vue dual.

Le modèle de marché considéré dans ce chapitre est un modèle de marché incomplet, constitué d' un actif sans risque ξ_0, dont nous supposons le prix constant égal à 1, et de d actifs risqués dont les prix notés $(\xi^i)_{i=1..d}$ sont des semimartingales, dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\leq T}, \mathbb{P})$.

Un vecteur $\pi \in \mathbb{R}^d$ est une autofinançante, pour une richesse initiale x, π est un processus progressif intégrable par rapport à ξ, ainsi la richesse réalisée $X_t^{x,\pi}$ partant d'un capital initial x et suivant la stratégie π est donnée par

$$X_t^{x,\pi} = x + \int_0^t \pi_s d\xi_s,\ t \leq T. \tag{3.1}$$

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, nous notons par $\mathcal{X}(x)$, la famille des richesses positives à tout instant $t \leq T$, c-à-d. $X_t^{x,\pi} \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, partant de x et dont la stratégie π est une stratégie autofinançante. Autrement dit,

$$\mathcal{X}(x) = \{X^{x,\pi} \geq 0 : X_t^{x,\pi} = x + \int_0^t \pi_s d\xi_s,\ t \leq T, \pi \text{ autofinançante}\}. \tag{3.2}$$

Notons par $\mathcal{M}^e$ l'ensemble des probabilités équivalentes (probabilités martingales), défini par

$$\mathcal{M}^e = \{\mathbb{Q} \sim \mathbb{P} : \forall X \in \mathcal{X}(.),\ X \text{ est une } \mathbb{Q}\text{-martingale locale }\}. \tag{3.3}$$

Comme nous nous plaçons dans un marché sans opportunité d'arbitrage nous supposons que

$$\mathcal{M}^e \neq \emptyset. \tag{3.4}$$

3.1.1 Le problème d'optimisation de portefeuille

Soit U une fonction d'utilité d'un agent à maturité T. Nous rappelons que U est une fonction continue sur son domaine $dom(U) = \{x \in \mathbb{R} : U(x) > -\infty\}$, dérivable, strictement croissante et strictement concave à l'intérieur de $dom(U)$. Dans ce chapitre nous nous plaçons dans le cadre où

Hypothèse 3.1. *La fonction d'utilité U satisfait*

$$dom(U) = [0, +\infty] \tag{3.5}$$

ce qui veut dire que, seulement, les richesses positives sont autorisées.
Nous supposons, de plus, que U satisfait l'hypothèse dite d'Inada suivante :

Hypothèse 3.2. *La fonction d' utilité U satisfait*

$$U'(0) \overset{def}{=} \lim_{x \downarrow 0} U'(x) = +\infty, \ \ et \ \ U'(\infty) \overset{def}{=} \lim_{x \to +\infty} U'(x) = 0. \tag{3.6}$$

Une fois sur le marché, cet agent cherchera à déterminer sa stratégie optimale et sa fonction valeur u donnée par le problème d'optimisation suivant :

$$u(x) = \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \mathbf{E}(U(T, X_T)). \tag{3.7}$$

Supposons ensuite :

Hypothèse 3.3. *Il existe $x_0 > 0$ tel que la fonction valeur u, satisfait*

$$u(x_0) < +\infty. \tag{3.8}$$

Remarque 3.1. *Remarquons que cette hypothèse est équivalente à*

$$u(x) < +\infty, \quad \forall x > 0. \tag{3.9}$$

En effet, comme U est croissante concave, il en est de même pour la fonction valeur u. Donc la croissance de u va impliquer dans un premier temps que, pour tout $x \leq x_0$, $u(x) \leq u(x_0) < +\infty$.

Soit maintenant $x_1 \geq x_0$ quelconque. Pour conclure il faut montrer que $u(x_1) < +\infty$. Pour cela il faut juste remarquer qu'on peut toujours trouver un $x'_0 \leq x_0$, $\lambda \in [0,1]$: $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x'_0$, donc, puisque u est concave, nous déduisons l'inégalité suivante

$$u(x_1) \leq \frac{u(x_0) - \lambda u(x'_0)}{1-\lambda} < +\infty. \tag{3.10}$$

Notons que l' hypothèse 3.3 porte directement sur la fonction valeur en elle-même, ce qui peut nous paraître étrange, mais nous verrons dans la suite qu'elle est automatiquement satisfaite dès que U vérifie une condition dite d élasticité asymptotique. Avant d'introduire la méthode dite duale, quelques hypothèses et définitions sont nécessaires, nous supposons par exemple que dans toute la suite les fonctions d'utilités que nous allons considérer vérifient les conditions d'Inada 3.2, ce qui va nous permettre, dans un premier temps, d'introduire la notion du convexe dual, appelé aussi la transformée de Fenchel.

3.2 Approche par Dualité

3.2.1 Fonctions polaires : transformée de Fenchel-Legendre

Définition 3.1. *On appelle transformée de Fenchel d'une fonction U de $\mathbb{R}^d$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, croissante concave et vérifiant l'hypothèse 3.2, la fonction $\tilde{U}$, définie par :*

$$\tilde{U}(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left[U(x) - xy \right], \quad y \in \mathbb{R}^d. \tag{3.11}$$

Nous notons $dom(\tilde{U})$ le domaine de $\tilde{U}$ donné par

$$dom(\tilde{U}) = \left\{ y > 0 : \tilde{U}(y) < +\infty \right\}.$$

La fonction polaire $\tilde{U}$ ainsi définie comme le supremum point par point des fonctions affines $y \mapsto U(x) - xy$ est alors une fonction convexe sur $\mathbb{R}^d$. La fonction $\tilde{U}$ est aussi appelée fonction polaire.

On peut également définir la transformée de Fenchel-Legendre de la transformée de Fenchel-Legendre. Dans les résultats suivants, nous établissons un lien entre la différentiabilité de U et celle de son dual.

Proposition 3.1. *Soit U une fonction concave semi-continue inférieurement de $\mathbb{R}^d$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ et $\tilde{U}$ sa transformée de Fenchel. Alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$, les équivalences suivantes sont satisfaites*

$$y \in \partial U(x) \Leftrightarrow x \in \partial \tilde{U}(y) \Leftrightarrow U(x) = xy + \tilde{U}(y). \tag{3.12}$$

Proposition 3.2. *Soit U une fonction concave semicontinue inférieurement de $\mathbb{R}^d$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, strictement concave sur $Int(dom(U))$. Alors sa transformée de Fenchel-Legendre $\tilde{U}$ est différentiable sur $Int(dom(\tilde{U}))$. Si de plus, U est différentiable sur $Int(dom(U))$ alors son gradient U' est une bijection de $Int(dom(U))$ dans $Int(dom(\tilde{U}))$ avec $U' = -(\tilde{U}')^{-1}$ et $\tilde{U}$ est est strictement convexe sur $Int(dom(\tilde{U}))$.*

Dans la suite, les fonctions U qui nous intéressent sont des fonctions à une variable définies sur $\mathbb{R}_+^*$. Nous retenons en particulier le résultat suivant.

Lemme 3.1. *Soit U une fonction concave croissante dérivable telle que $U'(\infty) = 0$, notons $I = (U')^{-1}$ (strictement décroissante, et vérifiant $I(0) = +\infty$, $I(+\infty) = 0$), alors le dual convexe $\tilde{U}$ de U est une fonction croissante semi-continue vérifiant :*

(i) Le dual convexe $\tilde{U}$, est donné par

$$\tilde{U}(y) = \begin{cases} U(I(y)) - yI(y) & si\ y > 0 \\ U(\infty) & si\ y = 0 \\ \infty & si\ y < 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

(ii) $\tilde{U}'$ est définie, continue croissante $\tilde{U}' = -I$.

(iii) La transformation duale (3.11) admet une transformation inverse. En effet U peut être retrouvée par la formule

$$U(x) = \inf_{y>0} \left[\tilde{U}(y) + xy \right], \quad x > 0 \tag{3.14}$$

ou encore pour tout $x > 0$,

$$U(x) = \tilde{U}((\tilde{U})^{-1}(-x)) + x(\tilde{U})^{-1}(-x). \tag{3.15}$$

3.2.2 La formulation duale : idée générale

Comme l'indique le titre, ce paragraphe a pour but de simplifier la compréhension de cette nouvelle approche, en donnant simplement l'idée générale de cette méthode, les détails de calculs et les difficultés techniques seront abordés et étudiés essentiellement dans le paragraphe suivant.
Soient $x > 0$, $y > 0$, $X_T \in \mathcal{X}(x)$ et enfin $Z_T \in \mathcal{M}^e$, alors par (3.3) et par définition du conjugué $\tilde{U}$, nous avons :

$$\mathbb{E}(U(X_T)) \quad \leq \quad \mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_T) + yZ_TX_T) \leq \mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_T)) + yx \tag{3.16}$$

ceci étant vrai pour tout $Z \in \mathcal{M}^e$, en particulier l'inégalité suivante est vraie :

$$\mathbb{E}(U(X_T)) \leq \inf_{Z_T \in \mathcal{M}^e} \mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_T)) + yx. \tag{3.17}$$

Notons ensuite $\tilde{u}$ la fonction valeur du problème dit dual suivant :

$$\tilde{u}(y) \stackrel{def}{=} \inf_{Z_T \in \mathcal{M}^e} \mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_T)). \tag{3.18}$$

Prenons le supremum sur tous les X_T et l'infimum sur tous les y dans (3.17), nous obtenons :

$$u(x) \leq \inf_{y>0}[\tilde{u}(y) + xy] = \inf_{y>0,\ Z_T \in \mathcal{M}^e}[\mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_T)) + yx] \tag{3.19}$$

Intéressons-nous au problème d'optimisation à droite de cette inégalité

$$\inf_{y>0}[\tilde{u}(y) + xy] = \inf_{y>0,\ Z_T \in \mathcal{M}^e}[\mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_T)) + yx]. \tag{3.20}$$

et supposons qu'il existe un couple, (y^*, Z_T^*), optimal pour ce problème. Alors en posant

$$X_T^* = I(y^* Z_T^*), \tag{3.21}$$

l'idée est alors de montrer que cette variable X_T^* est non seulement dans l'espace $\mathcal{X}(x)$, mais aussi que $X_T^* Z_T^*$ est une martingale c-à-d :

$$\mathbb{E}(X_T^* Z_T^*) = x. \tag{3.22}$$

De plus les équations (3.21) et (3.13) vont nous permettre, en particulier, d'écrire que

$$\begin{aligned} U(X_T^*) &= U(I(y^* Z_T^*)) \\ &= \tilde{U}(y^* Z_T^*) + y^* Z_T^* I(y^* Z_T^*) \\ &= \tilde{U}(y^* Z_T^*) + y^* Z_T^* X_T^*. \end{aligned} \tag{3.23}$$

En prenant l'espérance et en tenant compte de l'identité (3.22), nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U(X_T^*)) &= \mathbb{E}(\tilde{U}(y^* Z_T^*)) + y^* \mathbb{E}(Z_T^* X_T^*) \\ &= \mathbb{E}(\tilde{U}(y^* Z_T^*)) + y^* x. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Or par définition de la fonction valeur u (équation (3.7)), nous avons l'inégalité

$$\mathbb{E}(U(X_T^*)) \leq u(x).$$

Combinons cette dernière inégalité avec (3.19), nous déduisons que c'est bien une égalité. Ce qui implique que non seulement cette variable $X_T^{x,*}$ est optimale pour le problème primal, mais aussi que la relation de conjugaison pour les deux fonctions valeur du problème primal u et du problème dual $\tilde{u}$ est satisfaite,

$$u(x) = \inf_{y>0} \{\tilde{u}(y) + xy\} = \tilde{u}(y^*) + xy^*. \tag{3.25}$$

Remarque 3.2. *Supposons que* $\forall y > 0$ *il existe* $Z_T \in \mathcal{M}^e$: $\mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_T)) < \infty$, *alors la fonction valeur du problème dual est finie, c-à-d*

$$\tilde{u}(y) < \infty \;, \quad \forall y > 0$$

donc, d'après l'inégalité (3.19),

$$u(x) \leq \inf_{y>0} \{\tilde{u}(y) + xy\} < +\infty.$$

En particulier,

$$\frac{u(x)}{x} \leq \frac{\tilde{u}(y)}{x} + y, \quad \forall x, \; y > 0. \tag{3.26}$$

Nous en dédui alors, en passant à la limite supérieure, que la condition

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{u(x)}{x} \leq 0$$

est satisfaite.

3.3 Résolution par dualité

Notons $\mathbb{L}^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ l'ensemble des variables aléatoires $\mathcal{F}_T$-mesurables et positives p.s, et pour $x \in \mathbb{R}$, nous noterons par $\mathcal{C}(x)$ l'ensemble des actifs contingents qui peuvent être sur-couverts sans risque à partir de la richesse initiale x et d'une stratégie de portefeuille admissible,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(x) &= \left\{X_T \in \mathbb{L}^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T, P) : \exists \pi \in \mathcal{A}(x), X_T^{x,\pi} \geq X_T\right\} \\ &= \left\{X_T \in \mathbb{L}^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T, P) : \exists \pi \in \mathcal{A}(x), x + \int_0^T \pi_s d\xi_s \geq X_T\right\} \quad (3.27)\end{aligned}$$

Ceci nous amène alors à la formulation duale de $\mathcal{C}(x)$ suivante

$$X_T \in \mathcal{C}(x) \Leftrightarrow \mathbb{E}(Z_T X_T) \leq x, \quad \forall Z \in \mathcal{M}^e \tag{3.28}$$

La raison pour laquelle nous introduisons l'ensemble $\mathcal{C}(x)$ est due essentiellement à ces propriétés intéressantes dans toute cette approche par dualité et notamment le fait que $\mathcal{C}(x)$ soit fermé pour la convergence en mesure (théorème 3.9) contrairement à $\mathcal{X}(x)$. De plus, nous avons le lemme suivant :

Lemme 3.2. *Dans la définition (3.7) de la fonction valeur u, nous pouvons remplacer l'ensemble $\mathcal{X}(x)$ par $\mathcal{C}(x)$. En d'autres termes*

$$u(x) = \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \mathbf{E}(U(T, X_T)) = \sup_{X \in \mathcal{C}(x)} \mathbf{E}(U(T, X_T)). \tag{3.29}$$

Démonstration. En remarquant que $\mathcal{X}(x) \subset \mathcal{C}(x)$,

$$\sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \mathbf{E}(U(T, X_T)) \leq \sup_{X \in \mathcal{C}(x)} \mathbf{E}(U(T, X_T)). \tag{3.30}$$

Par la suite, comme pour tout $X \in \mathcal{C}(x)$, il existe $X' \in \mathcal{X}(x)$ tel que $X' \geq X$, il en découle, par monotonie de la fonction d'utilité U, l'inégalité dans l'autre sens. □

En se basant sur ce lemme, nous pouvons alors énoncer un premier résultat d'existence d'une richesse optimale au problème (3.29).

3.3.1 Résultats d'existence

Nous supposons, dans ce paragraphe, que la fonction valeur u vérifie l'hypothèse suivante,

Hypothèse 3.4.

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{u(x)}{x} \leq 0. \tag{3.31}$$

Notons, qu'encore une fois, l'hypothèse 3.4 est une hypothèse sur la fonction valeur, nous verrons dans la suite qu'une hypothèse dite d'élasticité asymptotique sur la fonction d'utilité U est suffisante pour que les hypothèses 3.3 et 3.4 soient toutes les deux satisfaites.
Avant de poursuivre nos investigations et d'écrire une nouvelle méthode de résolution nous nous intéressons d'abord, dans ce paragraphe, à la question de l'existence d'une solution à notre problème. Nous allons donc montrer l'existence d'une telle solution et nous verrons dans la preuve du théorème qui suit que la condition (3.8) est la condition nécessaire pour surmonter certaines difficultés de la démonstration, nous donnerons aussi dans la suite quelques conditions portant sur U pour que cette hypothèse soit satisfaite.

Théorème 3.1. *Soit U une fonction d'utilité vérifiant les hypothèses 3.2 et 3.3 et dont le domaine est dom$(U) = [0, +\infty]$, alors pour tout $x > 0$, il existe une unique solution $X_T^{x,*}$ au problème (3.29).*

Démonstration. Commençons par la partie facile de cette démonstration.
Unicité :
Supposons qu'il existe deux portefeuilles optimaux X^1 et X^2 pour le problème d'optimisation de portefeuille qu'on considère, telles que

$$\mathbb{P}(X^{x,1} \neq X^{x,2}) > 0.$$

Posons, ensuite, $X = \frac{X^1+X^2}{2}$. Alors par la stricte concavité de la fonction U, il en découle

$$\mathbb{E}(U(X)) = \mathbb{E}(U(\frac{X^{x,1} + X^{x,2}}{2})) > \frac{1}{2}(\mathbb{E}(U(X^{x,1})) + \mathbb{E}(U(X^{x,2}))) = v(x)$$

ce qui est contradictoire à la définition de la fonction valeur v, d'où l'unicité.

Existence :

Soit $x > 0$, l'idée de cette preuve est de raisonner à l'aide d'une suite maximisante de $v(x)$, qu'on notera par $(X^{x,n})_{n\geq 0}$ dans l'ensemble $\mathcal{C}(x)$, c-à-d

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(U(X^{x,n})) = v(x) < \infty \tag{3.32}$$

Dans toute la suite de ce chapitre, la définition suivante nous sera d'une grande utilité.

Définition 3.2. *Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites quelconques de $\mathbb{R}^n$, nous notons $b_n \in Conv(a_n, a_{n+1}, ...)$ pour tout $n \geq 0$ si et seulement si $\exists N_n \geq n, \quad \alpha_i \in [0,1], i = n..N_n \quad : \quad b_n = \sum_{i=n}^{N_n} \alpha_i a_i$.*

En utilisant le théorème de compacité (théorème 3.8) dans $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, il existe une suite $\tilde{X}^{x,n} \in Conv(X^{x,n}, X^{n+1}, ...)$, qui est encore dans l'ensemble $\mathcal{C}(x)$ et telle que $(\tilde{X}^{x,n})_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire $X^{x,*}_T$. Comme $\mathcal{C}(x)$ est fermé pour la convergence en mesure (théorème 3.9), nous en déduisons que $X^{x,*}_T$ est à son tour dans $\mathcal{C}(x)$. De plus par concavité de la fonction d'utilité U et par la définition de la suite maximisante $(X^{x,n})_{n\geq 0}$, il s'en suit

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(U(\tilde{X}^{x,n})) = v(x) < \infty. \tag{3.33}$$

Comme $X^{x,*}_T$ est dans $\mathcal{C}(x)$ alors il existe une stratégie admissible autofinançante π^* tel que $X^{x,\pi^*}_T = X^{x,*}_T$ p.s. En d'autres termes, $X^{x,*}_t$ est bien un portefeuille atteignable et en particulier peut être un bon candidat pour jouer le rôle de la richesse optimale pour le problème d'optimisation de portefeuille. Il est clair que, pour prouver l'optimalité de cette variable il faut qu'on arrive à démontrer l'identité suivante

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(U(\tilde{X}^{x,n})) = \mathbb{E}(U(X^{x,*}_T)).$$

Notons par U^+ et U^- les parties positives et négatives de U, et remarquons que, d'une part d'après (3.33),

$$\sup_n \mathbb{E}(U^+(\tilde{X}^{x,n})) < \infty$$

et

$$\sup_n \mathbb{E}(U^-(\tilde{X}^{x,n})) < \infty$$

et d'autre part, grâce au lemme de Fatou,

$$\liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}(U^-(\tilde{X}^{x,n})) \geq \mathbb{E}(U^-(X_T^{x,*})).$$

Nous déduisons alors que

$$\mathbb{E}(U^-(X_T^{x,*})) < \infty$$

et par conséquent, nous avons l'égalité suivante,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(U^-(\tilde{X}^{x,n})) = \mathbb{E}(U^-(X_T^{x,*})).$$

À ce niveau, il est évident que la variable $X_T^{x,*}$ est optimale si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(U^+(\tilde{X}^{x,n})) = \mathbb{E}(U^+(X_T^{x,*})). \tag{3.34}$$

Remarque 3.3. *Dans la suite, nous supposons que $U(+\infty) > 0$ car sinon, comme U est croissante, nous avons $U^+ = 0$ et il n'y a rien à prouver dans ce cas.*

Pour démontrer (3.34), nous raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un $\varepsilon > 0$, tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(U^+(\tilde{X}^{x,n})) = \mathbb{E}(U^+(X_T^{x,*})) + \varepsilon.$$

Donc en considérant une sous suite $(\bar{X}^{x,n})_{n\geq 0}$ de $(\tilde{X}^{x,n})_{n\geq 0}$, d'après le théorème 3.11, il existe une famille d'ensembles notés $(B_n)_{n\geq 0}$:

$$B_i \cap B_j = \emptyset,\ \mathbb{E}(U^+(\bar{X}^{x,n})\mathbf{1}_{B_n}) \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $x_0 = \inf\{x > 0 : U(x) \geq 0\}$, et considérons la suite de variables aléatoires définie par :

$$Y^{x_0,x,n} = x_0 + \sum_{k=1}^{n} \bar{X}^k \mathbf{1}_{B_n}$$

et vérifiant, pour tout $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e$, l'inégalité

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Y^{x_0,x,n}) \leq x_0 + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\bar{X}^k \mathbf{1}_{B_n}).$$

Comme $\bar{X}^k \in \mathcal{C}(x)$ alors d'après la formulation duale (3.28), ceci implique

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Y^{x_0,x,n}) \leq x_0 + \sum_{k=1}^{n} x = nx + x_0$$

ce qui prouve que la variable $Y^{x_0,x,n}$ est dans l'ensemble $\mathcal{C}(nx + x_0)$.
Ceci d'une part mais d'autre part,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Y^{x_0,x,n}) \;=\; \mathbb{E}(U(x_0 + \sum_{k=1}^{n} \bar{X}^k \mathbf{1}_{B_n})) = \mathbb{E}(U^+(x_0 + \sum_{k=1}^{n} \bar{X}^k \mathbf{1}_{B_n}))$$

Donc, en rappelant que la fonction U^+ est croissante et que les B_k sont disjoints, on obtient

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Y^{x_0,x,n}) \;\geq\; \mathbb{E}(U^+(\sum_{k=1}^{n} \bar{X}^k \mathbf{1}_{B_n})) \geq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\bar{X}^k \mathbf{1}_{B_n}))) \geq \frac{n\varepsilon}{2}. \quad (3.35)$$

Comme $v(x) \geq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Y^{x_0,x,n})$, alors en divisant par x et en utilisant (3.35), il en découle

$$\frac{v(x)}{x} \geq \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Y^{x_0,x,n})}{x} \geq \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Y^{x_0,x,n})}{nx + x_0} \geq \frac{n\varepsilon}{2(nx + x_0)}$$

en prenant ensuite la limite supérieure

$$0 = \limsup_{x \to +\infty} \frac{v(x)}{x} \geq \frac{\varepsilon}{2x} > 0$$

Ce qui est impossible, nous concluons donc que $X_T^{x,*}$ est optimal pour le problème $v(x)$.

□

3.3.2 Marché complet

Dans cet exemple, le marché financier est supposé complet, c'est-à-dire que l'ensemble des probabilités martingales équivalentes est réduit à une probabilité dite risque neutre $\mathbb{Q}$, c-à-d

$$\mathcal{M}^e = \{\mathbb{Q}\}.$$

Notons Z le processus de densité martingale défini par $Z = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, en terme des notations du chapitre précédent Z correspond à la variable $H^{0,\eta}$. La fonction valeur du problème dual (3.18) devient

$$\tilde{u}(y) = \mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_T)).$$

Dans ce contexte nous montrons le résultat suivant :

Théorème 3.2. *Supposons que les hypothèses 3.2, 3.3 et 3.4 sont satisfaites. Alors*

(i) $u(x) < +\infty$, *pour tout* $x > 0$ *et* $\tilde{u}(y) < +\infty$ *pour* y *suffisamment grand. Notons* y_0 *et* x_0 *les réels définis par* $y_0 = \inf\{y : \tilde{u}(y) < +\infty\}$, $x_0 = \lim_{y\downarrow y_0}(-\tilde{u}'(y))$. *Alors* $\tilde{u}$ *est continûment differentiable et strictement convexe sur* $(y_0, +\infty)$, u *est continûment différentiable sur* $(0, +\infty)$ *et strictement convexe sur* $(0, x_0)$. *De plus* u *et* v *sont conjuguées,*

$$\begin{cases} \tilde{u}(y) = \sup\limits_{x>0} \left[u(x) - xy\right], & y > 0 \\ u(y) = \inf\limits_{y\geq 0} \left[\tilde{u}(x) + xy\right], & x > 0 \end{cases}$$

et satisfont

$$u'(0) = \lim_{x\downarrow 0} u'(x) = +\infty, \quad \tilde{u}'(+\infty) = \lim_{y\uparrow+\infty} \tilde{u}'(y) = 0.$$

(ii) *Si* $x < x_0$, *l'optimum* $X^{x,*} \in \mathcal{X}(x)$ *est une martingale uniformément intégrable sous la probabilité* $\mathbb{Q} : \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_T = Z_T$ *et est donné par*

$$X_T^{x,*} = I(u'(x)Z_T), \quad I = (U')^{-1} = -V'.$$

(iii) *Pour* $x < x_0$ *et* $y > y_0$, *nous avons les identités suivantes*

$$xu'(x) = \mathbb{E}(X_T^{x,*}U'(X_T^{x,*})), \quad y\tilde{u}'(y) = \mathbb{E}(Z_T V'(yZ_T)).$$

Comme ce résultat n'est qu'un cas particulier des résultats que nous établirons dans le cadre du marché incomplet, où $\mathcal{M}^e$ n'est plus réduit à une unique martingale équivalente, la preuve sera donnée uniquement dans le cas général.

3.3.3 Marché incomplet

Dans le paragraphe 3.1 de ce chapitre, nous avons établi sous certaines conditions et hypothèses portant sur la fonction d'utilité finale et la fonction valeur, l'existence et l'unicité de la richesse optimale au problème primal. Nous avons vu aussi dans la description de l'idée de la résolution par dualité que, s'il existe un couple (y^*, Z_T^*) optimal au problème dual (3.20), alors, nous pouvons donner une caractérisation explicite de la richesse optimale donnée par (3.21), d'où l' intérêt que nous portons à cette nouvelle méthode.

Dans la suite de ce paragraphe nous nous intéressons essentiellement à la résolution de ce nouveau problème (3.20), nous établirons en particulier les conditions suffisantes assurant l'existence d'un couple optimal (y^*, Z_T^*).

Problématique : La technique utilisée pour montrer l'existence d'une solution au problème (3.20) est identique à celle qu'on a utilisé pour montrer le même résultat pour le problème primal dans le paragraphe 3.1 et essentiellement développée par Kramkov et Schachermayer dans [60] et qui consiste à raisonner par des suites maximisantes $(Z_T^n)_{n\geq 0}$, sauf que, dans le cadre du nouveau problème, cette technique ne peut être appliquée directement car il n'existe pas de théorème de compacité sur l'ensemble $\mathcal{M}^e$ dans lequel nous optimisons.

En effet, puisque l'ensemble $\mathcal{M}^e$ est inclus dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, alors si nous considérons une suite de probabilités maximisantes $(Z_T^n)_{n\geq 0}$ par le théorème 3.7 de Kolmos nous pouvons trouver une combinaison convexe

$$\tilde{Z}_T^n \in Conv(Z_T^n, Z_T^{n+1}, ..), \quad \forall n \geq 0$$

qui converge presque sûrement vers une variable aléatoire Z_T^* dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$. Contrairement au raisonnement de la preuve du théorème 1, cette variable aléatoire n'est en général pas une probabilité $\mathcal{M}^e$. Fondamentalement ceci est dû au fait que l'espace des richesses n'est pas en dualité adéquate avec $L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, voir le paragraphe 5 de [60], pour des contre exemples.

L'idée est alors de remplacer l'ensemble sur lequel nous optimisons $\mathcal{M}^e$ par un nouvel ensemble $\mathcal{D}$ qui lui a les bonnes propriétés voulues, en particulier la propriété de fermeture.

Cet ensemble $\mathcal{D}$ est l'ensemble convexe, solide et fermé de $\mathcal{M}^e$ dans $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ c-à-d c'est le plus petit ensemble convexe solide et fermé dans $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ qui contient $\mathcal{M}^e$.

Définition 3.3. *Un ensemble E dans $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ est dit solide si : $0 \leq Y'_T \leq Y_T$ p.s et $Y_T \in E$ implique que $Y'_T \in E$.*

On remarquera que $\mathcal{D}$ est donné par :

$$\mathcal{D} = \left\{ Y \in L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}) : \quad \exists (Z^n)_{n\geq 0} \in \mathcal{M}^e, \quad Y \leq \lim_{n\to+\infty} Z^n \right\} \tag{3.36}$$

Donc pour tout $Y \in \mathcal{D}$, $\exists (Z^n)_{n\geq 0} \in \mathcal{M}^e$, $Y \leq \lim_{n\to+\infty} Z^n$, et pour tout $X \in \mathcal{C}(x)$ nous avons par le lemme de Fatou :

$$\mathbb{E}(XY) \leq \mathbb{E}(\lim_{n\to+\infty} Z^n X) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Z^n X) \leq x.$$

Il en découle l'implication suivante :

$$X_T \in \mathcal{C}(x) \Longrightarrow \mathbb{E}(XY) \leq x, \quad \forall Y \in \mathcal{D}.$$

La réciproque étant une simple conséquence du fait que $\mathcal{M}^e \subset \mathcal{D}$, nous obtenons alors la caractérisation duale suivante :

$$X_T \in \mathcal{C}(x) \Longleftrightarrow \mathbb{E}(XY) \leq x, \quad \forall Y \in \mathcal{D} \tag{3.37}$$

et nous définissons dans la suite le nouveau problème dual suivant :

$$\tilde{u}(y) \overset{def}{=} \inf_{Z_T \in \mathcal{D}} \mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_T)) \tag{3.38}$$

où nous avons gardé la même notation $\tilde{u}$ pour la fonction valeur car nous verrons dans la suite que l'infimum dans (3.18) et dans (3.38) est le même, donc les deux fonctions valeur à ces deux problèmes sont identiques.

Premier résultat principal

Un des principaux résultats de ce chapitre, démontré par Kramkov et Schachermayer [60], est le suivant :

Théorème 3.3. *Nous supposons que la fonction d'utilité U satisfait les hypothèses 3.2 et 3.3. Alors :*

(i) $u(x) < \infty$, pour tout $x > 0$ et il existe $y_0 > 0$ tel que $\tilde{u}(y) < \infty$, $\forall y > y_0$, de plus les relations de conjugaison suivantes sont vraies :

$$\begin{cases} u(x) = \inf_{y>0} \{\tilde{u}(y) + xy\}, & \forall x > 0 \\ \tilde{u}(y) = \sup_{x>0} \{\tilde{u}(x) - xy\}, & \forall x > 0. \end{cases}$$

La fonction valeur u est continûment différentiable dans $(0, \infty)$ et la fonction $\tilde{u}$ est strictement convexe dans le domaine $\{\tilde{u} < \infty\}$.

(ii) Les dérivées des fonctions valeurs u' et $\tilde{u}'$ sont telles que :
- $\lim_{x \to 0} u'(x) = \infty$
- $\lim_{y \to \infty} \tilde{u}_y(y) = 0.$

(iii) Si $\tilde{u}(y) < \infty$ pour un certain y, alors il existe un unique solution optimale Z^* (dépend de y) au problème (3.38).

Remarque 3.4. *L'existence d'une solution optimale Z^* au problème (3.38) dans (iii) est fortement liée à l'hypothèse $\tilde{u}(y) < \infty$. Dans le théorème 3.6 Kramkov et al. montrent que cette hypothèse est automatiquement vérifiée, dès que l'élasticité asymptotique de la fonction d'utilité U est strictement inférieure à 1.*

La démonstration de ce théorème sera établie sous forme de plusieurs lemmes et propositions. On utilisera dans les différentes étapes de cette preuve et à plusieurs reprises le résultat suivant :

Lemme 3.3. *Soit $(l_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives. Alors il existe une suite $g_n \in Conv(l_n, l_{n+1}, \ldots)$, $\forall n \geq 1$, qui converge presque sûrement vers une variable aléatoire $g \geq 0$.*

Voir par exemple le lemme 4.2 dans [60] pour des versions plus complètes de ce résultat.

Lemme 3.4. *Soit U une fonction d'utilité vérifiant les hypothèses 3.2 et 3.3. Alors pour tout $y > 0$ la famille $\left\{\tilde{U}^-(yY_T), Y_T \in \mathcal{D}\right\}$ est uniformément intégrable, et si $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variable dans $\mathcal{D}$ qui converge vers Y alors $Y \in \mathcal{D}$ et*

$$\liminf_{n \to +\infty} \mathbb{E}(U(yY_n)) \geq \mathbb{E}(\tilde{U}(yY)). \qquad (3.39)$$

Démonstration. : Supposons que $\tilde{U}(\infty) < 0$ sinon il n'y a rien à prouver, et considérons la fonction inverse de $-\tilde{U}$

$$\phi : (-\tilde{U}(0), -\tilde{u}(\infty)) \to (0, \infty).$$

Remarquons d'abord qu'on a :

$$\tilde{U} = \tilde{U}^+ - \tilde{U}^-, \quad \tilde{U}^+ = \tilde{U}\mathbb{1}_{\tilde{U}\geq 0}, \quad \tilde{U}^- = \tilde{U}\mathbb{1}_{\tilde{U}\leq 0}$$

donc

$$\begin{cases} \phi(-\tilde{U}(h)) = \phi(-\tilde{U}^+(h))\mathbb{1}_{\tilde{U}\geq 0} + \phi(-\tilde{U}^-(h))\mathbb{1}_{\tilde{U}\leq 0} \\ \phi(-\tilde{U}^-(h))\mathbb{1}_{\tilde{U}\leq 0} = \phi(-\tilde{U}(h)) - \phi(-\tilde{U}^+(h))\mathbb{1}_{\tilde{U}\geq 0}. \end{cases}$$

Comme $\tilde{U}^- = 0$ dans l'ensemble $\{\tilde{U} \geq 0\}$, on a alors $\phi(-\tilde{U}^-(h))\mathbb{1}_{\tilde{U}\geq 0} = 0$, et par suite,

$$\phi(-\tilde{U}^-(h)) = \phi(-\tilde{U}(h)) - \phi(-\tilde{U}^+(h))\mathbb{1}_{\tilde{U}\geq 0} + \phi(0)$$

Comme $-\tilde{U}$ est une fonction strictement croissante alors ϕ a la même propriété. En remarquant maintenant que $\tilde{U}^+ \leq \tilde{U}$ cela implique

$$\phi(-\tilde{U}^+)(h) \geq \phi(-\tilde{U})(h) \geq \phi(-\tilde{U})(0) = 0$$

et par conséquent

$$\phi(-\tilde{U}^-(h)) \leq \phi(-\tilde{U}(h)) + \phi(0) = h + \phi(0).$$

En remplaçant h par yh et en prenant l'espérance on obtient :

$$\mathbb{E}\Big(\phi(-\tilde{U}^-(yh))\Big) \leq \mathbb{E}(yh) + \phi(0) \leq y + \phi(0), \quad \forall h \in \mathcal{D}.$$

Rappelons ensuite que $I = -\tilde{U}' = (U')^{-1}$, et donc en appliquant le théorème de l'Hospital, on déduit

$$\lim_{x\to -\tilde{U}(\infty)} \frac{\phi}{x} = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{-\tilde{U}(y)} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{I(y)} = \infty.$$

On conclut avec le théorème 3.10 de La Vallée-Poussin.
Soit, maintenant, une suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{D}$ qui converge presque sûrement vers une variable Y. D'après ce qui précède la suite $(\tilde{U}^-(yY_n))_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable, par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\tilde{U}^-(yY_n)) = \mathbb{E}(\tilde{U}^-(yY)) \tag{3.40}$$

et par le lemme de Fatou, on a

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(\tilde{U}^+(yY_n)) \geq \mathbb{E}(\tilde{U}^+(yY)). \tag{3.41}$$

(3.40) et (3.41) impliquent (3.39). Finalement on note que Y est un élément de $\mathcal{D}$ car $\mathcal{D}$ est un ensemble fermé pour la convergence en probabilité, ce qui achève la démonstration du lemme. □

Le résultat suivant montre qu'on a bien l'existence et l'unicité de la solution au problème dual (3.38), si la fonction d'utilité U satisfait les hypothèses 3.2 et 3.3.

Proposition 3.3. *Supposons que la fonction d'utilité U satisfait les hypothèses 3.2, 3.3 et $\tilde{u} < +\infty$. Alors la solution optimale Z^* du problème (3.38) existe et est unique. De plus $\tilde{u}$ est strictement convexe sur le domaine $\{\tilde{u} < \infty\}$.*

Démonstration. Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathcal{D}$ tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_n)) = \tilde{u}(y)$$

Encore une fois, d'aprés le lemme (3.4), il existe une suite notée $\tilde{Z} \in Conv(Z_n, Z_{n+1}, \ldots)$ qui converge presque sûrement vers une variable $Z^* \in \mathcal{D}$.
Par convexité de la fonction $\tilde{U}$ on déduit que :

$$\mathbb{E}(\tilde{U}(y\tilde{Z}_n)) \leq \sup_{m\geq n} \mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_n))$$

et par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(\tilde{U}(y\tilde{Z}_n)) = \tilde{u}(y)$$

donc, par le lemme de Fatou, on obtient

$$\mathbb{E}(\tilde{U}(yZ^*)) \leq \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(\tilde{U}(y\tilde{Z}_n)) = \tilde{u}(y)$$

d'où l'existence d'une solution. En ce qui concerne l'unicité de cet optimum Z^*, elle est obtenue comme une simple conséquence de la stricte convexité de $\tilde{U}$,

$$\tilde{u}(\frac{y_1+y_2}{2}) \leq \mathbb{E}(\tilde{U}(\frac{y_1Z_1^* + y_2Z_2^*}{2})) < \frac{\tilde{u}(y_1)+\tilde{u}(y_2)}{2}.$$

Ensuite la stricte convexité de la fonction valeur est encore obtenue comme simple conséquence de celle de la fonction d'utilité.

□

Proposition 3.4. *(Relation de conjugaison)*
Soit U une fonction d'utilité vérifiant les hypothèses 3.2, 3.3 et $\tilde{u} < +\infty$. Alors nous avons les relations de conjuguaison suivantes, entre la fonction valeur du problème primal et celle du problème dual, suivantes :

$$u(x) = \inf_{y>0} \{\tilde{u}(y) + xy\}, \quad \forall x > 0 \tag{3.42}$$

$$\tilde{u}(y) = \sup_{x>0} \{\tilde{u}(x) - xy\}, \quad \forall x > 0. \tag{3.43}$$

Démonstration. : Soient $x > 0$, $y > 0$, $X_T \in \mathcal{C}(x)$ et enfin $Z_T \in \mathcal{M}^e$, alors par (3.28) et par définition du conjugué $\tilde{U}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U(X_T)) &\leq \mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_T) + yZ_T X_T) \\ &\leq \mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_T)) + yx \end{aligned}$$

donc en passant le terme xy à gauche et en prenant le supremum sur tout les $X \in \mathcal{C}(x)$ et le supremum sur tous les $Z \in \mathcal{D}$, on obtient

$$u(x) - xy = \sup_{X_T \in \mathcal{C}(x)} \mathbb{E}(U(X_T)) - xy \leq \tilde{u}(y) = \sup_{Z_T \in \mathcal{D}} \mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_T))$$

et par suite

$$\sup_{x>0} \{u(x) - xy\} \leq \tilde{u}(y), \quad \forall y > 0.$$

On fixe ensuite $y > 0$ et on suppose que la quantité $\sup_{x>0} \{u(x) - xy\} < +\infty$. Pour tout $n > 0$, on définit l'ensemble

$$\mathcal{B}_n = \left\{g \in L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}) : g \leq n\right\}.$$

Par définition, l'ensemble $\mathcal{D}$ est un convexe fermé de $L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ et on peut donc appliquer le théorème 3.12, pour établir l'égalité suivante, à n fixé :

$$\sup_{X_T \in \mathcal{B}_n} \inf_{Y_T \in \mathcal{D}} \{\mathbb{E}(U(X_T) - yX_T Y_T)\} = \inf_{Y_T \in \mathcal{D}} \sup_{X_T \in \mathcal{B}_n} \{\mathbb{E}(U(X_T) - yX_T Y_T)\}. \tag{3.44}$$

D'après la relation de dualité entre $\mathcal{C}(x)$ et $\mathcal{D}$, il est facile d'écrire que $X_T \in \mathcal{C}(x)$ si et seulement si

$$\sup_{Y_T \in \mathcal{D}} \mathbb{E}(X_T Y_T) \leq x$$

d'où, en passant à la limite quand n tend vers l'infini dans (3.44),

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sup_{X_T\in\mathcal{B}_n}\inf_{Y_T\in\mathcal{D}}\{\mathbb{E}(U(X_T)-yX_TY_T)\} &= \sup_{x>0}\sup_{X_T\in\mathcal{C}(x)}\{\mathbb{E}(U(X_T))-xy\}\\ &= \sup_{x>0}\{u(x)-xy\}.\end{aligned}$$

Ceci d'une part, mais d'autre part le terme à droite de cette identité s'écrit,

$$\inf_{Y_T\in\mathcal{D}}\sup_{X_T\in\mathcal{B}_n}\{\mathbb{E}(U(X_T)-yX_TY_T)\}=\inf_{Y_T\in\mathcal{D}}\left\{\mathbb{E}(\tilde{U}^n(yY_T))\right\}$$

où $\tilde{U}^n$ est la fonction définie par :

$$\tilde{U}^n(y)\overset{def}{=}\sup_{0<x\leq n}\{U(x)-xy\}.$$

On lui associe la fonction valeur $\tilde{u}^n$ donnée par

$$\tilde{u}^n(y)=\inf_{Y_T\in\mathcal{D}}\mathbb{E}(\tilde{U}^n(yY_T)) \tag{3.45}$$

et on remarquera qu'il suffit de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\tilde{u}^n(y)=\tilde{u}(y)$$

pour prouver (3.43), de telle sorte que d'après l'identité (3.45) on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\tilde{u}^n(y)=\sup_{x>0}\{u(x)-xy\}$$

Remarquons d'abord que par définition on a :

$$\tilde{u}^n\leq\tilde{u},\quad\forall n\geq 1. \tag{3.46}$$

Soit maintenant $(Y_n)_{n\geq1}$ une suite dans $\mathcal{D}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(\tilde{U}^n(yY_n))=\lim_{n\to+\infty}\tilde{u}^n(y).$$

D'après le lemme (3.3), il existe une suite $Z_n\in Conv(Y_n,Y_{n+1},...)$, qui converge presque sûrement vers une variable aléatoire Y^*. Puisque l'ensemble $\mathcal{D}$ est fermé pour la convergence en mesure ceci implique que cette variable est Y^* est dans $\mathcal{D}$.

Par la suite, remarquons que $\tilde{u}^n(y)=\tilde{u}(y)$ si et seulement si les supremums dans (3.38) et (3.45) sont identiques c-à-d $0<I(y)\leq n$ ce qui est équivalent

à $y \geq U'(n)$ ($\to 0$ quand n tend vers l'infini). On en déduit d'une part par le lemme (3.4) que la suite $(\tilde{U}^{n,-}(yZ_n))_{n\geq 1}$ est uniformément integrable ce qui implique

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(\tilde{U}^{n,-}(yZ_n)) = \mathbb{E}(\tilde{U}^{-}(yY^*)) \tag{3.47}$$

et d'autre part avec le lemme de Fatou

$$\liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}(\tilde{U}^{n,+}(yZ_n)) \geq \mathbb{E}(\tilde{U}^{+}(yY^*)). \tag{3.48}$$

D'après la convexité de $\tilde{U}^n$, nous obtenons alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \tilde{u}^n(y) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(\tilde{U}^n(yZ_n)) &\geq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}(\tilde{U}^n(yZ_n)) \\ &\geq \mathbb{E}(\tilde{U}(yY^*)) \geq \tilde{u}(y). \end{aligned} \tag{3.49}$$

En combinant cette inégalité avec (3.46) on prouve que

$$\lim_{n\to+\infty} \tilde{u}^n(y) = \tilde{u}(y)$$

et donc (3.43). □

Lemme 3.5. *Sous les hypothèses de la proposition 3.4 précédente, nous avons :*
(i) $\lim_{x\to 0} u'(x) = \infty$
(ii) $\lim_{y\to\infty} -\tilde{u}_y(y) = 0$.

Démonstration. Par la relation de conjugaison (3.43) établie dans la proposition 3.4, on sait écrire, en notant par $i = (u')^{-1}$, que

$$\tilde{u}(y) = u(i(y)) - yi(i)$$

en dérivant par rapport à y,

$$-\tilde{u}'(y) = i(y).$$

Il est facile de voir que cette identité est équivalente à

$$\begin{aligned} -\tilde{u}'(y) &= \inf\{x : \quad x \geq (u')^{-1}(y)\} \\ &= \inf\{x : \quad u'(x) \leq y\}, \quad y > 0. \end{aligned}$$

De même et toujours en utilisant les résultats de la proposition 3.4, on montre que

$$u'(x) = \inf\{y : \quad \tilde{u}'(y) \leq x\}, \quad \forall x > 0$$

ce qui montre bien que les assertions (i) et (ii) du lemme sont équivalentes. Il suffit alors de prouver (ii) pour conclure.
La fonction $-\tilde{u}$ étant concave croissante d'après la proposition 3.3. Par conséquent sa dérivée au voisinage de l'infini ne peut être que finie,

$$-\tilde{u}'(\infty) = \lim_{y \to +\infty} \tilde{u}'(y) < +\infty.$$

Ceci d'une part mais d'autre part, $-\tilde{U}$ est croissante telle que

$$-\tilde{U}(y) = I(y) \to_{y \to \infty} 0$$

donc $\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists C(\varepsilon) \in \mathbb{R}$:

$$-\tilde{U}(y) \leq C(\varepsilon) + \varepsilon y, \quad \forall y > 0.$$

On déduit alors en appliquant le théorème de l'Hospital :

$$\begin{aligned} 0 \leq -\tilde{u}(\infty) &= \lim_{y \to +\infty} \frac{-\tilde{u}(y)}{y} = \lim_{y \to +\infty} \sup_{Y \in \mathcal{D}} \mathbb{E}(\frac{-\tilde{U}(yY)}{y}) \\ &\leq \lim_{y \to +\infty} \sup_{Y \in \mathcal{D}} \mathbb{E}(\frac{C(\varepsilon) + \varepsilon y Y}{y}). \end{aligned}$$

Par la suite, puisque la variable $\mathbb{1}$ (qui vaut 1 par tout) est dans $\mathcal{C}(1)$, et en utilisant la caractérisation duale

$$X_T \in \mathcal{C}(x) \Longleftrightarrow \mathbb{E}(XY) \leq x, \;\; \forall Y \in \mathcal{D}$$

on déduit

$$\lim_{y \to +\infty} \sup_{Y \in \mathcal{D}} \mathbb{E}(\frac{C(\varepsilon) + \varepsilon y Y}{y}) \leq \mathbb{E}(\frac{C(\varepsilon)}{y}) + \varepsilon$$

et finalement

$$0 \leq -\tilde{u}(\infty) \leq \lim_{y \to +\infty} \sup_{Y \in \mathcal{D}} \mathbb{E}(\frac{C(\varepsilon)}{y}) + \varepsilon = \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

Par conséquent $\tilde{u}(\infty) = 0$. □

Lemme 3.6. *Soit U une fonction d'utilité vérifiant les hypothèses* (1) *et* (2) *et soit $(y_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathbb{R}_+$ convergeant vers $y > 0$ telle que $\tilde{u}(y_n) < \infty$ et $\tilde{u}(y) < \infty$. Alors $Z^*(y_n)$ converge en probabilité vers $Z^*(y)$ et $\tilde{U}(y_n Z^*(y_n))$ converge dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ vers $\tilde{U}(yZ^*(y))$.*

Démonstration. La preuve est construite sur un raisonnement par l'absurde. En effet, on suppose que $Z^*(y_n)$ ne converge pas en probabilité vers $Z^*(y)$. Alors, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|Z^*(y_n) - Z^*(y)| > \varepsilon\right) > \varepsilon. \tag{3.50}$$

Par la suite, comme $C(1)$ contient la fonction constante $\mathbb{1}$ valant 1 partout, on obtient alors par caractérisation duale :

$$\mathbb{E}\left(Z^*(y_n)\mathbb{1}\right) = \mathbb{E}\left(Z^*(y_n)\right) \leq y_n$$

et $\mathbb{E}\left(Z^*(y)\right) \leq y$. D'autre part, on remarque d'après 3.50 que pour tout $a \geq 1$, on a

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|Z^*(y_n) - Z^*(y)| > \frac{\varepsilon}{a}\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|Z^*(y_n) - Z^*(y)| > \varepsilon\right) > \varepsilon \geq \frac{\varepsilon}{a}.$$

Donc, on peut choisir ε aussi petit qu'on voudra, ainsi, on peut supposer que

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|Z^*(y_n) + Z^*(y)| \geq \frac{1}{\varepsilon}; \quad |Z^*(y_n) - Z^*(y)| > \varepsilon\right) > \varepsilon. \tag{3.51}$$

On définit alors, pour $n \geq 1$, la suite

$$Z_n = \frac{1}{2}\left(Z^*(y_n) + Z^*(y)\right).$$

Par connexité de la fonction $\tilde{u}$, on a :

$$\tilde{U}(Z_n) \geq \frac{1}{2}\left(\tilde{U}(Z^*(y_n)) + \tilde{U}(Z^*(y))\right). \tag{3.52}$$

Mais, comme la fonction $\tilde{U}$ est strictement convexe et par le fait qu'on a supposé que $Z^*(y_n)$ ne converge pas en probabilité vers $Z^*(y)$, c-à-d. que l'inégalité (3.51) est satisfaite, on peut alors en déduire qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\tilde{U}(Z_n)\right) \leq \frac{1}{2}\left(\tilde{U}(Z^*(y_n)) + \tilde{U}(Z^*(y)) - \delta\right) > \delta.$$

L'étape suivante est l'étude du terme $\mathbb{E}\left(\tilde{U}(Z_n)\right)$, qu'on peut réécrire sous la forme suivante :

$$\mathbb{E}\left(\tilde{U}(Z_n)\right) = \mathbb{E}\left(\tilde{U}(Z_n)\mathbb{1}_{\{\tilde{U}(Z_n)\leq\frac{1}{2}\left(\tilde{U}(Z^*(y_n))+\tilde{U}(Z^*(y))\right)-\delta\}}\right) + \mathbb{E}\left(\tilde{U}(Z_n)\mathbb{1}_{I_n^c}\right), \tag{3.53}$$

où on désigne par I_n^c l'ensemble complémentaire de

$$I_n = \{\tilde{U}(Z_n) \leq \frac{1}{2}\left(\tilde{U}(Z^*(y_n)) + \tilde{U}(Z^*(y))\right) - \delta\}.$$

Or on peut décomposer le premier terme comme suit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\tilde{U}(Z_n)\mathbb{1}_{I_n}\right) &\leq \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{I_n}\frac{1}{2}\left(\tilde{U}(Z^*(y_n)) + \tilde{U}(Z^*(y))\right) - \eta\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}(\tilde{U}(Z^*(y_n))\mathbb{1}_{I_n}) + \mathbb{E}(\tilde{U}(Z^*(y))\mathbb{1}_{I_n})\right) - \eta\mathbb{P}(I_n) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}(\tilde{U}(Z^*(y_n))\mathbb{1}_{I_n}) + \mathbb{E}(\tilde{U}(Z^*(y))\mathbb{1}_{I_n})\right) - \eta^2. \qquad (3.54)
\end{aligned}$$

Par suite, d'après (3.52), on a

$$\mathbb{E}\left(\tilde{U}(Z_n)\mathbb{1}_{I_n^c}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}(\tilde{U}(Z^*(y_n))\mathbb{1}_{I_n^c}) + \mathbb{E}(\tilde{U}(Z^*(y))\mathbb{1}_{I_n^c})\right). \tag{3.55}$$

Donc, en combinant les équations (3.54) et (3.55), on déduit à partir de l'équation (3.53) ce qui suit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\tilde{U}(Z_n)\right) &\leq \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}(\tilde{U}(Z^*(y_n))) + \mathbb{E}(\tilde{U}(Z^*(y)))\right) - \eta^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\tilde{u}(y_n) + \tilde{u}(y)\right) - \eta^2.
\end{aligned}$$

La fonction $\tilde{u}$ étant convexe par définition, continue sur l'ensemble $\{\tilde{u} < \infty\}$, nous obtenons alors par passage à la limite supérieure

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}(\tilde{U}(Z^*(y_n))) \leq \tilde{u}(y) - \eta^2.$$

En utilisant le lemme 3.3, on peut construire une suite $K^n \in Conv(Z_n, Z_{n+1}, \ldots)$, $n \geq 0$ qui converge presque sûrement vers une variable K. Rappelons maintenant que $Z^*(y_n) \in \mathcal{D}(y_n)$ et que par définition de Z_n :

$$Z_n = \frac{1}{2}(Z^*(y_n) + Z^*(y))$$

et par définition de $\mathcal{D}(a) = a\mathcal{D}$, on en déduit alors que $Z_n \in \mathcal{D}(\frac{1}{2}(y_n + y)) = \frac{1}{2}(y_n + y)\mathcal{D}$. En particulier, il existe une suite $(y_n^K) \in Conv(y_n, y_{n+1}, \ldots)$ qui converge à son tour vers y et tel que $K_n \in \mathcal{D}(y_n^K)$, c-à-d. pour tout $X \in \mathcal{C}(x))$, on a

$$\mathbb{E}(K^n X) \leq x y_n^K.$$

Donc, en passant à la limite inférieure et par le lemme de Fatou, nous obtenons que, pour tout $X \in \mathcal{C}(x)$,

$$\mathbb{E}(KX) \leq \lim inf_{n\to\infty} \mathbb{E}(K^n X) \leq xy.$$

Ceci implique que $K \in \mathcal{D}(y)$ et par convexité de $\tilde{U}$ ajoutée au lemme de Fatou, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\tilde{U}(K)) = \mathbb{E}\left(\liminf_{n\to\infty} \tilde{K^n}\right) &\geq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(\tilde{U}(K^n)) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(\tilde{U}(Z_)) \leq v(y) - \eta^2\end{aligned}$$

ce qui est contradictoire à la définition de $\tilde{u}(y)$. On conclut alors que $Z^*(y_n)$ converge en probabilité vers $Z^*(y)$. D'après le lemme 3.4, la suite $\left(\tilde{U}(-Z^*(y_n))\right)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable et par conséquence $\tilde{U}(Z^*(y_n))$ converge vers $\tilde{U}(Z^*(y))$ dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ si

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\tilde{U}(Z^*(y_n))) = \tilde{U}(Z^*(y))$$

ce qui est une simple conséquence de la continuité de la fonction valeur $\tilde{u}$ sur l'ensemble $\{\tilde{u} < \infty\}$.
Ceci achève la preuve.

□

3.3.4 Élasticité asymptotique

Dans ce paragraphe nous introduisons la quantité dite Élasticité Asymptotique d'une fonction d'utilité définie par

$$AE(U) \overset{def}{=} \limsup_{x\to+\infty} \frac{xU'(x)}{U} \tag{3.56}$$

Cette quantité a été introduite pour la première fois par Kramkov et Schachermayer dans leur article [60]. Elle jouera un rôle très important dans toute la suite notamment dans la preuve d'un des deux résultats principaux de ce chapitre (théorème 3.6).

Théorème 3.4. *Soit U une fonction d'utilité vérifiant l'hypothèse 3.3 et $U(\infty) > 0$. Alors l'infimum des réels $\gamma > 0$ pour lesquels les assertions suivantes sont vraies est l'élasticité asymptotique de la fonction U.*

(i) $\exists x_0 > 0$ *et* $\gamma \in]0,1[$ *telle que :*

$$xU'(x) < \gamma U(x), \quad \forall x \geq x_0$$

(ii) $\exists x_0 > 0$ *et* $\gamma \in]0,1[$ *telle que :*

$$U(\lambda x) < \lambda^{\gamma} U(x) \quad \forall x \geq x_0, \qquad \forall \lambda > 1$$

(iii) $\exists y_0 > 0$ *et* $\gamma \in]0,1[$ *telle que :*

$$\tilde{U}(\lambda y) < \lambda^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}} \tilde{U}(y), \quad \forall 0 < \lambda < 1, \quad \forall 0 < y \leq y_0$$

(iv) $\exists y_0 > 0$ *et* $\gamma \in]0,1[$ *telle que :*

$$-y\tilde{U}'(y) < \frac{\gamma}{1-\gamma} \tilde{U}(y), \quad \forall 0 < y \leq y_0$$

De manière générale, une caractérisation de l'élasticité asymptotique est donnée par le résultat suivant

Théorème 3.5. *Soit U une fonction d'utilité vérifiant (3.8) et ($U(\infty) > 0$). Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- $AE(U) < 1$
- *Il existe* $x_0 > 0$, $\lambda > 1$ *et* $c < 1$ *telle que :*

$$U(\lambda x) < c\lambda U(x), \quad \forall x > x_0.$$

- *Il existe* $x_0 > 0$ *telle que pour tout* $\lambda > 1$ *il existe* $c < 1$ *:*

$$U(\lambda x) < c\lambda U(x), \quad \forall x > x_0.$$

- *Il existe* $\exists y_0 > 0$, $\zeta < 1$ *et* $\alpha < +\infty$ *telle que :*

$$\tilde{U}(\zeta y) < \alpha \tilde{U}(y), \quad \forall y < y_0$$

– *Il existe $y_0 > 0$ telle que pour tout $0 < \zeta < 1$ il existe $\alpha < +\infty$:*

$$-y\tilde{U}'(y) < \frac{\gamma}{1-\gamma}\tilde{U}(y), \quad \forall y < y_0$$

Lemme 3.7. *Soient u et v deux fonctions concaves définies sur $\mathbb{R}_+$, telles que $u(\infty) > \infty$ et $v(\infty) > \infty$ et qu'il existe $x_0 > 0$ et une constante $C > 0$ pour lesquels nous avons :*

$$u(x) - C \leq v(x) \leq u(x) + C, \qquad x \geq x_0.$$

Alors,

$$AE(u) = \limsup_{x\to\infty} \frac{xu'(x)}{u(x)} = \limsup_{x\to\infty} \frac{xv'(x)}{v(x)} = AE(v).$$

Second résultat principal

Dans toute la suite, nous imposons la condition dite d'élasticité asymptotique raisonnable, introduite pour la première fois par Kramkov et Schachermayer [60] et qui consiste à supposer que l'élasticité asymptotique est strictement inférieure à 1, c-à-d

$$AE(U) = \limsup_{x\to+\infty} \frac{xU'(x)}{U} < 1. \tag{3.57}$$

Notons que cette hypothèse n'est en général pas satisfaite pour toutes les fonctions d'utilité, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 3.1.

1. $U(x) = ln(x) \Longrightarrow \quad AE(U) = 0.$
2. $U(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad \gamma \in]0,1[\Longrightarrow \quad AE(U) = 1-\gamma.$
3. $U(x) = \frac{x}{ln(x)} \Longrightarrow AE(U) = 1.$

Théorème 3.6. *En plus des hypothèses du théorème 3.3, on suppose que l'élasticité asymptotique de U est strictement inférieure à 1, c-à-d*

$$AE(U) = \limsup_{x\to+\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < 1.$$

Alors en plus des assertions du théorème 3.3 on a :

(i) $\tilde{u}(y) < \infty$, *pour tous les* $y > 0$. *Les deux fonctions valeurs* u *et* $\tilde{u}$ *sont continûment différentiables sur* $(0, \infty)$.

(ii) Les fonctions u' *et* $-\tilde{u}'$ *sont strictement décroissantes et*
- $\lim_{x \to \infty} u'(x) = 0$
- $\lim_{y \to 0} -\tilde{u}_y(y) = \infty$.

(iii) l'élasticité asymptotique, de la fonction valeur u *du problème (3.7),* $AE(u)$ *est inférieure ou égale à celle de la fonction* U,

$$AE(u) \leq AE(U) < 1.$$

(iv) La solution optimale au problème primal (3.7) X_T^* *existe et elle est unique et dans* $\mathcal{C}(x)$. *Si* $Z^* \in \mathcal{D}$ *est la solution du problème dual (3.38), avec* $y = u'(x)$, *nous avons les relations de dualité*

$$X_T^* = I(yZ^*), \quad Z^* = \frac{U'(X_T^*)}{u'(x)} \tag{3.58}$$

$$\mathbb{E}(X_T^* Z^*) = x. \tag{3.59}$$

(v) On a les relations suivantes entre u', $\tilde{u}'$ *et* $X_T^{x,*}$, Z^*,

$$u'(x) = \mathbb{E}(\frac{X_T^{x,*} U'(X_T^{x,*})}{x})$$

$$\tilde{u}'(y) = \mathbb{E}(\frac{yZ^* \tilde{U}(yZ^*)}{y}).$$

Dans le travail [60] paragraphe 5, Kramkov et Schachermayer fournissent des contre-exemples dans lesquels, si l'élasticité asymptotique est égale à 1, l'infimum dans le problème dual (3.38) n'est pas atteint.
Une deuxième fois, la démonstration de ce théorème nécessite plusieurs étapes sous forme de différents lemmes et propositions.

Lemme 3.8. *On se place sous les hypothèses du théorème 3.6, et on considère une suite positive* $(y_n)_{n \geq 1}$ *qui converge vers* $y > 0$. *Alors la suite* $y_n Z^*(y_n) \tilde{U}'(y_n Z^*(y_n))$ *converge vers* $yZ^*(y) \tilde{U}'(yZ^*(y))$ *dans* $L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$.

Démonstration. D'après le lemme 3.6, la suite $y_n Z^*(y_n)$ converge en probabilité vers $yZ^*(y)$, par continuité de $\tilde{U}'$ on en conclut que $y_n Z^*(y_n) \tilde{U}'(y_n Z^*(y_n))$ converge vers $yZ^*(y) \tilde{U}'(yZ^*(y))$ en probabilité.

Donc, pour prouver ce lemme, il suffit de montrer l'uniforme intégrabilité de la suite $y_n Z^*(y_n)\tilde{U}'(y_n Z^*(y_n))$. Cette preuve est basée essentiellement sur l'hypothèse,

$$AE(U) = \limsup_{x\to+\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < 1.$$

En effet, d'aprés le théorème 3.4 (iv), ceci implique l'existence d'un réel $y_0 > 0$ et d'une constante $C < \infty$ tel que :

$$-\tilde{U}'(y) < C\frac{\tilde{U}(y)}{y}, \quad \text{pour} \quad 0 < y < y_0$$

ce qui implique, en remplaçant y par $y_n Z^*(y_n)$,

$$-\tilde{U}'(y_n Z^*(y_n))y_n Z^*(y_n) < C\tilde{U}(y), \quad \text{pour} \quad 0 < y_n Z^*(y_n) < y_0$$

et donc la suite $(\tilde{U}'(y_n Z^*(y_n))y_n Z^*(y_n)\mathbb{1}_{\{y_n Z^*(y_n)<y_0\}})_{n\geq 1}$ est dominée en valeur absolue par la suite $C(|\tilde{U}(y_n Z^*(y_n))|\mathbb{1}_{\{y_n Z^*(y_n)<y_0\}})_{n\geq 1}$ qui par le lemme 3.6 est uniformément intégrable.

En ce qui concerne la suite $(\tilde{U}'(y_n Z^*(y_n))y_n Z^*(y_n)\mathbb{1}_{\{y_n Z^*(y_n)\geq y_0\}})_{n\geq 1}$, l'uniforme integrabilité est obtenue, comme dans la preuve du lemme 3.4 en remarquant que $(y_n Z^*(y_n))_{n\geq 1}$ est bornée dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ et que $\lim_{y\to\infty} \tilde{U}'(y) = 0$. □

Remarque 3.5. *Si en plus des hypothèses du lemme précédent on considère une deuxième suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ qui converge vers 1, alors on peut conclure de la même manière que la suite $(\tilde{U}'(\gamma_n y_n Z^*(y_n))y_n Z^*(y_n))_{n\geq 1}$ converge vers $\tilde{U}'(yZ^*)yZ^*$ dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$. Il suffit de remarquer, toujours par le lemme 3.4 que, pour $\gamma \in]0,1[$ fixé on peut trouver une constante $C' < \infty$ et un $y_0 > 0$ tel que :*

$$-\tilde{U}'(\gamma y) < C'\frac{\tilde{U}(y)}{y}, \quad \textit{pour} \quad 0 < y < y_0$$

On intègre ceci dans la preuve ci-dessus et on obtient le résultat voulu.

Lemme 3.9. *Sous les hypothèses du théorème 3.6, la fonction valeur du problème duale $\tilde{u}$ est finie et continûment différentiable dans $(0,+\infty)$, sa dérivée $\tilde{u}'$ est strictement croissante et satisfait :*

$$-y\tilde{u}'(y) = \mathbb{E}(yZ^*(y)I(yZ^*(y))). \tag{3.60}$$

Démonstration. Commençons par remarquer que si la limite $\lim_{\gamma\to 1}\frac{\tilde{u}(y)-\tilde{u}(\gamma y)}{\gamma-1}$ existe bien, alors elle vaut $-y\tilde{u}'(y)$. C'est pour cette raison qu'on va s'intéresser dans la suite aux deux quantités

$$\limsup_{\gamma\searrow 1}\frac{\tilde{u}(y)-\tilde{u}(\gamma y)}{\gamma-1} \text{ et } \liminf_{\gamma\searrow 1}\frac{\tilde{u}(y)-\tilde{u}(\gamma y)}{\gamma-1}.$$

L'idée est alors de montrer qu'on a les deux inégalités suivantes :

$$\limsup_{\gamma\searrow 1}\frac{\tilde{u}(y)-\tilde{u}(\gamma y)}{\gamma-1} \leq \mathbb{E}(yZ^*(y)I(yZ^*(y)))$$

et

$$\liminf_{\gamma\searrow 1}\frac{\tilde{u}(y)-\tilde{u}(\gamma y)}{\gamma-1} \geq \mathbb{E}(yZ^*(y)I(yZ^*(y)))$$

car ceci nous permettra alors, en notant par $\tilde{u}'_r$ la dérivée à droite de $\tilde{u}$, de déduire que

$$-y\tilde{u}'_r(y) = \mathbb{E}(yZ^*(y)I(yZ^*(y))).$$

En utilisant le lemme 3.8, on conclut que la fonction $y \longmapsto \tilde{u}'_r$ est continue, donc par convexité de $\tilde{u}$ ceci implique que $\tilde{u}$ est continûment différentiable.
Dans l'intention d'établir ces deux dernières inégalités, on écrit :

$$\limsup_{\gamma\searrow 1}\frac{\tilde{u}(y)-\tilde{u}(\gamma y)}{\gamma-1} \leq \limsup_{\gamma\searrow 1}\frac{1}{\gamma-1}\mathbb{E}\left[\tilde{U}(yZ^*(\gamma y))-\tilde{U}(\gamma yZ^*(\gamma y))\right]$$

par suite, puisque $\tilde{U}$ est strictement croissante et $\gamma > 1$, nous avons alors

$$\begin{aligned}\limsup_{\gamma\searrow 1}\frac{\tilde{u}(y)-\tilde{u}(\gamma y)}{\gamma-1} &\leq \limsup_{\gamma\searrow 1}\frac{1}{\gamma-1}\mathbb{E}\left[\tilde{U}(yZ^*(\gamma y))-\tilde{U}(\gamma yZ^*(\gamma y))\right]\\ &\leq \limsup_{\gamma\searrow 1}\frac{1}{\gamma-1}\mathbb{E}\left[(\frac{1}{\gamma}-1)\gamma yZ^*(\gamma y)\tilde{U}'(yZ^*(\gamma y))\right]\\ &\leq \mathbb{E}(yZ^*(y)I(yZ^*(y))). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Par le même raisonnement on a,

$$\begin{aligned}\liminf_{\gamma\searrow 1}\frac{\tilde{u}(y)-\tilde{u}(\gamma y)}{\gamma-1} &\geq \liminf_{\gamma\searrow 1}\frac{1}{\gamma-1}\mathbb{E}\left[\tilde{U}(yZ^*(y))-\tilde{U}(\gamma yZ^*(y))\right]\\ &\geq \liminf_{\gamma\searrow 1}\frac{1}{\gamma-1}\mathbb{E}\left[(\gamma-1)yZ^*(y)\tilde{U}'(\gamma yZ^*(y))\right]\\ &\geq \mathbb{E}(yZ^*(y)I(yZ^*(y))). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Finalement on déduit que $\tilde{u}'$ est continue, et puisque $\tilde{u}$ est strictement convexe par le théorème 3.3 et $\tilde{u}$ est strictement croissante. De plus par le même théorème, u' est l'inverse de $-\tilde{u}$ ceci implique, d'après le lemme 3.9, que u' est continue strictement décroissante. □

Lemme 3.10. *(Caractérisation de la solution primale)*
On suppose, sous les mêmes hypothèses que le théorème 3.6, que x et y sont reliés par l'identité $x = -\tilde{u}'(y)$. Alors $X_T^{x,*} = I(yZ^*(y))$ est l'unique solution au problème primal (3.29).

Démonstration. Commençons par démontrer que cette variable $X_T^{x,*} = I(yZ^*(y))$ est bien dans l'espace $\mathcal{C}(x)$. D'après la caractérisation duale (3.37), il est suffisant de montrer que, pour tout $Z \in \mathcal{D}$, on a

$$\mathbb{E}(yZI(yZ^*(y))) \leq yx = -y\tilde{u}'(y) = \mathbb{E}(yZ^*(y)I(yZ^*(y))) \tag{3.63}$$

où la dernière égalité est due au précédent lemme.
Pour $Z \in \mathcal{D}$ et $\delta \in (0,1)$ nous définissons la nouvelle variable

$$Z_\delta = (1-\delta)Z^*(y) + \delta Z$$

ensuite, comme $\tilde{U}$ est croissante et $\tilde{U}' = I$ est décroissante, on déduit d'un coté,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_\delta)) - \mathbb{E}(y\tilde{U}(yZ^*(y))) = \mathbb{E}(\int_{yZ_\delta}^{yZ^*(y)} I(z)dz) \\ &\leq \mathbb{E}\left(I(yZ_\delta)y(Z_\delta - Z^*(y))\right) \end{aligned} \tag{3.64}$$

on déduit

$$\mathbb{E}\left(I(yZ_\delta)yZ^*(y)\right) \geq \mathbb{E}\left(I(yZ_\delta)yZ\right) \tag{3.65}$$

et encore une fois par la décroissance de I,

$$\mathbb{E}\left(I(y(1-\delta)Z^*(y))yZ^*(y)\right) \geq \mathbb{E}\left(I(yZ_\delta)yZ\right) \tag{3.66}$$

d'après la remarque 3.5,

$$\mathbb{E}\left(I(y(1-\delta)Z^*(y))yZ^*(y)\right) \leq \infty \tag{3.67}$$

donc on peut, par la suite, appliquer le théorème de convergence dominé pour le terme de gauche dans (3.66), et le lemme de Fatou pour le lemme de droite. On montre alors (3.63) c-à-d $X_T^{x,*} = I(yZ^*(y)) \in \mathcal{C}(x)$.
Prouvons maintenant l'optimalité de $I(yZ^*(y))$:
Pour tout $X \in \mathcal{C}(x)$ on a :

$$\mathbb{E}(XZ^*(y)) \leq x, \quad U(X) \leq \tilde{U}(yZ^*(y)) + XyZ^*(y)$$

il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U(X)) &\leq \tilde{u}(y) + xy = \mathbb{E}(\tilde{U}(yZ^*(y)) + yZ^*(y)I(yZ^*(y))) \\ &= \mathbb{E}(U(I(yZ^*(y)))) = \mathbb{E}(U(X_T^{x,*})) \end{aligned}$$

d'ou le résultat. En ce qui concerne l'unicité de cette solution, c'est une simple conséquence de la stricte concavité de U. □

Lemme 3.11. *Supposons que la fonction d'utilité U satisfait les hypothèses 3.2, 3.3 et*

$$AE(U) = \limsup_{x \to +\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < 1.$$

Alors l'élasticité asymptotique de la fonction valeur u est inférieure ou égale à celle de U, c-à-d :

$$AE(u) \leq AE(U) < 1.$$

Démonstration. Soit $\gamma > \limsup_{x\to+\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)}$. D'après le théorème 3.4 (iii), l'hypothèse $AE(U) < 1$ est équivalente à :

$$\exists x_0 > 0 : \;\; U(\lambda x) < \lambda^\gamma U(x) \;\; \forall x \geq x_0, \qquad \forall \lambda > 1 \tag{3.68}$$

donc si on montre

$$\exists x_1 > 0 : \;\; u(\lambda x) < \lambda^\gamma u(x) \;\; \forall x \geq x_1, \qquad \forall \lambda > 1 \tag{3.69}$$

alors, par le théorème 3.4, on déduit que

$$AE(u) \leq \gamma$$

et, en faisant tendre $\gamma \to AE(U)$, nous obtenons le résultat désiré. Donc il suffit de prouver (3.69) pour conclure.
Supposons d'abord que (3.68) est vraie pour tout $x > 0$ et pour tout $\lambda > 1$, alors ceci implique

$$u(\lambda x) = \mathbb{E}(U(X_T^{\lambda x})) \leq \mathbb{E}(\lambda^\gamma U(\frac{X_T^{\lambda x}}{\lambda})) \leq \lambda^\gamma u(x)$$

d'où le fait que (3.69) est vraie pour tout $x > 0$ et pour tout $\lambda > 1$.
Revenons maintenant à notre cadre où (3.68) n'est vraie que pour $x \geq x_0$. L'idée est de remplacer U par une deuxième fonction V pour laquelle (3.69) est vraie. Pour tout $x > 0$, cette fonction est définie par :

$$V(x) = \begin{cases} c_1 \frac{x^\gamma}{\gamma} & x \leq x_0 \\ c_2 + U(x) & x \geq x_0 \end{cases}$$

où les deux constantes c_1 et c_2 sont choisies telles qu'on la continuité de V et sa dérivé V_x en x_0 c-à-d

$$c_1 x_0^{\gamma-1} = U'(x_0) \quad \text{et} \quad c_1 \frac{x_0^\gamma}{\gamma} = c_2 + U(x_0).$$

Maintenant que la fonction V vérifie (3.68) pour tout $x > 0$, on sait, d'après ce qui précède, que la fonction valeur associée v satisfait, à son tour, (3.69) $\forall x > 0$. Par la suite il est facile de voir qu'il existe une constante K tel que

$$U(x) - K \leq V(x) \leq U(x + x_0) + K, \quad \forall x > 0$$

ce qui implique

$$u(x) - K \leq v(x) \leq u(x + x_0) + K$$

et en particulier il existe une nouvelle constante C et un $x_2 > 0$ tel que

$$u(x) - C \leq v(x) \leq u(x) + C$$

et on conclut alors par le lemme 3.7 que $AE(u) \leq AE(v) \leq \gamma$, ce qui achève la démonstration. □

Le résultat suivant prouve que si l'élasticité asymptotique d'une fonction d'utilité est inférieure strictement à 1 alors les hypothèses 3.3 et 3.4 sont satisfaites.

Lemme 3.12. *Supposons que l'élasticité asymptotique de la fonction U est inférieure strictement à* 1 *alors les hypothèses 3.3 et 3.4 sont satisfaites.*

Démonstration. Divisant par λx dans (ii) du théorème 3.4 il s'ensuit, pour tout γ vérifiant les assertions ci-dessus,

$$\frac{U(\lambda x)}{\lambda x} < \lambda^{\gamma-1}\frac{U(x)}{x} \quad \forall x \geq x_0, \qquad \forall \lambda > 1$$

ou encore de manière équivalente, en remplaçant λx par x' et x par x_0,

$$\frac{U(x')}{x'} < (x')^{\gamma-1}(x_0)^{-\gamma}U(x_0) \quad \forall x' \geq x_0$$

donc si l'élasticité asymptotique de U est strictement inférieure à 1, d'aprés ce dernier théorème il existe $\gamma < 1$ pour la quelle l'inégalité ci-dessus est encore vraie. On déduit alors en passant à la limite supérieure,

$$\limsup_{x' \mapsto +\infty} \frac{U(x')}{x'} \leq 0$$

ce qui prouve que l'hypothèse 3.4 est satisfaite.
De plus, en divisant par $xU(x)$ dans (i) du théorème 3.4 et en intégrant en x, il existe une constante c_1 tel que

$$\log(U(x)) < c_1 + \gamma \log(x), \forall x \geq x_0$$

ce qui est encore équivalent à

$$U(x) < c + c' x^{\gamma}, \forall x \geq x_0$$

Avec c et c' sont des constantes. D'où l'hypothèse 3.3. □

3.4 Appendice

Ce premier résultat bien connu a été prouvé par Komlos [58]

Théorème 3.7. *(Théorème de Komlos)*
Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires bornée dans* $L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$. *Alors il existe une sous-suite* $(Y_{n_k})_{k\geq 1}$ *et une variable aléatoire* Y *dans* $L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ *telle que la somme*

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Y_{n_i} \to Y \quad \textit{p.s. quand } k \to +\infty.$$

Un deuxième théorème très important qu'on a beaucoup utilisé dans les preuves des principaux résultats de ce chapitre est le théorème de compacité suivant :

Théorème 3.8. *Soit* $(Y_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires dans* $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$. *Alors il existe une deuxième suite* $\tilde{Y}_n \in Conv(Y_n, Y_{n+1}, \ldots)$ *qui converge presque sûrement vers une variable aléatoire* $\tilde{Y}$ *à valeurs dans* $[0, +\infty]$.

Le théorème qui suit prouve la fermeture de l'ensemble $\mathcal{C}(x)$ défini dans (3.27).

Théorème 3.9. *L'ensemble* C *est fermé pour la topologie de la convergence en mesure, c-à-d. si* $(X^n)_{n\geq 0}$ *est une suite de* $\mathcal{C}(x)$ *convergant p.s. vers* X^*, *alors* $X^* \in \mathcal{C}(x)$.

Ce théorème est très utile comme on l'a vu dans les démonstrations précédentes et de manière générale pour prouver des résultats d'existence dans les problèmes d'optimisation en finance. Il a été prouvé par Schachermayer (voir aussi l'appendice Delbaen et Schachermayer [17].

Théorème 3.10. *(Théorème de La Vallée-Poussin)*
Soit $(Y_n)_{n\in I}$ *une suite de variables aléatoires. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes,*

(a) $(Y_n)_{n\in I}$ *est uniformement intégrable.*

(b) *Il existe une fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}_+$, *positive,* $\lim_{x\to=\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ *et telle que*

$$\sup_{n\in I} \mathbb{E}(f(|Y_n|)) < +\infty$$

Un dernier résultat que nous avons utilisé dans la preuve du théorème 3.1,

Théorème 3.11. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires positives bornées dans L^1, convergent p.s. vers une variable aléatoire X^* telle que $\lim_{n\mapsto+\infty}\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X^*)+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Alors il existe une sous suite $(X_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ et une suite d'ensembles $(B_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ deux à deux disjoints de $(\Omega,\mathcal{F})$ telles que*

$$\mathbb{E}(X_{\phi(n)}\mathbb{1}_{B_{\phi(n)}}) \geq \frac{\varepsilon}{2}, n \geq 0$$

Théorème 3.12. *(Théorème min-max) Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel normé et compact pour la topologie faible $\sigma(\mathcal{E},\mathcal{E}^*)$. Soient $\mathcal{X}$ un sous-ensemble convexe de $\mathbb{E}$ et $\mathcal{Y}$ un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel. Considérons une fonction $f:\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\to\mathbb{R}$ satisfaisant :*

(1) *$x\to f(x,y)$ est continue et concave sur $\mathcal{X}$ pour tout $y\in\mathcal{Y}$.*

(2) *$y\to f(x,y)$ est convexe sur $\mathcal{Y}$ pour tout $x\in\mathcal{X}$*

Alors on a :

$$\sup_{x\in\mathcal{X}}\inf_{y\in\mathcal{Y}} f(x,y) = \inf_{y\in\mathcal{Y}}\sup_{x\in\mathcal{X}} f(x,y). \tag{3.70}$$

Voir [104] pour la démonstration de ce théorème.