

Méthode des lignes de courant. Application à un problème de conservation

2.1 Introduction

2.1.1 Définitions :

Soit Ω un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$), et $\vec{V} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ de vecteurs de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$, on suppose que $\vec{V}$ vérifie:

$$\operatorname{div}(\vec{V}(x)) = 0, \forall x \in \Omega.$$

Définition 2.1.1 Les lignes de courant (courbes intégrales) sont les lignes de champ de vecteurs $\vec{V}$, elles sont définies comme étant tangentes en chaque point p de la ligne au vecteur $\vec{V}(p)$.

Ainsi, une ligne de courant peut être vue comme la trajectoire d'une particule qui se déplace dans $\overline{\Omega}$ à une vitesse égale en chaque point p de la ligne à $\vec{V}(p)$.

Définition 2.1.2 Temps de vol

Soit C une ligne de courant par rapport à $\vec{V}$. On fixe $p_0 \in C$ avec $\vec{V}(p_0) \neq \vec{0}$, pour tout point $p \in C$, on définit le temps de vol entre p_0 et p (noté $\tau(p_0, p) \in \mathbb{R}$), par le temps nécessaire pour qu'une particule (qui se déplace sur C à une vitesse égale à $\vec{V}$) en partant de p_0 arrive à p . De plus $\tau(p_0, p)$ est unique.

Grâce à cette définition, on peut définir un paramétrage q de C (qui dépend de $\vec{V}$ et p_0) de la façon suivante:

$$\begin{cases} q : I_C \subset \mathbb{R} \rightarrow \overline{\Omega} \\ \tau \rightarrow p = q(\tau), \quad \text{tel que: } \tau(p_0, p) = \tau. \end{cases} \quad (2.1)$$

En fait, q est la solution du problème de Cauchy suivant: Trouver $(I_C \subset \mathbb{R}, q : I_C \rightarrow \overline{\Omega})$, solution maximale de:

$$\begin{cases} \frac{dq}{d\tau}(\tau) = \vec{V}(q(\tau)), \\ q(0) = p_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Comme $\vec{V}$ est de classe C^1 sur Ω , alors ce problème admet une solution maximale unique, de plus $q \in C^2(I_C, \Omega)$. Dans la suite on appelle p_0 le **point d'origine** de C , et I_C l'**intervalle de définition** de C .

Remarque 2.1.1 Dans la définition, on a supposé que $\vec{V}(p_0) \neq \vec{0}$, plus généralement si C n'est pas réduit à un point, alors: pour tout point $p \in C$, on a $\vec{V}(p) \neq \vec{0}$.

Proposition 2.1.1 ([41]) Soit C une ligne de courant tracée dans $\overline{\Omega}$, telle que son intervalle de définition soit de mesure finie dans $\mathbb{R}$. Alors, quitte à changer le point d'origine de C , on peut supposer que $I_C = [0, \tau_{\max}]$ avec $\tau_{\max} \in \mathbb{R}_+^*$.

Dans les tests numériques, on aura toujours des lignes de courant dont les intervalles de définition sont de mesure finie dans $\mathbb{R}$.

Remarque 2.1.2 Dans certains cas on arrête le tracé de la ligne pour éviter que son intervalle de définition soit de mesure non finie dans $\mathbb{R}$ (voir partie "tracé des lignes de courant" annexe-A).

Dans la suite chaque ligne de courant sera caractérisée par son point d'origine, son intervalle de définition et q .

Définition 2.1.3 Longueur sur une ligne de courant

Soit C une ligne de courant tracée dans Ω par rapport à $\vec{V}$. Soient $p_1 = q(\tau_1)$, $p_2 = q(\tau_2)$, deux points sur C , on définit la distance $l(p_1, p_2)$ entre p_1 et p_2 par rapport à C , par:

$$l(p_1, p_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\vec{V}(q(\tau))| d\tau.$$

Comme $\vec{V} \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, alors il existe $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, tel qu'on a: $|\vec{V}(x)| \leq \beta, \forall x \in \overline{\Omega}$, en fait, on peut prendre $\beta = \|\vec{V}\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}$.

Lemme 2.1.2 Soient p_1, p_2 deux points de C , comme ci-dessus. Alors:

$$|l(p_1, p_2)| \leq \beta |\tau_2 - \tau_1|.$$

2.1.2 Quelques résultats

Soient l_1, l_2 deux lignes de courant tracées dans $\overline{\Omega}$ par rapport à $\vec{V}$. Alors on a le résultat suivant:

Proposition 2.1.3 ([41]) Soient l_1 et l_2 comme ci-dessus, alors soit $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ soit $l_1 \cap l_2 = l_1 = l_2$.

Ce résultat nous dit que deux lignes de courant **ne se coupent jamais**, en particulier en chaque point de $\overline{\Omega}$ passe une et une seule ligne de courant. Ce résultat est utile lors du traçage des lignes de courant, et permet de classer les méthodes de traçage des lignes de courant.

Une fois une ligne de courant tracée dans $\overline{\Omega}$, on peut définir pour chaque fonction (définie sur $\overline{\Omega}$) sa "trace" sur la ligne, plus précisément, soit C une ligne de courant (C est donnée par (p, I_C, q)), pour toute fonction $u \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ on lui associe $u_C \in C(I_C, \mathbb{R})$ définie par:

$$\forall \tau \in I_C, u_C(\tau) = u(q(\tau)). \quad (2.3)$$

Supposons de plus que $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, alors on a le résultat suivant:

Lemme 2.1.4 Soit u_C définie sur I_C par la relation (2.3). Alors on a:

1. $u_C \in C^1(I_C, \mathbb{R})$ et u'_C est donnée par:

$$\forall \tau \in I_C, \partial_\tau u_C(\tau) = \vec{\nabla} u(q(\tau)) \cdot \vec{V}(q(\tau)), \quad (2.4)$$

2. pour toute fonction $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a:

$$\forall \tau \in I_C, \partial_\tau f(u_C(\tau)) = \text{div}((f(u)\vec{V})(q(\tau))). \quad (2.5)$$

Démonstration du lemme 2.1.4:

Comme $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $q \in C^1(I_C, \Omega)$, alors $u_C = u \circ q \in C^1(I_C, \mathbb{R})$. Et la dérivée de u_C est donnée par:

$$\begin{aligned} u'_C(\tau) &= \vec{\nabla} u(q(\tau)) \cdot \frac{d\vec{q}}{d\tau}(\tau) \\ &= \vec{\nabla} u(q(\tau)) \cdot \vec{V}(q(\tau)). \end{aligned}$$

D'autre part si on a $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors $f \circ u_C \in C^1(I_C, \mathbb{R})$ et $(f \circ u_C)'(\tau) = f'(u_C(\tau))u'_C(\tau)$, ce qui nous donne:

$$\begin{aligned} \text{div}(f(u)\vec{V})(q(\tau)) &= (f'(u)\vec{\nabla} u \cdot \vec{V})(q(\tau)) + (f(u)\text{div}(\vec{V}))(q(\tau)) \\ &= f'(u(q(\tau)))\vec{\nabla} u(q(\tau)) \cdot \frac{d\vec{q}}{d\tau}(\tau) \quad (\text{car } \text{div}(\vec{V}) = 0) \\ &= (f \circ u_C)'(\tau). \end{aligned}$$

D'où le résultat. •

2.2 La méthode des lignes de courant appliquée à une équation de conservation

2.2.1 Présentation du problème

Soit Ω un ouvert régulier polygonal de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3), $I =]0; T[$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}_+$ ($T > 0$). On note $Q = \Omega \times I$, $\Sigma = \partial\Omega \times I$, $\overline{Q} = \overline{\Omega} \times I$ et $\Sigma_- = \{(x, t) \in \Sigma : \vec{V}(x) \cdot \vec{n}(x) \leq 0\}$, $\vec{n}$ est la normale extérieure à Ω au point x . On considère le problème suivant: Trouver $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ solution de:

$$(\mathcal{P}) = \begin{cases} \partial_t u(x, t) + \operatorname{div}(f(u(x, t)) \vec{V}(x)) = 0 & , \quad \forall (x, t) \in Q \\ u(x, 0) = u_0(x) & , \quad \forall x \in \Omega \\ u(r, t) = g(r, t) & , \quad \forall (r, t) \in \Sigma_- \end{cases}$$

Avec f , $\vec{V}$, u_0 et g sont données et vérifient les hypothèses (D) :

(D1) $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, vérifie: $f' > 0$.

(D2) $\vec{V} \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, et $\vec{V}$ vérifie:

$$\forall x \in \overline{\Omega}, \operatorname{div}(\vec{V}(x)) = 0, \quad (2.6)$$

$$\text{il existe } \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \overline{\Omega}, \eta_1 \leq |\vec{V}(x)| \leq \eta_2, \quad (2.7)$$

on prend $\eta_2 = \beta = \|\vec{V}\|_{L^\infty(\Omega)}$.

(D3) u_0 et g sont supposées assez régulières (de classe C^2).

Dans la suite on note:

$$A = \max\{\sup_{\Omega}(u_0), \sup_{\Sigma_-}(g)\}, \quad (2.8)$$

$$B = \min\{\inf_{\Omega}(u_0), \inf_{\Sigma_-}(g)\}. \quad (2.9)$$

2.2.2 Résultats théoriques

Pour l'étude de ce type de problème on introduit la notion de solution entropique, cela permet d'avoir l'unicité de la solution ([16], [24]). En plus la solution entropique est la solution d'origine physique parmi les solutions faibles.

Définition 2.2.1 La solution entropique

Soit $u \in L^\infty(Q)$. On dit que u est une solution entropique du problème (P) si: pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$, et pour tout $\phi \in \mathcal{D}$, $\phi \geq 0$, on a:

$$\begin{aligned} & \int_Q (|u(x, t) - \kappa| \partial_t \phi(x, t) + |f(u(x, t)) - f(\kappa)| \vec{V}(x) \cdot \vec{\nabla} \phi(x, t)) dx dt \\ & + \int_{\Omega} |u_0(x) - \kappa| \phi(x, 0) dx - \int_{\Sigma} |f(g(r, t)) - f(\kappa)| \phi(r, t) \vec{V}(r) \cdot \vec{n}(r) d\gamma(r) dt \geq 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Où $\mathcal{D} = \{\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \phi = 0 \text{ sur } \Sigma - \Sigma_-\}$, et $d\gamma$ la mesure de Ledesgue ($d - 1$) dimensionnelle sur $\partial\Omega$.

Avec cette définition, on a le résultat suivant:

Théorème 2.2.1 ([9]) Sous les hypothèses (D). Le problème (P) admet une unique solution entropique, notée u , et $u \in L^1 \cap BV(Q)$.

Remarque 2.2.1 La définition de la solution entropique donnée ci-dessus tient compte du fait que la fonction f est croissante. On a pris cette hypothèse car dans le problème physique qu'on va traiter, f est croissante. Pour le cas général voir ([38]).

Théorème 2.2.2 ([38]) Soit $u \in L^\infty(Q)$ la solution entropique du problème $(\mathcal{P})$. Alors:

$$B \leq u(x, t) \leq A, \quad p.p (x, t) \in Q. \quad (2.11)$$

A et B sont données en (2.9) et (2.8).

Dans la suite on suppose que $u \in C^2(\overline{Q})$, en effet pour pouvoir déterminer le problème que u résout sur une ligne de courant, il est essentiel que la solution u soit de classe C^1 . On a préféré prendre u de classe C^2 pour avoir une estimation de l'ordre de h (voir partie 2.6.2).

2.2.3 Le problème 1-D vérifié sur une ligne de courant

Soit C une ligne de courant tracée dans $\overline{\Omega}$, dont $p \in \overline{\Omega}$ est le point d'origine, on suppose que $C = \{q(\tau) : \tau \in I_C \subset \mathbb{R}\}$. On définit une nouvelle fonction v de la façon suivante:

$$v(\tau, t) = u(q(\tau), t), \quad \forall (\tau, t) \in I_C \times I. \quad (2.12)$$

En dérivant v par rapport à t , on trouve:

$$\partial_t v(\tau, t) = \partial_t u(q(\tau), t).$$

D'autre part, d'après le lemme (2.1.4), on a:

$$\partial_\tau f(v(\tau, t)) = \text{div}((f(u)\vec{V})(q(\tau), t)).$$

Comme u est la solution du problème $(\mathcal{P})$, on trouve que v vérifie:

$$\partial_t v(\tau, t) + \partial_\tau f(v(\tau, t)) = 0, \quad \forall (\tau, t) \in I_C \times I. \quad (2.13)$$

La méthode des lignes de courant consiste à résoudre cette équation le long de chaque ligne de courant tracée dans Ω .

2.3 Problème discret

On donne dans cette partie les notations de maillage qu'on utilisera dans toute la suite de ce mémoire.

2.3.1 Notation du maillage de Ω

Soit $\mathcal{M}$ un maillage de Ω . Pour chaque maille p de $\mathcal{M}$, on note:

1. $m(p)$ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$ de la maille p ,
2. $\mathcal{N}(p)$ l'ensemble des mailles voisines de p dans $\mathcal{M}$,
3. σ_{pq} l'arête commune entre p et $q \in \mathcal{N}(p)$,
4. $\mathcal{A}$ l'ensemble des arêtes dans $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{A} = \{\sigma_{pq}, p \in \mathcal{M}, q \in \mathcal{N}(p)\}, \quad (2.14)$$

5. $\mathcal{A}_\partial$ l'ensemble des arêtes incluses dans $\partial\Omega$.
6. $\mathcal{A}_\Sigma^-$ l'ensemble des arêtes incluses dans Σ_- .
7. $m(\sigma)$ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^{d-1}$ de l'arête σ .

On suppose que $\mathcal{M}$ vérifie:

- Pour deux mailles p et q distinctes dans $\mathcal{M}$, soit $m(\overline{p} \cap \overline{q}) = 0$, soit $\overline{p} \cap \overline{q} = \overline{\sigma}$ pour un $\sigma \in \mathcal{A}$.
- Pour tout $\sigma \in \mathcal{A}$, σ est incluse dans un hyperplan de $\mathbb{R}^d$.

- $\overline{\partial\Omega} = \cup_{\sigma \in \mathcal{A}_\partial} \overline{\sigma}$.
- Si $\sigma \in \mathcal{A}_\partial$, alors soit $\overline{\sigma} \subset \mathcal{A}_\partial^-$, soit $\overline{\sigma} \subset \mathcal{A}_\partial - \mathcal{A}_\partial^-$.

On note $h = \sup_{K \in \mathcal{M}} \{\text{diam}(K)\}$, h définit le pas de maillage. Il est clair que:

$$\forall K \in \mathcal{M}, m(K) \leq Ch^d, \quad (2.15)$$

Avec $C = 2^d m(B(0, 1))$, $B(0, 1)$ la boule unité dans $\mathbb{R}^d$.

Par la suite, on appellera **maillage régulier** sur Ω tout maillage de Ω vérifiant les conditions ci-dessus.

2.3.2 Maillage sur les lignes de courant

On suppose dans cette partie qu'on a déjà un maillage régulier de Ω . Soit $N_{\mathcal{L}} \in \mathbb{N}^*$. On se donne $N_{\mathcal{L}}$ points $p_l \in \overline{\Omega}$, de chaque point p_l on trace une ligne de courant l . On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des lignes de courant tracées dans Ω .

Soit $l \in \mathcal{L}$. l sera caractérisée par un triplet (p^l, I_l, q^l) , tel que:

1. $p^l \in \partial\Omega$ est le point d'origine de l (cf proposition 2.1.1)
2. I_l est de mesure finie dans $\mathbb{R}$ (cf remarque 2.1.2). De plus, on suppose qu'il existe une constante $C_{\Omega, V} \in \mathbb{R}_+^*$ qui ne dépend que de Ω et $\vec{V}$, telle que:

$$\forall l \in \mathcal{L}, |I_l| < C_{\Omega, V}. \quad (2.16)$$

3. $q^l : I_l = [0, \tau_{\max}^l] \rightarrow \Omega$, q^l est un paramétrage de l , c-à-d q^l solution de:

$$\begin{cases} \frac{dq^l}{d\tau}(\tau) = \vec{V}(q^l(\tau)), & \forall \tau \in I_l, \\ q^l(0) = p^l. \end{cases}$$

Un maillage sur une ligne de courant désignera un maillage sur son intervalle de définition, plus précisément, soit $l \in \mathcal{L}$, on se donne une subdivision $\Gamma^l = (\tau_i^l)_{0 \leq i \leq N_l}$ de I_l , on note:

$$\begin{cases} \Delta_i^l = \tau_{i+1}^l - \tau_i^l, & 0 \leq i \leq N_l - 1, \\ \Delta^l = \max\{\Delta_i^l, 0 \leq i \leq N_l - 1\}. \end{cases}$$

Δ^l est donc le pas du maillage sur l , on note aussi $q_i^l = q(\tau_i^l)$ et h_i^l la longueur de l'arc $\widehat{q_i^l q_{i+1}^l}$ sur l , donnée par:

$$h_i^l = \int_{[\tau_i^l, \tau_{i+1}^l]} |\vec{V}(q^l(\tau))| d\tau.$$

D'après le lemme 2.1.2, on a $h_i^l \leq \Delta_i^l \beta$, on note aussi $h_l = \sup_j (h_j^l)$.

On introduit les notations qu'on utilisera dans la suite pour le passage entre le maillage $\mathcal{M}$ et l'ensemble des lignes de courant.

Soit $(K, l) \in \mathcal{M} \times \mathcal{L}$, on notera:

- $I_K = \{l \in \mathcal{L}, l \cap K \neq \emptyset\}$, l'ensemble des lignes de courant qui passent dans la maille K .
- $J_l = \{K \in \mathcal{M}, l \in I_K\}$, l'ensemble des mailles qui croisent le chemin de l .
- $I_{K,l} = \{0 \leq j \leq N_l - 1, \text{Im}(q^l|_{[\tau_j^l, \tau_{j+1}^l]}) \subseteq K\}$ (cf remarque 2.3.1 ci-dessus).

On définit pour chaque maille K la notion de “temps de vol” (α_K) dans K , qui est donnée par:

$$\alpha_K = \sum_{l \in I_K} \Delta_K^l,$$

avec:

$$\Delta_K^l = \sum_{j \in I_{Kl}} \Delta_j^l.$$

On fait les hypothèses suivantes (HML):

(HML1) Pour chaque maille $K \in \mathcal{M}$: $\alpha_K > 0$, autrement dit:

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad I_K \neq \emptyset.$$

Donc, dans chaque maille passe au moins une ligne de courant.

(HML2) $\exists 0 < c_{\inf} \leq c_{\max} < \infty$, tel que:

$$\forall l \in \mathcal{L}, \forall j \in \{0, \dots, N_l - 1\} : c_{\inf} h \leq \Delta_j^l \leq \Delta^l \leq c_{\max} h.$$

(HML3) Pour $h < 1$, on suppose que: $\exists c_{NLDC} \in \mathbb{R}_+^*$, tel que :

$$N_{\mathcal{L}} \leq c_{NLDC} / h^{d-1},$$

en général $N_{\mathcal{L}}$ est proportionnel au nombre d’arêtes dans $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$.

(HML4) Pour chaque ligne de courant $l \in \mathcal{L}$, $(l \cap \mathcal{A}) \subseteq (q_i^l)_i$.

Remarque 2.3.1 L’hypothèse (HML4) sur les points d’intersection entre les lignes de courant et l’ensemble des arêtes de $\mathcal{M}$ nous donne:

$$\forall (l, j) \in \mathcal{L} \times \{0, \dots, N_l - 1\}, \exists ! K \in \mathcal{M} : \text{Im}(q^l|_{[\tau_j^l, \tau_{j+1}^l]}) \subseteq K.$$

2.3.3 Discrétisation en temps, double maillage en temps

On se donne $N_T \in \mathbb{N}^*$, on pose $DT = T/N_T$, on considère une discrétisation $(t^i)_{0 \leq i \leq N_T}$ de $[0, T]$, donnée par:

$$\forall i \in \{0, \dots, N_T\}, \quad t^i = i \times DT.$$

DT correspond à l’intervalle de temps dans lequel on résout l’équation sur les lignes de courant, mais aussi le passage des données entre $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ (cf partie 2.4 ci-après). Dans le cas où la vitesse ne dépend pas du temps on peut prendre $DT = T$ (i.e $N_T = 1$). En revanche, lorsque $\vec{V}$ est une fonction du temps aussi, on prendra $DT < T$ (i.e $N_T > 1$), dans ce cas DT est aussi le pas du temps entre deux mises à jour de la vitesse (cf partie 2.7), bien sûr le choix de N_T dépend du $\partial_t \vec{V}$. Dans la suite on appellera DT le **grand pas de temps** (puisqu’il y aura des petits pas du temps sur chaque ligne de courant).

Pour chaque ligne de courant $l \in \mathcal{L}$, on se donne $N^l \in \mathbb{N}^*$ et on définit le pas de temps sur l (le petit pas de temps) par: $k^l = DT/N^l$. Le choix de N^l dépend de $\|f'\|_{\infty}$ et du maillage sur l (i.e Δ^l). Ainsi sur chaque ligne de courant on peut avoir un pas du temps différent.

Remarque 2.3.2 On choisit N^l de sorte qu’on a:

$$\forall i \in \{0, \dots, N_l - 1\}, \quad k^l \leq \Delta_i^l / \|f'\|_{\infty},$$

c’est une condition (CFL) pour assurer la convergence du schéma numérique sur la ligne de courant (cf partie 2.5.1).

Donc, dans cette méthode on a deux maillages en temps: le premier est sur l’intervalle $[0, T]$ dont le pas de temps (grand pas de temps) est choisi en fonction de la vitesse, surtout si la vitesse dépend du temps. Le second est un maillage sur chaque grand pas de temps, dont le pas de temps varie entre les lignes de courant.

Remarque 2.3.3 Bien que dans le cas où la vitesse ne dépend pas du temps on puisse prendre $N_T = 1$, on a préféré étudier dans cette partie le cas général (i.e. $N_T \geq 1$) pour comprendre davantage l’influence de ce paramètre sur cette méthode (cf. théorème 2.6.3), et en particulier dans le passage d’information entre les lignes de courant et les mailles (cf. partie ci-après).

2.4 Passage entre les lignes de courant et les mailles

Comme pour toutes les méthodes numériques, il faut définir les espaces de fonctions dans lesquels on travaille. Dans cette partie on donne les définitions des espaces qu'on utilisera dans la suite, essentiellement on aura l'espace des fonctions définies sur Ω ($\mathcal{E}_M$) et pour chaque ligne de courant il y aura l'espace des fonctions définies sur cette ligne ($\mathcal{E}_l$). On introduit aussi l'espace $\mathcal{E}_L$ qui est le produit des espaces $\mathcal{E}_l$ afin de faciliter le calcul des estimations.

2.4.1 Définitions des espaces $\mathcal{E}_l$, $\mathcal{E}_L$ et $\mathcal{E}_M$

Pour $l \in \mathcal{L}$, on définit $\mathcal{E}_l$ l'espace des fonctions constantes par morceaux sur l par rapport au maillage donné sur l :

$$\mathcal{E}_l = \{\varphi : l \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tq } \exists (\varphi_j)_{0 \leq j < N_l} \in \mathbb{R}^{N_l} : \varphi \circ q^l(\tau) = \sum_{j=0}^{N_l-1} \varphi_j 1_{[\tau_j^l, \tau_{j+1}^l[}(\tau)\}.$$

Avec $1_{[\tau_j^l, \tau_{j+1}^l[}(\tau) = 1$ si $\tau \in [\tau_j^l, \tau_{j+1}^l[$ et 0 sinon.

Pour $\varphi \in \mathcal{E}_l$, on définit:

$$\|\varphi\|_l = \sum_{j=0}^{N_l-1} \Delta_j^l |\varphi_j| \quad (2.17)$$

Ceci définit une norme sur $\mathcal{E}$ équivalente à la norme L^1 sur l .

Remarque 2.4.1 Le choix de Δ_j^l dans la définition de la norme à la place de h_j est fait pour deux raisons :

1. Comme la vitesse est régulière, alors au niveau mathématique c'est équivalent (cf. lemme 2.4.1 ci après)
2. Au niveau pratique (calcul numérique) il est beaucoup plus facile d'évaluer Δ_j^l que h_j (cf. partie de traçage des lignes de courant, annexe A).

Lemme 2.4.1 Soit $\varphi \in \mathcal{E}_l$. Alors:

$$\|\varphi\|_{L^1(l)} \leq \beta \|\varphi\|_l \quad (2.18)$$

Démonstration du lemme 2.4.1:

D'après la définition de $\mathcal{E}_l$, il existe $(\varphi_j)_{0 \leq j < N_l}$ tel que :

$$\forall \tau \in I_l : \varphi \circ q^l(\tau) = \sum_j \varphi_j 1_{[\tau_j^l, \tau_{j+1}^l[}(\tau).$$

Ce qui donne:

$$\begin{aligned} \int_l |\varphi| dl &= \int_{I_l} |\varphi \circ q^l(\tau)| \|\vec{V}(q^l(\tau))\| d\tau \\ &= \sum_{j=0}^{N_l-1} |\varphi_j| h_j^l \end{aligned}$$

D'autre part, on a:

$$\forall l \in \mathcal{L}; \forall j \in \{0, \dots, N_l - 1\} : h_j^l \leq \beta \Delta_j^l$$

Ce qui termine la démonstration. •

Remarque 2.4.2 On peut identifier $\mathcal{E}_l$ à l'ensemble des fonctions définies sur I_l constantes par morceaux sur le maillage Γ^l . En fait les deux espaces sont des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimensions égales à N_l .

On définit aussi sur l'ensemble des lignes de courant $\mathcal{L}$, l'espace suivant:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L}} = \{\Phi = (\varphi^l)_{0 \leq l \leq N_{\mathcal{L}}}, \varphi^l \in \mathcal{E}_l\}.$$

On munit $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ définie par:

$$\forall \Phi = (\varphi^l) \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}, \|\Phi\|_{\mathcal{L}} = \sum_{l \in \mathcal{L}} \|\varphi^l\|_l. \quad (2.19)$$

On définit sur Ω l'espace $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ des fonctions constantes par morceaux sur les mailles de $\mathcal{M}$, c-à-d,

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = \sum_{K \in \mathcal{M}} \varphi_K 1_K(x), \varphi_K \in \mathbb{R}\}$$

Pour $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, on définit la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$, par:

$$\|\varphi\|_{\mathcal{M}} = \sum_{K \in \mathcal{M}} \alpha_K |\varphi_K|,$$

avec α_K le temps de vol dans la maille K , $\alpha_K = \sum_{l \in I_K} \Delta_K^l$.

Cette norme dépend du maillage $\mathcal{M}$ et aussi de l'ensemble $\mathcal{L}$, elle est équivalente à la norme L^1 habituelle sur $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, plus précisément, on a:

Lemme 2.4.2 Soit $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Alors:

$$\int_{\Omega} |\varphi| dx \leq \frac{2^d m(B(0,1)) h^{d-1}}{c_{inf}} \|\varphi\|_{\mathcal{M}}, \quad (2.20)$$

où $B(0,1)$ est la boule unité dans $\mathbb{R}^d$.

Démonstration du lemme 2.4.2:

D'après les hypothèses de maillage on a:

$$\forall K \in \mathcal{M}, \alpha_K \geq c_{inf} h \geq \frac{c_{inf} m_K}{2^d m(B(0,1)) h^{d-1}}.$$

Ce qui donne:

$$\forall K \in \mathcal{M}, m_K \leq \frac{2^d m(B(0,1)) h^{d-1}}{c_{inf}} \alpha_K.$$

D'autre part:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\varphi| dx &= \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K |\varphi| dx \\ &= \sum_{K \in \mathcal{M}} m_K |\varphi_K| \\ &\leq \frac{2^d m(B(0,1)) h^{d-1}}{c_{inf}} \sum_{K \in \mathcal{M}} \alpha_K |\varphi_K| = \frac{2^d m(B(0,1)) h^{d-1}}{c_{inf}} \|\varphi\|_{\mathcal{M}}. \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. •

2.4.2 Définitions des applications de passage entre $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$

Le passage des informations entre $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ est une étape très importante dans cette méthode, car cela permet d'initialiser les problèmes 1d à résoudre sur chaque ligne de courant et aussi de projeter les solutions numériques obtenues sur l'ensemble des lignes de courant sur le maillage $\mathcal{M}$ pour avoir une solution numérique constante par maille (cf. remarque 2.4.3).

Définition 2.4.1 Pour toute fonction $\psi \in \mathcal{E}_M$ on lui associe une fonction $\mathcal{L}(\psi) \in \mathcal{E}_L$, définie par:

$$\forall l \in \mathcal{L}, \mathcal{L}(\psi)_j^l = \psi_K, \text{ si } j \in I_{K,l} \quad (2.21)$$

et inversement, si $\Phi = (\phi^l)_l \in \mathcal{E}_L$, on définit une fonction $\mathcal{M}(\Phi) \in \mathcal{E}_M$ par:

$$\forall K \in \mathcal{M}, \mathcal{M}(\Phi)_K = \sum_{l \in I_K} \omega_l \left(\sum_{j \in I_{K,l}} (\Delta_j^l / \Delta_K^l) \psi_j^l \right) \quad (2.22)$$

Avec:

$$\omega_l = \frac{\Delta_K^l}{\alpha_K} \quad (2.23)$$

Proposition 2.4.3 Les fonctions $\mathcal{M}$ et $\mathcal{L}$ sont linéaires, continues et 1-Lipschitziennes, de plus on a:

$$\forall \Phi \in \mathcal{E}_M, \mathcal{M} \circ \mathcal{L}(\Phi) = \Phi, \quad (2.24)$$

$$\forall \Phi \in \mathcal{E}_M, \|\Phi\|_M = \|\mathcal{L}(\Phi)\|_L, \quad (2.25)$$

$$\forall \Psi \in \mathcal{E}_L, \|\mathcal{M}(\Psi)\|_M \leq \|\Psi\|_L. \quad (2.26)$$

Démonstration:

Il est clair que les deux fonctions $\mathcal{M}$ et $\mathcal{L}$ sont linéaires, d'où leur continuité car $\mathcal{E}_M$ et $\mathcal{E}_L$ sont des $\mathbb{R}$ -ev de dimensions finies.

Soit $\phi = \sum_{K \in \mathcal{M}} \phi_K 1_K \in \mathcal{E}_M$. D'après la définition de l'application $\mathcal{L}$, on a:

$$\forall l \in \mathcal{L}, \mathcal{L}(\phi)_j^l = \phi_K, \text{ si } j \in I_{K,l}.$$

D'où, pour tout $K \in \mathcal{M}$, on a:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathcal{L}(\phi))_K &= \sum_{l \in I_K} \frac{\Delta_K^l}{\alpha_K} \left(\sum_{j \in I_{K,l}} \frac{\Delta_j^l}{\Delta_K^l} (\mathcal{L}(\phi))_j^l \right) \\ &= \sum_{l \in I_K} \frac{1}{\alpha_K} \left(\sum_{j \in I_{K,l}} \Delta_j^l \phi_K \right) \\ &= \frac{\phi_K}{\alpha_K} \sum_{l \in I_K} \Delta_j^l = \phi_K, \end{aligned}$$

On en déduit que: $\mathcal{M}(\mathcal{L}(\phi)) = \phi$. D'où la relation (2.24).

De même, on a:

$$\begin{aligned} \|\phi\|_M &= \sum_{K \in \mathcal{M}} \alpha_K |\phi_K| \\ &= \sum_{K \in \mathcal{M}} \alpha_K \left(\sum_{l \in I_K} \frac{\Delta_K^l}{\alpha_K} \left(\sum_{j \in I_{K,l}} \frac{\Delta_j^l}{\Delta_K^l} |\mathcal{L}(\phi)_j^l| \right) \right) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{l \in I_K} \left(\sum_{j \in I_{K,l}} \Delta_j^l |\mathcal{L}(\phi)_j^l| \right) \\ &= \sum_{l \in \mathcal{L}} \sum_j \Delta_j^l |\mathcal{L}(\phi)_j^l| = \|\mathcal{L}(\phi)\|_L. \end{aligned}$$

D'où la relation (2.25).

Soit $\psi = (\psi^l)_l \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$. On a :

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{M}(\psi)\|_{\mathcal{M}} &= \sum_{K \in \mathcal{M}} \alpha_K |\mathcal{M}(\psi)_K| \\
 &= \sum_{K \in \mathcal{M}} \alpha_K \left| \sum_{l \in I_K} \frac{\Delta_K^l}{\alpha_K} \left(\sum_{j \in I_{Kl}} \frac{\Delta_j^l}{\Delta_K^l} \psi_j^l \right) \right| \\
 &\leq \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{l \in I_K} \left(\sum_{j \in I_{Kl}} \Delta_j^l |\psi_j^l| \right) \\
 &= \sum_{l \in \mathcal{L}} \sum_j \Delta_j^l |\psi_j^l| = \|\psi\|_{\mathcal{L}}.
 \end{aligned}$$

D'où la relation (2.26).

D'après les relations (2.25) et (2.26) on déduit que les applications $\mathcal{M}$ et $\mathcal{L}$ sont 1-Lipschitziennes, ce qui termine la démonstration.

Remarque 2.4.3 Dans le problème physique qui nous intéresse, nous sommes obligés d'avoir une valeur constante par maille de u (u sera la saturation) pour pouvoir calculer la vitesse à l'instant suivant (i.e. résoudre l'équation de la pression). C'est pour cette raison qu'on fait ce passage entre $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, et donc on ne peut pas se contenter d'une solution numérique définie sur les lignes de courant.

2.4.3 Projection de $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$

Afin de pouvoir faire des estimations d'erreur entre la solution numérique obtenue par la méthode des lignes de courant et la solution exacte du problème, on introduit dans cette partie les définitions des projections d'une fonction de classe C^1 sur Ω dans les espaces $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, et on donne quelques lemmes qu'on utilisera par la suite pour montrer la convergence (cf. partie 2.6.2).

Définition 2.4.2 Pour toute fonction $\theta \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, on définit :

- $\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(\theta) \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ définie par :

$$\forall K \in \mathcal{M}, (\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(\theta))_K = \frac{1}{m_K} \int_K \theta(x) dx \quad (2.27)$$

- $\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(\theta) = (\theta^l)_{l \in \mathcal{L}} \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ définie par :

$$\forall l \in \mathcal{L}, \forall 0 \leq j \leq N_l - 1 : \theta_j^l = \frac{1}{\Delta_j^l} \int_{[\tau_j^l, \tau_{j+1}^l]} \theta(q^l(\tau)) d\tau \quad (2.28)$$

Lemme 2.4.4 Soit $\theta \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, on définit $\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(\theta)$ et $\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(\theta)$ comme (2.27-2.28). Alors :

Il existe $c_\theta > 0$ qui dépend de $\|\vec{\nabla} \theta\|_\infty$, $\vec{V}$ et Ω , tel que :

$$\|\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(\theta) - \mathcal{L}(\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(\theta))\|_{\mathcal{L}} \leq c_\theta N_{\mathcal{L}} h$$

Démonstration du lemme 2.4.4 :

Soit $l \in \mathcal{L}$. Notons $u = (\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(\theta))_l$ et $v = (\mathcal{L}(\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(\theta)))_l$, d'après la définition de la norme sur l , on a :

$$\|u - v\|_l = \sum_{0 \leq j \leq N_l - 1} \Delta_j^l |u_j - v_j|,$$

soit $j \in \{0, \dots, N_l - 1\}$ il existe une seule maille $K \in \mathcal{M}$, telle que $\text{Im}(q^l_{[\tau_j, \tau_{j+1}]}) \subset K$. Donc :

$$u_j = \frac{1}{m(K)} \int_K \theta(x) dx, \quad v_j = \frac{1}{\Delta_j^l} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \theta(q^l(\tau)) d\tau,$$

donc $|u_j - v_j| \leq \|\vec{\nabla} \theta\|_\infty h$, car θ est de classe C^1 . Ce qui nous donne:

$$\|u - v\|_l \leq \sum_{0 \leq j \leq N_l - 1} \Delta_j^l \|\vec{\nabla} \theta\|_\infty h \leq |I_l| \|\vec{\nabla} \theta\|_\infty h.$$

D'autre part, d'après la relation (2.16), on a $|I_l| < C_{\Omega, V}$ pour tout $l \in \mathcal{L}$, avec $C_{\Omega, V}$ une constante dans $\mathbb{R}_+^*$ qui dépend de Ω et de la vitesse $\vec{V}$.

Notons $c_\theta = C_{\Omega, V} \|\vec{\nabla} \theta\|_\infty$. D'après ce qui précède, on déduit:

$$\|\mathbb{P}_\mathcal{L}(\theta) - \mathcal{L}(\mathbb{P}_\mathcal{M}(\theta))\|_\mathcal{L} = \sum_{l \in \mathcal{L}} \|(\mathbb{P}_\mathcal{L}(\theta))_l - (\mathcal{L}(\mathbb{P}_\mathcal{M}(\theta)))_l\|_l \leq c_\theta N_\mathcal{L} h.$$

D'où le résultat. •

Lemme 2.4.5 Soit $\theta \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, on définit $\mathbb{P}_\mathcal{M}(\theta)$ et $\mathbb{P}_\mathcal{L}(\theta)$ comme (2.27-2.28). Pour tout $v = (v^l)_l \in \mathcal{E}_\mathcal{L}$, on a:

$$\|\mathbb{P}_\mathcal{M}(\theta) - \mathcal{M}(v)\|_\mathcal{M} \leq \|\mathcal{L}(\mathbb{P}_\mathcal{M}(\theta)) - \mathbb{P}_\mathcal{L}(\theta)\|_\mathcal{L} + \|\mathbb{P}_\mathcal{L}(\theta) - v\|_\mathcal{L}$$

Démonstration du lemme 2.4.5:

D'après la proposition (2.4.3), on a :

$$\mathcal{M} \circ \mathcal{L}(\mathbb{P}_\mathcal{M}(\theta)) = \mathbb{P}_\mathcal{M}(\theta),$$

d'autre part, en utilisant la relation (2.26), on en déduit:

$$\begin{aligned} \|\mathbb{P}_\mathcal{M}(\theta) - \mathcal{M}(v)\|_\mathcal{M} &= \|\mathcal{M}(\mathcal{L}(\mathbb{P}_\mathcal{M}(\theta)) - v)\|_\mathcal{M} \\ &\leq \|\mathcal{L}(\mathbb{P}_\mathcal{M}(\theta)) - v\|_\mathcal{L}. \end{aligned}$$

On ajoute et soustrait $\mathbb{P}_\mathcal{L}(\theta)$ pour avoir le résultat désiré. •

2.5 Algorithme pour la méthode des lignes de courant

On commence d'abord par donner le schéma numérique sur une ligne de courant, ensuite on donnera l'algorithme.

2.5.1 Solution approchée du problème ($\mathcal{P}$) sur une ligne de courant

Soit $l \in \mathcal{L}$ une ligne de courant ($l = (p^l, I_l, q^l)$), et u la solution du problème ($\mathcal{P}$). L'équation de u est réduite sur l au problème 1-d suivant (voir 2.2.3):

$$\partial_t v + \partial_\tau f(v) = 0 \tag{2.29}$$

Avec v définie en (2.12).

On suppose qu'on a deux instants $t^n = nDT$ et $t^{n+1} = (n+1)DT$ (avec $t^{n+1} \leq T$), on suppose de plus qu'à l'instant t^n on a une solution approchée du problème ($\mathcal{P}$) notée $u^{app}(t^n) \in \mathcal{E}_\mathcal{M}$.

On cherche à construire une solution approchée du problème (2.29) sur $[0, \tau_{max}^l] \times [t^n, t^{n+1}]$. Pour cela, on se donne une discrétisation $(\sigma^i)_{0 \leq i \leq N^l}$ de $[t^n, t^{n+1}]$, donnée par:

$$\forall i \in \{0, \dots, N^l\}, \quad \sigma^i = t^n + i \times k^l.$$

Les données initiales (à $\sigma^0 = t^n$) sur l sont données par $(\mathcal{L}(u^{app}(t^n)))_l$, $\mathcal{L}(u^{app}(t^n)) \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ défini par la relation (2.21). La solution numérique est construite avec un schéma volume fini ([20]):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall (j, s) \in \{0, \dots, N_l - 1\} \times \{0, \dots, N^l - 1\}, & v_j^{s+1} - v_j^s = \frac{k^l}{\Delta_j^l} (f_{j-1}^s - f_j^s), \\ \forall j \in \{0, \dots, N_l - 1\}, & v_j^0 = \mathcal{L}(u^{app}(t^n))_j^l, \\ \forall s \in \{0, \dots, N^l - 1\}, & v_{-1}^s = g(p^l, \sigma^s). \end{array} \right. \quad (2.30)$$

Avec g est une donnée du problème ($\mathcal{P}$) (voir aussi hypothèse (D)), v_j^s est l'approximation de v sur $[\tau_j^l, \tau_{j+1}^l] \times [\sigma^s, \sigma^{s+1}]$, $f_j^s = f(v_j^s)$ est l'approximation de $f(v(\tau_j, \sigma^s))$. k^l est le pas de temps sur la ligne de courant l , k^l vérifie la condition suivante (CFL):

$$\forall j \in \{0, \dots, N_l - 1\}, k^l \leq \frac{\Delta_j^l}{\|f'\|_{\infty}}.$$

Remarque 2.5.1 Le choix du schéma (2.30), est dû au fait que f est une fonction croissante, $f' \geq 0$.

$v^{app,l}$ sera définie de la façon suivante:

$$v^{app,l}(\tau, \sigma) = v_j^s, \text{ si } (\tau, \sigma) \in [\tau_j, \tau_{j+1}] \times [\sigma^s, \sigma^{s+1}].$$

Lemme 2.5.1 ([39]) Supposons que $\mathcal{L}(u^{app}(t^n))_l$ vérifie: pour tout j , $B \leq \mathcal{L}(u^{app}(t^n))_l^j \leq A$ (A et B sont définis en (2.8) et (2.9)). Alors $v^{app,l}$ vérifie:

$$\forall (\tau, \sigma) \in [0, \tau_{\max}^l] \times [t^n, t^{n+1}], B \leq v^{app,l}(\tau, \sigma) \leq A.$$

Remarque 2.5.2 Si on note $v^{app,l}(\sigma^i) = v^{app,l}(\cdot, \sigma^i)$, on peut voir pour tout $i \in \{0, \dots, N^l\}$ $v^{app,l}(\sigma^i)$ comme un élément de $\mathcal{E}_l$.

Afin de pouvoir faire des estimations d'erreurs sur la méthode des lignes de courant, on introduit $w^{n,l}$ défini sur $[t^n, t^{n+1}] \times [0, \tau_{\max}^l]$ solution du même schéma numérique (2.30) mais avec comme donnée initiale $(\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u(\cdot, t^n)))_l$.

Lemme 2.5.2 Soient $v^{app,l}$, $w^{n,l}$ définies par le schéma (2.30). Alors:

$$\|w^{n,l}(t^{n+1}) - v^{app,l}(t^{n+1})\|_l \leq \|w^{n,l}(t^n) - v^{app,l}(t^n)\|_l.$$

Démonstration du lemme 2.5.2:

Pour simplifier l'écriture, on pose $w = w^{n,l}$ et $v = v^{app,l}$. Pour tout $(j, s) \in \{-1, \dots, N_l - 1\} \times \{0, \dots, N^l\}$, on définit:

$$U_j^s = w_j^s - v_j^s,$$

avec $w_{-1}^s = v_{-1}^s = g(p^l, \sigma^s)$. On définit aussi:

$$F_j^s = \begin{cases} \frac{f(w_j^s) - f(v_j^s)}{w_j^s - v_j^s} & \text{si } w_j^s \neq v_j^s, \\ f'(w_j^s) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vu que $f' \geq 0$, on a $F_j^s \geq 0$ et $F_j^s \leq \|f'\|_{\infty}$.

Comme w et v vérifient le schéma (2.30), on en déduit que:

$$\forall (j, s) \in \{1, \dots, N_l - 1\} \times \{0, \dots, N^l - 1\}, \Delta_j^l U_j^{s+1} = (\Delta_j^l - k^l F_j^s) U_j^s + k^l F_{j-1}^s U_{j-1}^s.$$

k^l est choisi tel qu'on a $k^l * \|f'\|_{\infty} \leq \Delta_j^l$ pour tout j (CFL), alors on a $(\Delta_j^l - k^l F_j^s) \geq 0$, ce qui donne:

$$\forall (j, s) \in \{0, \dots, N_l - 1\} \times \{0, \dots, N^l - 1\}, \Delta_j^l |U_j^{s+1}| \leq (\Delta_j^l - k^l F_j^s) |U_j^s| + k^l F_{j-1}^s |U_{j-1}^s|.$$

En faisant la somme sur j dans la relation précédente, on obtient:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^{N_l-1} \Delta_j^l |U_j^{s+1}| &\leq \sum_{j=0}^{N_l-1} \Delta_j^l |U_j^s| - k^l \sum_{j=0}^{N_l-1} F_j^s |U_j^s| + k^l \sum_{j=0}^{N_l-1} F_{j-1}^s |U_{j-1}^s| \\
 &= \sum_{j=0}^{N_l-1} \Delta_j^l |U_j^s| - k^l \sum_{j=0}^{N_l-1} F_j^s |U_j^s| + k^l \sum_{j=-1}^{N_l-2} F_j^s |U_j^s| \\
 &= \sum_{j=0}^{N_l-1} \Delta_j^l |U_j^s| - k^l F_{N_l-1}^s |U_{N_l-1}^s| \leq \sum_{j=0}^{N_l-1} \Delta_j^l |U_j^s|,
 \end{aligned}$$

autrement dit, $\|U^{s+1}\|_l \leq \|U^s\|_l$. Par récurrence sur s , on trouve que $\|U^{N^l}\|_l \leq \|U^0\|_l$, i.e $\|w^{n,l}(t^{n+1}) - v^{app,l}(t^{n+1})\|_l \leq \|w^{n,l}(t^n) - v^{app,l}(t^n)\|_l$, d'où le résultat. •

Le résultat suivant donne une estimation d'erreur entre v la solution du problème (2.29) et $w^{n,l}$,

Lemme 2.5.3 Soient v et $w^{l,n}$ définies comme ci-dessus. Alors il existe une constante $c_{vf} \in \mathbb{R}_+^*$, qui dépend de f , u (et ses dérivées d'ordre 1 et 2), et g telle que:

$$\|v(., t^{n+1}) - w^{l,n}(t^{n+1})\|_{L^1(I_l)} \leq c_{vf} h_l. \quad (2.31)$$

Démonstration du lemme 2.5.3:

La démonstration de ce lemme est donnée en annexe B. •

Remarque 2.5.3 Dans le lemme 2.5.3, on utilise l'hypothèse que u (la solution du problème) est de classe C^2 , pour avoir une estimation de l'erreur de l'ordre de h_l .

2.5.2 L'algorithme:

L'algorithme pour construire une solution approchée du problème ($\mathcal{P}$) par la méthode LDC est le suivant:

1. Pour $n = 0$, on calcule $u^{app}(t^0) = \mathbb{P}_M(u_0) \in \mathcal{E}_M$.
2. Tant que $n < N_T$, faire:
 - (a) Pour tout $l \in \mathcal{L}$, on Calcule $(v^{app,l}(t^{n+1}))$, i.e résout l'équation (2.29) sur $I_l \times [t^n, t^{n+1}[$ par le schéma (2.30), avec comme donnée initiale $\mathcal{L}(u^{app}(t^n))_l$,
 - (b) déterminer $v^{app}(t^{n+1}) = (v^{app,l}(t^{n+1}))_{l \in \mathcal{L}} \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$,
 - (c) on calcule $u^{app}(t^{n+1}) = \mathcal{M}(v^{app}(t^{n+1})) \in \mathcal{E}_M$ (voir relation 2.22).
3. $n = n + 1$

Remarque 2.5.4 Par construction de u^{app} , on a : $\forall n \in \{0, \dots, N_T\}$, $u^{app}(t^n) \in \mathcal{E}_M$.

La solution approchée obtenue par cette méthode sera donnée par:

$$u^{app}(x, t) = u^{app}(t^n)_K, \quad \text{si } (x, t) \in K \times [t^n, t^{n+1}[. \quad (2.32)$$

2.6 Stabilité L^∞ et résultat de convergence

L'objectif de cette partie est de montrer quelques propriétés du schéma "numérique lignes de courant". On désignera par ($\mathcal{H}$) les hypothèses suivantes:

($\mathcal{H}1$) Les données du problème ($\mathcal{P}$) vérifient les hypothèses (D).

(H2) Le maillage $\mathcal{M}$ sur Ω est régulier.

(H3) La relation (2.16) est vérifiée.

(H4) Les hypothèses (HML) entre le maillage $\mathcal{M}$ et les maillages sur les lignes de courant sont vérifiées.

(H5) Sur chaque ligne de courant la condition (CFL) est vérifiée, pour le schéma numérique sur la ligne de courant (cf remarque 2.3.2).

2.6.1 Stabilité L^∞

En général, on demande aux schémas numériques qu'on applique pour traiter les problèmes physiques de satisfaire certaines conditions, en particulier on attend des solutions numériques physiquement acceptables. Par exemple si u désigne une saturation comprise entre 0 et 1, on veut que la solution numérique soit aussi comprise entre 0 et 1.

Proposition 2.6.1 *Sous les hypothèses (H). Soit u^{app} la solution numérique définie par la méthode lignes de courant, alors*

$$\forall k \in \{0, \dots, N_T\}, B \leq u^{app}(t^k) \leq A.$$

B et A sont définies en (2.9) et (2.8).

Démonstration de la proposition 2.6.1:

On va remonter cette relation par récurrence sur n . Pour $n = 0$ la relation est vraie car $u^{app}(t^0) = \mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u_0)$ et $B \leq u_0 \leq A$. Supposons que $n > 0$ et que la relation est vraie pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, montrons la pour n . D'après la définition de $u^{app}(t^n)$ on a pour tout $K \in \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} (u^{app}(t^n))_K &= (\mathcal{M}(v^{app}(t^n)))_K \\ &= \sum_{l \in I_K} \frac{\Delta_K^l}{\alpha_K} \left(\sum_{j \in I_{K,l}} \frac{\Delta_j^l}{\Delta_K^l} (v^{app,l}(t^n))_j \right) \end{aligned}$$

Or d'après le lemme (2.5.1), on a $(v^{app,l}(t^n))_j \in [B, A]$ pour tout j et l . D'autre part on a $\frac{\Delta_j^l}{\Delta_K^l} \in]0, 1]$ et $\frac{\Delta_K^l}{\alpha_K} \in]0, 1]$. Ce qui implique que $(u^{app}(t^n))_K \in [B, A]$. Ceci est vrai pour tout $K \in \mathcal{M}$, on en déduit que $B \leq u^{app}(t^n) \leq A$. D'où le résultat. •

2.6.2 Résultat de convergence

Soit u la solution exacte du problème $(\mathcal{P})$, qu'on suppose de classe C^2 sur Q . Pour $t \in [0, T[$ on définit $\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u)(t) = \mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u(\cdot, t)) \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ comme en (2.27), et $\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u)(t) = \mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u(\cdot, t)) \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ comme en (2.28).

Lemme 2.6.2 *Soit u la solution du problème $(\mathcal{P})$ et u^{app} la solution approchée obtenue par la méthode lignes de courant. On suppose que $u \in C^2(Q)$ et que les hypothèses (H) sont vérifiées, on se donne $0 < n \leq N_T$. Alors on a:*

$$\|(\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u) - u^{app})(t^n)\|_{\mathcal{M}} \leq (c_u + c_{vf} c_{max} \beta) \times n \times N_{\mathcal{L}} h$$

Avec $c_u \in \mathbb{R}_+^*$ qui dépend de $\|\vec{\nabla}_x u\|_{L^\infty}$, et $c_{vf} \in \mathbb{R}_+^*$ dépend de $\|\vec{\nabla} u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$, g , f , u (et ses dérivées d'ordre 1 et 2) et $\vec{V}$.

Remarque 2.6.1 *Le lemme précédent (2.6.2), nous donne une estimation sur la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$, mais pas un résultat de convergence. En particulier, si $d = 2$, on a $N_{\mathcal{L}} \leq \frac{c}{h}$, avec $c \in \mathbb{R}_+^*$, ce qui nous donne:*

$$\|(\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u) - u^{app})(t^n)\|_{\mathcal{M}} \leq n \times C.$$

Démonstration du lemme 2.6.2:

D'abord, pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on note:

$$\begin{aligned} A^k &= \|\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u)(t^k) - u^{app}(t^k)\|_{\mathcal{M}}, \\ B^k &= \|\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u)(t^k) - \mathcal{L}(\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u))(t^k)\|_{\mathcal{L}}, \\ C^n &= \|\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u)(t^n) - v^{app}(t^n)\|_{\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

D'après le lemme (2.4.5), et comme $u^{app}(t^n) = \mathcal{M}(v^{app})(t^n)$, on a:

$$\begin{aligned} A^n &= \|\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u)(t^n) - \mathcal{M}(v^{app})(t^n)\|_{\mathcal{M}} \\ &\leq \|\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u)(t^n) - \mathcal{L}(\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u))(t^n)\|_{\mathcal{L}} + \|\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u)(t^n) - v^{app}(t^n)\|_{\mathcal{L}} \\ &= B^n + C^n. \end{aligned}$$

En introduisant $W^{n-1} = (w^{n-1,l})_{l \in \mathcal{L}}$ (définie en 2.5.1), on a :

$$C^n \leq \|(\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u) - W^{n-1})(t^n)\|_{\mathcal{L}} + \|(W^{n-1} - v^{app})(t^n)\|_{\mathcal{L}}. \quad (2.33)$$

D'autre part, grâce au lemme (2.5.2), on a:

$$\|(W^{n-1} - v^{app})(t^n)\|_{\mathcal{L}} \leq \|(W^{n-1} - v^{app})(t^{n-1})\|_{\mathcal{L}}.$$

Or, d'après la définition de W^{n-1} et v^{app} , on a:

$$\begin{aligned} W^{n-1}(t^{n-1}) &= \mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u)(t^{n-1}); \\ v^{app}(t^{n-1}) &= \mathcal{L}(u^{app})(t^{n-1}). \end{aligned}$$

Donc d'après la proposition (2.4.3):

$$\begin{aligned} \|(W^{n-1} - v^{app})(t^{n-1})\|_{\mathcal{L}} &= \|(\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u) - \mathcal{L}(u^{app}))(t^{n-1})\|_{\mathcal{L}} \\ &\leq \|(\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u) - \mathcal{L}(\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u)))(t^{n-1})\|_{\mathcal{L}} + \|(\mathcal{L}(\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u)) - \mathcal{L}(u^{app}))(t^{n-1})\|_{\mathcal{L}} \\ &\leq B^{n-1} + \|(\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u) - u^{app})(t^{n-1})\|_{E_{\mathcal{M}}} \\ &= B^{n-1} + A^{n-1}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

En utilisant les relations (2.33) et (2.34), on trouve:

$$C^n \leq \|(\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u) - W^{n-1})(t^n)\|_{\mathcal{L}} + A^{n-1} + B^{n-1},$$

donc,

$$A^n \leq B^n + \|(\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u) - W^{n-1})(t^n)\|_{\mathcal{L}} + A^{n-1} + B^{n-1}.$$

Or $A^0 = 0$ (d'après la définition de $u^{app}(t^0)$), alors par récurrence on trouve:

$$A^n \leq 2 \sum_{k=0}^{n-1} B^k + \sum_{k=0}^{n-1} \|(\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u) - W^k)(t^{k+1})\|_{\mathcal{L}}. \quad (2.35)$$

Estimation de B^k :

D'après le lemme (2.4.4), il existe une constante $c_u \in \mathbb{R}_+^*$, qui dépend de $\|\vec{\nabla}_x u\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \times (0,T))}$, telle que:

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, B^k \leq c_u N_{\mathcal{L}} h. \quad (2.36)$$

Estimation de $\|(\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u) - W^k)(t^{k+1})\|_{\mathcal{L}}$:

D'après le lemme (2.5.3), il existe une constante $c_2 \in \mathbb{R}_+^*$, qui dépend de $\|\vec{\nabla}_x u_0\|_{\infty}, g, \vec{V}, u$ et f , telle que:

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \|(\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u) - W^k)(t^{k+1})\|_{\mathcal{L}} \leq c_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} h_l. \quad (2.37)$$

D'après l'hypothèse (H2):

$$\forall l \in \mathcal{L}, h_l \leq \beta \Delta \leq c_{\max} \beta h \quad (2.38)$$

En remplaçant (2.38) dans (2.37), on a:

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \|(\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u) - W^k)(t^{k+1})\|_{\mathcal{L}} \leq c_2 c_{\max} \beta N_{\mathcal{L}} h. \quad (2.39)$$

En remplaçant (2.36) et (2.39) dans (2.35), on trouve:

$$\|(\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u) - u^{app}(t^n))\|_{\mathcal{M}} \leq (c_u h + c_{vf} c_{\max} \beta) \times n \times N_{\mathcal{L}} h \quad (2.40)$$

D'où le résultat. •

Théorème 2.6.3 Soit u la solution du problème $(\mathcal{P})$. Soit u^{app} la solution approchée du problème $(\mathcal{P})$ obtenue par la méthode des lignes de courant. On suppose que $u \in C^1(Q)$ et que les hypothèses $(\mathcal{H})$ sont vérifiées. Alors, il existe une constante $c \in \mathbb{R}_+^*$ telle que:

$$\int_{\Omega} |u(x, T) - u^{app}(T)| dx \leq c N_T h.$$

Avec c dépendant de $u_0, g, f, \vec{V}, u$ et du maillage défini sur Ω (i.e $c_{\max}, c_{NLDC}, \dots$)

Démonstration:

Soit $\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u)(T) \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, défini en (2.27). Alors:

$$\int_{\Omega} |u(x, T) - u^{app}(T)| dx \leq \int_{\Omega} |u(x, t^{N_T}) - \mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u)(t^{N_T})| dx + \int_{\Omega} |\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u)(t^{N_T}) - u^{app}(t^{N_T})| dx \quad (2.41)$$

Or, comme $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, il existe $c_{\mathcal{M}} \in \mathbb{R}_+^*$ dépendant de $\|\vec{V}_x u(\cdot, T)\|_{L^\infty(\Omega)}$, tel que:

$$\int_{\Omega} |u(x, t^{N_T}) - \mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u)(t^{N_T})| dx \leq c_{\mathcal{M}} h \quad (2.42)$$

D'autre part, on a:

$$\int_{\Omega} |\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u)(t^{N_T}) - u^{app}(t^{N_T})| dx \leq \frac{h^{d-1}}{c_{\inf}} \|\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u)(t^{N_T}) - u^{app}(t^{N_T})\|_{\mathcal{M}}. \quad (2.43)$$

En utilisant (H3) et la relation (2.40), la relation (2.43) devient (on suppose que $h \leq 1$):

$$\int_{\Omega} |u^{exa} - u^{app}(t^{N_T})| dx \leq (c_{\inf} \times c_{NLDC} (c_{\mathcal{M}} + c_{vf} c_{\max} \beta)) N_T h \quad (2.44)$$

(2.44)+(2.42) dans (2.41) donne:

$$\int_{\Omega} |u(x, T) - u^{app}(T)| dx \leq c N_T h$$

Avec $c = (c_{\inf} \times c_{NLDC} (c_{\mathcal{M}} + c_{vf} c_{\max} \beta)) + c_{\mathcal{M}}$.

Pour N_T fixé (ou $N_T \leq \frac{\epsilon(h)}{h}$, avec $\epsilon(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0), on a:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u^{app}(\cdot, T)\|_{L^1(\Omega)} = 0$$

2.7 Vitesse non stationnaire

Les équations du système $(\mathcal{P})$ sont souvent issues de la physique, et en général la vitesse dépend aussi du temps, dans cette partie on donnera l'algorithme de la méthode des lignes de courant lorsque la vitesse varie avec le temps. On considère le problème suivant: Trouver $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ solution de:

$$(\mathcal{P}_1) = \begin{cases} \partial_t u(x, t) + \operatorname{div}(f(u(x, t)) \vec{V}(x, t)) = 0 & , \quad \forall (x, t) \in Q \\ u(x, 0) = u_0(x) & , \quad \forall x \in \Omega \\ u(r, t) = g(r, t) & , \quad \forall (r, t) \in \Sigma_- \end{cases}$$

Avec $\vec{V}$, f , g et u_0 qui sont données et vérifient les hypothèses suivantes:

- $\vec{V} \in C^1(\mathbb{R}^d \times I, \mathbb{R}^d)$, et $\vec{V}$ vérifie:

$$\forall (x, t) \in Q, \operatorname{div}_x(\vec{V}(x, t)) = 0, \quad (2.45)$$

$$\text{il existe } \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, t) \in \overline{\Omega}, \eta_1 \leq |\vec{V}(x, t)| \leq \eta_2. \quad (2.46)$$

- f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 strictement croissante.
- g et u_0 sont supposées assez régulières.

Le système $(\mathcal{P}_1)$ admet une solution entropique, de plus cette solution est unique ([9]).

Comme la vitesse varie avec le temps, on ne peut plus appliquer l'algorithme de la méthode des lignes de courant expliqué auparavant. Ceci est dû à plusieurs raisons, dont les principales sont:

1. Les trajectoires des lignes de courant dépendront du temps, car la vitesse en dépend aussi. Ainsi pour une ligne de courant son paramétrage est de la forme $q = q(\tau, t)$.
2. On ne peut pas déterminer le problème 1d à résoudre sur une ligne de courant.

Pour surmonter cette difficulté on va approcher la vitesse par une vitesse constante par morceaux sur un maillage de l'intervalle de temps considéré, ensuite à chaque période de temps où la vitesse est supposée constante on résout un problème approché du système $(\mathcal{P}_1)$.

2.7.1 Le problème modifié

On se donne $N_T \in \mathbb{N}^*$, et on pose $DT = T/N_T$. DT est le grand pas du temps, et pour $n \in \{0; \dots, N_T\}$ on note $t^n = n \times DT$. On considère le système suivant:

$$(\mathcal{P}_1^n) = \begin{cases} \partial_t \bar{u}^n(x, t) + \operatorname{div}(f(\bar{u}^n(x, t)) \vec{V}(x, t^n)) = 0 & , \quad \forall (x, t) \in Q^n \\ \bar{u}^n(x, t^n) = U^n(x) & , \quad \forall x \in \Omega \\ \bar{u}^n(r, t) = g(r, t) & , \quad \forall (r, t) \in \Sigma_-^n \end{cases}$$

Avec:

- $Q^n = \{(x, t) \in Q, t \in [t^n, t^{n+1}]\}$,
- $\Sigma_-^n = \{(x, t) \in \Sigma_-, t \in [t^n, t^{n+1}]\}$,
- U^n est la donnée initiale à l'instant t^n .

D'après le théorème (2.2.1) le problème $(\mathcal{P}_1^n)$ admet une solution entropique unique. Dans ce problème la vitesse est constante en temps, donc on va pouvoir appliquer la méthode des lignes de courant pour calculer une solution approchée de $\bar{u}^n$.

2.7.2 L'algorithme :

1. Pour $n = 0$, on pose $u^{app}(t^0) = \mathbb{P}(u_0) \in \mathcal{E}_M$
2. Si $n \in \{1; \dots; N_T\}$,
 - (a) $U^{n-1} = u^{app}(t^{n-1})$,
 - (b) on trace les lignes de courant par rapport à $\vec{V}(\cdot, t^{n-1})$,
 - (c) on construit une solution approchée ($\bar{u}^{n-1}$) du problème $(\mathcal{P}_1^{n-1})$, par la méthode LDC (cf partie 2.5.2), qu'on notera $\bar{u}^{app}(t^n)$.
3. $u^{app}(t^n) = \bar{u}^{app}(t^n)$
4. $n = n + 1$, et on revient à l'étape 2.

Et la solution approchée du système $(\mathcal{P}_1)$ est donnée par:

$$u^{app}(x, t) = (\bar{u}^{app}(t^n))_K, \quad \text{si } (x, t) \in K \times [t^n, t^{n+1}[. \quad (2.47)$$

2.7.3 Estimation de l'erreur

Dans cette partie on va essayer d'avoir une idée de l'estimation de l'erreur, il s'agit d'un calcul formel et non d'une démonstration mathématique, ceci afin de comprendre davantage le choix qu'il faut faire sur le grand pas du temps. Soit $n \in \{0; \dots, N_T - 1\}$. Notons :

- $\bar{v}^n$ la solution exacte de $(\mathcal{P}_1^n)$ avec $U^n(x) = u(x, t^n)$.
- $\bar{u}^n$ la solution exacte de $(\mathcal{P}_1^n)$ avec $U^n(x) = u^{app}(t^n)$.

Remarque 2.7.1 $\bar{v}^n$ et $\bar{u}^n$ ne sont pas forcément des fonctions continues sur Q , même si on suppose que u est très régulière sur Q .

D'autre part $u^{app}(t^n)$ n'est pas de classe C^1 sur Ω , néanmoins, $u^{app}(t^n)$ est de classe $C^1(\Omega)$ par morceaux.

Remarque 2.7.2 Pour le problème $(\mathcal{P}_1^n)$, on sait que les hypothèses du théorème (2.6.3) ne sont pas satisfaites dans ce cas (cf remarque 2.7.1) mais on va supposer qu'elles restent valables.

Il est clair que:

$$\begin{aligned} \|(u - u^{app})(\cdot, t^{n+1})\|_{L^1(\Omega)} &\leq \|(u - \bar{v}^n)(\cdot, t^{n+1})\|_{L^1(\Omega)} \\ &\quad + \|(\bar{v}^n - \bar{u}^n)(\cdot, t^{n+1})\|_{L^1(\Omega)} + \|(\bar{u}^n - \bar{u}^{app})(\cdot, t^{n+1})\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Or:

- D'après le théorème (2.6.3) (cf remarque 2.7.2): il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$, telle que:

$$\|(\bar{u}^n - \bar{u}^{app})(\cdot, t^{n+1})\|_{L^1(\Omega)} \leq Ch,$$

h étant le pas de maillage.

Dans le cadre de ce travail on va admettre l'estimation ci-dessus.

- A l'instant t^{n+1} , on a:

$$\|(\bar{v}^n - \bar{u}^n)(\cdot, t^{n+1})\|_{L^1(\Omega)} \leq \|(\bar{v}^n - \bar{u}^n)(\cdot, t^n)\|_{L^1(\Omega)},$$

d'autre part, $\bar{v}^n(\cdot, t^n) = u(\cdot, t^n)$ et $\bar{u}^n(\cdot, t^n) = u^{app}(\cdot, t^n)$. Donc:

$$\|(\bar{v}^n - \bar{u}^n)(\cdot, t^{n+1})\|_{L^1(\Omega)} \leq \|(u - u^{app})(\cdot, t^n)\|_{L^1(\Omega)}.$$

En notant pour $n \in \{0, \dots, N_T - 1\}$:

$$A^n = \|(u - u^{app})(\cdot, t^{n+1})\|_{L^1(\Omega)},$$

$$B^n = \|(u - \bar{v}^n)(\cdot, t^{n+1})\|_{L^1(\Omega)}.$$

On trouve:

$$A^n \leq A^{n-1} + B^n + Ch.$$

Comme $A^0 = 0$, alors par récurrence, on trouve:

$$\|(u - u^{app})(\cdot, T)\|_{L^1(\Omega)} \leq (N_T Ch + \sum_{0 \leq k < N_T} B^k). \quad (2.48)$$

Remarque 2.7.3 Si $\partial_t \vec{V} = 0$, par unicité de la solution entropique, on a $u = \bar{v}^n$ p.p sur Q^n , en particulier $B^n = 0$ pour tout n . Donc on retrouve le résultat du théorème (2.6.3), à savoir:

$$\|(u - u^{app})(\cdot, T)\|_{L^1(\Omega)} \leq N_T Ch.$$

Dans l'estimation qu'on a obtenue ci-dessus, on a une partie qui ne dépend pas de h ($\sum_k B^k$), cette partie ne dépend que de N_T (ou DT). Pour que la méthode des lignes de courant converge ou qu'elle donne de bons résultats, il faut des conditions sur le grand pas de temps (DT), c'est à dire sur l'intervalle de temps dans lequel on met à jour la vitesse.

Pour l'étude de $\sum_k B^k$, on peut montrer facilement que chaque B^k , tend vers 0 lorsque DT tend vers 0. Le problème est que B^k tend vers 0 à une vitesse de l'ordre DT , donc ceci ne donne pas que $\sum_k B^k$ tend vers 0. En fait, $\sum_k B^k$ reste borné.

On aurait pu prendre dans le problème modifié une autre approximation de la vitesse, par exemple:

$$\vec{V}(x)^n = \frac{1}{DT} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \vec{V}(x, s) ds,$$

Un tel choix peut (peut être) conduire à de meilleures estimations, mais dans le problème physique qui nous intéresse, on ne peut pas prendre cette approximation de la vitesse, car $\vec{V}$ est donnée à t^n uniquement.

Il y a aussi une deuxième possibilité pour réduire le somme des B^k , qui consiste à prendre le grand pas de temps variable en fonction de $\partial_t \vec{V}$, i.e DT petit lorsque la variation de la vitesse par rapport au temps est grande, et DT grand dans le cas contraire. Mais pour les tests numériques de cette partie, on a utilisé un pas de temps fixe.

Remarque 2.7.4 On utilisera un pas de temps variable dans les tests numériques sur la simulation des bassins, (cf partie 3.4), dont le choix à chaque étape est fait en fonction de la variation de la saturation et non pas de la vitesse.

Dans les tests numériques qui suivent, on verra qu'on peut trouver un N_T pour lequel la méthode donne de bons résultats.

2.8 La méthode volume fini

La méthode de volume fini est très utilisée dans la modélisation des problèmes physiques, en particulier dans la modélisation des bassins. Cette méthode est très adaptée à la modélisation numérique des lois de conservation, car les schémas numériques volume fini sont conservatifs et robustes.

Principes de cette méthode:

1. Les fonctions sont approchées par des fonctions constantes par mailles.
2. Le système discret est obtenu en intégrant les équations sur chaque maille du maillage.

Pour plus de détails sur cette méthode voir ([20],[16]), pour le cas où Ω est borné voir ([25],[38]) et aussi ([22],[26]) pour la modélisation de bassin et de réservoir.

On donnera le schéma numérique pour construire une solution approchée du problème $(\mathcal{P}_1)$.

2.8.1 Le schéma numérique volume fini

On se donne un maillage $\mathcal{M}$ de Ω , on suppose que $\mathcal{M}$ vérifie toutes les hypothèses données dans (2.3.1). Pour chaque maille $p \in \mathcal{M}$ on note $\mathcal{A}_p = \{\sigma \in \mathcal{A}, \sigma \subset \partial p\}$. D'après les hypothèses sur $\mathcal{M}$, si $\sigma \in \mathcal{A}_p$ soit $\sigma \in \mathcal{A}_\partial$, soit il existe $q \in \mathcal{M}$ tel que $\sigma = \sigma_{pq}$. Enfin on note $\vec{n}_p$ la normale extérieure à ∂p sortant de p .

On considère aussi une subdivision $(t^n)_{0 \leq n \leq N}$ de $[0, T]$, de la forme $t^n = n \times dt$ avec $dt = \frac{T}{N}$.

Pour toute maille $p \in \mathcal{M}$ et $\sigma \in \mathcal{A}_p$, et $n \in \{0, \dots, N\}$, on définit:

$$V_{p,\sigma}^n = \frac{1}{dt} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma} \vec{V}(x, t) \cdot \vec{n}_p(x) d\gamma(x) dt.$$

La solution discrète $(u_p^n)_{p \in \mathcal{M}, n \in \{0, \dots, N\}}$ est définie par le schéma suivant:

$$u_p^0 = \frac{1}{m(p)} \int_p u_0(x) dx, \quad \forall p \in \mathcal{M}, \quad (2.49)$$

$$m(p) \frac{u_p^{n+1} - u_p^n}{dt} + \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_p} f_{p,\sigma}^n V_{p,\sigma}^n = 0, \quad \forall p \in \mathcal{M}, n \in \{1, \dots, N\}. \quad (2.50)$$

Avec $f_{p,\sigma}^n$ définie par:

- Si σ est une arête intérieure, c.-à-d, il existe $q \in \mathcal{N}(p)$ tel que $\sigma = \sigma_{pq}$, alors on pose:

$$f_{p,\sigma}^n = \begin{cases} f(u_p^n) & \text{Si } V_{p,\sigma}^n \geq 0, \\ f(u_q^n) & \text{Sinon} \end{cases} \quad (2.51)$$

- Si σ est une arête extérieure, c.-à-d, $\sigma \subset \mathcal{A}_\partial$, alors on pose:

$$f_{p,\sigma}^n = \begin{cases} f(u_p^n) & \text{Si } V_{p,\sigma}^n \geq 0, \\ f(g_\sigma^n) & \text{Sinon} \end{cases} \quad (2.52)$$

$$\text{Avec } g_\sigma^n = \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} g(x, t^n) d\gamma(x).$$

La solution approchée du problème $(\mathcal{P}_1)$ est définie par:

$$u_{h,dt}(x, t) = u_p^n, \quad \text{si } (x, t) \in p \times [t^n, t^{n+1}[. \quad (2.53)$$

On suppose de plus que dt vérifie une condition CFL, c'est à dire, il existe une constante $c \in \mathbb{R}_+^*$ qui dépend de f et $\vec{V}$, telle que:

$$dt \leq ch. \quad (2.54)$$

Remarque 2.8.1 Le choix du décentrement dans (2.51) et (2.52) (décentrement amont) est dû au fait que la fonction f est croissante. Dans le cas général on remplace $f_{p,\sigma}^n V_{p,\sigma}^n$ par $F_{p,\sigma}^n(u_p, u_\sigma)$, appelé flux numérique. Pour plus de détails voir ([20],[38]).

Remarque 2.8.2 Il est clair que si $\sigma = \sigma_{pq}$ alors on a:

$$f_{p,\sigma}^n V_{p,\sigma}^n = -f_{q,\sigma}^n V_{q,\sigma}^n,$$

La solution approchée définie par le schéma volume fini (2.49) et (2.50) vérifie la stabilité L^∞ . Plus précisément on a:

Proposition 2.8.1 ([38]) Soit $u_{h,dt}$ la solution approchée du problème $(\mathcal{P}_1)$ définie par (2.49) et (2.50), on suppose que (2.54) est vérifiée. Alors :

$$A \leq u_{h,dt}(x, t) \leq B, \quad p(x, t) \in Q.$$

B et A sont définies en (2.9) et (2.8).

On sait que, sous les hypothèses (D), le problème $(\mathcal{P}_1)$ admet une solution entropique faible u , et que cette solution est unique.

Théorème 2.8.2 ([38]) Soit $u_{h,dt}$ la solution approchée du problème $(\mathcal{P}_1)$ définie par (2.49) et (2.50), on suppose que (2.54) est vérifiée. Alors, $u_{h,dt}$ converge vers u lorsque h tend vers 0 dans $L^p(Q)$, $p \in [1, \infty[$.

Le résultat précédent nous donne la convergence de la solution approchée vers u , mais pas une estimation de l'erreur ou l'ordre de la convergence. On sait ([20]) que lorsque $\Omega = \mathbb{R}^d$ on a une estimation de l'erreur de l'ordre $h^{1/4}$ ($\sqrt{h}$ si le maillage est cartésien). En revanche pour le problème sur un domaine borné, i.e avec des données aux bords, il n'y a pas "encore" de résultats sur l'estimation de l'erreur (pour $d > 1$).

Dans certains tests numériques, on fera la comparaison des résultats de la méthode lignes de courant avec les résultats de la méthode volume fini.

Remarque 2.8.3 Dans les tests numériques de cette partie, et pour rester compatible avec les choix de la méthode lignes de courant, on a pris comme approximation de $V_{p,\sigma}$ la valeur:

$$V_{p,\sigma}^n = \int_{\sigma} \vec{V}(x, t^n) \cdot \vec{n}_p(x) d\gamma(x).$$

2.9 Tests numériques

Dans cette partie, on donne quelques résultats de simulations numériques obtenues avec la méthode lignes de courant.

On commence par donner les notations des normes qu'on utilisera dans la suite pour faire les comparaisons. Soit $Q \in \mathcal{E}_M$, $Q = \sum_K q_K 1_K$, on définit:

$$\begin{aligned}\|Q\|_1 &= \sum_{K \in \mathcal{M}} m(K) |q_K|, \\ \|Q\|_2 &= \left(\sum_{K \in \mathcal{M}} m(K) |q_K|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|Q\|_\infty &= \sup_{K \in \mathcal{M}} \{|q_K|\}.\end{aligned}$$

Il est clair que $\|\cdot\|_\alpha$ ($\alpha \in \{1; 2; \infty\}$), définit une norme sur $\mathcal{E}_M$.

Si u est la solution du problème $(\mathcal{P})$, et $\bar{u} \in \mathcal{E}_M$ une solution approchée, alors on définit:

$$Er_\alpha(\bar{u}) = \|\bar{u} - \mathbb{P}_M(u)\|_\alpha, \quad \alpha \in \{1; 2; \infty\}. \quad (2.55)$$

Les tests numériques sont divisés en deux parties, la première avec une vitesse stationnaire, la seconde avec vitesse non stationnaire.

Les objectifs de ces tests sont:

1. étudier la convergence de la méthode en fonction de h , h le pas de maillage, et aussi l'ordre de convergence (**Test 1**)
2. étudier la sensibilité de la méthode par rapport au maillage donné sur Ω , (**Test 1Bis**, **Test 2**)
3. étudier la sensibilité de la méthode par rapport au grand pas de temps lorsque la vitesse ne dépend pas du temps, (**Test 3**).
4. étudier la sensibilité de la méthode par rapport au grand pas de temps lorsque la vitesse dépend du temps, (**Test 4**, **Test 5**).

Remarque 2.9.1 • Dans les tests qui suivent (sauf test3), on a pris $f(x) = x$.

- Pour les résultats numériques, l'échelle considérée est linéaire (et non logarithmique), car notre but est de montrer qu'on a une convergence de l'ordre de h et non de calculer l'ordre.

2.9.1 Vitesse stationnaire

Dans cette première partie des tests on considère une vitesse qui ne dépend pas du temps, i.e. on reste dans les hypothèses du résultat de convergence. Le but de ces tests dans un premier temps est de voir l'évolution de l'erreur en fonction de h (h le pas de maillage) et la vitesse de convergence à N_T fixée. Ensuite on fait varier N_T pour voir l'influence du grand pas de temps DT ($DT = T/N_T$) sur la vitesse de convergence.

Ordre de convergence. Test1

On considère $\Omega =]1, 11[\times]0, 10[\subset \mathbb{R}^2$ et $I = [0, 1[$ l'intervalle du temps, et les autres données du test sont:

- On suppose que la vitesse est donnée par:

$$\forall (x, y) \in \bar{\Omega}, \vec{V}(x, y) = (x, -y),$$

ainsi $\vec{V}$ vérifie les relations (3.7) et (2.7),

- pour les données initiales à $t = 0$, on prend:

$$\forall (x, y) \in \Omega, u_0(x, y) = y/x,$$

- pour les conditions aux limites, on suppose que:

$$g(x_r, y_r, t) = \frac{y_r}{x_r} e^{2t}, \forall (x_r, y_r, t) \in \Sigma_-.$$

Avec ces données, la solution du problème ($\mathcal{P}$) est donnée par:

$$\forall (x, y, t) \in Q = \Omega \times I, u(x, y, t) = \frac{y}{x} e^{2t}.$$

Ainsi à l'instant T , les normes de u dans Ω sont:

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^1(\Omega)} = 885.909, \|u(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)} = 128.627.$$

Dans ce cas on prend un maillage cartésien de Ω , constitué de carrés de taille $d = 10/n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Trois séries de simulations sont faites, avec $N_T = 1, 2, 10$.

Liste des figures

- Fig-2 représente Er_1 l'erreur en norme $(\|\cdot\|_1)$
- Fig-3 représente Er_2 l'erreur en norme $(\|\cdot\|_2)$

Sur les deux figures, on constate que:

1. A N_T fixé, l'erreur tend vers 0 lorsque h tend vers 0, avec une convergence de l'ordre h (à partir de $h = 0.2$ pour $N_T = 10$).
2. A h fixé, l'erreur augmente avec N_T , en revanche on remarque qu'à partir d'un certain h (ici $h = 0.1$) la différence devient très petite, c.-à-d l'erreur due à la "moyennisation" lorsque h diminue devient négligeable devant l'erreur du schéma numérique.

Comportement par rapport au maillage $\mathcal{M}$. Test1Bis

Pour ce test on reprend les mêmes données que dans le test précédent, mais avec un maillage non cartésien de Ω , constitué de trapèzes (voir Fig-7), dans le but de voir l'influence du maillage initial $\mathcal{M}$ de Ω sur la méthode des lignes de courant.

Remarque 2.9.2 Ce maillage est choisi de cette façon car dans le problème physique qui nous intéresse, on utilise souvent un maillage dont les volumes de contrôle sont des trapèzes (en 2D).

Deux séries de tests sont faites avec $N_T = 1$ et $N_T = 2$.

Liste des figures

- Fig-7 représente le maillage sur Ω , ainsi que les lignes de courant tracées dans Ω
- Fig-4 représente Er_1 l'erreur en norme $(\|\cdot\|_1)$
- Fig-5 représente Er_2 l'erreur en norme $(\|\cdot\|_2)$

On remarque qu'on a toujours une convergence de l'ordre de h (à partir de $h = 0.2$ pour Er_2), et que la méthode se comporte bien pour ce maillage.

Contrairement à la méthode volume fini, qui dépend beaucoup du maillage $\mathcal{M}$, la méthode des lignes de courant est beaucoup moins dépendante du maillage $\mathcal{M}$. En fait, la sensibilité de cette méthode au maillage donné sur Ω est limitée seulement au traçage des lignes de courant, et la régularité qu'on demande au maillage $\mathcal{M}$ sert seulement à assurer le bon traçage des lignes de courant.

On verra (cf Annexe A) qu'il y a plusieurs méthodes pour tracer les lignes de courant lorsque les mailles de $\mathcal{M}$ ne sont pas des rectangles.

Comportement par rapport au maillage $\mathcal{M}$. Test 2

On considère $\Omega =]0, 2000[\times]0, 2000[\subset \mathbb{R}^2$ et $I = [0, 30[$ l'intervalle du temps, et les autres données du test sont:

- On suppose que la vitesse est donnée par:

$$\forall (x, y) \in \overline{\Omega}, \vec{V}(x, y) = 1000((x_1 - x_1^2)(1 - 2y_1), -(y_1 - y_1^2)(1 - 2x_1)),$$

avec $x_1 = x/2000$, $y_1 = y/2000$. $\vec{V}$ vérifie $\text{div}(\vec{V}) = 0$ et $\vec{V}(x, y) = 0$ si $(x, y) \in \partial\Omega$

- pour les données initiales à $t = 0$, on prend:

$$\forall (x, y) \in \Omega_1 =]1250, 1500[^2, u_0(x, y) = 1,$$

Dans ce cas, on n'a pas la solution exacte du problème. Afin de faire une estimation de la solution approchée donnée par la méthode lignes de courant, on construit une solution approchée de ce problème par la méthode volume fini sur un maillage très fin de Ω (2000×2000 mailles). Ensuite on projette cette solution de référence sur le maillage grossier (40 × 40 mailles) et on compare avec la solution lignes de courant. En même temps on a construit une solution approchée de ce problème sur le maillage grossier par la méthode volume fini.

Les résultats de comparaison avec la solution de référence:

	N_2	Er_2	N_1	ER_1
ref	4.035	0.000	25.000	00.000
ldc	3.987	1.185	25.059	08.357
impes	1.423	3.368	25.000	35.255

On remarque sur les résultats de comparaison que la solution approchée donnée par la méthode lignes de courant est beaucoup plus précise que celle donnée par la méthode volume fini. Il est clair que la solution volume fini est influencée par le fait que le maillage sur Ω n'est pas adapté au champ de vitesse. Cependant la méthode des lignes de courant se comporte bien et elle n'est pas influencée par le maillage.

Schéma des lignes de courant non conservatif!

Dans le test précédent, on a $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$, où $\vec{n}$ est la normale extérieure à Ω . Ce qui donne par intégration de l'équation vérifiée par u sur Ω :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t u(x, t) dx &= - \int_{\Omega} \text{div}(f(u(x, t)) \vec{V}(x)) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} f(u) \vec{V} \cdot \vec{n} d\gamma = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\forall t \in [0, T], \int_{\Omega} u(x, t) dx = \int_{\Omega} u_0(x) dx.$$

Or dans ce test, la solution approchée donnée par la méthode des lignes de courant ne vérifie pas cette relation ($|\int_{\Omega} u_{ldc}(x, 30) dx - \int_{\Omega} u_0(x) dx| = 0.059$), contrairement à celle donnée par la méthode volume fini.

Dependance par rapport à N_T , Test3

On considère $\Omega =]0, 1[^2 \subset \mathbb{R}^2$ et $I = [0, 1[$ l'intervalle du temps, et les autres données du test sont:

- On suppose que la vitesse est donnée par:

$$\forall (x, y) \in \overline{\Omega}, \vec{V}(x, y) = (1, 1),$$

- pour les données initiales à $t = 0$, on prend:

$$\forall (x, y) \in \Omega, u_0(x, y) = y + x,$$

- pour les conditions aux limites, on suppose que:

$$g(x_r, y_r, t) = \frac{y_r + x_r}{(t + 1)}, \forall (x_r, y_r, t) \in \Sigma_-.$$

- la fonction f est donnée par : $f(u) = u^2/4$.

Avec ces données, la solution du problème $(\mathcal{P})$ est donnée par:

$$\forall (x, y, t) \in Q = \Omega \times I, u(x, y, t) = \frac{x + y}{(t + 1)}.$$

Ainsi à l'instant T , les normes de u dans Ω sont:

$$\|u(., T)\|_{L^1(\Omega)} = 0.5, \|u(., T)\|_{L^2(\Omega)} = 0.50054.$$

Dans ce cas on prend un maillage cartésien de Ω , constitué de carrés de taille $d = 1/n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Deux séries de simulations sont faites, avec $N_T = 1$ et $N_T = \frac{n}{2} = \frac{c}{h}$, où h est le pas du maillage ($h = \sqrt{2}d$) et $c = 1/\sqrt{2}$.

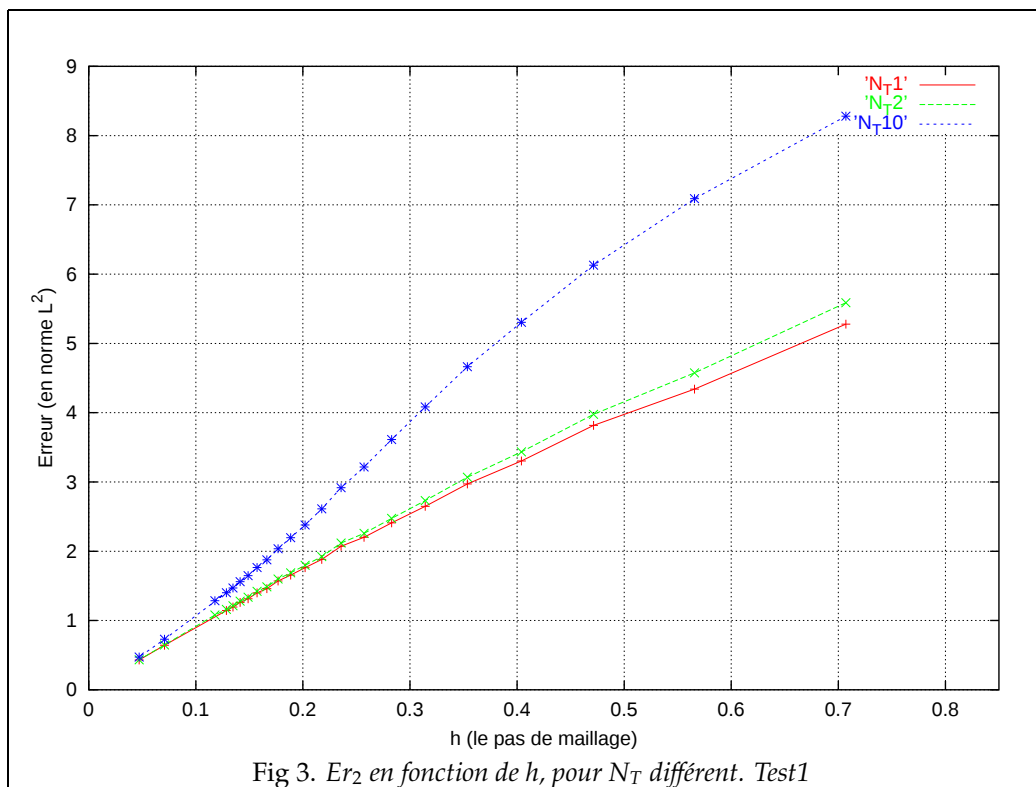
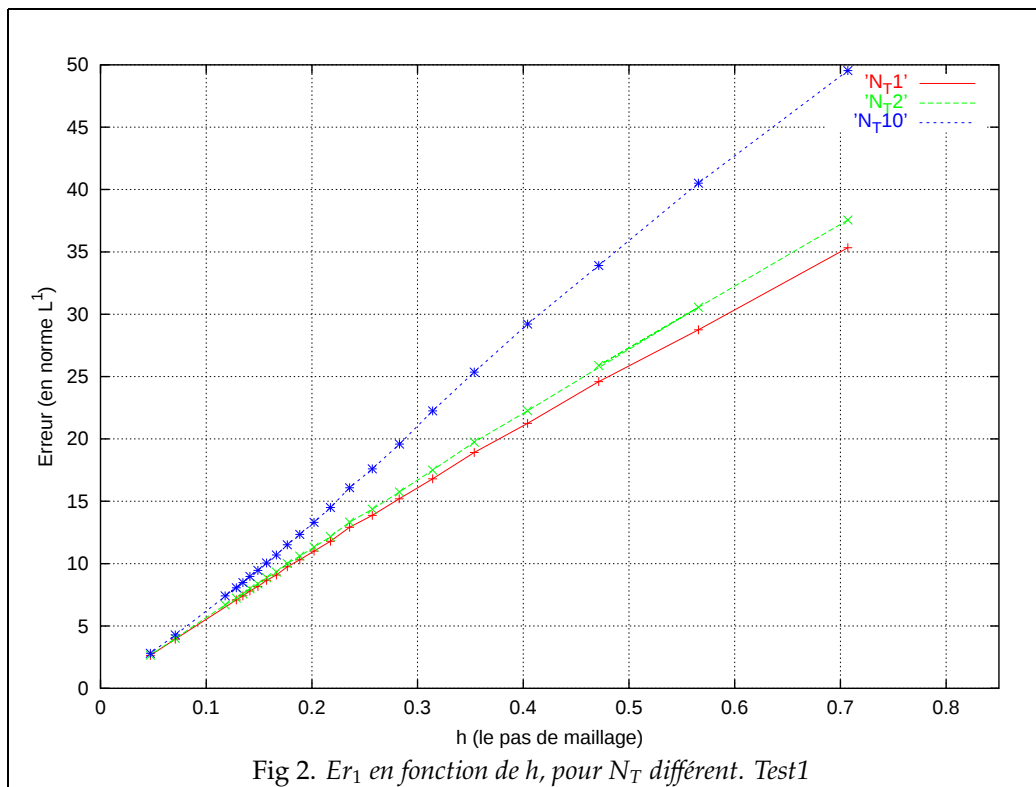
Liste des figures

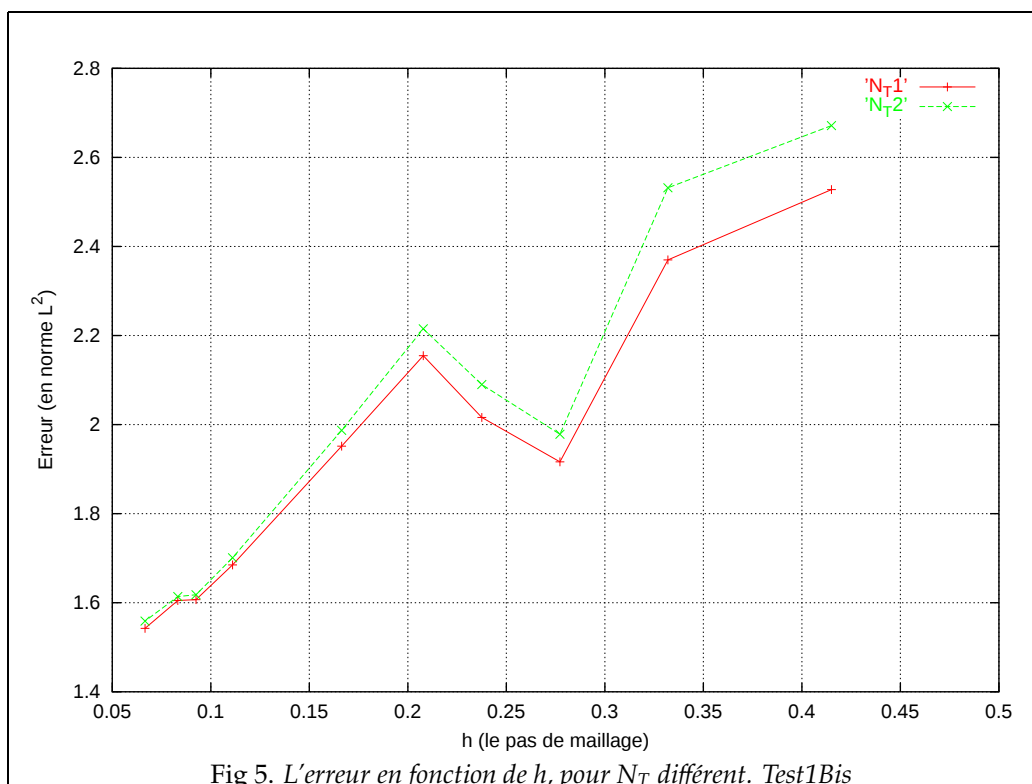
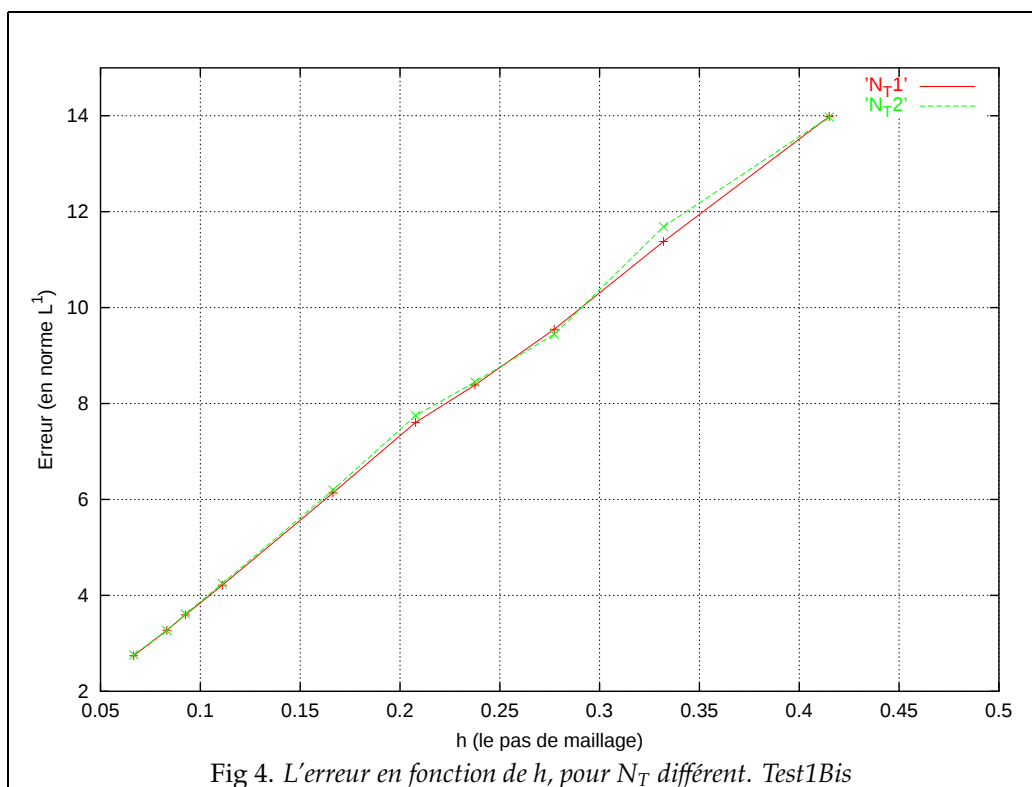
- Fig-12 représente Er_1 l'erreur en norme $(\|\cdot\|_1)$

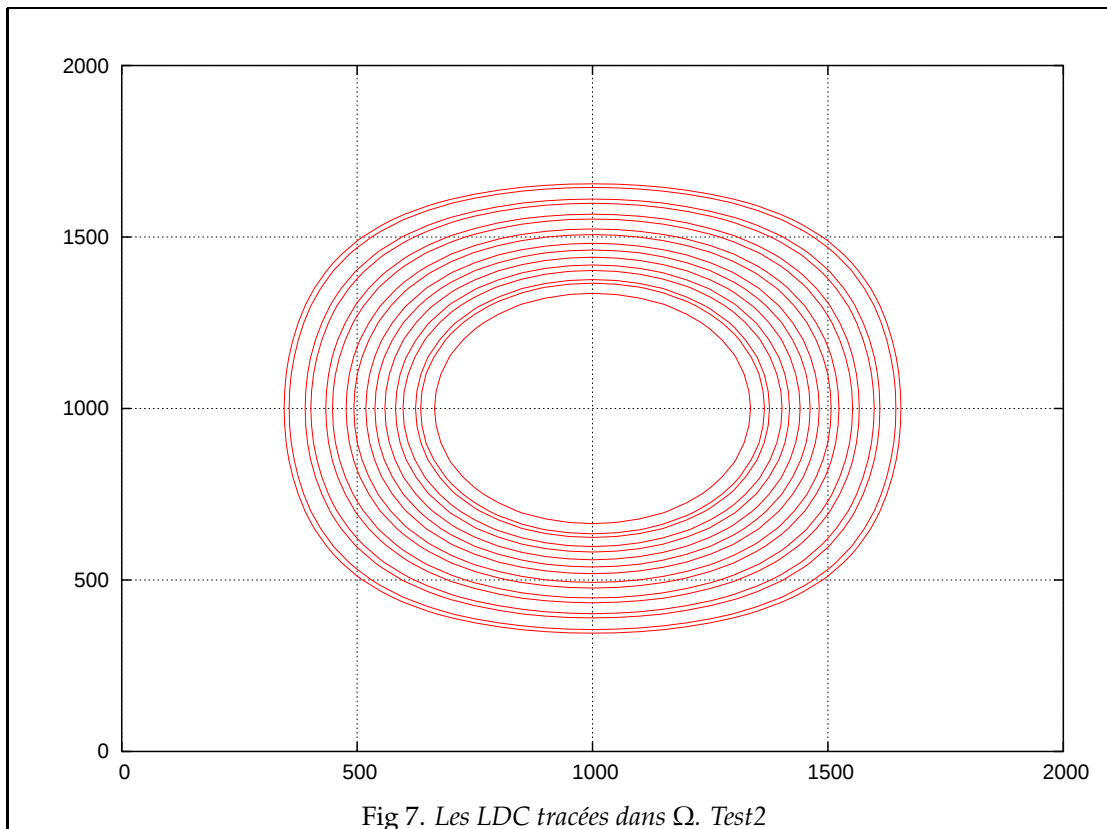
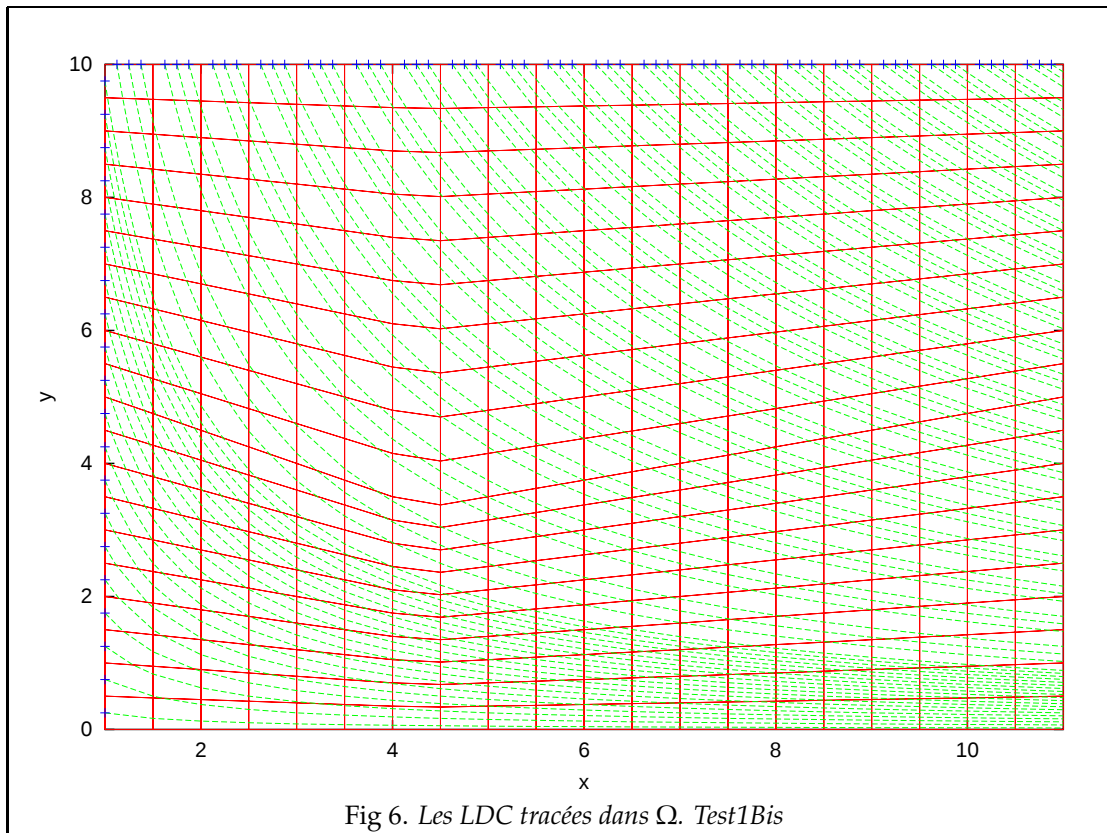
Sur cette figure, on constate que:

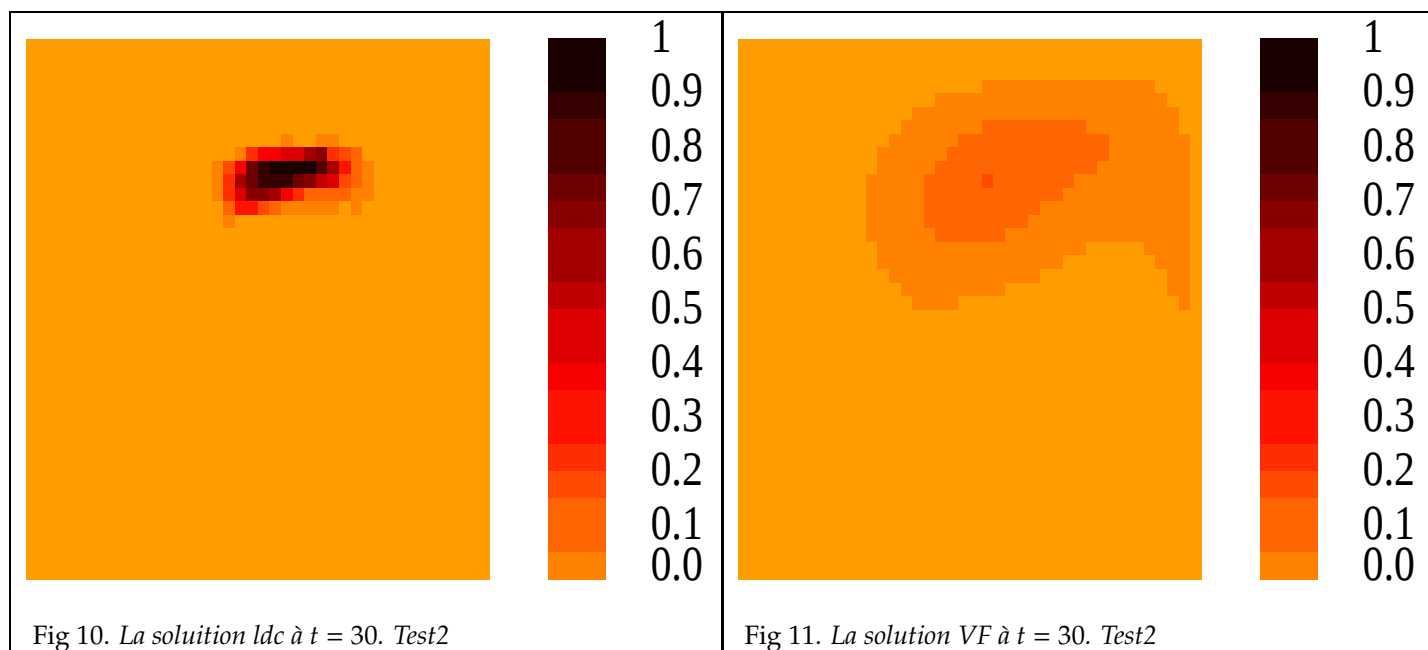
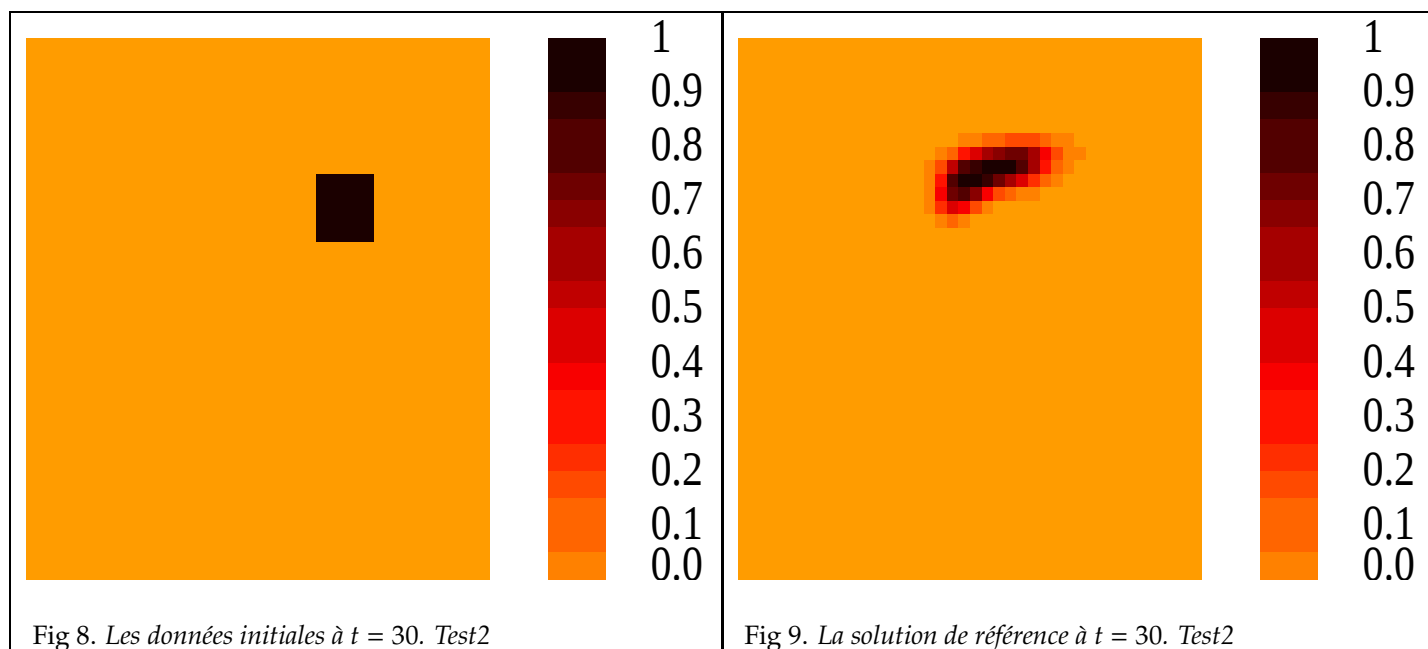
1. A $N_T = 1$ (resp. $N_T = c/h$) fixé, l'erreur tend vers 0 lorsque h tend vers 0, avec une convergence de l'ordre h .
2. Les résultats pour N_T de l'ordre de $1/h$ sont légèrement meilleurs que ceux de $N_T = 1$.

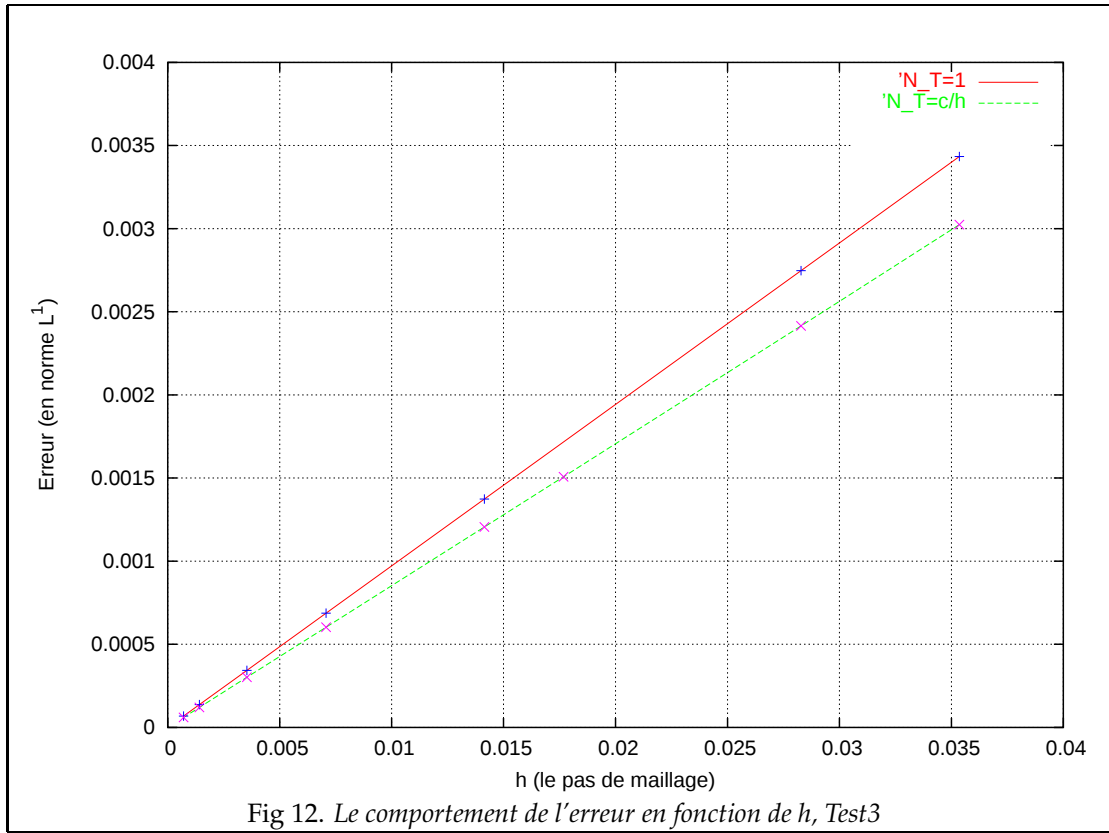
On peut dire à l'issue de ce test que lorsque les données sont régulières et que la vitesse ne dépend pas du temps on a toujours une estimation de l'erreur de l'ordre de h , et cette estimation est indépendante de N_T . Ce qui est donc meilleur que l'estimation théorique démontrée du théorème 2.6.3











2.9.2 Vitesse non stationnaire..

Dans cette partie on teste la méthode des lignes de courant sur des cas où la vitesse dépend du temps aussi. Le but de ces tests est d'étudier le comportement de cette méthode vis-à-vis de N_T (le grand pas de temps).

Test4

Dans ce premier test on prend une vitesse de la forme $\vec{V}(\cdot, t) = G(t)\vec{V}_0(\cdot)$, avec $\vec{V}_0$ ne dépendant pas du temps. On sait que dans ce cas une ligne de courant tracée dans $\bar{\Omega}$ dont le point d'origine est p garde la même trajectoire au cours du temps, mais que seul le temps de vol change.

On considère $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[\subset \mathbb{R}^2$ et $I = [0, 1[$ l'intervalle du temps, et les autres données du test sont:

- On suppose que la vitesse est donnée par:

$$\forall (x, y) \in \bar{\Omega}, \vec{V}(x, y) = G(t)(x, -y),$$

avec $G(t) = 2t + 1$. Ainsi $\vec{V}$ vérifie les relations (3.7) et (2.7),

- pour les données initiales à $t = 0$, on prend:

$$\forall (x, y) \in \Omega, u_0(x, y) = x + y,$$

- pour les conditions aux limites, on suppose que:

$$g(x_r, y_r, t) = x_r e^{-(t^2+t)} + y_r e^{(t^2+t)}, \forall (x_r, y_r, t) \in \Sigma_-.$$

Avec ces données, la solution du problème $(\mathcal{P}_1)$ est donnée par:

$$\forall (x, y, t) \in Q = \Omega \times I, u(x, y, t) = x e^{-t^2-t} + y e^{t^2+t}.$$

A l'instant T , les normes de u sont:

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^1(\Omega)} = 3.7622, \|u(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)} = 4.32499.$$

Pour ce test on a pris un maillage cartésien de Ω , on a fait deux tests avec deux pas de maillage h_1 et $h_2 = 0.5 \times h_1$.

Listes des figures

- Fig-13 représente Er_1 l'erreur en norme $(\|\cdot\|_1)$
- Fig-14 représente Er_2 l'erreur en norme $(\|\cdot\|_2)$

On remarque sur ces figures:

- La variation de l'erreur est très grande lorsque DT est grand, en particulier entre $DT = T$, $DT = \frac{T}{2}$ et $DT = \frac{T}{3}$.
- Pour DT proche de 0, l'erreur diminue lorsque DT diminue aussi, mais la variation de l'erreur n'est pas très importante.
- A DT fixé, on remarque que l'erreur diminue par rapport à h , par exemple pour $DT = \frac{T}{10}$, on a $Er_{1,h_1} = 0.1182$ et $Er_{1,h_2} = 0.0984$.

La deuxième remarque rejoint la remarque du test 1, à savoir que l'erreur due à la moyennisation lorsque h diminue devient négligeable devant l'erreur du schéma numérique.

Donc pour ce test, on peut dire qu'on doit prendre DT petit pour avoir de bons résultats. Le DT idéal (qu'on notera désormais DT^*) serait ici $\frac{T}{10}$. Il est intéressant de voir que ce DT est le même pour h_2 et h_1 . Donc ce choix ne dépend pas de h mais uniquement de la vitesse.

Remarque 2.9.3 Il est clair que pour avoir la convergence de la méthode des lignes de courant, il faut que DT tend vers 0. En revanche, ce test montre que DT peut tendre vers 0 indépendamment de h (i.e plus de condition CFL sur DT)

Résultats VF

On donne ici les résultats obtenus pour ce test par la méthode volume fini,

- Pour h_1 ,

dt	0.0125	$dt^* = 0.0111$	10^{-3}	10^{-4}
Er_1	1126.16	0.7467	0.0473	0.0478

- Pour $h_2 = \frac{h_1}{2}$,

dt	0.004	$dt^* = 0.00395$	10^{-3}	$5 * 10^{-4}$
Er_1	15.867	0.4259	0.0238	0.0239

dt^* représente le plus petit pas de temps pour lequel la méthode volume fini donne une bonne précision. On constate sur les résultats de la méthode volume fini que $dt_{h_2}^* < 0.5 \times dt_{h_1}^*$.

Test5

Dans ce test, on prend une vitesse qui ne dépend que du temps. Bien sûr dans ce cas, à chaque grand pas de temps, on retrace les lignes de courant et dans ce cas la trajectoire d'une ligne et le temps de vol changent au cours du temps.

On considère $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[\subset \mathbb{R}^2$ et $I = [0, 1[$ l'intervalle du temps, et les autres données du test sont:

- On suppose que la vitesse est donnée par:

$$\forall (x, y) \in \overline{\Omega}, \vec{V}(x, y, t) = -(10t^2 - t + 1, 20t),$$

ainsi $\vec{V}$ vérifie les relations (3.7) et (2.7),

- pour les données initiales à $t = 0$, on prend:

$$\forall (x, y) \in \Omega, u_0(x, y) = e^x + e^y,$$

- pour les conditions aux limites, on suppose que:

$$g(x_r, y_r, t) = e_r^x e^{\frac{10t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t} + e_r^y e^{10t^2}, \forall (x_r, y_r, t) \in \Sigma_-.$$

Avec ces données, la solution du problème ($\mathcal{P}$) est donnée par:

$$\forall (x, y, t) \in Q = \Omega \times I, u(x, y, t) = e^x e^{\frac{10t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t} + e^y e^{10t^2}.$$

A l'instant T , les normes de u sont:

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^1(\Omega)} = 37927.1, \|u(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)} = 39444.8.$$

Listes des figures

- Fig-15 représente Er_1 l'erreur en norme $(\|\cdot\|_1)$

- Fig-16 représente Er_2 l'erreur en norme $(\|\cdot\|_2)$

Pour ce test on peut prendre les mêmes remarques que pour le test précédent. En particulier le DT^* en question ne dépend pas de h et il dépend de la vitesse (voir aussi remarque 2.9.3).

En fait, pour le test précédent on a constaté que $DT^* = \frac{T}{10}$ alors que pour ce test $DT^* = \frac{T}{75}$, ceci s'explique par la forte dépendance de la vitesse par rapport à t dans le deuxième test.

Remarque 2.9.4 Le DT^* fait penser à une condition CFL, sur le nombre de fois où on doit mettre à jour la vitesse. Or dans cette méthode et contrairement à la méthode volume fini cette condition ne dépend pas de h .

Résultats VF

On donne ici les résultats obtenus pour ce test par la méthode volume fini,

- Pour h_1 ,

dt	$12 * 10^{-4}$	$dt^* = 11 * 10^{-4}$	10^{-4}	10^{-5}
Er_1	3399	358.02	250.79	242.69

- Pour $h_2 = \frac{h_1}{2}$,

dt	$5,1 * 10^{-4}$	$dt^* = 5 * 10^{-4}$	10^{-4}	10^{-5}
Er_1	1492.8	181.103	133.387	125.649

dt^* représente le plus petit pas de temps pour lequel la méthode volume fini donne un bon résultat. On note aussi que pour $DT = T/100$, l'erreur Er_1 donnée par la méthode des lignes de courant est 303.782 pour h_1 et 178.347 pour h_2 .

On constate aussi pour ce test, comme pour le test2, que $dt_{h_2}^* \leq 0.5 * dt_{h_1}^*$ pour la méthode volume fini, cependant DT^* reste le même pour les deux h .

Ce qui veut dire que lorsque le pas du maillage baisse, on est obligé de faire plus de mises à jour de la vitesse pour la méthode volume fini (Condition CFL), en revanche pour la méthode des lignes de courant on garde pratiquement le même nombre de mises à jour de la vitesse.

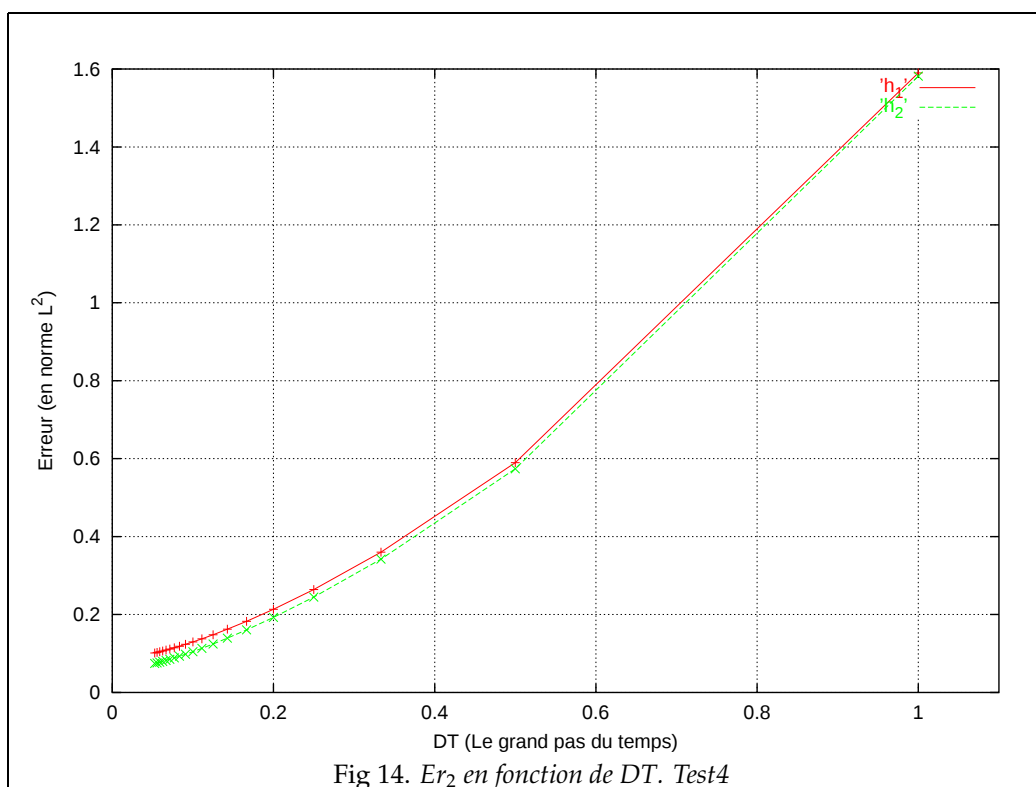
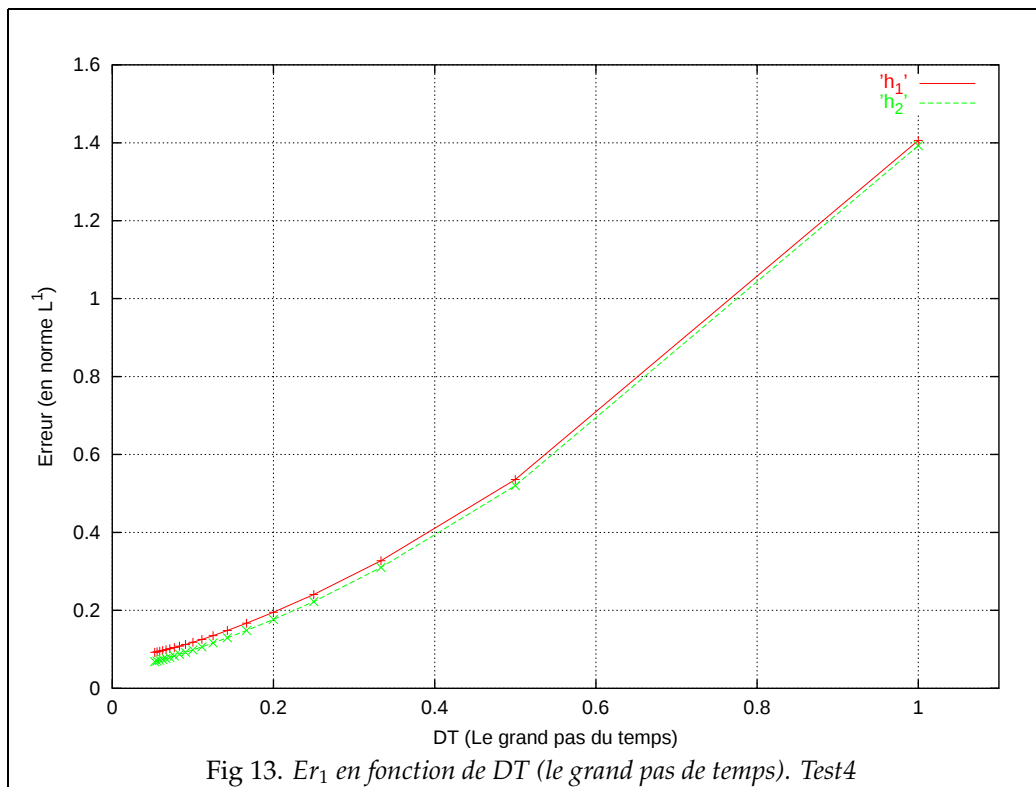
Remarque 2.9.5 *Il est clair que lorsque h diminue, sur chaque ligne de courant le maillage change, et par conséquent, le petit pas de temps sur la ligne baisse aussi.*

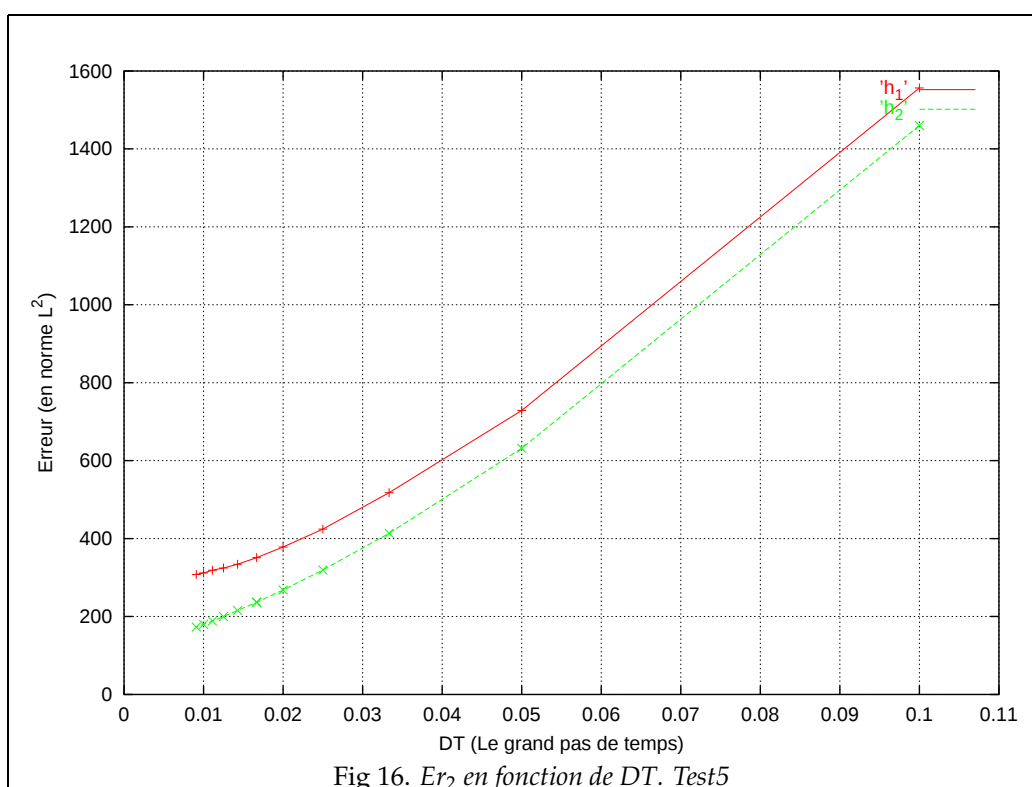
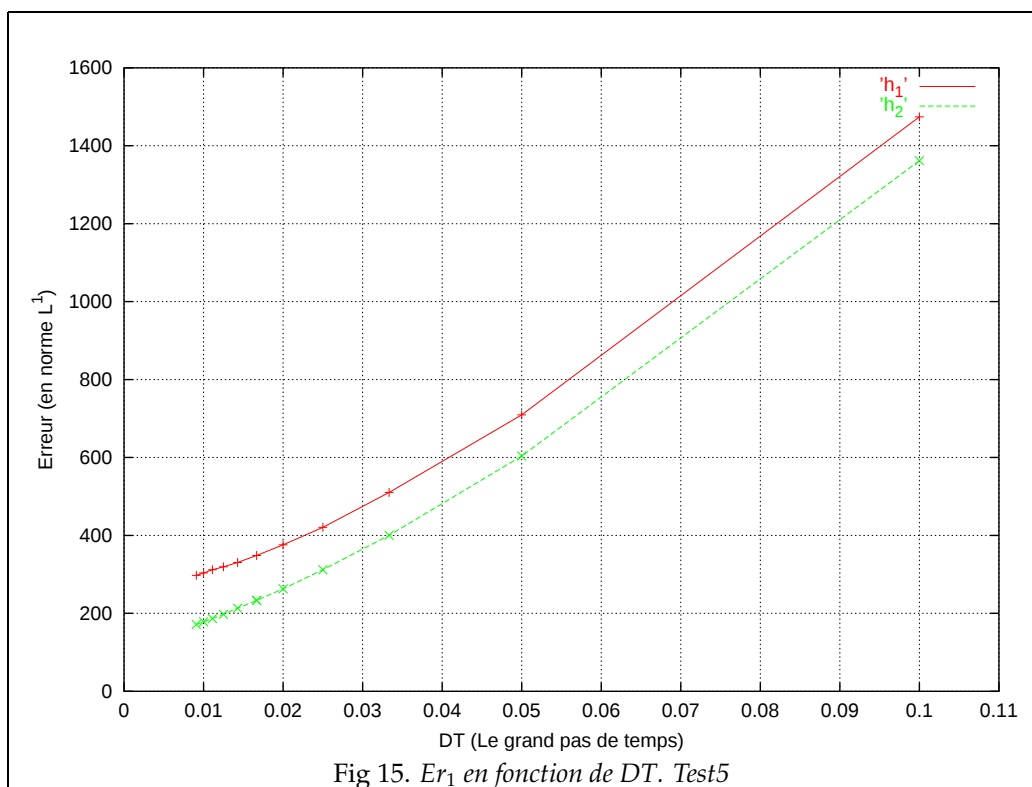
Comportement par rapport à h , Test5Bis

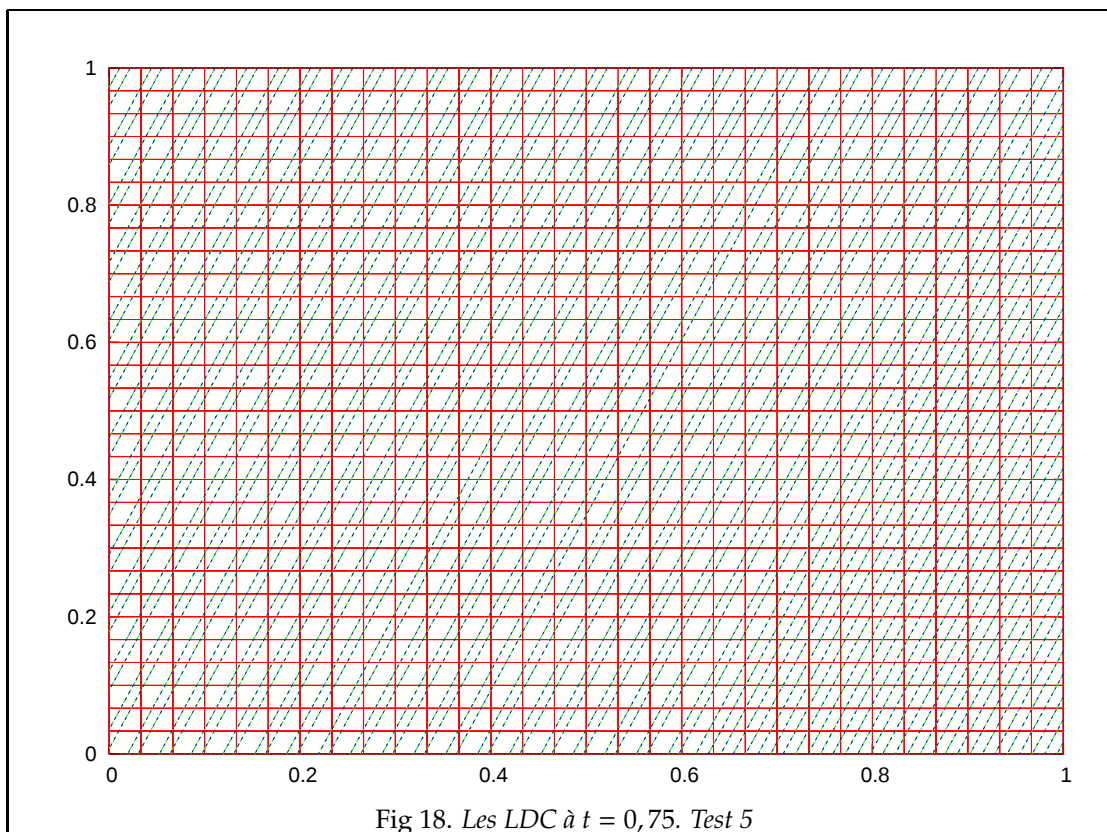
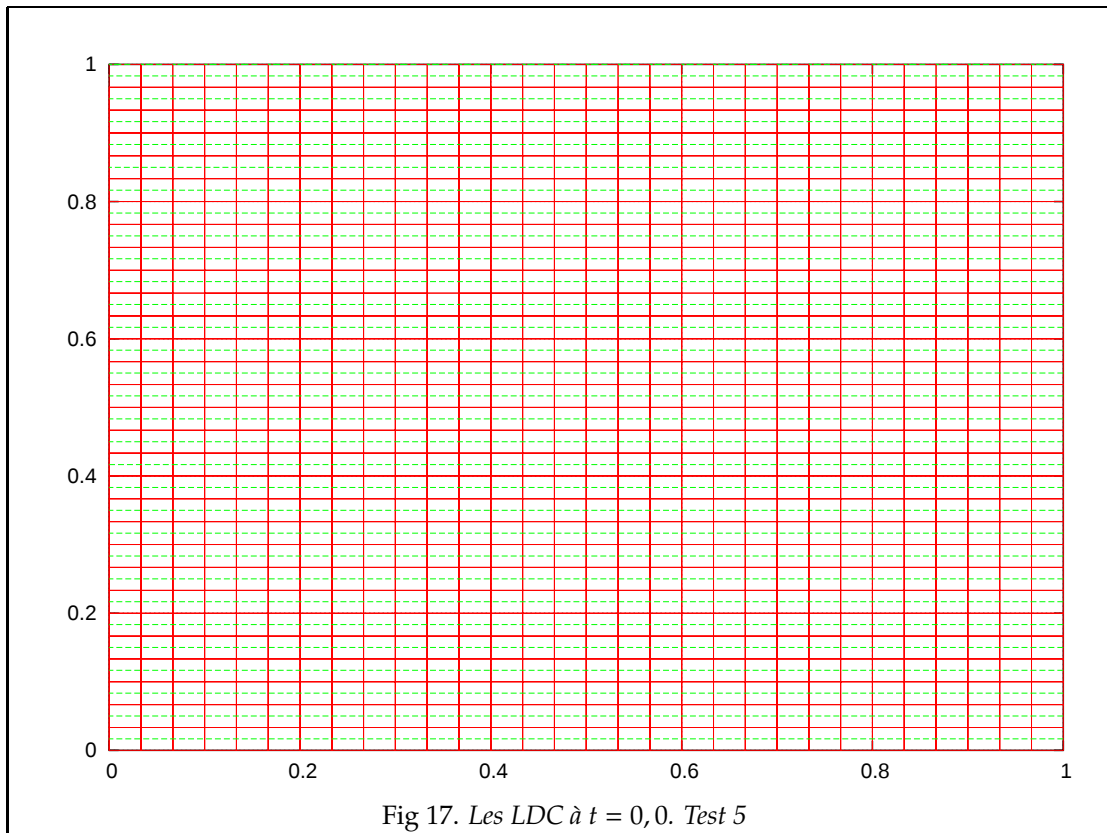
Dans le test 5, on a étudié la méthode des lignes de courant par rapport à N_T . Ici on va fixer N_T à 110, et on fera varier h , on garde les autres données inchangées.

Les résultats obtenus:

h	0.025000	0.016667	0.012500	0.006250	0.003125	0.001562
Er_1	297.534	211.501	171.464	130.267	099.781	?







2.10 Vitesse avec divergence non nulle

Dans les parties précédentes on a traité le cas d'une vitesse $\vec{V}$ qui vérifie $\text{div}(\vec{V}) = 0$. Or dans la modélisation des bassins, et sous l'effet de la compaction la divergence de la vitesse totale n'est plus nulle (cf partie 3 pour la définition de la vitesse totale, et partie 4 pour les équations mathématiques), ce qui n'est pas toujours le cas dans la simulation des réservoirs.

On considère à nouveau le problème $(\mathcal{P})$, mais cette fois-ci on ne prend aucune condition sur la divergence de $\vec{V}$, i.e on supprime la relation (3.7) de l'hypothèse D2. Le résultat d'existence et unicité de la solution entropique (Théorème 2.2.1) reste valable dans ce cas.

On suppose que u la solution de ce problème est de classe C^1 sur Q . Soit l une ligne de courant tracée dans Ω par rapport à $\vec{V}$, caractérisée par le triplet (p, I_l, q) . On définit sur l la fonction v par $v(\tau, t) = u(q(\tau), t)$ pour tout $\tau \in I_l$.

D'après la définition de v , on a :

$$\begin{aligned}\partial_t v(\tau, t) &= \partial_t u(q(\tau), t), \\ \partial_\tau v(\tau, t) &= \vec{V} u(q(\tau), t) \cdot \vec{V}(q(\tau)).\end{aligned}$$

D'autre part on a:

$$\text{div} (f(u(q(\tau), t)) \vec{V}(q(\tau))) = f'(u(q(\tau), t)) \vec{V} u(q(\tau), t) \cdot \vec{V}(q(\tau)) + f(u(q(\tau), t)) \text{div}(\vec{V}(q(\tau))).$$

Vu que u est la solution du problème $(\mathcal{P})$, on en déduit que v résout l'équation suivante:

$$\partial_t v(\tau, t) + \partial_\tau f(v(\tau, t)) + f(v(\tau, t)) \text{div}(\vec{V}(q(\tau))) = 0, \quad \forall (\tau, t) \in I_l \times I. \quad (2.56)$$

Par rapport au cas où $\text{div}(\vec{V}) = 0$ (équation 2.12) on remarque sur cette équation la présence d'un terme en plus, il s'agit de $f \text{div}(\vec{V})$. Ce terme peut être vu comme un terme source.

Schéma numérique pour l'équation 2.56

On utilise les notations de 2.3.2. Pour toute maille $K \in \mathcal{M}$ on pose:

$$D_K = \frac{1}{m(K)} \int_K \text{div}(\vec{V}(x)) dx.$$

Soit $\Gamma^l = (\tau_i)_{0 \leq i \leq N}$ une subdivision de I_l , pour tout $j \in \{0, \dots, N-1\}$, on définit d_j par:

$$d_j = D_K, \quad \text{si } j \in I_{K,l}.$$

($j \in I_{K,l}$ si $\text{Im}(q|_{[\tau_j, \tau_{j+1}])} \subset K$.)

Le schéma numérique est défini par les relations:

$$\forall j \in \{0, \dots, N-1\}, \quad v_j^0 = \mathbb{P}(u_0)_K \quad \text{si } j \in I_{K,l}, \quad (2.57)$$

$$\forall n \in \{1, \dots, T/k\}, \quad v_{-1}^n = g(p, t^n), \quad (2.58)$$

$$\forall (j, n) \in \{0, \dots, N-1\} \times \{1, \dots, T/k\}, \quad \frac{\Delta_j}{k} (v_j^{n+1} - v_j^n) + (f(v_j^n) - f(v_{j-1}^n)) + f(v_j^n) d_j = 0. \quad (2.59)$$

Avec k le pas de temps sur la ligne de courant (voir 2.3.3), k est choisi tel que $T/k \in \mathbb{N}$. v_j^n est l'approximation de v sur $[\tau_j, \tau_{j+1}] \times [t^n, t^{n+1}]$.

Pour assurer la stabilité de ce schéma on pose une condition (CFL) sur le pas de temps de type $k \leq c \Delta_l$, avec $c \in \mathbb{R}_+^*$ une constante qui dépend de la vitesse $\vec{V}$ mais aussi de la fonction f .

Le choix de ce schéma nous semble 'naturel' bien qu'on n'ait pas encore de résultats mathématiques sur ce schéma. Les tests numériques ont donné de bons résultats. Cependant dans ([17]) il y a un résultat de convergence et une estimation d'erreur (de l'ordre $h^{\frac{1}{4}}$) pour une équation similaire (sur $\mathbb{R}^d$), i.e avec un terme source et le même schéma.

La méthode lignes de courant dans ce cas:

On applique le même algorithme expliqué pour le cas où $\text{div}(\vec{V}) = 0$ (voir partie 2.5.2). La seule différence est la résolution numérique de l'équation le long de chaque ligne de courant, car dans ce cas on applique le schéma donné ci-dessus (équations 2.57-2.58 et 2.59).

2.10.1 Test numérique, Test 6

Le but ici est de tester la méthode des lignes de courant lorsque $\text{div}(\vec{V}) \neq 0$, et de valider le schéma numérique qu'on a choisi. D'autres tests pour la modélisation des bassins ont été faits (voir chapitre 4).

On considère $\Omega =]1, 11[\times]0, 10[\subset \mathbb{R}^2$ et $I = [0, 1[$ l'intervalle du temps, et les autres données du test sont:

- On suppose que la vitesse est donnée par:

$$\forall (x, y) \in \overline{\Omega}, \vec{V}(x, y) = (x, y),$$

ainsi $\vec{V}$ vérifie $\forall (x, y) \in \Omega, \text{div}(\vec{V}(x, y)) = 2$.

- pour les données initiales à $t = 0$, on prend:

$$\forall (x, y) \in \Omega, u_0(x, y) = xye^7,$$

- pour les conditions aux limites, on suppose que:

$$g(x_r, y_r, t) = x_r y_r e^{-4t+7}, \forall (x_r, y_r, t) \in \Sigma_-.$$

Avec ces données, la solution du problème $(\mathcal{P})$ est donnée par:

$$\forall (x, y, t) \in Q = \Omega \times I, u(x, y, t) = xye^{-4t+7}.$$

Ainsi à l'instant T , les normes de u dans Ω sont:

$$\|u(., T)\|_{L^1(\Omega)} = 5.02138, \|u(., T)\|_{L^2(\Omega)} = 6.69518.$$

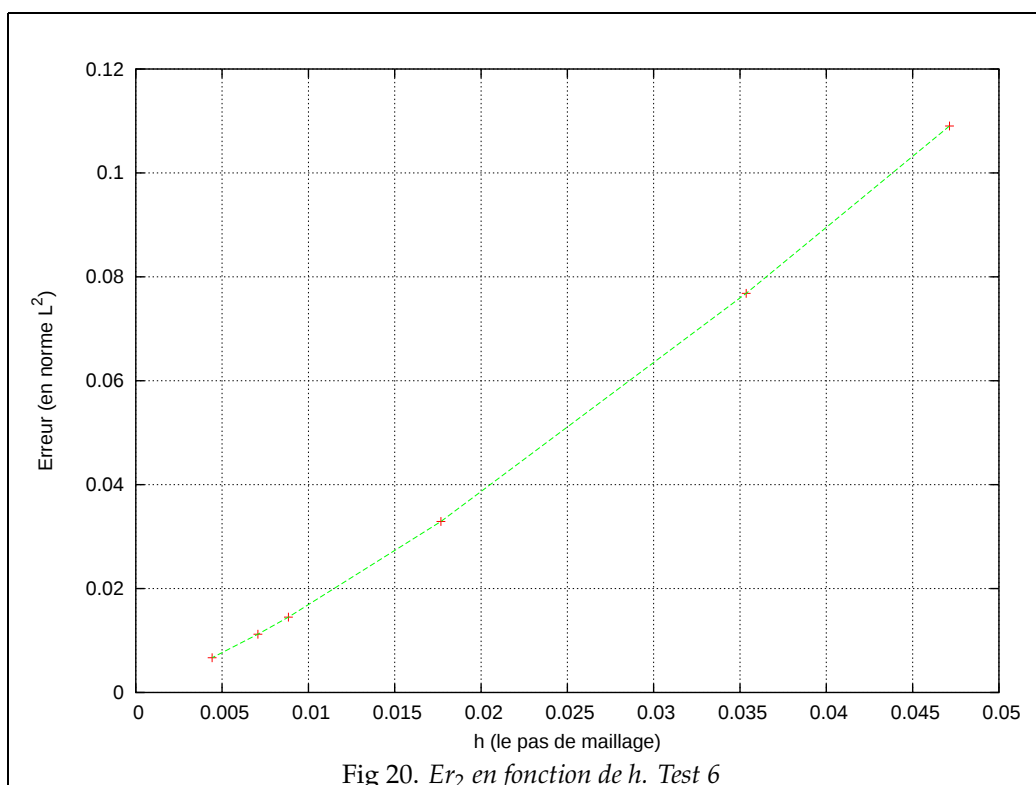
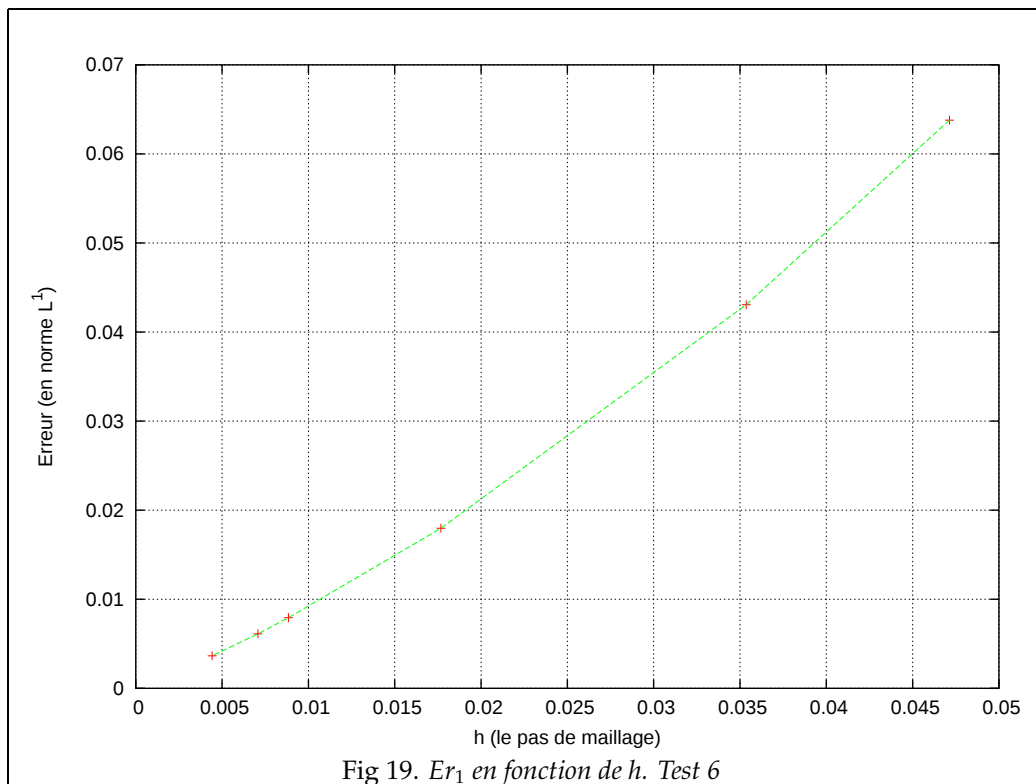
Dans ce cas on prend un maillage cartésien de Ω , constitué de carrés.

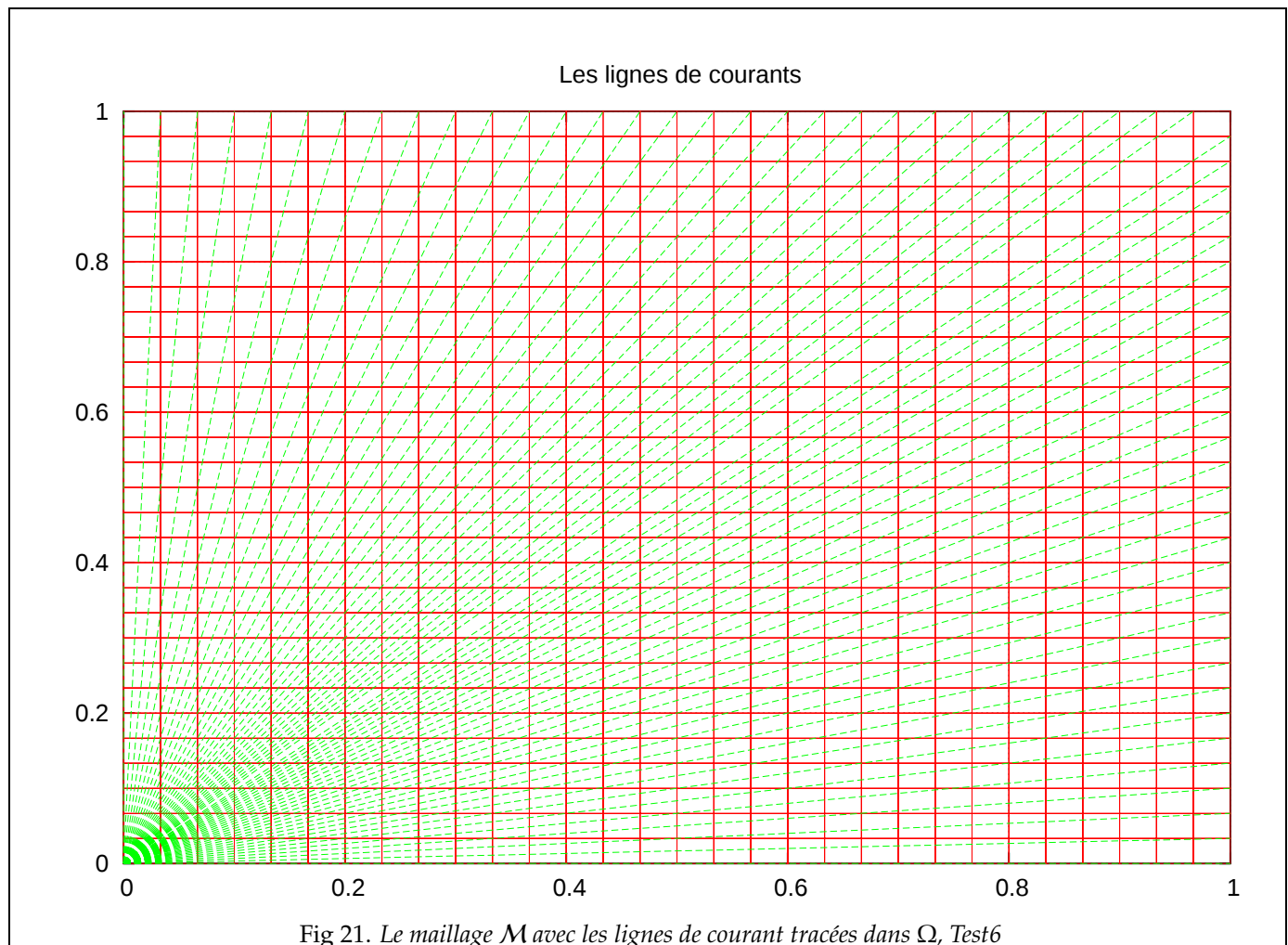
Liste des figures

- Fig-19 représente Er_1 l'erreur en norme $(\|\cdot\|_1)$
- Fig-20 représente Er_2 l'erreur en norme $(\|\cdot\|_2)$
- Fig-21 représente l'ensemble des lignes de courant tracées dans Ω .

Sur les deux figures, on constate que la méthode se comporte bien et qu'on a une très bonne précision de la solution approchée.

D'autre part, sur la figure (Fig-21), on remarque que dans la maille $K = [0, dx] \times [0, dx]$ on a $I_K = \mathcal{L}$, i.e toutes les lignes de courant passent par cette maille.





2.11 Remarques générales

2.11.1 Le cas où u est BV

Pour avoir le résultat de convergence (Théorème 2.6.3), on a supposé que u la solution du système $(\mathcal{P})$ était de classe C^2 , or cette hypothèse est très forte, car en général les “bons” espaces des fonctions pour étudier les problèmes hyperboliques sont les espaces $BV(\Omega)$ (ou $L^p(\Omega)$).

Pour montrer la convergence de cette méthode dans le cas où u est BV on est confronté à deux problèmes:

1. Définition de u sur une ligne de courant

Lorsque u la solution du problème $(\mathcal{P})$ est de classe C^1 , ou continue, on peut définir sa trace sur une ligne de courant (relation 2.3). Or si u est dans $BV(Q)$ ou $L^p(Q)$, cette définition n’a plus de sens car u n’est plus définie en chaque point $x \in \Omega$.

2. Définition du problème sur une LDC

Le deuxième problème est de déterminer le problème à résoudre sur chaque ligne de courant, car on ne peut plus utiliser le lemme (2.1.4), puisque u n’est pas défini sur la ligne de courant.

Ces deux points posent une difficulté importante pour montrer la convergence de cette méthode vers la solution du problème $(\mathcal{P})$.

Remarque 2.11.1 *Au niveau numérique, il n’y a pas de problèmes pour définir la trace de u sur une ligne de courant, car on travaille avec des fonctions constantes par mailles (les fonctions sont dans $\mathcal{E}_M$), et la projection de u dans $\mathcal{E}_M$ est bien définie.*

Plusieurs tests numériques ont montré le bon comportement de cette méthode, même avec des fonctions BV (voir Test 2), et on estime, sous certaines conditions sur la vitesse, qu’on peut avoir une démonstration de la convergence.

2.11.2 Schéma non conservatif

Pour les problèmes de conservation issus de la physique, on cherche des méthodes numériques qui gardent le caractère conservatif. Plus précisément, on considère u la solution du problème $(\mathcal{P}_1)$, soit $t \in I$, on intègre la première équation vérifiée par u sur Ω , ce qui donne:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t u(x, t) dx &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(f(u(x, t)) \vec{V}(x, t)) dx \\ &= - \int_{\partial\Omega} f(u) \vec{V} \cdot \vec{n} d\gamma. \end{aligned}$$

Si on suppose de plus que la vitesse vérifie $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$ ($\vec{n}$ étant la normale extérieure sur Ω), alors on trouve que u vérifie:

$$\int_{\Omega} \partial_t u(x, t) dx = 0.$$

donc, on cherche une solution approchée de u dans $\mathcal{E}_M$, qui vérifie:

$$\forall n, \sum_{p \in \mathcal{M}} m(p) u_p^{n+1} = \sum_{p \in \mathcal{M}} m(p) u_p^n.$$

Or la méthode des lignes de courant ne vérifie pas cette relation (cf. résultat du test 2). Ceci est dû au passage entre les lignes de courant et l’ensemble des mailles (voir partie 2.4). Néanmoins, on peut signaler que le schéma sur une ligne de courant est conservatif lorsque la vitesse a une divergence nulle.

Remarque 2.11.2 *La méthode volume fini garde le caractère conservatif du problème (cf. remarque 2.8.2).*