

Mathématiquement, on considère le système

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = f(x, u), \\ x(0) = x_0, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

où l'état x est à valeurs dans un espace \mathcal{X} et le contrôle u dans un espace \mathcal{U} .

Si l'espace \mathcal{X} est de dimension finie, les propriétés de contrôlabilité de (1.1) sont relativement bien comprises (voir par exemple les livres [54, 129] par J.-M. Coron et E.D. Sontag). Par exemple, le critère de Kalman assure la contrôlabilité en tout temps de $x' = Ax + Bu$ avec A matrice réelle de taille $n \times n$ et B matrice réelle de taille $n \times m$ si et seulement si la matrice $(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ est de rang maximal. Pour un système affine en le contrôle i.e. $f(x, u) = f_0(x) + \sum_{j=1}^m u_j f_j(x)$ les propriétés de contrôlabilité sont reliées aux propriétés de l'algèbre de Lie engendrée par $\{f_0, f_1, \dots, f_m\}$.

Si l'espace \mathcal{X} est de dimension infinie, les propriétés de contrôlabilité de (1.1) sont plus subtiles. Les notions de contrôlabilité envisagées dépendent des propriétés des opérateurs différentiels apparaissant dans (1.1). En effet, il est par exemple vain de chercher à montrer la contrôlabilité exacte globale pour un système régularisant. Les espaces fonctionnels dans lesquels on examine les propriétés de contrôlabilité peuvent aussi être déterminants. Cette dépendance vis à vis du cadre fonctionnel est soulignée dans la sous-section suivante pour un système de contrôle bilinéaire. Dans ce mémoire, on met aussi en évidence l'existence d'un temps minimal pour la contrôlabilité exacte locale bien que le système considéré ait une vitesse de propagation infinie. Il n'y a donc pas de théorie générale unifiée pour étudier la contrôlabilité en dimension infinie : chaque situation doit être examinée au cas par cas. Ce mémoire s'intéresse aux propriétés de contrôlabilité pour des systèmes de contrôle de Schrödinger bilinéaire, des systèmes de Schrödinger avec un terme de polarisabilité (i.e. avec un terme quadratique en le contrôle en plus du terme bilinéaire) et des systèmes paraboliques dégénérés et singuliers de type Grushin. Ces trois modèles constituent les trois parties de ce mémoire.

La suite de cette introduction s'attache à présenter, pour chacune des parties, le modèle étudié et certains résultats de la littérature liés à ce modèle. Le but n'est pas de donner un panorama exhaustif de la littérature existante mais de mentionner des résultats ou des idées, soit pour situer les résultats de cette thèse parmi cette littérature, soit pour introduire certaines notions utilisées dans ce mémoire. On présente ensuite les principaux résultats obtenus durant cette thèse ainsi que les idées et les stratégies mises en place pour résoudre les difficultés qui se sont présentées. On conclut en donnant de nouveaux problèmes ouverts apparus durant cette étude.

1.2 Contrôle bilinéaire d'équations de Schrödinger

1.2.1 Modèle

On considère une particule quantique évoluant dans un espace de dimension d . Cette particule est décrite par sa fonction d'onde $\psi : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto \psi(t, x) \in \mathbb{C}$. Pour un sous-domaine ω de \mathbb{R}^d , la probabilité que la particule se trouve au temps t dans ω est donnée par $\int_{\omega} |\psi(t, x)|^2 dx$.

On note que pour toute fonction $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, les fonctions d'onde ψ et $e^{i\theta(t)}\psi$ décrivent le même état : la phase globale n'a pas de signification physique. L'évolution de la fonction d'onde est donnée par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\partial_t\psi(t, x) = H(t)\psi(t, x) \quad (1.2)$$

où H est l'hamiltonien du système et \hbar la constante de Planck réduite. Dans ce mémoire, on considère que la particule se trouve dans un potentiel $V(x)$ infini hors d'un domaine borné régulier $D \subset \mathbb{R}^d$. L'hamiltonien du système est indépendant du temps et on trouve après un changement d'échelle

$$\begin{cases} i\partial_t\psi(t, x) = (-\Delta + V(x))\psi(t, x), & (t, x) \in (0, T) \times D, \\ \psi(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \partial D, \\ \psi(0, x) = \psi_0(x), & x \in D. \end{cases} \quad (1.3)$$

Les conditions au bord de Dirichlet homogène modélisent le fait que la probabilité de trouver la particule au bord est nulle. Au vu de l'interprétation probabiliste précédente de la fonction d'onde, celle-ci évolue sur la sphère unité de $L^2(D, \mathbb{C})$ notée \mathcal{S} dans la suite. On note A_V l'hamiltonien du système libre (1.3) défini par

$$A_V\psi := (-\Delta + V)\psi, \quad D(A_V) := H^2 \cap H_0^1(D, \mathbb{C}). \quad (1.4)$$

Pour $V \in L^2(D, \mathbb{C})$, on note $(\lambda_{k,V})_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite croissante des valeurs propres de A_V et $\varphi_{k,V}$ les vecteurs propres associés dans \mathcal{S} . On obtient alors des solutions évidentes du système libre (1.3) données par les états propres

$$\Phi_{k,V}(t, x) := e^{-i\lambda_{k,V}t}\varphi_{k,V}(x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times D. \quad (1.5)$$

L'état propre de plus basse énergie $\Phi_{1,V}$ est appelé état fondamental. Concernant le cadre fonctionnel, on note pour $s > 0$, $H_{(V)}^s := D\left(A_V^{\frac{s}{2}}\right)$.

Ayant en vue des applications comme la manipulation de liens chimiques de certaines molécules ou la construction de portes quantiques logiques comme préalable à l'ordinateur quantique, on souhaite contrôler l'évolution de la fonction d'onde via un champ électrique extérieur. L'hamiltonien du système est alors la somme de l'hamiltonien libre précédent et de l'hamiltonien d'interaction. En première approximation, l'hamiltonien d'interaction est donné par $-u(t)\mu(x)$ où $u(t) \in \mathbb{R}$ est l'amplitude du champ extérieur appliqué et $\mu(x)$ est le moment dipolaire de la particule considérée. Les différentes approximations conduisant à cette expression sont détaillées par exemple dans [63, Chapitre 2]. On considère alors le système

$$\begin{cases} i\partial_t\psi(t, x) = (-\Delta + V(x))\psi(t, x) - u(t)\mu(x)\psi(t, x), & (t, x) \in (0, T) \times D, \\ \psi(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \partial D, \\ \psi(0, x) = \psi_0(x), & x \in D. \end{cases} \quad (1.6)$$

Le contrôle est la fonction réelle $t \mapsto u(t)$ et l'état est la fonction d'onde $\psi(t, \cdot) \in \mathcal{S}$. Lorsque le système (1.6) est bien posé on note $\psi(t, \psi_0, u)$ la solution au temps t . Bien que

cette équation aux dérivées partielles soit linéaire, ce problème de contrôle est non linéaire i.e. l'application $(u, \psi_0) \mapsto \psi(T)$ est non linéaire. L'appellation bilinéaire est relative à la bilinéarité du terme " $u(t)\mu(x)\psi$ " par rapport au couple état, contrôle (ψ, u) .

Un cas particulier, très étudié, est celui du puits de potentiel unidimensionnel i.e.

$$\begin{cases} i\partial_t\psi = -\partial_{xx}^2\psi - u(t)\mu(x)\psi, & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), \\ \psi(t, 0) = \psi(t, 1) = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Sans autre précision, les éléments propres $\lambda_{k,0}$, $\varphi_{k,0}$ et $\Phi_{k,0}$ seront notés λ_k , φ_k et Φ_k .

1.2.2 Résultats précédents

Le contrôle de systèmes quantiques est un domaine en plein essor. Pour preuve, le Prix Nobel de Physique 2012 a été décerné à S. Haroche pour ses résultats expérimentaux sur l'observation de particules quantiques sans les détruire. Si le fossé entre résultats théoriques et expérimentations physiques reste encore à combler, les idées de mesures de particules quantiques développées par l'équipe de S. Haroche ont été utilisées pour la contrôlabilité d'un système quantique [126].

Mathématiquement, le problème de contrôle linéaire de l'équation de Schrödinger a été largement étudié. La propriété de réversibilité en temps et la méthode HUM (dont le principe est rappelé en Section 1.4.2) permettent de réduire la contrôlabilité exacte à l'observabilité du système adjoint. De nombreux outils ont été utilisés pour étudier cette inégalité d'observabilité comme la méthode des multiplicateurs (voir [71] par C. Fabre, [99] par E. Machtyngier), l'analyse microlocale (voir [96] par G. Lebeau, [34] par N. Burq), les inégalités de Carleman (voir [93, 94] par I. Lasiecka, R. Triggiani et X. Zhang) ou la théorie des nombres (voir [119, 131] par K. Ramdani, T. Takahashi, G. Tenenbaum et M. Tucsnak). Pour de plus amples détails, ainsi que des résultats pour des équations de Schrödinger non linéaires, on renvoie aux articles de synthèse [143, 95] par E. Zuazua et C. Laurent. Au vu de la modélisation précédente, ce cadre linéaire est insuffisant pour viser les applications physiques mentionnées. On se focalise donc, pour la suite, sur le cadre bilinéaire du système (1.6).

Historiquement, le premier résultat concernant le contrôle bilinéaire en dimension infinie revêt une importance particulière. J.M. Ball, J.E. Marsden et M. Slemrod ont démontré dans [5] que pour un système de contrôle bilinéaire abstrait,

$$\begin{cases} w'(t) = \mathcal{A}w(t) + p(t)\mathcal{B}w(t), \\ w(0) = w_0, \end{cases} \quad (1.8)$$

l'ensemble des états atteignables à partir de n'importe quel w_0 est d'intérieur vide dans l'espace ambiant. Ce théorème s'énonce comme suit.

Théorème 1.1. *Soit X un espace de Banach de dimension infinie. Soit \mathcal{A} le générateur infinitésimal d'un semigroupe continu sur X et $\mathcal{B} : X \rightarrow X$ un opérateur linéaire borné. Soit $w_0 \in X$. Pour $p \in L_{loc}^1([0, +\infty), \mathbb{R})$, on note $w(t, w_0, p)$ l'unique solution faible de (1.8). Alors, l'ensemble $R(w_0)$ des états atteignables à partir de w_0 défini par*

$$R(w_0) := \{w(t, w_0, p); t \geq 0, r > 1, p \in L_{loc}^r([0, \infty), \mathbb{R})\},$$

est contenu dans une union dénombrable de compacts de X . En particulier, le complémentaire de $R(w_0)$ dans X est dense dans X .

Ainsi, arbitrairement proche (pour une norme naturelle) de tout état atteignable, il existe des cibles que l'on ne pourra pas atteindre. Dans le cadre d'équations de Schrödinger bilinéaire, l'évolution de (1.7) ayant lieu sur la sphère \mathcal{S} , ce résultat n'est pas surprenant. Cependant, en adaptant le Théorème 1.1 pour prendre en compte cette conservation de la norme, G. Turinici a montré dans [134] le théorème suivant.

Théorème 1.2. *Soit $\psi_0 \in \mathcal{S} \cap H_{(0)}^2$. Pour $u \in L^2(0, T)$, on note $\psi(t, \psi_0, u)$ la solution de (1.7) issue de ψ_0 . Soit $R(\psi_0)$ l'ensemble des états atteignables à partir de ψ_0 défini par*

$$R(\psi_0) := \{ \psi(t, \psi_0, u) ; t \geq 0, u \in L^2((0, T), \mathbb{R}) \}.$$

Alors le complémentaire de $R(\psi_0)$ dans $\mathcal{S} \cap H_{(0)}^2$ est dense dans $\mathcal{S} \cap H_{(0)}^2$.

Ces résultats ne sont donc pas engageants du point de vue de la contrôlabilité exacte pour les systèmes bilinéaires de dimension infinie.

Partant de ce constat, deux possibilités sont alors envisagées pour l'étude de tels systèmes : considérer des systèmes de dimension finie ou s'intéresser au contrôle approché du système de dimension infinie. Néanmoins, comme explicité dans la Section 1.2.2.2, ces résultats négatifs sont fortement dépendants du cadre fonctionnel et tombent en défaut pour des espaces ambiants plus réguliers.

Un système quantique bilinéaire de dimension finie est de la forme

$$i \frac{dX}{dt} = H_0 X + u(t) H_1 X, \quad (1.9)$$

où $X \in \mathbb{C}^n$ et H_0, H_1 sont des matrices hermitiennes. Ce système entre dans le formalisme des systèmes de dimension finie affines en le contrôle dont les propriétés de contrôlabilité sont reliées à l'algèbre de Lie engendrée par H_0 et H_1 (voir par exemple [63, Chapitre 3] par D. D'Alessandro).

En dimension infinie, les crochets de Lie itérés peuvent être mal définis et leur application éventuelle à la contrôlabilité est mal comprise. Pour ces raisons, on ne détaille pas les résultats relatifs à la dimension finie qui sont assez éloignés des problématiques de ce mémoire.

1.2.2.1 Contrôle approché de systèmes quantiques bilinéaires de dimension infinie

Contrôle exact des approximations de Galerkin. Concernant le contrôle approché de systèmes quantiques bilinéaires de dimension infinie, plusieurs stratégies cohabitent. Une des méthodes les plus prolifiques consiste à utiliser les outils du contrôle géométrique. Le premier résultat pour un système abstrait

$$\frac{d\psi}{dt}(t) = A\psi(t) + u(t)B\psi(t), \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}, \quad (1.10)$$

a été obtenu par T. Chambrion, P. Mason, M. Sigalotti et U. Boscain dans [45]. L'idée principale pour montrer la contrôlabilité approchée dans L^2 consiste à contrôler de manière

exacte les approximations de Galerkin du système (1.10) puis d'obtenir de bonnes propriétés d'approximation du système de dimension infinie par les systèmes de Galerkin de dimension finie. Il est à noter que, si cette stratégie semble naturelle, les propriétés de contrôlabilité d'un système de dimension infinie sont parfois très différentes de celles de ses approximations de Galerkin. A cet égard, il est important de garder à l'esprit le cas de l'oscillateur harmonique quantique

$$i\partial_t\psi = \left(\frac{1}{2}(-\partial_{xx}^2 + x^2) - u(t)x\right)\psi, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.11)$$

M. Mirrahimi et P. Rouchon ont montré dans [104] que seule la position moyenne, définie par $\int_{\mathbb{R}} x|\psi(t, x)|^2 dx$ (de dimension 2), est contrôlable bien que toutes les approximations de Galerkin soient contrôlables (voir [127]).

La méthode mise en œuvre dans [45] est appliquée au cas du puits de potentiel de dimension 3 et à des variantes de l'oscillateur harmonique quantique où $\mu(x) \neq x$. Il est à noter que le fait de considérer des opérateurs abstraits dans (1.10) permet de traiter des problèmes plus généraux que (1.6), en toutes dimensions, ou des problèmes posés sur des variétés. Cette méthode permet aussi d'étudier un problème très important du point de vue physique : la contrôlabilité (approchée) des matrices densité. Le résultat de [45] a été raffiné afin d'affaiblir les hypothèses.

Hypothèses 1.1. On suppose que \mathcal{H} est un espace de Hilbert et que (A, B, δ, Φ) sont tels que

- i) A et B sont des opérateurs antihermitiens de \mathcal{H} ,
- ii) $\Phi = (\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de \mathcal{H} de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $(i\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$,
- iii) $\phi_k \in D(B)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$,
- iv) $A + uB : \text{Vect}\{\phi_k ; k \in \mathbb{N}\} \rightarrow \mathcal{H}$ est essentiellement antihermitien pour tout $u \in [0, \delta]$,
- v) si $j \neq k$ et $\lambda_j = \lambda_k$ alors $\langle \phi_j, B\phi_k \rangle = 0$.

Pour ce système, on appelle chaîne de connexité un sous-ensemble S de \mathbb{N}^2 tel que, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, il existe $L \in \mathbb{N}^*$, $s_1^1, \dots, s_1^L \in \mathbb{N}$, $s_2^1, \dots, s_2^L \in \mathbb{N}$, tels que $(s_1^j, s_2^j) \in S$, $s_1^1 = n$, $s_2^L = p$, $s_1^{j+1} = s_2^j$ et $\langle \phi_{s_1^j}, B\phi_{s_2^j} \rangle \neq 0$. En utilisant cette stratégie de contrôle des approximations de Galerkin, U. Boscain, T. Chambrion, M. Caponigro et M. Sigalotti ont prouvé dans [25] le théorème suivant.

Théorème 1.3. *Supposons que (A, B, δ, Φ) vérifient les Hypothèses 1.1. Supposons qu'il existe une chaîne de connexité S non résonnante i.e. pour tout $(s_1, s_2) \in S$, $|\lambda_{s_1} - \lambda_{s_2}| \neq |\lambda_{t_1} - \lambda_{t_2}|$ pour tout $(t_1, t_2) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(s_1, s_2), (s_2, s_1)\}$ vérifiant $\langle \phi_{t_2}, B\phi_{t_1} \rangle \neq 0$. Alors, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $\psi_0^1, \dots, \psi_0^r \in \mathcal{H}$, $\Upsilon : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ unitaire et $\varepsilon > 0$, il existe $u : [0, T] \rightarrow [0, \delta]$ constant par morceaux tel que si ψ^j est la solution de (1.10) avec condition initiale ψ_0^j et contrôle u alors*

$$\|\psi^j(T) - \Upsilon\psi_0^j\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon, \quad \forall k = 1, \dots, r.$$

Ce résultat de contrôle approché simultané est valable quel que soit le nombre d'équations ; la notion de contrôle simultané est au cœur des Chapitres 3 et 4 présentés dans cette introduction en Section 1.2.3.2. Ce résultat a été étendu par N. Boussaïd, M. Caponigro et T. Chambrion, à des normes plus fortes pour des système dits faiblement couplés dans

[30], pour des contrôles à variation bornée dans [33] ou pour des modèles avec un terme de polarisabilité dans [31] (voir la Section 1.3 pour de plus amples détails sur ce modèle). Pour un article de synthèse sur les différents résultats obtenus par ces techniques et quelques problèmes ouverts, on renvoie à [27].

Concernant la contrôlabilité approchée en temps fini de certains modèles particuliers, on mentionne les résultats de R. Adami et U. Boscain [1] utilisant la théorie adiabatique et l'intersection de valeurs propres dans l'espace des contrôles et ceux de S. Ervedoza et J.-P. Puel [70] basés sur des contrôles explicites pour la contrôlabilité approchée de sommes finies de fonctions propres.

Méthode de Lyapunov. Une autre méthode pour montrer des résultats de contrôlabilité approchée est l'adaptation de la méthode de Lyapunov et du principe d'invariance de LaSalle. Cette méthode sera utilisée à plusieurs reprises dans ce mémoire sous la forme suivante : on cherche à stabiliser

$$i\partial_t\psi = (-\partial_{xx}^2 + V(x)) - u(t)\mu(x)\psi$$

vers un état $\tilde{\psi}$. L'idée est alors de construire une fonction de Lyapunov \mathcal{L} c'est-à-dire une fonction positive, minimale en $\tilde{\psi}$ et décroissante le long des trajectoires du système considéré. La décroissance le long des trajectoires est assurée par le choix du contrôle u sous la forme d'une loi de rétroaction. Généralement, la fonction \mathcal{L} est choisie telle que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(\psi(t)) = u(t)F(\psi(t)). \quad (1.12)$$

La loi de rétroaction $u(t) := -F(\psi(t))$ assure alors la décroissance. Ainsi, si de plus \mathcal{L} est une borne supérieure d'une certaine norme $\|\cdot\|$, la fonction de Lyapunov étant décroissante le long des trajectoires, celles-ci sont bornées pour $\|\cdot\|$. Moyennant quelques détails techniques si l'ensemble invariant est réduit à $\tilde{\psi}$, on peut espérer obtenir la convergence faible vers $\tilde{\psi}$. Cette notion de stabilisation fournit alors un contrôle approché en temps grand pour des normes plus faibles que $\|\cdot\|$.

Cette méthode a d'abord été utilisée dans le cadre L^2 par M. Mirrahimi dans [103] pour un opérateur libre présentant un spectre mixte puis par K. Beauchard et M. Mirrahimi dans [17] pour (1.7) dans le cas $\mu(x) = x - \frac{1}{2}$. La convergence faible L^2 ne permettant pas de conclure à la stabilisation, ces deux articles démontrent la stabilisation approchée dans L^2 de l'état fondamental en combinant la stratégie de Lyapunov et des arguments de perturbation.

En utilisant une fonction de Lyapunov adaptée au cadre H^2 construite par V. Nersesyan [111] et la stratégie précédemment décrite, K. Beauchard et V. Nersesyan ont prouvé dans [19] la stabilisation semi-globale faible H^2 de l'état fondamental, pour (1.6), sous des hypothèses favorables sur V et μ . La loi de rétroaction proposée dans [19] contient une constante choisie uniformément pour toute condition initiale dans une boule pour la norme H^2 : c'est le caractère semi-global de ce résultat. L'utilisation de cette fonction de Lyapunov a aussi permis dans [111] de conclure à la contrôlabilité approchée globale dans L^2 .

Enfin, cette fonction de Lyapunov a été étendue par V. Nersesyan dans [112] pour toute norme de Sobolev H^s avec $s > 0$ conduisant à la contrôlabilité approchée de l'état

fondamental dans $H^{s-\epsilon}$. Dans ce cas, la dérivée de la fonction de Lyapunov le long des trajectoires ne prend pas la forme (1.12). La décroissance de la fonction de Lyapunov est assurée par un argument variationnel : V. Nersesyan prouve l'existence d'une direction dans laquelle la dérivée de la fonction de Lyapunov le long de la trajectoire est non nulle. Ceci conduit à l'existence d'une suite de temps et de contrôles le long desquelles la trajectoire associée converge vers l'état fondamental. A la différence de la méthode de contrôle des approximations de Galerkin, l'utilisation de fonctions de Lyapunov permet donc d'obtenir des résultats de contrôle approché dans des espaces très réguliers. En contrepartie, les informations sur le temps nécessaire à la contrôlabilité approchée sont perdues. Ces fonctions de Lyapunov (pour les normes H^2 et H^s) sont utilisées et adaptées dans ce mémoire (voir les Sections 1.2.3.3 et 1.3.3).

1.2.2.2 Contrôle exact de systèmes quantiques bilinéaires de dimension infinie

Nous allons voir que les résultats négatifs précédents (voir Théorème 1.2) pour la contrôlabilité exacte de systèmes bilinéaires tombent en défaut pour d'autres cadres fonctionnels. Ainsi, K. Beauchard a démontré dans [10] le résultat suivant.

Théorème 1.4. *Soit $\mu(x) = x$. Soient $\theta_0, \theta_f \in \mathbb{R}$. Il existe $T > 0$ et $\eta > 0$ tels que pour tout $\psi_0, \psi_f \in \mathcal{S} \cap H_{(0)}^7$ vérifiant*

$$\|\psi_0 - e^{i\theta_0} \varphi_1\|_{H^7} < \eta, \quad \|\psi_f - e^{i\theta_f} \varphi_1\|_{H^7} < \eta,$$

il existe $u \in H_0^1((0, T), \mathbb{R})$ tel que la solution de (1.7) satisfasse $\psi(T) = \psi_f$.

Ainsi, l'ensemble des états atteignables à partir de l'état fondamental φ_1 contient une boule pour la norme H^7 , qui est bien d'intérieur vide dans $H_{(0)}^2$. Alors que, suite au résultat de J.M. Ball, J.E. Marsden et M. Slemrod, le système (1.7) était considéré comme non contrôlable, il apparait dès lors clair que la bonne lecture de ce résultat négatif est la non contrôlabilité dans $H_{(0)}^2$. La preuve relativement technique de ce résultat est basée sur la méthode du retour (introduite par J.-M. Coron et dont le principe sera détaillé en Section 1.2.3.2), des déformations quasi-statiques induisant un temps long pour la contrôlabilité, la méthode des moments et le théorème de Nash-Moser. Le recours au théorème de Nash-Moser est dû à une apparente perte de régularité.

Ce résultat a ensuite été raffiné dans [16] par K. Beauchard et C. Laurent pour des modèles plus généraux, dans un cadre fonctionnel optimal. La mise en lumière d'un effet régularisant a aussi permis de déduire la contrôlabilité locale du système bilinéaire à partir de la contrôlabilité du linéarisé en utilisant le théorème d'inversion locale et non plus le théorème de Nash-Moser, ce qui conduit à une simplification de la preuve. Ce théorème s'énonce comme suit.

Théorème 1.5. *Soit $\mu \in H^3((0, 1), \mathbb{R})$ tel que*

$$\exists C > 0 \text{ tel que } |\langle \mu \varphi_1, \varphi_k \rangle| \geq \frac{C}{k^3}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*. \quad (1.13)$$

Soit $T > 0$. Il existe $\delta > 0$ et une application C^1 ,

$$\Gamma : \mathcal{V}_T \rightarrow L^2((0, T), \mathbb{R}),$$

où

$$\mathcal{V}_T := \left\{ \psi_f \in \mathcal{S} \cap H_{(0)}^3; \|\psi_f - \Phi_1(T)\|_{H_{(0)}^3} < \delta \right\}$$

telle que $\Gamma(\Phi_1(T)) = 0$ et, pour tout $\psi_f \in \mathcal{V}_T$, la solution de (1.7) avec contrôle $u = \Gamma(\psi_f)$ et condition initiale $\psi_0 = \varphi_1$ satisfasse $\psi(T) = \psi_f$.

La norme $\|\cdot\|_{H_{(0)}^3}$ est définie par

$$\|\psi\|_{H_{(0)}^3} := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |k^3 \langle \psi, \varphi_k \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ce théorème appelle quelques commentaires au vu du résultat négatif du Théorème 1.1. Il est clair que l'opérateur

$$\begin{array}{ccc} H_{(0)}^2 & \rightarrow & H_{(0)}^2 \\ \psi & \mapsto & \mu\psi \end{array}$$

est un opérateur borné et que l'on est donc dans le cadre d'application du Théorème 1.1. Par intégrations par parties, on obtient

$$\langle \mu\varphi_1, \varphi_k \rangle = \frac{4}{\pi^2 k^3} ((-1)^{k+1} \mu'(1) - \mu'(0)) + o_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k^3} \right). \quad (1.14)$$

Ainsi, l'hypothèse (1.13) implique $\mu'(0) \pm \mu'(1) \neq 0$. Comme

$$H_{(0)}^3 = \left\{ \psi \in H^3((0, 1), \mathbb{C}); \psi(0) = \psi(1) = \psi''(0) = \psi''(1) = 0 \right\},$$

on a $\mu.H_{(0)}^3 \not\subset H_{(0)}^3$. Ceci explique que le résultat négatif du Théorème 1.1 ne couvre pas le cadre fonctionnel $H_{(0)}^3$ sous l'hypothèse (1.13).

Les idées du Théorème 1.5 sont essentielles pour les résultats de la Partie I. En plus de la mise en lumière de l'effet régularisant [16, Lemme 1] qui permet de démontrer le caractère bien posé du système (1.7) dans $H_{(0)}^3$, la preuve repose sur la contrôlabilité du linéarisé autour de la trajectoire $(\Phi_1, u \equiv 0)$,

$$\begin{cases} i\partial_t \Psi = -\partial_{xx}^2 \Psi - v(t)\mu(x)\Phi_1, & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), \\ \Psi(t, 0) = \Psi(t, 1) = 0, \\ \Psi(0, x) = 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Des calculs explicites conduisent à l'expression

$$\Psi(T) = i \sum_{k=1}^{\infty} \langle \mu\varphi_1, \varphi_k \rangle \int_0^T v(t) e^{i(\lambda_k - \lambda_1)t} dt \Phi_k(T). \quad (1.16)$$

Ainsi, trouver v tel que $\Psi(T) = \Psi_f$ est équivalent à résoudre le problème de moments trigonométriques

$$\int_0^T v(t) e^{i(\lambda_k - \lambda_1)t} dt = \frac{\langle \Psi_f, \Phi_k(T) \rangle}{i \langle \mu\varphi_1, \varphi_k \rangle}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*. \quad (1.17)$$

Sous cette forme, on voit l'importance du comportement des coefficients $\langle \mu\varphi_1, \varphi_k \rangle$ et de l'hypothèse (1.13). Indépendamment du problème de contrôle, la résolution d'un tel problème

de moments est liée à l'existence d'une condition de saut pour les fréquences considérées (voir par exemple les livres [141, 92] de R.M. Young et de V. Komornik et P. Loreti). Le temps T nécessaire à la résolution d'un tel problème de moments est relié au saut minimal entre les fréquences. Le fait que $\lambda_k = k^2\pi^2$ entraîne que le saut entre les fréquences tend vers l'infini, ce qui permet de résoudre le problème de moments en temps arbitraire.

En utilisant l'asymptotique de Weyl, on obtient que pour un domaine Ω de \mathbb{R}^d suffisamment régulier les valeurs propres du Laplacien Dirichlet vérifient

$$\lambda_k \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} c(\Omega, d)k^{\frac{2}{d}}.$$

Bien qu'encore ouverte, la question de l'extension de la stratégie de K. Beauchard et C. Laurent en dimension supérieure, pourrait trouver une réponse positive en dimension deux. Le cas de la dimension supérieure ou égale à trois est lui hors de portée par ces techniques, le linéarisé (1.15) étant fortement non contrôlable. Ainsi, les résultats basés sur la résolution d'un problème de moments trigonométriques de la forme (1.17) sont restreints à des modèles unidimensionnels.

En couplant le Théorème 1.5 aux résultats de contrôle approché vers l'état fondamental dans des espaces réguliers de V. Nersisyan [112], on obtient la contrôlabilité exacte globale de (1.7) dans $\mathcal{S} \cap H_{(0)}^{3+\epsilon}$ avec des hypothèses génériques sur μ . Comme souligné dans [27, Section IV.A], ce résultat de contrôle exact global ne peut être obtenu en couplant le Théorème 1.5 et la contrôlabilité globale approchée donnée par la méthode de contrôle des approximations de Galerkin (Théorème 1.3). En effet, même si cette technique a été étendue à certains espaces de Sobolev, via la notion de système faiblement couplé par N. Boussaïd, M. Caponigro et T. Chambrion [30], cette stratégie impose des restrictions sur l'espace ambiant. Ainsi, si ces résultats s'appliquent pour la norme d'un espace de Sobolev, l'ensemble atteignable à partir de certaines conditions initiales (par exemple l'état fondamental) est d'intérieur vide dans cet espace (voir [27, Propositions 2 et 8]). Les cadres fonctionnels pour la contrôlabilité exacte locale et la notion de système faiblement couplé sont donc incompatibles.

Avec des arguments semblables à ceux du Théorème 1.4 deux autres résultats de contrôle exact ont été montrés pour des systèmes quantiques particuliers de la forme (1.7). Le cas d'un puits de potentiel dynamique a été considéré dans [15] par K. Beauchard et J.-M. Coron. Dans ce modèle, $\mu(x) := x$, le contrôle est l'accélération du puits de potentiel et l'état est le triplé fonction d'onde, vitesse et position du puits de potentiel. Dans [11], K. Beauchard a considéré le cas d'un domaine de longueur variable. Après changement de variables, on trouve un système de la forme (1.7) où $\mu(x) = x^2$ avec un contrôle $(4v^2(t) - \dot{v}(t))$ en lieu et place de $u(t)$.

Si l'asymptotique de Weyl pour les valeurs propres du Laplacien semblent être un frein à l'extension de la contrôlabilité exacte à des dimensions supérieures, les travaux de V. Nersisyan et H. Nersisyan [113, 114] montrent que ces obstructions ne sont pas valables en temps infini. Ils ont en effet montré la contrôlabilité exacte en temps infini dans des espaces réguliers (contenant $H_{(V)}^{3d}$) du système (1.6) pour D un rectangle de \mathbb{R}^d . En considérant un temps infini, la condition de saut n'est plus nécessaire : l'indépendance des fréquences considérées suffit pour la contrôlabilité du système linéarisé.

On se tourne maintenant vers les apports de ce mémoire concernant les problèmes de contrôle quantique bilinéaire.

1.2.3 Principaux résultats

1.2.3.1 Temps minimal pour la contrôlabilité

La première question discutée dans ce mémoire concerne une généralisation du Théorème 1.5 où l'on affaiblit les hypothèses sur μ conduisant à l'existence d'un temps minimal pour la contrôlabilité exacte locale de (1.7).

Les résultats présentés ici sont exposés en détails dans le Chapitre 2. L'article [18], écrit en collaboration avec K. Beauchard, dont s'inspire le Chapitre 2 a été accepté pour publication dans le journal *Mathematical Control and Related Fields*.

Nous avons vu que la résolution du problème de moments (1.17) et donc la preuve du Théorème 1.5 nécessitent l'hypothèse (1.13). On s'intéresse à la question de savoir ce qui persiste du résultat de contrôlabilité exacte locale si l'un des coefficients $\langle \mu \varphi_1, \varphi_K \rangle$ est nul i.e., d'après (1.16), si la direction Φ_K est perdue sur le linéarisé. On précise la notion de contrôlabilité étudiée pour ce problème.

Définition 1.1. Soient $T > 0$, X et Y espaces normés tels que $X \subset L^2((0,1), \mathbb{C})$ et $Y \subset L^2((0,T), \mathbb{R})$. Le système (1.7) est dit contrôlable dans X , localement autour du fondamental, avec des contrôles dans Y , en temps T si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\psi_f \in \mathcal{S} \cap X$ vérifiant $\|\psi_f - \Phi_1(T)\|_X < \delta$, il existe un contrôle $u \in Y$ avec $\|u\|_Y < \varepsilon$ tel que la solution associée, ψ , de (1.7) avec condition initiale $\psi_0 = \varphi_1$ satisfasse $\psi(T) = \psi_f$.

Cette notion implique donc la contrôlabilité exacte locale au voisinage de l'état fondamental mais requiert en plus que des mouvements arbitrairement petits se fassent avec des contrôles arbitrairement petits. Au regard de la dépendance C^1 (continue suffirait) entre la cible et le contrôle obtenue par K. Beauchard et C. Laurent dans le Théorème 1.5, cette notion de contrôlabilité est tout a fait justifiée.

Non contrôlabilité en temps petit : formes quadratiques coercives. Le premier résultat que nous avons obtenu est le suivant (voir le Théorème 2.3 page 51).

Théorème 1.6. Soient $K \in \mathbb{N}^*$ et $\mu \in H^3((0,1), \mathbb{R})$ tels que

$$\langle \mu \varphi_1, \varphi_K \rangle = 0, \quad \text{et} \quad A_K := \langle (\mu')^2 \varphi_1, \varphi_K \rangle \neq 0. \quad (1.18)$$

Soit $\alpha_K \in \{-1, 1\}$ défini par $\alpha_K := \text{sign}(A_K)$. Il existe $T_K^* > 0$ tel que, pour tout $T < T_K^*$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout contrôle $u \in L^2((0,T), \mathbb{R})$ vérifiant

$$\|u\|_{L^2(0,T)} < \varepsilon,$$

la solution associée, ψ , de (1.7) avec condition initiale $\psi_0 = \varphi_1$ vérifie

$$\psi(T) \neq \sqrt{1 - \delta^2} \Phi_1(T) + i \alpha_K \delta e^{-i\lambda_1 T} \varphi_K, \quad \forall \delta > 0. \quad (1.19)$$

Ainsi, (1.7) n'est pas contrôlable dans $H_{(0)}^3$, localement autour du fondamental, avec des contrôles $u \in L^2((0,T), \mathbb{R})$ en temps $T < T_K^*$.

Il est à noter que la cible (1.19) non atteignable est arbitrairement proche de $\Phi_1(T)$. Contrairement au Théorème 1.1, ce résultat de non contrôlabilité n'est pas de nature topologique. En effet, il n'est pas lié au cadre fonctionnel puisque la cible (1.19) est analytique et arbitrairement proche de l'état fondamental pour toute norme.

Si l'existence d'un temps minimal pour la contrôlabilité est naturelle pour des équations à vitesse finie de propagation (comme l'équation de transport ou l'équation des ondes), ce phénomène peut sembler moins naturel, au premier abord, pour des équations à vitesse infinie de propagation (comme l'équation de Schrödinger considérée ici). Ce temps minimal est ici dû à la nonlinéarité du système de contrôle. Ce phénomène avait déjà été mis en évidence par J.-M. Coron, dans le cas particulier du potentiel dynamique [53] (contrôlable en temps grand d'après [15]), en démontrant le théorème suivant.

Théorème 1.7. *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\overline{D} \neq 0$, il n'existe pas de contrôle $u \in L^2((0, \varepsilon), (-\varepsilon, \varepsilon))$ tel que la solution $(\psi, S, D) \in C^0([0, \varepsilon], H_0^1((0, 1), \mathbb{C})) \times C^0([0, \varepsilon], \mathbb{R}) \times C^1([0, \varepsilon], \mathbb{R})$ du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} i\partial_t \psi = -\partial_{xx}^2 \psi - u(t) \left(x - \frac{1}{2}\right) \psi, & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), \\ \psi(t, 0) = \psi(t, 1) = 0, \\ \dot{S}(t) = u(t), \quad \dot{D}(t) = S(t), \\ (\psi, S, D)(0) = (\varphi_1, 0, 0), \end{cases}$$

satisfasse $(\psi, S, D)(T) = (\Phi_1(\varepsilon), 0, \overline{D})$.

Ainsi, le Théorème 1.6 généralise ce résultat. En effet, pour $K = 1$, on a bien

$$\left\langle \left(x - \frac{1}{2}\right) \varphi_1, \varphi_K \right\rangle = 0, \quad A_K = \langle \varphi_1, \varphi_K \rangle \neq 0.$$

La non contrôlabilité en temps petit ne provient donc pas de la contrainte supplémentaire de contrôler, en même temps que la fonction d'onde, la vitesse et la position du puits de potentiel mais du fait que $\mu(x) = x - \frac{1}{2}$. De plus, notre hypothèse sur la taille des contrôles est exprimée pour la norme L^2 et non plus la norme L^∞ ce qui est plus naturel vis à vis du cadre fonctionnel.

On explique ici l'heuristique de la preuve du Théorème 1.6. Pour étudier la contrôlabilité autour de la trajectoire $(\Phi_1, u \equiv 0)$, on considère un contrôle de la forme $u = 0 + \varepsilon v + \varepsilon^2 w$ et on développe la fonction d'onde suivant les puissances de ε

$$\psi = \Phi_1 + \varepsilon \Psi + \varepsilon^2 \xi + o(\varepsilon^2),$$

où Ψ est solution du linéarisé (1.15) et ξ vérifie

$$\begin{cases} i\partial_t \xi = -\partial_{xx}^2 \xi - v(t)\mu(x)\Psi - w(t)\mu(x)\Phi_1, & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), \\ \xi(t, 0) = \xi(t, 1) = 0, \\ \xi(0, x) = 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

D'après (1.16), $\Psi(T)$ appartient à $\text{Adh}_{H_{(0)}^3}(\text{Vect}\{\varphi_k; k \neq K\})$. Donc, si l'on déplace $\epsilon\Psi(T) + \epsilon^2\xi(T)$ dans la direction $i\alpha_K e^{-i\lambda_1 T} \varphi_K$ alors $\Psi(T) = 0$ i.e.

$$v \in V_T := \left\{ v \in L^2((0, T), \mathbb{R}); \int_0^T v(t) e^{i(\lambda_k - \lambda_1)t} dt = 0, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^* \right. \\ \left. \text{tel que } \langle \mu\varphi_1, \varphi_k \rangle \neq 0 \right\}$$

et $\xi(T) = i\delta\alpha_K e^{-i\lambda_1 T} \varphi_K$ avec $\delta > 0$. Nécessairement, la forme quadratique

$$\tilde{Q}_{K,T}(v) := \text{Im}(\langle \xi(T), e^{-i\lambda_1 T} \varphi_K \rangle) \quad (1.21)$$

est alors du signe de α_K . L'essence du Théorème 1.6 repose sur le fait que cette forme quadratique $\tilde{Q}_{K,T}$ ait un signe strict en temps petit. Ainsi, pour α_K de signe contraire à celui de cette forme quadratique (ici $\alpha_K := \text{sign}(A_K)$ avec A_K défini en (1.18)) des cibles de la forme (1.19) sont inatteignables.

Supposons que $A_K > 0$. En utilisant des intégrations par parties, si $s(t) := \int_0^t v(\tau) d\tau$ on obtient l'existence d'un temps explicite T_K^* tel que pour tout $T < T_K^*$

$$\tilde{Q}_{K,T}(v) \leq -\frac{A_K}{4} \int_0^T s(t)^2 dt, \quad \forall v \in V_T. \quad (1.22)$$

Ce signe strict de la forme quadratique conclut donc cette heuristique et justifie la restriction du Théorème 1.6 au cas de contrôles petits dans L^2 . En effet, faire le lien entre le signe de $\tilde{Q}_{K,T}$ et celui de $\text{Im}(\langle \psi(T), e^{-i\lambda_1 T} \varphi_K \rangle)$ n'est possible que si ξ est une bonne approximation de ψ . Ceci n'est réalisé que pour des contrôles petits.

Pour des raisons techniques, l'obtention du signe strict de $\text{Im}(\langle \psi(T), e^{-i\lambda_1 T} \varphi_K \rangle)$ nécessite, dans la preuve du Théorème 1.6, la coercivité de la forme quadratique $\tilde{Q}_{K,T}$. L'inégalité (1.22) implique la coercivité vis à vis de s et non de v . L'inégalité de coercivité vis à vis de v n'est pas vérifiée. Pour cette raison, l'analyse conduite dans le Chapitre 2, repose sur la même étude pour le système auxiliaire avec contrôle s

$$\begin{cases} i\partial_t \tilde{\psi} = -\partial_{xx}^2 \tilde{\psi} - is(t)(2\mu'(x)\partial_x \tilde{\psi} + \mu''(x)\tilde{\psi}) + s(t)^2 \mu'(x)^2 \tilde{\psi}, \\ \tilde{\psi}(t, 0) = \tilde{\psi}(t, 1) = 0, \\ \tilde{\psi}(0, x) = \varphi_1(x), \end{cases} \quad (1.23)$$

obtenu à partir de (1.7) par le changement de variable

$$\psi(t, x) = \tilde{\psi}(t, x) e^{is(t)\mu(x)}, \quad s(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau.$$

Contrôlabilité en temps grand : développement aux ordres supérieurs. Comme annoncé, le résultat principal du Chapitre 2 est l'existence d'un temps minimal pour la contrôlabilité exacte locale de (1.7). Au vu du Théorème 1.6, il suffit maintenant de montrer la contrôlabilité en temps grand, ce qui est fait dans le théorème suivant (voir le Théorème 2.4 page 51).

Théorème 1.8. *Soit $\mu \in H^3((0, 1), \mathbb{R})$ tel que*

$$\mu'(0) \pm \mu'(1) \neq 0. \quad (1.24)$$

Alors, le système (1.7) est contrôlable dans $H_{(0)}^3$, localement autour du fondamental, avec des contrôles $u \in L^2((0, T), \mathbb{R})$, en temps T suffisamment grand.

Nous avons vu en (1.14) que l'hypothèse (1.24) est une condition nécessaire pour que l'hypothèse (1.13) soit vérifiée; et obtenir ainsi la contrôlabilité exacte locale en temps arbitraire. Cette hypothèse (1.24) est en fait suffisante pour conclure à la contrôlabilité, mais uniquement en temps suffisamment grand.

La preuve du Théorème 1.8 repose aussi sur le développement en puissances de ϵ du contrôle et de la fonction d'onde et sur l'analyse des termes d'ordre un et deux, respectivement Ψ et ξ solutions de (1.15) et (1.20). En utilisant l'asymptotique (1.14) et l'hypothèse (1.24) on obtient l'existence de $N \in \mathbb{N}$, $K_1, \dots, K_N \in \mathbb{N}^*$ et de $C > 0$ tels que

$$\begin{aligned} |\langle \mu \varphi_1, \varphi_k \rangle| &\geq \frac{C}{k^3}, \quad \forall k \notin \{K_1, \dots, K_N\}, \\ \langle \mu \varphi_1, \varphi_{K_j} \rangle &= 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Ainsi, cette estimée et la stratégie du Théorème 1.5 permettent de conclure à la contrôlabilité de l'ordre un Ψ à codimension N près. Le reste de la preuve consiste à prouver que l'on récupère, à l'ordre deux ξ , ce nombre fini de directions perdues. Pour cela, on adapte une idée due à E. Cerpa et E. Crépeau pour une équation de Korteweg-de Vries [44]. Le point clé de leur stratégie est que, dans une certaine base, les composantes de la solution du système libre (i.e. associée au contrôle nul) tournent toutes, et avec des vitesses distinctes. Dans notre cas, en décomposant la solution du système (1.7) libre, dans la base des états propres

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle \psi_0, \varphi_k \rangle e^{-i\lambda_k t} \varphi_k,$$

on constate que l'on est bien dans ce cas favorable (voir le Lemme 2.5 page 68).

Cependant, sous l'hypothèse $\langle \mu \varphi_1, \varphi_1 \rangle = 0$, lorsque l'on travaille au voisinage du fondamental, la première direction $i\mathbb{R}\Phi_1$ est perdue à l'ordre un et ne tourne pas à l'ordre deux. Ceci est dû au fait que la trajectoire $(\Phi_1, u \equiv 0)$, autour de laquelle on linéarise, n'est pas constante contrairement à celle considérée dans [44]. Il est alors de nécessaire de procéder à quelques adaptations. La stratégie globale est la même que celle de [44] : on combine des phases successives de contrôle et de rotation (contrôle nul), mais un traitement différent est réservé à la première composante si elle est perdue.

Ces idées sont aussi utilisées pour montrer la contrôlabilité de certaines directions sous l'hypothèse $\mu'(0) = \mu'(1) \neq 0$ (resp. $\mu'(0) = -\mu'(1) \neq 0$) dans le Théorème 2.6 page 52. Signalons que, lorsque $\mu'(0) = \mu'(1) = 0$, le résultat négatif de J.M. Ball, J.E. Marsden et M. Slemrod (Théorème 1.1) permet de démontrer qu'il n'y a pas contrôlabilité exacte dans $H_{(0)}^3$ avec des contrôles $L^2((0, T), \mathbb{R})$. Le cadre fonctionnel adapté à la contrôlabilité exacte locale n'est plus le même. Supposons qu'il existe $L \in \mathbb{N}$ tel que $\mu \in H^{2L+3}((0, 1), \mathbb{R})$ et

$$\mu^{(2k+1)}(0) = \mu^{(2k+1)}(1) = 0, \quad \forall k \in \{0, \dots, L-1\} \text{ et } \mu^{(2L+1)}(0) \pm \mu^{(2L+1)}(1) \neq 0.$$

Alors, en exploitant les techniques développées pour le Théorème 1.8, on peut prouver la contrôlabilité de (1.7), dans $H_{(0)}^{2L+3}$, localement autour du fondamental, avec des contrôles dans $L^2((0, T), \mathbb{R})$, en temps T suffisamment grand.

Temps minimal. En combinant les Théorèmes 1.6 et 1.8, on obtient l'existence d'un temps minimal pour la contrôlabilité locale.

Théorème 1.9. *Soit $\mu \in H^3((0, 1), \mathbb{R})$ tel que les hypothèses (1.18) pour $K \in \mathbb{N}^*$ et (1.24) soient vérifiées. Alors, il existe $T_{min} > 0$ tel que la propriété de contrôlabilité du système (1.7), dans $H_{(0)}^3$, localement autour du fondamental, avec des contrôles $u \in L^2((0, T), \mathbb{R})$, soit vérifiée si $T > T_{min}$ et non vérifiée si $T < T_{min}$.*

Toutefois, la caractérisation de ce temps minimal est un problème largement ouvert. Dans un cadre favorable, où seule la première direction est perdue à l'ordre un, un encadrement de ce temps minimal est proposé en Section 2.6.

Dans la suite, sauf mention explicite, on n'impose plus les restrictions sur la norme du contrôle établies dans la Définition 1.1.

1.2.3.2 Contrôle exact local simultané

Une deuxième question d'intérêt concernant l'équation de Schrödinger bilinéaire est celle du contrôle simultané. Plus précisément on considère, pour $N \in \mathbb{N}^*$, le système

$$\begin{cases} i\partial_t \psi^j = -\partial_{xx}^2 \psi^j - u(t)\mu(x)\psi^j, & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), \\ \psi^j(t, 0) = \psi^j(t, 1) = 0, & j \in \{1, \dots, N\}, \\ \psi^j(0, x) = \varphi_j(x). \end{cases} \quad (1.26)$$

C'est un modèle simplifié de l'évolution des fonctions d'onde de N particules identiques soumises au même champ extérieur. Les particules sont supposées indépendantes et l'on néglige l'intrication.

Les résultats discutés ici sont exposés en détails dans le Chapitre 3. L'article [109], dont s'inspire le Chapitre 3, est publié dans le journal *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire*.

L'objectif est ici de contrôler localement, autour des N premiers états propres, le système (1.26), avec un seul contrôle u . La notion de contrôlabilité simultanée considérée ici n'est pas à confondre avec celle présentée dans le livre [98] de J.-L. Lions et étudiée par de nombreux auteurs (voir par exemple [132, 4, 3, 88] par M. Tucsnak, G. Weiss, S.A. Avdonin, W. Moran et B. Kapitonov). Contrairement à ces références, les N opérateurs d'évolution et de contrôle considérés dans (1.26) sont identiques.

La première remarque est que l'évolution de (1.7) étant unitaire, les trajectoires de (1.26) vérifient les invariants suivants

$$\langle \psi^j(t), \psi^k(t) \rangle \equiv \langle \psi^j(0), \psi^k(0) \rangle, \quad \forall t \in [0, T], \forall j, k \in \{1, \dots, N\}. \quad (1.27)$$

Les cibles doivent donc vérifier des conditions de compatibilité avec les conditions initiales. Une première étape pour obtenir la contrôlabilité simultanée de (1.26) est que chaque équation, considérée séparément, soit contrôlable. D'après le Théorème 1.5, ceci est assuré par

l'hypothèse suivante

$$\exists c > 0 \text{ tel que } |\langle \mu \varphi_j, \varphi_k \rangle| \geq \frac{c}{k^3}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall j \in \{1, \dots, N\}. \quad (1.28)$$

Non contrôlabilité pour deux équations. La stratégie naturelle pour montrer la contrôlabilité du système (1.26) au voisinage de la trajectoire $(\Phi_1, \dots, \Phi_N, u \equiv 0)$ est de montrer la contrôlabilité du linéarisé

$$\begin{cases} i\partial_t \Psi^j = -\partial_{xx}^2 \Psi^j - v(t)\mu(x)\Phi_j, & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), \\ \Psi^j(t, 0) = \Psi^j(t, 1) = 0, & j \in \{1, \dots, N\}, \\ \Psi^j(0, x) = 0. \end{cases} \quad (1.29)$$

Dans la base des états propres, on obtient alors

$$\Psi^j(T) = i \sum_{k=1}^{+\infty} \langle \mu \varphi_j, \varphi_k \rangle \int_0^T v(t) e^{i(\lambda_k - \lambda_j)t} dt \Phi_k(T). \quad (1.30)$$

La contrôlabilité du linéarisé est donc équivalente à la résolution du problème de moments trigonométriques

$$\int_0^T v(t) e^{i(\lambda_k - \lambda_j)t} dt = \frac{\langle \Psi_f^j, \Phi_k(T) \rangle}{i \langle \mu \varphi_j, \varphi_k \rangle}, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (1.31)$$

où $(\Psi_f^1, \dots, \Psi_f^N)$ est la cible visée pour le système (1.29) au temps T .

Supposons que $N = 2$. La linéarisation des invariants (1.27) conduit à considérer pour le linéarisé (1.29) des cibles vérifiant

$$\operatorname{Re}(\langle \Psi_f^1, \Phi_1(T) \rangle) = \operatorname{Re}(\langle \Psi_f^2, \Phi_2(T) \rangle) = 0, \quad (1.32)$$

$$\langle \Psi_f^1, \Phi_2(T) \rangle + \langle \Phi^1(T), \Psi_f^2 \rangle = 0. \quad (1.33)$$

On peut donc oublier le coefficient $\langle \Psi^2(T), \Phi_1(T) \rangle$ dans le problème de moments : il est contrôlé directement par $\langle \Psi^1(T), \Phi_2(T) \rangle$ et la contrainte (1.33). Les fréquences

$$\{\lambda_k - \lambda_j; j \in \{1, 2\}, k \geq j + 1 \text{ et } k = j = 2\}$$

vérifient une condition de saut suffisante à la résolution en tout temps du problème de moments trigonométriques associé. Finalement, le seul obstacle à la contrôlabilité de (1.29) est le fait que la fréquence 0 soit de multiplicité deux ($\lambda_k - \lambda_j$ pour $j = k = 1$ et $j = k = 2$).

En effet, les coefficients diagonaux $\langle \Psi^j(T), \Phi_j(T) \rangle$ sont liés par la relation suivante

$$\frac{\langle \Psi^j(T), \Phi_j(T) \rangle}{i \langle \mu \varphi_j, \varphi_j \rangle} = \int_0^T v(t) dt.$$

Pour $N \geq 2$, on a donc au moins une direction perdue à l'ordre un. On est alors dans un contexte similaire à celui du Théorème 1.6. Le premier résultat concernant la contrôlabilité simultanée est donc négatif (voir le Théorème 3.1 page 90) et établit la non contrôlabilité autour de (Φ_1, Φ_2) avec des contrôles petits dans L^2 en temps petit.

Théorème 1.10. *Soit $N \geq 2$. On suppose que $\mu \in H^3((0, 1), \mathbb{R})$ vérifie*

$$\mathcal{A} := \langle \mu \varphi_1, \varphi_1 \rangle \langle (\mu')^2 \varphi_2, \varphi_2 \rangle - \langle \mu \varphi_2, \varphi_2 \rangle \langle (\mu')^2 \varphi_1, \varphi_1 \rangle \neq 0. \quad (1.34)$$

On définit $\alpha \in \{-1, 1\}$ par $\alpha := \text{sign}(\mathcal{A} \langle \mu \varphi_1, \varphi_1 \rangle)$. Il existe $T_* > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $T < T_*$, pour tout $u \in L^2((0, T), \mathbb{R})$ vérifiant $\|u\|_{L^2(0, T)} < \varepsilon$, la solution de (1.26) satisfasse

$$(\psi^1(T), \psi^2(T)) \neq \left(\Phi_1(T), \left(\sqrt{1 - \delta^2} + i\alpha\delta \right) \Phi_2(T) \right), \quad \forall \delta > 0. \quad (1.35)$$

On note que la cible (1.35) vérifie bien les invariants (1.27) et, pour δ petit, est arbitrairement proche de $(\Phi_1(T), \Phi_2(T))$. L'hypothèse (1.34) est technique : son rôle est discuté en Section 1.2.4. Similairement au Théorème 1.6, le Théorème 1.10 est prouvé par l'étude du signe d'une forme quadratique appropriée. Pour $N = 1$, le Théorème 1.5 montre la contrôlabilité exacte au voisinage de Φ_1 en temps arbitraire avec une dépendance C^1 entre la cible et le contrôle. Ce résultat ne s'étend donc pas au cas $N \geq 2$ sous l'hypothèse (1.34).

Contrôlabilité simultanée de deux équations : méthode du retour. Il est important de garder à l'esprit que, du point de vue physique, la densité de probabilité de présence étant donnée par le module de la fonction d'onde, la phase globale n'a aucune signification. Ainsi, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, (ψ^1, ψ^2) et $e^{i\theta}(\psi^1, \psi^2)$ décrivent le même état et sont donc physiquement équivalents. En travaillant à phase globale près, on montre le résultat suivant (voir le Théorème 3.2 page 90).

Théorème 1.11. *Soit $T > 0$. On suppose que $N = 2$ et $\mu \in H^3((0, 1), \mathbb{R})$ vérifie (1.28) et $\langle \mu \varphi_1, \varphi_1 \rangle \neq \langle \mu \varphi_2, \varphi_2 \rangle$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_0 > 0$ et une application C^1*

$$\Gamma : \mathcal{O}_{\varepsilon_0} \rightarrow L^2((0, T), \mathbb{R})$$

où

$$\mathcal{O}_{\varepsilon_0} := \left\{ (\psi_f^1, \psi_f^2) \in \left(H_{(0)}^3 \right)^2 ; \langle \psi_f^j, \psi_f^k \rangle = \delta_{j=k} \text{ et } \sum_{j=1}^2 \|\psi_f^j - e^{i\theta} \Phi_j(T)\|_{H_{(0)}^3} < \varepsilon_0 \right\},$$

telle que pour tout $(\psi_f^1, \psi_f^2) \in \mathcal{O}_{\varepsilon_0}$, la solution de (1.26) avec contrôle $u = \Gamma(\psi_f^1, \psi_f^2)$ satisfasse

$$(\psi^1(T), \psi^2(T)) = (\psi_f^1, \psi_f^2).$$

On obtient alors la contrôlabilité au voisinage de (Φ_1, Φ_2) à phase globale près, en temps arbitraire, sous des hypothèses génériques sur le moment dipolaire μ . Nous avons vu au Théorème 1.8 que dans ce cadre, une direction perdue à l'ordre un peut être récupérée à l'ordre deux en utilisant des phases successives de contrôle et de rotation (contrôle nul). Néanmoins, comme pour le cas d'une équation, les directions diagonales $\langle \Psi^j(T), \Phi_j(T) \rangle$ perdues ici sont précisément les seules directions qui ne présentent pas ce phénomène de rotation (voir le Lemme 2.5 page 68). Pour cette raison, les résultats positifs de contrôlabilité présentés au Chapitre 3 sont basés sur une stratégie différente : la méthode du retour.

Cette méthode, introduite par J.-M. Coron pour un problème de stabilisation, a été utilisée à de nombreuses reprises pour montrer la contrôlabilité de systèmes non linéaires dont

le linéarisé est non contrôlable. Un panorama non exhaustif est présenté en Section 3.1.4 page 93. Pour une présentation pédagogique, on renvoie au livre de J.-M. Coron [54, Chapitre 6]. Dans notre contexte, l'idée principale de cette méthode est la construction d'un contrôle de référence u_{ref} tel que la solution $(\psi_{ref}^1, \psi_{ref}^2)$ de (1.26) associée vérifie

$$(\psi_{ref}^1, \psi_{ref}^2)(T) = e^{i\theta}(\Phi_1(T), \Phi_2(T))$$

et que le linéarisé au voisinage de cette trajectoire de référence soit contrôlable. La contrôlabilité de ce linéarisé induit alors (via le théorème d'inversion locale) la contrôlabilité locale de (1.26) au voisinage de $(\psi_{ref}^1, \psi_{ref}^2)(T)$ et conclut la preuve du Théorème 1.11. Si le système considéré est réversible en temps alors la construction d'une trajectoire de référence est immédiate. La plupart des trajectoires de références construites pour des systèmes non réversibles en temps sont basées sur des calculs explicites (voir par exemple [59, 60]). Le système (1.7) vérifie la propriété suivante, souvent qualifiée de réversibilité en temps. Pour $u \in L^2((0, T), \mathbb{R})$ et $v := u(T - \cdot)$, on a

$$\psi(T, \overline{\psi(T, \psi_0, u)}, v) = \overline{\psi_0}. \quad (1.36)$$

Bien qu'utilisée à plusieurs reprises dans ce mémoire, la conjugaison complexe rend cette propriété de réversibilité en temps difficile à exploiter pour la construction d'une trajectoire de référence. L'idée principale de la construction de la trajectoire de référence, en Section 3.3, consiste à utiliser des résultats de contrôle partiel conjointement aux invariants (1.27). La propriété de contrôlabilité du linéarisé au voisinage de la trajectoire de référence repose sur deux idées :

- la trajectoire de référence $(\psi_{ref}^1, \psi_{ref}^2)$ est suffisamment proche de (Φ_1, Φ_2) pour que toutes les directions $\langle \Psi^j(T), \Phi_k(T) \rangle$ dans (1.30) contrôlables par résolution d'un problème de moments trigonométriques soient encore contrôlables (voir le Lemme 3.1 page 102),
- les coefficients diagonaux $\langle \Psi^j(T), \Phi_j(T) \rangle$ sont indépendants (voir le Lemme 3.3 page 104).

Intuitivement, la phase globale θ introduit un degré de liberté supplémentaire qui permet de gérer le fait que la fréquence 0 soit de multiplicité deux (pour les deux coefficients diagonaux $\langle \Psi^1(T), \Phi_1(T) \rangle$ et $\langle \Psi^2(T), \Phi_2(T) \rangle$) dans la résolution du problème de moments trigonométriques.

En modifiant légèrement la construction de la trajectoire de référence, on montre aussi pour $N = 2$ la contrôlabilité exacte à un retard global près (voir le Théorème 3.3 page 90).

Théorème 1.12. *On suppose que $N = 2$ et $\mu \in H^3((0, 1), \mathbb{R})$ vérifie (1.28) et $4\langle \mu\varphi_1, \varphi_1 \rangle - \langle \mu\varphi_2, \varphi_2 \rangle \neq 0$. Il existe $T^* > 0$ tel que, pour tout $T \geq 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une application C^1*

$$\Gamma : \mathcal{O}_{\varepsilon_0, T} \rightarrow L^2((0, T^* + T), \mathbb{R})$$

où

$$\mathcal{O}_{\varepsilon_0, T} := \left\{ (\psi_f^1, \psi_f^2) \in \left(H_{(0)}^3 \right)^2 ; \langle \psi_f^j, \psi_f^k \rangle = \delta_{j=k} \text{ et } \sum_{j=1}^2 \|\psi_f^j - \Phi_j(T)\|_{H_{(0)}^3} < \varepsilon_0 \right\},$$

telle que pour tout $(\psi_f^1, \psi_f^2) \in \mathcal{O}_{\varepsilon_0, T}$, la solution de (1.26) avec contrôle $u = \Gamma(\psi_f^1, \psi_f^2)$ satisfasse

$$(\psi^1(T^* + T), \psi^2(T^* + T)) = (\psi_f^1, \psi_f^2).$$

Ainsi, ce théorème ne fait plus intervenir de phase globale et prouve la contrôlabilité exacte pour deux équations. Là encore, les hypothèses sur μ sont génériques. L'appellation "à retard global près" provient du fait que les cibles proches de $(\Phi_1(T), \Phi_2(T))$ sont atteintes non pas au temps T , mais au temps $T^* + T$; le retard T^* étant le même pour tout T et toute cible. Comme précédemment, le retard global joue le rôle d'un degré de liberté supplémentaire pour gérer la multiplicité double de la fréquence 0 dans le problème de moments trigonométriques associé.

Adaptation au cas de trois équations. Si l'on considère maintenant $N = 3$ alors, pour le système linéarisé (1.29), la fréquence 0 est de multiplicité trois dans le problème de moments trigonométriques associé. Le système (1.29) présente donc de nouvelles directions perdues et l'on montre alors que, même à phase globale près, on n'a pas contrôlabilité locale au voisinage de (Φ_1, Φ_2, Φ_3) avec des contrôles petits dans L^2 en temps petit. Plus précisément (voir le Théorème 3.4 page 91), l'adaptation de la preuve du Théorème 1.10 conduit au résultat suivant.

Théorème 1.13. *Soit $N \geq 3$. On suppose que $\mu \in H^3((0, 1), \mathbb{R})$ vérifie*

$$\begin{aligned} \mathcal{B} := & (\langle \mu \varphi_3, \varphi_3 \rangle - \langle \mu \varphi_2, \varphi_2 \rangle) \langle (\mu')^2 \varphi_1, \varphi_1 \rangle \\ & + (\langle \mu \varphi_1, \varphi_1 \rangle - \langle \mu \varphi_3, \varphi_3 \rangle) \langle (\mu')^2 \varphi_2, \varphi_2 \rangle \\ & + (\langle \mu \varphi_2, \varphi_2 \rangle - \langle \mu \varphi_1, \varphi_1 \rangle) \langle (\mu')^2 \varphi_3, \varphi_3 \rangle \neq 0. \end{aligned} \quad (1.37)$$

On définit $\beta \in \{-1, 1\}$ par $\beta = \text{sign}(\mathcal{B}(\langle \mu \varphi_2, \varphi_2 \rangle - \langle \mu \varphi_1, \varphi_1 \rangle))$. Il existe $T_* > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout $T < T_*$, pour tout $u \in L^2((0, T), \mathbb{R})$ vérifiant $\|u\|_{L^2(0, T)} < \varepsilon$, la solution de (1.26) satisfasse

$$(\psi^1(T), \psi^2(T), \psi^3(T)) \neq e^{i\nu} \left(\Phi_1(T), \Phi_2(T), \left(\sqrt{1 - \delta^2} + i\beta\delta \right) \Phi_3(T) \right), \quad \forall \delta > 0, \forall \nu \in \mathbb{R}.$$

L'hypothèse (1.37) est une adaptation de l'hypothèse (1.34) discutée en Section 1.2.4.

Au regard des Théorèmes 1.11 et 1.12, pour pouvoir gérer la multiplicité triple de la fréquence 0 dans le problème de moments, on introduit deux degrés de liberté supplémentaires : la phase globale et le retard global. En effet, en adaptant les trajectoires de référence de ces deux théorèmes, on prouve pour $N = 3$, la contrôlabilité au voisinage de (Φ_1, Φ_2, Φ_3) à phase globale près et à retard global près, sous des hypothèses génériques sur μ (voir le Théorème 3.5 page 91).

Théorème 1.14. *On suppose que $N = 3$ et $\mu \in H^3((0, 1), \mathbb{R})$ vérifie (1.28) et $5\langle \mu \varphi_1, \varphi_1 \rangle - 8\langle \mu \varphi_2, \varphi_2 \rangle + 3\langle \mu \varphi_3, \varphi_3 \rangle \neq 0$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$, $T^* > 0$ tels que, pour tout $T \geq 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une application C^1*

$$\Gamma : \mathcal{O}_{\varepsilon_0, T} \rightarrow L^2((0, T^* + T), \mathbb{R})$$

où

$$\mathcal{O}_{\varepsilon_0, T} := \left\{ (\psi_f^1, \psi_f^2, \psi_f^3) \in \left(H_{(0)}^3 \right)^3 ; \langle \psi_f^j, \psi_f^k \rangle = \delta_{j=k} \text{ et } \sum_{j=1}^3 \|\psi_f^j - e^{i\theta} \Phi_j(T)\|_{H_{(0)}^3} < \varepsilon_0 \right\},$$

telle que pour tout $(\psi_f^1, \psi_f^2, \psi_f^3) \in \mathcal{O}_{\varepsilon_0, T}$, la solution de (1.26) avec $u = \Gamma(\psi_f^1, \psi_f^2, \psi_f^3)$ satisfasse

$$(\psi^1(T^* + T), \psi^2(T^* + T), \psi^3(T^* + T)) = (\psi_f^1, \psi_f^2, \psi_f^3).$$

1.2.3.3 Contrôle exact global de N équations

La stratégie développée pour prouver le Théorème 1.14 ne s'étend pas directement pour $N \geq 4$ équations. Non seulement il semble que la résolution du problème de moments trigonométriques nécessite de nouveaux degrés de liberté, pour gérer la multiplicité N de la fréquence 0, mais on voit aussi apparaître des fréquences résonantes (par exemple $\lambda_7 - \lambda_1 = \lambda_8 - \lambda_4$). Un moyen de résoudre ce problème de fréquences résonantes consiste à considérer un potentiel V non nul i.e.

$$\begin{cases} i\partial_t \psi^j = (-\partial_{xx}^2 + V(x)) \psi^j - u(t)\mu(x)\psi^j, & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), \\ \psi^j(t, 0) = \psi^j(t, 1) = 0, & j \in \{1, \dots, N\}, \\ \psi^j(0, x) = \psi_0^j(x). \end{cases} \quad (1.38)$$

En tirant parti de ce potentiel V , on étend au Chapitre 4 les idées du Théorème 1.14 pour montrer la contrôlabilité exacte globale de (1.38). La prépublication [110], dont s'inspire le Chapitre 4, a été écrite en collaboration avec V. Nersisyan.

Pour simplifier les notations, on considère en symboles gras les vecteurs i.e. on note $\boldsymbol{\psi}$ pour le vecteur (ψ^1, \dots, ψ^N) . De même, pour un espace de Hilbert H , on désigne H^N par \mathbf{H} . Le principal résultat du Chapitre 4 est le suivant (voir le Théorème 4.1 page 122).

Théorème 1.15. *Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $V \in H^4((0, 1), \mathbb{R})$, on a contrôlabilité exacte globale du système (1.38) dans $\mathbf{H}_{(V)}^4$, génériquement par rapport à μ dans $H^4((0, 1), \mathbb{R})$. Plus précisément, pour tout $V \in H^4((0, 1), \mathbb{R})$, il existe un ensemble résiduel \mathcal{Q}_V de $H^4((0, 1), \mathbb{R})$ tel que, pour tout $\mu \in \mathcal{Q}_V$, pour tout vecteurs $\boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{\psi}_f \in \mathcal{S} \cap \mathbf{H}_{(V)}^4$ unitairement équivalents, il existe un temps $T > 0$ et un contrôle $u \in L^2((0, T), \mathbb{R})$ tels que la solution de (1.38) satisfasse*

$$\boldsymbol{\psi}(T) = \boldsymbol{\psi}_f.$$

Deux vecteurs $\boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{\psi}_f \in \mathcal{S}$ sont dits unitairement équivalents s'il existe une application unitaire \mathcal{U} de L^2 telle que $\boldsymbol{\psi}_f = \mathcal{U}\boldsymbol{\psi}_0$ i.e.

$$\psi_f^j = \mathcal{U}\psi_0^j, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}.$$

Au vu de l'évolution unitaire de l'équation de Schrödinger considérée, cette hypothèse d'équivalence unitaire entre la cible et la condition initiale n'est pas restrictive.

Un argument de perturbation, développé ultérieurement (voir le système (1.40)), permet de considérer une partie du moment dipolaire comme un potentiel supplémentaire. Ainsi, même pour V quelconque, on se ramène à étudier le système (1.38) sous des hypothèses

favorables sur les éléments propres de l'opérateur libre. Du fait de l'absence de restrictions sur le potentiel, même dans le cas d'une seule équation, le Théorème 1.15 constitue une généralisation de la littérature existante concernant la contrôlabilité des systèmes quantiques bilinéaires unidimensionnels. La preuve du Théorème 1.15 repose sur les idées suivantes.

- On montre, en utilisant la méthode de Lyapunov, la contrôlabilité globale approchée vers des sommes finies d'états propres.
- En adaptant la trajectoire de référence construite pour la preuve du Théorème 1.14, la méthode du retour de J.-M. Coron permet de conclure à la contrôlabilité exacte locale au voisinage de certaines sommes finies d'états propres.
- Grâce à des arguments de connexité et de compacité, on étend cette propriété de contrôlabilité exacte au voisinage de vecteurs (dont les composantes sont des sommes finies d'états propres) différents pour les conditions initiales et finales.
- On conclut en combinant les résultats précédents et l'argument de réversibilité en temps (1.36).

On termine cette section en donnant les énoncés et des éléments de preuve de chacune de ces étapes.

Contrôle global approché : fonction de Lyapunov. Si l'on définit pour $M \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{C}_M := \text{Vect}\{\varphi_{1,V}, \dots, \varphi_{M,V}\}, \quad (1.39)$$

on prouve le résultat de contrôle approché suivant (voir le Théorème 4.2 page 126).

Théorème 1.16. *Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $V, \mu \in H^4((0, 1), \mathbb{R})$ vérifient*

- $\langle \mu \varphi_{j,V}, \varphi_{k,V} \rangle \neq 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$, $k \in \mathbb{N}^*$.
- $\lambda_{j,V} - \lambda_{k,V} \neq \lambda_{p,V} - \lambda_{q,V}$ pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$, $k, p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\{j, k\} \neq \{p, q\}$ et $k \neq j$.

Alors, pour tout $\psi_0 \in \mathcal{S} \cap \mathbf{H}_{(V)}^4$ vérifiant $\langle \psi_0^j, \varphi_{j,V} \rangle \neq 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$, il existe $M \in \mathbb{N}^*$, $\psi_f \in \mathcal{C}_M$, des suites $T_n > 0$ et $u_n \in C_0^\infty((0, T_n), \mathbb{R})$ tels que la solution de (1.38) associée satisfasse

$$\psi(T_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \psi_f \quad \text{dans } \mathbf{H}^3.$$

Ce résultat est l'adaptation au cas $N > 1$ du résultat démontré par V. Nersesyan avec $N = M = 1$ dans [112]. L'idée principale consiste à construire une fonction de Lyapunov contrôlée, $\mathcal{V}(\psi)$, minimale en un point de \mathcal{C}_M (en l'occurrence $(c_1 \varphi_{1,V}, \dots, c_N \varphi_{N,V})$ avec $c_j \in \mathbb{C}$ tels que $|c_j| = 1$) et qui assure une borne des solutions dans \mathbf{H}^4 . Le contrôle, qui garantit la décroissance de cette fonctionnelle le long des trajectoires, n'est pas une loi de rétroaction explicite, mais un contrôle en boucle ouverte, dont on montre l'existence par un argument variationnel comme dans [112]. L'analyse développée ne nous permet pas de démontrer que la solution ψ de (1.38) approche $(c_1 \varphi_{1,V}, \dots, c_N \varphi_{N,V})$ (qui est le minimum de \mathcal{V}) mais seulement un vecteur composé de sommes finies d'états propres (qui est un point critique de \mathcal{V}).

Comme souligné en page 10, ce résultat n'est pas couvert par le Théorème 1.3 et la notion de système faiblement couplé.

Contrôlabilité exacte locale au voisinage de sommes finies d'états propres : méthode du retour. Au vu du Théorème 1.16, une étape clé pour conclure à la contrôlabilité exacte globale est de montrer la contrôlabilité exacte localement au voisinage de sommes finies d'états propres. Ce résultat est l'objet du théorème suivant (voir le Théorème 4.3 page 130).

Théorème 1.17. *Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $V, \mu \in H^3((0, 1), \mathbb{R})$ vérifient*

- *il existe $C > 0$ tel que*

$$|\langle \mu \varphi_{j,V}, \varphi_{k,V} \rangle| \geq \frac{C}{k^3}, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

- *$\lambda_{j,V} - \lambda_{k,V} \neq \lambda_{p,V} - \lambda_{n,V}$ pour tout $j, p \in \{1, \dots, N\}$, $k \geq j + 1$, $p \geq n + 1$ tels que $\{j, k\} \neq \{p, n\}$,*
- *$1, \lambda_{1,V}, \dots, \lambda_{N,V}$ sont rationnellement indépendants.*

Soient C_0, C_f des matrices unitaires $N \times N$ et $\mathbf{z}_0 := C_0 \boldsymbol{\varphi}_V$, $\mathbf{z}_f := C_f \boldsymbol{\varphi}_V$. Alors, il existe $\delta > 0$ et $T > 0$ tels que, si l'on pose

$$\mathcal{O}_{\delta, C_0} := \left\{ \boldsymbol{\phi} \in \mathbf{H}_{(V)}^3; \langle \phi^j, \phi^k \rangle = \delta_{j=k} \text{ et } \sum_{j=1}^N \|\phi^j - z_0^j\|_{H_{(V)}^3} < \delta \right\},$$

$$\mathcal{O}_{\delta, C_f} := \left\{ \boldsymbol{\phi} \in \mathbf{H}_{(V)}^3; \langle \phi^j, \phi^k \rangle = \delta_{j=k} \text{ et } \sum_{j=1}^N \|\phi^j - z_f^j\|_{H_{(V)}^3} < \delta \right\},$$

pour tout $\boldsymbol{\psi}_0 \in \mathcal{O}_{\delta, C_0}$ et $\boldsymbol{\psi}_f \in \mathcal{O}_{\delta, C_f}$, il existe un contrôle $u \in L^2((0, T), \mathbb{R})$ tel que la solution associée de (1.38) issue de $\boldsymbol{\psi}_0$ satisfasse $\boldsymbol{\psi}(T) = \boldsymbol{\psi}_f$.

La norme $\|\cdot\|_{H_{(V)}^3}$ est définie par

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_{H_{(V)}^3} := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |k^3 \langle \boldsymbol{\psi}, \varphi_{k,V} \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

De façon usuelle, pour C matrice de taille $N \times N$, les composants du vecteur $C\boldsymbol{\psi}$ sont donnés par

$$(C\boldsymbol{\psi})^k = \sum_{j=1}^N C_{k,j} \boldsymbol{\psi}^j.$$

Tout comme pour le Théorème 1.16, les hypothèses du Théorème 1.17 semblent trop fortes pour conclure à la contrôlabilité globale exacte pour un potentiel arbitraire. Cette question est discutée au paragraphe suivant. Pour $C_0 = I_N$ la matrice identité, $\boldsymbol{\psi}_0 = \boldsymbol{\varphi}_V$, et $\boldsymbol{\psi}_f = C\boldsymbol{\varphi}_V$ pour toute matrice C unitaire de taille N , ce théorème montre la réalisation exacte de n'importe quelle porte logique quantique, en temps grand. Pour de plus amples détails sur ces portes logiques et une preuve de réalisation approchée, on renvoie à [32] par N. Boussaïd, M. Caponigro et T. Chambrion.

On conclut ce paragraphe avec la stratégie de preuve du Théorème 1.17. Ce théorème contient principalement deux aspects : la contrôlabilité exacte locale au voisinage d'un

vecteur dont les composantes sont des sommes finies d'états propres et le fait que les vecteurs z_0 et z_f au voisinage desquels sont considérées les conditions initiales et finales puissent être différents. Pour traiter ce deuxième aspect, on utilise la connexité dans le groupe unitaire, qui induit l'existence d'un chemin entre C_0 et C_f . Par un argument de compacité, on est ramené à étudier la contrôlabilité exacte locale en chaque point de ce chemin i.e. le Théorème 1.17 dans le cas où $C_0 = C_f$ est une matrice unitaire arbitraire. Par linéarité du système (1.38) vis à vis de l'état, il est alors suffisant de démontrer le Théorème 1.17 dans le cas où $C_0 = C_f = I_N$ est la matrice identité.

Ce résultat est technique et nécessite plusieurs étapes. La première étape est une généralisation de la méthode du retour utilisée pour démontrer le Théorème 1.11, dans le cas de deux équations : on montre la contrôlabilité exacte pour des conditions initiales proches de φ_V et des conditions finales proches de $(e^{i\theta_1}\varphi_{1,V}, \dots, e^{i\theta_N}\varphi_{N,V})$ où les θ_j sont des termes de phases inconnus. Plus précisément, on prouve le résultat suivant (voir la Proposition 4.3 page 131).

Proposition 1.1. *Supposons que $V, \mu \in H^3((0,1), \mathbb{R})$ vérifient les conditions du Théorème 1.17. Pour tout $T > 0$, il existe $\theta_1, \dots, \theta_N \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ et une application C^1*

$$\Gamma : \mathcal{O}_\delta^0 \times \mathcal{O}_\delta^f \rightarrow L^2((0, T), \mathbb{R}),$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_\delta^0 &:= \left\{ \phi \in \mathbf{H}_{(V)}^3 ; \langle \phi^j, \phi^k \rangle = \delta_{j=k} \text{ et } \sum_{j=1}^N \|\phi^j - \varphi_{j,V}\|_{H_{(V)}^3} < \delta \right\}, \\ \mathcal{O}_\delta^f &:= \left\{ \phi \in \mathbf{H}_{(V)}^3 ; \langle \phi^j, \phi^k \rangle = \delta_{j=k} \text{ et } \sum_{j=1}^N \|\phi^j - e^{i\theta_j}\varphi_{j,V}\|_{H_{(V)}^3} < \delta \right\}, \end{aligned}$$

telle que pour tout $\psi_0 \in \mathcal{O}_\delta^0$ et $\psi_f \in \mathcal{O}_\delta^f$, la solution de (1.38) avec contrôle $u := \Gamma(\psi_0, \psi_f)$ issue ψ_0 satisfasse $\psi(T) = \psi_f$.

La preuve de cette proposition est une variation de celle du Théorème 1.14. Les hypothèses sur V assurent que le spectre de l'opérateur libre est non résonant. Les valeurs propres $\lambda_{k,V}$ vérifiant la même asymptotique que les λ_k , les fréquences apparaissant dans les différents problèmes de moments trigonométriques satisfont une condition de saut suffisante pour la résolution de ces problèmes de moments en temps arbitraire. On prouve alors la Proposition 1.1 pour un nombre N d'équations quelconque en appliquant la méthode du retour de J.-M. Coron. Là encore, la construction de la trajectoire de référence est basée sur des résultats de contrôle partiel et l'utilisation des invariants (1.27). Comme l'on n'impose aucune condition sur les termes de phase θ_j , la fréquence 0 (dont la multiplicité était un obstacle à l'extension du Théorème 1.14 pour $N \geq 4$) n'apparaît plus dans le problème de moments associé à la construction de la trajectoire de référence.

Conjointement à l'hypothèse d'indépendance rationnelle du spectre de l'opérateur libre, la Proposition 1.1 permet de conclure la preuve du Théorème 1.17. En effet, l'indépendance rationnelle des réels $\{1, \lambda_{1,V}, \dots, \lambda_{N,V}\}$ et le théorème d'approximation diophantienne simultanée de Kronecker impliquent

$$\text{Adh} \{ (e^{i\lambda_{1,V}t}, \dots, e^{i\lambda_{N,V}t}) ; t \in (0, +\infty) \} = \{ e^{i\theta} ; \theta \in \mathbb{R} \}^N.$$

Ainsi, il existe un temps de rotation $T_r > 0$, tel que $\bar{\zeta}$ appartienne à \mathcal{O}_δ^f où

$$\zeta := (e^{i(\theta_1 - \lambda_{1,V} T_r)} \varphi_{1,V}, \dots, e^{i(\theta_N - \lambda_{N,V} T_r)} \varphi_{N,V}).$$

Ce vecteur ζ est la solution au temps T_r du système (1.38) libre (contrôle nul) issue de $(e^{i\theta_1} \varphi_{1,V}, \dots, e^{i\theta_N} \varphi_{N,V})$. En utilisant la Proposition 1.1, on obtient l'existence de contrôles tels que les solutions associées de (1.38) issues de ψ_0 et de $\bar{\psi}_f$ soient égales au temps T respectivement à $(e^{i\theta_1} \varphi_{1,V}, \dots, e^{i\theta_N} \varphi_{N,V})$ et à $\bar{\zeta}$. L'argument de réversibilité en temps permet alors d'atteindre ψ_f à partir de ψ_0 en temps $2T + T_r$, ce qui conclut l'heuristique de la preuve du Théorème 1.17.

Contrôle exact global : perturbations. L'utilisation conjointe des Théorèmes 1.16 et 1.17 conduit à la contrôlabilité exacte globale sous des hypothèses favorables sur V et sur μ (voir le Théorème 4.4 page 140). Par un argument de perturbation, on se ramène au système (1.38) où les fonctions V et μ sont remplacées par $V + \mu$ et μ . En effet, le système (1.7) avec contrôle $u(t) = \tilde{u}(t) - 1$ s'écrit

$$\begin{cases} i\partial_t \psi = (-\partial_{xx}^2 + V(x) + \mu(x)) \psi - \tilde{u}(t)\mu(x)\psi, & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), \\ \psi(t, 0) = \psi(t, 1) = 0, \\ \psi(0, x) = \psi_0(x). \end{cases} \quad (1.40)$$

Le potentiel de ce système est alors $V + \mu$ et les éléments propres $\lambda_{k,V+\mu}$ et $\varphi_{k,V+\mu}$, peuvent alors satisfaire des hypothèses favorables, même si V est arbitraire. Ceci justifie le fait qu'on puisse supposer aux Théorèmes 1.16 et 1.17 des hypothèses restrictives sur les éléments propres de l'opérateur libre et conclure au Théorème 1.15 à la contrôlabilité globale exacte pour un potentiel V arbitraire. La généricité de telles hypothèses sur μ est prouvée en Section 4.A.2 page 145 en étendant la stratégie utilisée par V. Nersisyan [111, 112]. Pour des résultats de généricité similaires, incluant aussi la généricité de certaines propriétés spectrales vis à vis du domaine considéré, on renvoie à [118, 102] par Y. Privat, M. Sigalotti et P. Mason.

1.2.4 Perspectives

Au vu des résultats présentés dans la Section 1.2.3 et détaillés dans la Partie I, certaines questions et extensions apparaissent naturellement.

Non contrôlabilité en temps petit. Dans le Théorème 1.6 nous avons mis en évidence la non contrôlabilité en temps petit, avec des contrôles petits dans L^2 . Ceci donne lieu à l'existence d'un temps minimal strictement positif pour la contrôlabilité locale autour de l'état fondamental au Théorème 1.9. Une question intéressante est alors la caractérisation de ce temps minimal. Cette question, encore ouverte, est au cœur de la Section 2.6 page 80 où l'on propose un encadrement du temps minimal dans le cas où uniquement la première direction est perdue ainsi qu'une conjecture dans le cas général. Le fait que le résultat négatif se base sur le système auxiliaire (1.23) alors que le résultat positif est obtenu directement sur le système (1.7) introduit une différence de cadres fonctionnels. Pour cette raison on obtient, même dans le cadre favorable présenté, un encadrement et non une caractérisation du

temps minimal. L'estimation du temps minimal serait aussi intéressante pour une meilleure compréhension des Théorèmes 1.10 et 1.13 basés sur les mêmes arguments.

Un autre point commun à ces trois théorèmes est que leur validité repose sur une hypothèse supplémentaire sur μ (par exemple $A_K \neq 0$ dans (1.18)). Analysons cette hypothèse. La non contrôlabilité en temps petit est impliquée par le fait que la forme quadratique définie par (1.21) vérifie une inégalité de coercivité de la forme (1.22). D'après le Lemme 2.1 page 56, cette forme quadratique se réécrit

$$\mathcal{Q}_{K,T}(s) := -A_K \int_0^T s(t)^2 \cos[(\lambda_K - \lambda_1)(t - T)] dt + \int_0^T s(t) \int_0^t s(\tau) k_{K,T}(t, \tau) d\tau dt,$$

où $k_{K,T} \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ et $s(t) := \int_0^t v(\tau) d\tau$. Lorsque le coefficient A_K est non nul et que le temps T est petit, le premier terme de la forme quadratique $\mathcal{Q}_{K,T}$ domine le second. La forme quadratique $\mathcal{Q}_{K,T}$ a donc un signe (celui de $-A_K$) et vérifie une inégalité de coercivité. Dans le cas où $A_K = 0$, l'existence d'un signe strict pour la forme quadratique $\mathcal{Q}_{K,T}$ est un problème ouvert. Notons qu'une intégration par parties supplémentaire (en primitivant $s(t)$) n'est pas envisageable, pour des raisons de sommabilité. Lorsque la forme quadratique $\mathcal{Q}_{K,T}$ est identiquement nulle, on montre, au cours de la preuve du Théorème 2.6, que la direction associée (perdue à l'ordre un et à l'ordre deux) est automatiquement récupérée à l'ordre trois, et ce, en tout temps $T > 0$. Un temps minimal strictement positif se détecte donc uniquement sur les ordres pairs.

Dans cette direction, on peut donner une autre interprétation du coefficient A_K . On réécrit (1.7) sous la forme abstraite

$$\partial_t \psi = f_0(\psi) + u(t) f_1(\psi), \quad (1.41)$$

où $f_0(\psi) := i\partial_{xx}^2 \psi$ avec domaine $D(f_0) := H^2 \cap H_0^1((0, 1), \mathbb{C})$ et $f_1(\psi) := iu(t)\mu(x)\psi$ avec domaine $D(f_1) := L^2((0, 1), \mathbb{C})$.

On remarque alors que, pour $\psi \in D(f_0)$, les crochets de Lie itérés suivants sont bien définis

$$\begin{aligned} [f_1, f_0](\psi) &= \mu''(x)\psi + 2\mu'(x)\partial_x \psi, \\ [f_1, [f_1, f_0]](\psi) &= -2i\mu'(x)^2 \psi, \\ [f_1, [f_1, [f_1, f_0]]](\psi) &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$A_K \neq 0 \iff \langle [f_1, [f_1, f_0]](\varphi_1), \varphi_K \rangle \neq 0.$$

La preuve du Théorème 1.6 se basant sur des arguments à l'ordre deux, il est cohérent de trouver une hypothèse sur les crochets itérés de longueur deux. Bien que l'utilisation des crochets de Lie pour les systèmes de dimension infinie soit à l'heure actuelle relativement mal comprise, cette interprétation pourrait donner de nouvelles idées pour gérer le cas où $A_K = 0$.

Les résultats positifs de contrôlabilité en temps grand, obtenus au Théorème 1.8, reposent en partie sur les idées utilisées par E. Cerpa et E. Crépeau, dans [44], pour le

système de Korteweg-de Vries

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0, & (t, x) \in (0, T) \times (0, L) \\ y(t, 0) = y(t, L) = 0, \\ y_x(t, L) = \kappa(t), \end{cases} \quad (1.42)$$

pour des longueurs critiques $L \in \left\{ 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + kl + l^2}{3}}; k, l \in \mathbb{N}^* \right\}$. Pour ce système, E. Cerpa et E. Crépeau ont montré la contrôlabilité exacte locale autour de $y = 0$ en temps grand. La contrôlabilité en temps arbitraire étant ouverte, les outils développés pour prouver le Théorème 1.6 pourraient aider à apporter une réponse à cette question. Néanmoins la différence de structure entre ces deux systèmes (contrôle au bord et équation non linéaire pour Korteweg-de Vries, contrôle bilinéaire et équation linéaire pour Schrödinger) ne permet pas d'appliquer directement la stratégie développée ici.

Une autre question d'intérêt est de savoir si le temps minimal pour la contrôlabilité exacte locale subsiste sans la condition de petitesse sur les contrôles. L'étude présentée ici consiste en l'analyse des différents ordres dans le développement en puissances de ϵ du contrôle. Il est évident que, pour des contrôles grands, les systèmes d'ordre un ou deux ne sont pas une bonne approximation de la dynamique du système de contrôle non linéaire. Cette question nécessite donc l'introduction de nouveaux outils et de nouvelles méthodes.

Contrôlabilité simultanée. Là encore, le temps pour la contrôlabilité simultanée est au cœur des préoccupations. Dans les Théorèmes 1.12 et 1.14, on montre la contrôlabilité exacte (resp. à phase globale près et) à retard global près localement pour deux équations (resp. trois équations). D'après la construction de ce retard global en Section 3.3.3 page 98, on voit que T^* tend vers $\frac{2}{\pi}$, qui est la période commune des états propres, quand la trajectoire de référence tend vers (Φ_1, \dots, Φ_N) . Si le retard global était égal à $\frac{2}{\pi}$ on obtiendrait alors la contrôlabilité en temps suffisamment grand en lieu et place de la contrôlabilité à retard global près.

Le Théorème 1.15 prouve la contrôlabilité exacte globale d'un nombre quelconque d'équations de Schrödinger bilinéaires unidimensionnelles en temps suffisamment grand. Dans la preuve, la contrôlabilité approchée vers des sommes finies d'états propres du Théorème 1.16 et la contrôlabilité exacte locale du Théorème 1.17 nécessitent un temps suffisamment grand. La propriété de contrôle approché étant basée sur la méthode de Lyapunov, elle nécessite fondamentalement des temps suffisamment grands. L'adaptation du Théorème 1.17 en temps arbitraire est une question ouverte. Dans cette preuve, deux étapes utilisent un temps suffisamment grand : la rotation pendant un temps adéquat (donné par le théorème d'approximation diophantienne de Kronecker) et l'utilisation d'un argument de compacité (pour passer du cas $C_0 = C_f$ au cas où C_0 et C_f sont des matrices unitaires arbitraires).

Une autre possibilité d'amélioration du Théorème 1.15 réside dans le cadre fonctionnel. Du fait de la convergence faible donnée par la méthode de Lyapunov, on a considéré des conditions initiales et des cibles plus régulières que $\mathbf{H}_{(V)}^3$ qui est le cadre optimal pour la contrôlabilité exacte locale. Avec une fonction de Lyapunov (non stricte) de type distance H^s à la cible, si l'on souhaite démontrer la stabilisation pour la topologie forte de H^s , le principe d'invariance de LaSalle nécessite la compacité H^s des trajectoires du système

bouclé. Cette propriété de compacité est difficile à établir. Le problème de stabilisation forte reste donc relativement mal compris (voir [55] par J.-M. Coron et B. D'Andréa-Novel pour un exemple de mise en œuvre de cette méthode). L'approche développée ici consiste à utiliser la compacité faible H^4 des bornés de H^4 . Ceci justifie la différence entre la régularité H^3 des résultats de contrôlabilité exacte locale (voir Théorème 1.17 et Proposition 1.1) et la régularité H^4 pour la contrôlabilité exacte globale (voir Théorème 1.15).

Si la stabilisation forte dans H^3 était possible, cela conduirait à la contrôlabilité exacte globale dans H^3 , qui est l'espace fonctionnel optimal. Ce résultat de stabilisation forte est ouvert.

La robustesse des différentes techniques présentées pour d'autres équations est abordée dans la section suivante pour des modèles avec un terme quadratique en le contrôle en plus du terme bilinéaire.

1.3 Contrôle d'équations de Schrödinger avec un terme de polarisabilité

1.3.1 Modèle

Nous avons vu en Section 1.2.1, que la dérivation du modèle bilinéaire (1.7), étudié par de nombreux auteurs, et au cœur de la Partie I, est obtenue par une approximation d'ordre un sur l'hamiltonien d'interaction. Pour des champs électriques de faible amplitude, le modèle bilinéaire produit une assez bonne description des interactions. Cependant, dans certains cas (voir les travaux de C.M. Dion *et al.* [64, 65]) il est nécessaire de poursuivre le développement de l'hamiltonien à un ordre supérieur. Le terme suivant dans ce développement est $-u(t)^2\mu_2(x)$ où μ_2 est le moment de polarisabilité. On considère donc le système suivant.

$$\begin{cases} i\partial_t\psi = (-\Delta + V(x))\psi - u(t)\mu_1(x)\psi - u(t)^2\mu_2(x)\psi, & x \in D, \\ \psi|_{\partial D} = 0, \\ \psi(0, x) = \psi_0(x). \end{cases} \quad (1.43)$$

Du point de vue de la contrôlabilité, on a donc un seul contrôle $u(t)$ intervenant à la fois de manière linéaire (moment dipolaire) et de manière quadratique (moment de polarisabilité). Si l'introduction de ce terme est justifiée physiquement, on peut aussi chercher à en tirer profit mathématiquement : si ce terme n'est pas négligé (i.e. μ_2 non nul) peut-on obtenir la contrôlabilité dans des cas où le terme bilinéaire n'est pas suffisant ? Cette question est le point central de la Partie II dont les principaux résultats sont présentés dans les sous-sections suivantes.

1.3.2 Résultats précédents

Les résultats de contrôlabilité pour un système quantique avec polarisabilité de la forme (1.43) antérieurs à ceux de ce mémoire ont été obtenus pour le système de dimension finie

$$\begin{cases} i\frac{d}{dt}\psi(t) = (H_0 + u(t)H_1 + u(t)^2H_2)\psi(t), \\ \psi(0) = \psi_0, \end{cases} \quad (1.44)$$

où H_0, H_1 et H_2 sont des matrices hermitiennes de taille $n \times n$. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on note λ_k les valeurs propres de H_0 et φ_k les vecteurs propres associés.

Les propriétés de contrôle de ce système de dimension finie ont été étudiées dans [135] par G. Turinici. En utilisant les critères de contrôlabilité donnés par l'algèbre de Lie engendrée par H_0, H_1 et H_2 , G. Turinici démontre la contrôlabilité de (1.44) sous les mêmes hypothèses que pour le système

$$\begin{cases} i \frac{d}{dt} \psi(t) = (H_0 + u(t)H_1 + v(t)H_2)\psi(t), \\ \psi(0) = \psi_0, \end{cases}$$

avec deux contrôles indépendants. La stabilisation de (1.44) par boucle de rétroaction a aussi été étudiée. Dans [80], A. Grigoriu, C. Lefter et G. Turinici ont montré, en utilisant des arguments de Lyapunov, la stabilisation du premier étape propre φ_1 si le spectre de H_0 est non dégénéré et que tous les autres vecteurs propres φ_k sont couplés à φ_1 via H_1 i.e.

$$\langle H_1 \varphi_1, \varphi_k \rangle \neq 0, \quad \forall k \in \{2, \dots, n\}.$$

La stratégie utilisée est une adaptation de [105] par M. Mirrahimi, P. Rouchon et G. Turinici, dans le cadre $H_2 = 0$, sous les mêmes hypothèses sur les matrices H_0 et H_1 . Afin de tirer profit de l'introduction du terme de polarisabilité, J.-M. Coron, A. Grigoriu, C. Lefter et G. Turinici ont étudié, dans [57], la stabilisation de φ_1 dans le cas où chaque vecteur propre φ_k est couplé à φ_1 via H_1 ou via H_2 i.e.

$$\forall k \in \{2, \dots, n\}, \langle H_1 \varphi_1, \varphi_k \rangle \neq 0 \text{ ou } \langle H_2 \varphi_1, \varphi_k \rangle \neq 0. \quad (1.45)$$

Dans cet article, les auteurs ont proposé des lois de rétroaction discontinues et des lois de rétroaction dynamiques périodiques en temps. Une analyse de stabilité pour le cas de la loi de rétroaction discontinue est faite dans [79] par A. Grigoriu. On détaille maintenant la stratégie basée sur des lois de rétroaction périodiques, qui sera appliquée au système infini dimensionnel (1.43) dans le Chapitre 5. Pour une introduction aux lois de rétroaction dynamiques on renvoie à [54, Chapitre 11] par J.-M. Coron. L'idée développée dans [57] consiste à chercher u sous la forme

$$u(t, \psi) = \alpha(\psi) + \beta(\psi) \sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right). \quad (1.46)$$

On introduit ce contrôle périodique en temps dans (1.44), et on considère le système moyen

$$i \frac{d}{dt} \psi_{av} = \left(H_0 + \alpha H_1 + \left(\alpha^2 + \frac{1}{2} \beta^2 \right) H_2 \right) \psi_{av}. \quad (1.47)$$

Le système moyen de $\dot{x} = f(t, x)$, avec $f(\cdot, x)$ T -périodique, est défini par $\dot{x}_{av} = f_{av}(x_{av})$ où $f_{av}(x) := \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x) dt$. Suivant l'idée développée dans [105], la phase globale de la fonction d'onde n'ayant pas de signification physique, on peut introduire un contrôle supplémentaire, dit fictif, ω à valeurs réelles et considérer plutôt le système

$$i \frac{d}{dt} \psi_{av} = \left(H_0 + \alpha H_1 + \left(\alpha^2 + \frac{1}{2} \beta^2 \right) H_2 + \omega \right) \psi_{av}. \quad (1.48)$$

Les solutions des deux systèmes (1.47) et (1.48) diffèrent uniquement du terme de phase $e^{i \int_0^t \omega(\tau) d\tau}$: il est donc équivalent d'introduire ce contrôle fictif ou de travailler à phase globale près.

Les lois de rétroactions α et β sont construites pour assurer la stabilisation du système moyen (1.48) vers φ_1 en supposant que le spectre de H_0 est non dégénéré et que (1.45) est vérifié. Des résultats classiques sur les systèmes dynamiques en dimension finie impliquent que le système moyen (1.48) est une bonne approximation du système (1.44) avec loi de rétroaction dynamique (1.46) si ce contrôle est suffisamment oscillant i.e. si ε est suffisamment petit. Le couplage de ces deux résultats conduit alors à la stabilisation approchée du système bouclé (1.44), (1.46).

1.3.3 Principaux résultats

1.3.3.1 Contrôlabilité approchée par des contrôles explicites

Le premier résultat présenté dans ce mémoire sur le système (1.43) est l'adaptation de la stratégie de [57] basée sur des lois de rétroaction périodiques fortement oscillantes au cas de la dimension infinie. Ces résultats sont détaillés au Chapitre 5. L'article [108], dont s'inspire le Chapitre 5, est publié dans le journal *Mathematics of Control, Signals, and Systems*.

La stratégie mise en place est la même que pour le système de dimension finie. On cherche une loi de rétroaction périodique oscillante de la forme (1.46). On peut alors réécrire le système (1.43) sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t) = -iA_V \psi(t) + F\left(\frac{t}{\varepsilon}, \psi(t)\right), \\ \psi|_{\partial D} = 0, \end{cases} \quad (1.49)$$

où A_V est défini par (1.4) et

$$F(s, z) := i(\alpha(z) + \beta(z) \sin(s)) \mu_1 z + i(\alpha(z) + \beta(z) \sin(s))^2 \mu_2 z.$$

Stabilisation du système moyen : méthode de Lyapunov. En adaptant les techniques de dimension finie, on pose $F^0(z) := \frac{1}{T} \int_0^T F(t, z) dt$ et on étudie le système moyen

$$\begin{cases} \partial_t \psi_{av} = -iA_V \psi_{av} + F^0(\psi_{av}), \\ \psi_{av}|_{\partial D} = 0. \end{cases} \quad (1.50)$$

Le calcul de F^0 conduit alors à expliciter le système moyen (1.50) sous la forme

$$\begin{cases} i\partial_t \psi_{av} = (-\Delta + V(x))\psi_{av} - \alpha(\psi_{av})\mu_1(x)\psi_{av} - \left(\alpha(\psi_{av})^2 + \frac{1}{2}\beta(\psi_{av})^2\right)\mu_2(x)\psi_{av}, \\ \psi_{av}|_{\partial D} = 0, \\ \psi_{av}(0, \cdot) = \psi_0. \end{cases} \quad (1.51)$$

Soient \mathcal{P} la projection sur l'espace engendré par $\{\varphi_{k,V}; k \geq 2\}$ et

$$\mathcal{L}(z) := \gamma \|(-\Delta + V)\mathcal{P}z\|_{L^2}^2 + 1 - |\langle z, \varphi_{1,V} \rangle|^2, \quad \forall z \in \mathcal{S} \cap H^2 \cap H_0^1, \quad (1.52)$$

où $\gamma > 0$ est une constante à déterminer. On pose

$$\alpha(z) := -\kappa I_1(z), \quad \beta(z) := g(I_2(z)), \quad \forall z \in H^2 \quad (1.53)$$

avec $\kappa > 0$ suffisamment petit (fixé uniformément pour toute condition initiale dans une boule de H^2) et

$$g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+) \text{ telle que } g' \text{ bornée, } g(x) = 0 \text{ si et seulement si } x \geq 0,$$

et pour $j \in \{1, 2\}$,

$$I_j(z) = \text{Im} \left[-\gamma \langle (-\Delta + V)\mathcal{P} \mu_j z, (-\Delta + V)\mathcal{P} z \rangle + \langle \mu_j z, \phi \rangle \langle \phi, z \rangle \right].$$

Soient $J_{\neq 0} := \{k \geq 2; \langle \mu_1 \varphi_{1,V}, \varphi_{k,V} \rangle \neq 0\}$ et $J_0 := \{k \geq 2; \langle \mu_1 \varphi_{1,V}, \varphi_{k,V} \rangle = 0\}$. On obtient alors le théorème suivant prouvant la stabilisation du système moyen vers $\varphi_{1,V}$ (voir le Théorème 5.2 page 158).

Théorème 1.18. *Supposons que $V, \mu_1, \mu_2 \in C^\infty(\overline{D}, \mathbb{R})$ vérifient*

- $\forall k \in J_0, \langle \mu_2 \varphi_{1,V}, \varphi_{k,V} \rangle \neq 0$ i.e. tous les vecteurs propres $\varphi_{k,V}$ sont couplés à $\varphi_{1,V}$ via μ_1 ou μ_2 ,
- $\text{Card}(J_0) < \infty$ i.e. le nombre de directions perdues par μ_1 est fini,
- $\lambda_{1,V} - \lambda_{k,V} \neq \lambda_{p,V} - \lambda_{q,V}$ pour $k, p, q \geq 1$ tels que $\{1, k\} \neq \{p, q\}$.

Soit $\psi_0 \in \mathcal{S} \cap H^2 \cap H_0^1$ avec $0 < \mathcal{L}(\psi_0) < 1$. La solution ψ_{av} du système bouclé (1.51), (1.53) vérifie

$$\psi_{av}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathcal{C} := \{c \varphi_{1,V}; c \in \mathbb{C} \text{ et } |c| = 1\} \quad \text{dans } H^2.$$

La condition $\mathcal{L}(\psi_0) < 1$ n'est pas restrictive : elle est assurée par le choix de la constante γ dans (1.52). Dans le cadre unidimensionnel, nous avons vu en (1.25) que l'hypothèse $\text{Card}(J_0) < \infty$ est vérifiée si $\mu_1'(0) \pm \mu_1'(1) \neq 0$. Ce théorème est obtenu par la méthode de Lyapunov et le principe d'invariance de LaSalle pour la fonction de Lyapunov \mathcal{L} définie par (1.52). Cette fonction de Lyapunov est celle utilisée dans [111, 19] par K. Beauchard et V. Nersesyan dans le cadre $\mu_2 = 0$. La dérivation de cette fonction de Lyapunov le long des trajectoires conduit à

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(\psi_{av}(t)) = 2\alpha I_1(\psi_{av}(t)) + 2 \left(\alpha^2 + \frac{1}{2} \beta^2 \right) I_2(\psi_{av}(t)).$$

L'expression des lois de rétroaction α et β en fonction des I_j est inspiré du cadre fini dimensionnel de [57].

Approximation du système oscillant par le système moyen. Afin de pouvoir utiliser le Théorème 1.18 de stabilisation du système moyen (1.51), (1.53) dans l'étude du système (1.43), on étend au cas de la dimension infinie les propriétés d'approximation d'un système oscillant par le système moyen. Pour $\psi_0 \in \mathcal{S} \cap H_{(0)}^2$, on pose

$$u^\varepsilon(t) := \alpha(\psi_{av}(t)) + \beta(\psi_{av}(t)) \sin \left(\frac{t}{\varepsilon} \right), \quad (1.54)$$

où ψ_{av} est la solution du système bouclé (1.51), (1.53). On prouve le résultat d'approximation suivant (voir la Proposition 5.5 page 162).

Théorème 1.19. *Soit $[s, L]$ un intervalle de temps fixé et $\psi_0 \in \mathcal{S} \cap H_{(0)}^4$ avec $0 < \mathcal{L}(\psi_0) < 1$. Soit ψ_{av} la solution du système bouclé (1.51), (1.53) avec condition initiale $\psi_{av}(s, \cdot) = \psi_0$. Pour tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, si ψ_ε est la solution de (1.43) associée au contrôle u^ε défini par (1.54) avec $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, avec la même condition initiale $\psi_\varepsilon(s, \cdot) = \psi_0$, alors*

$$\|\psi_\varepsilon(t, \cdot) - \psi_{av}(t, \cdot)\|_{H^2} \leq \delta, \quad \forall t \in [s, L].$$

La démonstration utilise des bornes sur la norme H^2 de $\partial_t \psi_{av}$. Pour cette raison, les conditions initiales sont supposées plus régulières que le cadre H^2 dans lequel cette propriété d'approximation est prouvée.

Si ce résultat est classique en dimension finie, son extension à la dimension infinie n'est pas directe. On note ici une différence avec le cas de la dimension finie : le système moyen ne sert plus seulement à définir les lois de rétroaction α et β . Dans (1.54), ces lois sont calculées le long de la trajectoire associée au système moyen : le système (1.43) n'est pas considéré avec une loi de rétroaction, comme en dimension finie, mais avec le contrôle explicite u^ε défini par (1.54).

Contrôle approché vers l'état fondamental avec des contrôles explicites. La stabilisation du système moyen au Théorème 1.18 et l'approximation du système oscillant par le système moyen au Théorème 1.19 conduisent à la contrôlabilité approchée vers l'état fondamental en norme H^s pour $s < 2$ avec des contrôles explicites à phase globale près (on rappelle que l'ensemble \mathcal{C} est défini au Théorème 1.18). Plus précisément, on obtient le théorème suivant (voir le Théorème 5.1 page 154).

Théorème 1.20. *On suppose que V, μ_1 et μ_2 vérifient les hypothèses du Théorème 1.18. Pour tout $s < 2$ et pour tout $\psi_0 \in \mathcal{S} \cap H_{(0)}^4$ avec $0 < \mathcal{L}(\psi_0) < 1$, il existe une suite croissante de temps $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathbb{R}_+^* tendant vers $+\infty$ et une suite décroissante $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathbb{R}_+^* tels que ψ_ε la solution de (1.43) associée au contrôle u^ε défini par (1.54) avec $\varepsilon \in (0, \varepsilon_n)$ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\text{dist}_{H^s}(\psi_\varepsilon(t, \cdot), \mathcal{C}) \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall t \in [T_n, T_{n+1}].$$

En temps suffisamment grand, si le contrôle (1.54) est suffisamment oscillant, on approche arbitrairement près le premier état propre $\varphi_{1,V}$, à phase globale près, avec des contrôles explicites. Les contrôles utilisés étant explicites, on réalise en Section 5.5 page 167 des simulations de convergence comme présenté en Figure 1.1. Il est à noter que l'hypothèse sur μ_1 faite au Théorème 1.20 est plus faible que l'hypothèse $\langle \mu_1 \varphi_{1,V}, \varphi_{k,V} \rangle \neq 0$ pour tout $k \geq 2$ utilisée dans [19]. La prise en compte du terme de polarisabilité a donc permis le contrôle avec des hypothèses sur μ_1 , sous lesquelles la littérature existante (au moment de la production de ce résultat) ne concluait pas.

Résultats postérieurs. Toujours sur le modèle avec polarisabilité citons les travaux de N. Boussaïd, M. Caponigro et T. Chambrier [31] postérieurs à cette étude. En utilisant la méthode de contrôle géométrique des approximations de Galerkin (décrite en Section 1.2.2.1) et la notion de système faiblement couplé, ils ont montré la contrôlabilité globale approchée du système

$$\frac{d}{dt} \psi = (A + u(t)B + u(t)^2 C) \psi,$$

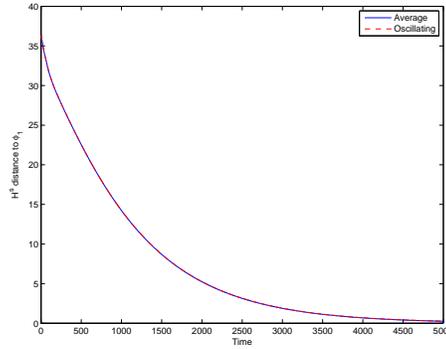


FIGURE 1.1: Convergence $H^{1.8}$ du système moyen (trait plein) et du système oscillant (pointillé) vers $\varphi_{1,V}$ avec $V(x) = (x - \frac{1}{2})^2$, $\mu_1(x) = x^2$, $\mu_2(x) = x$ et $\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\varphi_{1,V} + \frac{1}{\sqrt{3}}\varphi_{2,V} + \frac{i}{\sqrt{3}}\varphi_{3,V}$.

sous l'hypothèse de l'existence d'une chaîne de connexité pour $B + \alpha C$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Ce résultat est plus général que celui du Théorème 1.20, puisqu'il démontre la contrôlabilité globale approchée, et non la contrôlabilité vers l'état fondamental. De plus, les hypothèses sur le modèle sont moins restrictives. Ainsi, pour un système de la forme (1.43) en dimension un, leur résultat est appliqué dans [31] à un modèle d'alignement de molécules HCN,

$$i\partial_t\psi = -\Delta\psi + u(t)\cos(x)\psi + u(t)^2\cos(2x)\psi.$$

Le potentiel considéré dans ce système étant nul, les hypothèses sur les valeurs propres de l'opérateur libre du Théorème 1.18 ne sont pas vérifiées. De plus, l'hypothèse d'existence d'une chaîne de connexité est moins restrictive pour les couplages entre états propres que les hypothèses du Théorème 1.18. En effet, dans notre cadre, l'hypothèse

$$\langle \mu_2\varphi_{1,V}, \varphi_{k,V} \rangle \neq 0, \quad \forall k \in J_0,$$

est suffisante pour obtenir l'existence d'une chaîne de connexité et appliquer les résultats de [31], sans supposer $\text{Card}(J_0) < \infty$.

Cependant, l'un des intérêts d'un résultat de contrôle approché de la forme du Théorème 1.20 est de pouvoir être couplé avec un résultat de contrôle exact local au voisinage de l'état fondamental, afin d'obtenir le contrôle exact global. Or, comme mentionné en page 10, les espaces fonctionnels pour lesquels le résultat de contrôle global approché de [31] est vérifié ne sont pas compatibles avec la contrôlabilité exacte globale. La stratégie développée pour prouver le Théorème 1.20 ne souffre, a priori, d'aucune obstruction à l'extension pour des espaces plus réguliers.

La section suivante est consacrée à la contrôlabilité exacte globale du modèle avec polarisabilité (1.43) unidimensionnel sans restrictions sur le potentiel ni sur le moment dipolaire.

1.3.3.2 Contrôle exact global du modèle unidimensionnel

La stratégie précédente est spécifique au modèle avec polarisabilité. Bien que le système de contrôle (1.43) ne soit pas bilinéaire, certains des outils développés pour les systèmes

de contrôle bilinéaires présentés en Section 1.2 peuvent s'étendre à ce modèle dans le cadre unidimensionnel

$$\begin{cases} i\partial_t \psi = (-\partial_{xx}^2 + V(x)) \psi - u(t)\mu_1(x)\psi - u(t)^2\mu_2(x)\psi, & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), \\ \psi(t, 0) = \psi(t, 1) = 0, & t \in (0, T), \\ \psi(0, x) = \psi_0(x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (1.55)$$

Ces résultats sont détaillés au Chapitre 6.

Dans un premier temps, on s'intéresse à la contrôlabilité exacte locale dans le cas $V = 0$. Le principal argument du Théorème 1.5 de K. Beauchard et C. Laurent est la contrôlabilité du linéarisé autour de la trajectoire $(\Phi_1, u \equiv 0)$, dans $H_{(0)}^3$, avec des contrôles $L^2((0, T), \mathbb{R})$. Formellement, du fait du terme quadratique, le système (1.55) admet le même linéarisé que (1.7) autour de la trajectoire $(\Phi_1, u \equiv 0)$ qui est donc contrôlable dans $H_{(0)}^3$ avec des contrôles $L^2((0, T), \mathbb{R})$ sous des hypothèses favorables sur μ_1 . Cependant, cette stratégie présente deux inconvénients :

- Cette stratégie conduirait à la contrôlabilité du modèle avec polarisabilité sous les mêmes hypothèses que lorsque $\mu_2 = 0$. On ne tire alors aucun profit de l'ajout du terme de polarisabilité.
- Le contrôle du linéarisé se fait via des contrôles L^2 . Le terme u^2 dans le modèle de polarisabilité possède donc seulement une régularité L^1 insuffisante pour appliquer les résultats de [16] et obtenir le caractère bien posé dans $H_{(0)}^3$.

Pour résoudre le second problème, une possibilité est d'adapter un autre résultat : la contrôlabilité exacte locale, dans $H_{(0)}^5$, autour de φ_1 , avec des contrôles $H_0^1((0, T), \mathbb{R})$ (voir [16, Théorème 2]). En effet, si $u \in H_0^1((0, T), \mathbb{R})$, alors $u^2 \in H_0^1((0, T), \mathbb{R})$ et le contrôle exact local dans $H_{(0)}^5$ est obtenu de manière identique que μ_2 soit nul ou non.

Pour résoudre le premier problème, on considère un argument de perturbation similaire à celui présenté en (1.40) pour démontrer la contrôlabilité globale exacte simultanée du Théorème 1.15. En effet, le système (1.55) avec le contrôle $u(t) = \tilde{u}(t) + 2$ s'écrit

$$\begin{cases} i\partial_t \psi = (-\partial_{xx}^2 + V(x) - 2\mu_1(x) - 4\mu_2(x)) \psi - \tilde{u}(t)(\mu_1 + 4\mu_2)(x)\psi - \tilde{u}(t)^2\mu_2(x)\psi, \\ \psi(t, 0) = \psi(t, 1) = 0, \\ \psi(0, x) = \psi_0(x). \end{cases} \quad (1.56)$$

Ce système est donc le même que (1.55) où le potentiel V est remplacé par $V - 2\mu_1 - 4\mu_2$ et le moment dipolaire μ_1 par $\mu_1 + 4\mu_2$. Ainsi, pour V et μ_1 quelconques, on se ramène à étudier le système (1.56) avec des hypothèses suffisantes, sur le potentiel et le moment dipolaire, pour pouvoir conclure à la contrôlabilité exacte locale au voisinage du premier état propre $\varphi_{1, V-2\mu_1-4\mu_2}$ de l'opérateur $(-\partial_{xx}^2 + V - 2\mu_1 - 4\mu_2)$.

La contrôlabilité approchée vers l'état fondamental dans des espaces réguliers obtenue par V. Nersisyan dans [112] (et adaptée au Théorème 1.16 pour N équations bilinéaires) est essentiellement basée sur les propriétés du linéarisé de (1.7) autour de trajectoires associées au contrôle $u \equiv 0$. Ce linéarisé est le même pour le système avec polarisabilité. Ainsi, sous des hypothèses favorables sur le potentiel et le moment dipolaire de (1.56), on obtient la contrôlabilité approchée vers $\varphi_{1, V-2\mu_1-4\mu_2}$.

Finalement, en regroupant ces deux résultats, on obtient le théorème suivant (voir le Théorème 6.1 page 174).

Théorème 1.21. *Pour tout $V, \mu_1 \in H^6((0, 1), \mathbb{R})$ le système (1.55) est globalement exactement contrôlable dans $H_{(V)}^6$, génériquement par rapport à $\mu_2 \in H^6((0, 1), \mathbb{R})$. Plus précisément, pour tout $V, \mu_1 \in H^6((0, 1), \mathbb{R})$, il existe un ensemble \mathcal{Q}_{V, μ_1} résiduel dans $H^6((0, 1), \mathbb{R})$ tel que, si $\mu_2 \in \mathcal{Q}_{V, \mu_1}$, pour tout $\psi_0, \psi_f \in \mathcal{S} \cap H_{(V)}^6$, il existe $T > 0$ et $u \in H_0^1((0, T), \mathbb{R})$ tels que la solution associée de (1.55) satisfasse $\psi(T) = \psi_f$.*

Ainsi, la prise en compte du terme de polarisabilité permet d'obtenir des résultats de contrôlabilité dans des cas non couverts par le modèle bilinéaire (1.7) (e.g. $\mu_1 = 0$ ou V quelconque et $\mu_1 \notin \mathcal{Q}_V$ comme défini au Théorème 1.15).

1.3.4 Perspectives

Au vu des résultats présentés dans la Section 1.3.3, certaines questions et extensions apparaissent naturellement.

Approximation par le système moyen en dimension infinie. Le Théorème 1.19 montre que sur un intervalle de temps donné, si le système (1.43) avec contrôle (1.54) est suffisamment oscillant alors la solution associée est arbitrairement proche de la solution du système couplé (1.51), (1.53).

Une première direction d'amélioration de ce résultat consisterait à affaiblir les hypothèses de régularité supplémentaire sur les conditions initiales. Le schéma de la preuve utilisant fortement une borne H^2 sur $\partial_t \psi_{av}$, ce problème est ouvert.

Une seconde direction consiste à analyser l'intervalle de temps sur lequel cette propriété est valable. L'énoncé du Théorème 1.19 laisse à penser que, si l'on souhaite agrandir l'intervalle de temps $[s, L]$ considéré en $[s, \tilde{L}]$ avec $\tilde{L} > L$, alors le paramètre d'oscillation ε doit être réduit. Les simulations effectuées pour différents choix de V, μ_1 et μ_2 semblent indiquer qu'il n'en est rien (voir la Section 5.5 page 167). La Figure 1.2 représente l'évolution de la différence des deux solutions en norme H^2 .

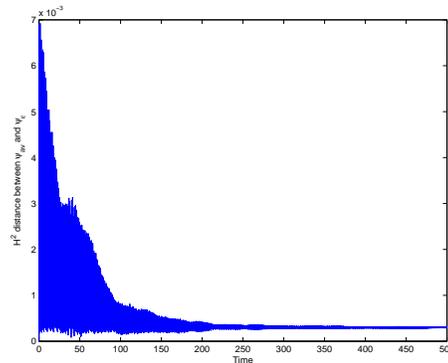


FIGURE 1.2: Ecart H^2 entre le système moyen et le système oscillant avec $V(x) = (x - \frac{1}{2})^2$, $\mu_1(x) = x^2$, $\mu_2(x) = x$ et $\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,V} + \frac{i}{\sqrt{2}}\varphi_{2,V}$.

Ces simulations induisent l'idée que la propriété d'approximation par le système moyen puisse être valable sur $[0, +\infty)$, ce qui permettrait de remplacer le Théorème 1.20 par un résultat de stabilisation approchée.

Cadre fonctionnel pour la contrôlabilité exacte globale Le Théorème 1.21 prouve la contrôlabilité exacte globale dans $H_{(V)}^6$ de (1.55) en temps grand. Le temps grand et la régularité supplémentaire (condition initiale $H_{(V)}^6$ pour un résultat de contrôle exact local dans $H_{(V)}^5$) sont inhérents à la stratégie de Lyapunov employée pour le résultat de contrôle approché du premier état propre. Cependant, l'espace $H_{(V)}^5$ dans lequel est prouvé la contrôlabilité exacte locale n'est pas optimal : le système linéarisé est contrôlable dans $H_{(V)}^3$ avec des contrôles $L^2((0, T), \mathbb{R})$. En utilisant les résultats de [16], le système (1.55) est bien posé dans $H_{(V)}^3$ avec des contrôles $L^4((0, T), \mathbb{R})$. Pour obtenir la contrôlabilité exacte locale dans $H_{(V)}^3$, une piste envisageable serait donc de montrer la régularité $L^4((0, T), \mathbb{R})$ du contrôle réalisant la contrôlabilité du linéarisé (obtenu comme solution d'un problème de moments trigonométriques). Cette question est ouverte.

1.4 Contrôle d'équations de Grushin singulières

1.4.1 Modèle

Après avoir étudié des problèmes de contrôle bilinéaire pour un système quantique en Partie I, puis l'ajout d'un terme quadratique en le contrôle en Partie II, ce mémoire présente en Partie III un problème de contrôle linéaire pour l'équation de Grushin singulière

$$\partial_t f - \partial_{xx}^2 f - |x|^{2\gamma} \partial_{yy}^2 f + \frac{c}{x^2} f = u(t, x, y) \chi_\omega(x, y), \quad (1.57)$$

pour $(t, x, y) \in (0, T) \times \Omega$ où $\Omega = (-1, 1) \times (0, 1)$ et le contrôle u est localisé en espace sur le sous-domaine $\omega \subset \Omega$.

Ce modèle est inspiré de l'équation de la chaleur pour l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à la métrique de Grushin généralisée $g(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & |x|^{-2\gamma} \end{pmatrix}$, étudié par U. Boscain et C. Laurent dans [28] i.e.

$$Lu = \partial_{xx}^2 u + |x|^{2\gamma} \partial_{yy}^2 u - \frac{\gamma}{x} \partial_x u. \quad (1.58)$$

Le changement de variables $u = |x|^{\frac{\gamma}{2}} v$ unitaire de $L^2\left(\mathbb{R} \times \mathbb{T}, \frac{1}{|x|^\gamma} dx dy\right)$ vers $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}, dx dy)$ conduit à l'opérateur

$$\tilde{L}v = \partial_{xx}^2 v + |x|^{2\gamma} \partial_{yy}^2 v - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\gamma}{2} + 1\right) \frac{v}{x^2}. \quad (1.59)$$

Afin de découpler et d'analyser séparément les effets de la dégénérescence et de la singularité on choisit dans (1.59) pour le potentiel singulier un coefficient c indépendant de γ .

L'équation (1.57) est un problème de contrôle linéaire pour un opérateur parabolique dégénéré et singulier sur l'ensemble $\{x = 0\}$, à l'intérieur du domaine. On rappelle, dans la section suivante, la stratégie utilisée pour les problèmes de contrôle linéaire en dimension infinie et on mentionne quelques résultats précédents dont les outils ou les résultats sont semblables à ceux utilisés pour l'étude de (1.57).

1.4.2 Problèmes de contrôle linéaires et dualité

On considère un système de contrôle linéaire abstrait avec un contrôle interne

$$\begin{cases} y' = \mathcal{A}y + h\chi_\omega, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (1.60)$$

où \mathcal{A} génère un semigroupe continu d'opérateurs sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} . La théorie générale de la méthode HUM est valable pour des opérateurs de contrôle plus généraux que celui du contrôle interne (voir [67, 98] par S. Dolecki, D.L. Russell et J.-L. Lions pour les résultats historiques et [133] par M. Tucsnak et G. Weiss pour une présentation complète). Ce cadre étant celui étudié dans ce mémoire, on se limite dans cette présentation au contrôle interne. On associe à (1.60) le système adjoint en temps rétrograde

$$\begin{cases} z' = -\mathcal{A}^*z, \\ z(T) = z_T. \end{cases} \quad (1.61)$$

Le système (1.60) est approximativement contrôlable en temps $T > 0$ si pour tout $y_0, y_1 \in \mathcal{H}$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $h \in L^2((0, T), \mathcal{H})$ tel que la solution de (1.60) satisfasse

$$\|y(T) - y_1\|_{\mathcal{H}} \leq \epsilon.$$

Par linéarité, il est suffisant de considérer le cas $y_0 = 0$. Le contrôle approché en temps T est alors équivalent à la densité de l'image de l'application

$$\mathcal{R}_T : h \in L^2((0, T), \mathcal{H}) \mapsto y(T) \in \mathcal{H},$$

où y est la solution de (1.60). Par un argument de dualité, la contrôlabilité approchée est alors équivalente à l'injectivité de \mathcal{R}_T^* i.e. à la continuation unique du système adjoint : si z solution de (1.61) vérifie z nulle sur $(0, T) \times \omega$ alors $z_T = 0$. Cette question peut être traitée par des résultats d'unicité du type du Théorème d'Holmgren (voir aussi [84, Chapitre 28] par L. Hörmander et [121, 130] par L. Robbiano, C. Zuily et D. Tataru pour d'autres hypothèses sur la régularité des coefficients de l'opérateur différentiel \mathcal{A}).

Selon les propriétés de l'opérateur \mathcal{A} , la contrôlabilité exacte peut être inenvisageable, par exemple, dans le cas où le système (1.60) possède une propriété de régularisation. On considère alors la notion de contrôlabilité aux trajectoires : pour toute trajectoire (\bar{y}, \bar{h}) de (1.60), pour tout $y_0 \in \mathcal{H}$, il existe $h \in L^2((0, T), \mathcal{H})$ tel que la solution de (1.60) satisfasse $y(T) = \bar{y}(T)$. Par linéarité, cette propriété est équivalente à la contrôlabilité à zéro : pour tout $y_0 \in \mathcal{H}$, il existe $h \in L^2((0, T), \mathcal{H})$ tel que la solution de (1.60) satisfasse $y(T) = 0$. Par dualité, la méthode HUM montre l'équivalence entre la contrôlabilité à zéro en temps T et l'observabilité du système adjoint i.e. l'existence de $C > 0$ telle que

$$\|z(0)\|_{\mathcal{H}} \leq C \int_0^T \|\chi_\omega z(t)\|_{\mathcal{H}}^2 dt.$$

La stratégie pour prouver la contrôlabilité à zéro ou la contrôlabilité approchée de systèmes de la forme (1.60) est donc plus balisée que pour les systèmes de contrôle bilinéaire

précédents. Cependant, la preuve d'inégalités d'observabilité est parfois loin d'être aisée. Les outils et méthodes sont variées selon les propriétés de l'opérateur \mathcal{A} . En préambule aux équations paraboliques dégénérées ou singulières, on mentionne la contrôlabilité à zéro en tout temps $T > 0$ de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = \chi_\omega h, & (t, x) \in [0, T] \times \Omega, \\ y = 0, & (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \\ y(0) = y_0, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.62)$$

avec des contrôles $L^2((0, T) \times \omega)$ par A.V. Fursikov et O.Y. Imanuvilov [72] et G. Lebeau et L. Robbiano [97] où Ω est un domaine borné régulier de \mathbb{R}^d et $\omega \subset \Omega$ un ouvert non vide.

Pour des résultats de contrôlabilité à zéro pour des opérateurs uniformément paraboliques avec des coefficients discontinus, on mentionne les résultats [68, 123, 21, 22] de A. Doubova, A. Osses, J.-P. Puel, A. Benabdallah, Y. Dermenjian et J. Le Rousseau.

1.4.3 Résultats précédents

Solutions d'équations de la chaleur singulières. La continuation unique (et donc la contrôlabilité approchée) pour l'opérateur parabolique dégénéré avec un potentiel singulier défini en (1.57) est au cœur de la Partie III.

La première difficulté pour l'étude d'une équation parabolique avec un potentiel singulier de la forme $\frac{1}{|x|^2}$ réside dans le caractère bien posé de l'équation. Un outil essentiel pour cette étude est l'inégalité de Hardy suivante. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné régulier. On a

$$\lambda^*(d) \int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^2} dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \quad (1.63)$$

où $\lambda^*(d) = \frac{(d-2)^2}{4}$ est la meilleure constante dans cette inégalité (qui n'est pas atteinte). Dans le cas où $d = 2$, cette inégalité est triviale. Dans le cas où $d = 1$, on suppose que 0 est au bord du domaine : en effet si $u(0) \neq 0$, cette inégalité n'est plus valable.

Pour une equation de la chaleur avec potentiel singulier $a \in L_{loc}^1(\Omega)$, X. Cabré et Y. Martel ont montré dans [35] que l'existence de solutions faibles locales en temps pour des conditions initiales positives est conditionnée à la validité d'une inégalité de Hardy avec poids $a(x)$. On retrouve alors le cas particulier de P. Baras et J.A. Goldstein [6] suivant.

Théorème 1.22. *On considère le système*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u - \frac{\lambda}{|x|^2} u = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \\ u = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.64)$$

avec Ω satisfaisant les conditions précédentes d'application de l'inégalité de Hardy.

Si $\lambda \leq \lambda^*(d)$, alors (1.64) a une solution faible globale pour toute condition initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$ positive ou nulle.

Si $\lambda > \lambda^*(d)$, alors pour tout $T > 0$ et tout $u_0 \in L_{loc}^1(\Omega)$ avec $u_0 \geq 0$ non nulle, il n'existe pas de solution faible de (1.64), même localement en temps.

La plupart des études s'intéressant à une équation de la chaleur avec potentiel singulier en $\frac{1}{|x|^2}$ se focalisent donc sur la gamme de constantes pour laquelle l'inégalité de Hardy (1.63) est vérifiée. Dans ce cadre, le caractère bien posé sans restriction de signe sur la condition initiale est dû à J.L. Vazquez et E. Zuazua [139].

Contrôlabilité à zéro d'équations paraboliques dégénérées et singulières Les outils utilisés pour montrer la contrôlabilité à zéro (via l'observabilité) d'équations paraboliques avec un tel potentiel singulier ont d'abord été développés pour l'étude d'équations paraboliques dégénérées. Dans [38, 39] P. Cannarsa, P. Martinez et J. Vancostenoble ont montré la contrôlabilité à zéro de

$$u_t - (x^\alpha u_x)_x = h\chi_\omega, \quad (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), \quad (1.65)$$

pour $\alpha \in [0, 2)$ avec des conditions au bord (de type Dirichlet ou Neumann en 0) adaptées à la dégénérescence, en tout temps $T > 0$, pour toute condition initiale $u_0 \in L^2(0, 1)$, avec des contrôles $h \in L^2((0, T) \times \omega)$. L'observabilité du système adjoint repose sur la preuve d'inégalités de Carleman adaptées. Ces résultats ont ensuite été étendus pour des dégénérescences plus générales puis pour des opérateurs de dimension deux dégénérant au bord dans [101, 40]. Pour le cas du contrôle frontière sur le bord dégénéré i.e.

$$\begin{cases} u_t - (x^\alpha u_x)_x = 0, & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), \\ u(t, 0) = \gamma(t), u(t, 1) = 0, & t \in (0, T), \end{cases} \quad (1.66)$$

avec $\alpha \in [0, 1)$, la contrôlabilité approchée est due à P. Cannarsa, J. Tort et M. Yamamoto [41] en utilisant une inégalité de Carleman, et la contrôlabilité à zéro à M. Gueye [81] en utilisant une décomposition dans une base de Fourier non harmonique pour le problème hyperbolique associé et la méthode de transmutation pour revenir au problème parabolique.

La contrôlabilité de certains opérateurs présentant une dégénérescence interne a déjà été étudiée. Dans cette direction, on mentionne la contrôlabilité régionale obtenue par P. Martinez, J.-P. Raymond et J. Vancostenoble [100] pour un opérateur issu d'une équation de Crocco linéarisée

$$u_t + u_x - u_{yy} = \chi_\omega(x, y)h(t, x, y), \quad (t, x, y) \in (0, T) \times (0, \ell) \times (0, 1), \quad (1.67)$$

et l'étude de la contrôlabilité à zéro menée par K. Beauchard [13] pour des opérateurs de type Kolmogorov

$$u_t + v^\gamma u_x - u_{vv} = \chi_\omega(x, v)h(t, x, v), \quad (t, x, v) \in (0, T) \times \mathbb{T} \times (-1, 1), \quad (1.68)$$

généralisant un résultat précédent de K. Beauchard et E. Zuazua [20]. La contrôlabilité à zéro de l'équation de Grushin (1.57) dégénérée mais non singulière (i.e. $c = 0$) par K. Beauchard, P. Cannarsa et R. Guglielmi [14] est détaillée au paragraphe suivant.

Concernant la contrôlabilité de l'équation parabolique singulière (1.64) avec un contrôle distribué sur un sous-domaine ω , J. Vancostenoble et E. Zuazua ont montré dans [138] le résultat suivant.

Théorème 1.23. *Soient $d \geq 3$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine régulier borné tel que $0 \in \Omega$. Soit $\omega \subset \Omega$ un ouvert contenant une couronne centrée sur la singularité. On suppose que $\lambda \leq \lambda^*(d)$. Alors, pour tout temps $T > 0$, le système*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u - \frac{\lambda}{|x|^2} u = h\chi_\omega, & (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \\ u = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.69)$$

est contrôlable à zéro pour toute condition initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$ avec des contrôles $h \in L^2((0, T) \times \Omega)$.

La preuve de l'observabilité repose sur une décomposition en harmoniques sphériques et sur l'observabilité des équations unidimensionnelles avec potentiel singulier qui en découlent. Les poids utilisés dans l'inégalité de Carleman 1D sont ceux développés dans [39] pour le problème dégénéré (1.65).

Les restrictions géométriques sur le domaine de contrôle ω ont été supprimées par S. Ervedoza [69] conduisant à la contrôlabilité à zéro de (1.69) pour tout sous-domaine $\omega \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$ pour $d \geq 3$ si $\lambda \leq \lambda^*(d)$.

Finalement, pour la contrôlabilité à zéro d'un problème 1D, à la fois singulier et dégénéré au bord de l'intervalle, on mentionne l'article [137] de J. Vancostenoble qui utilise les idées des inégalités de Carleman précédentes, conjointement à certaines améliorations de l'inégalité de Hardy.

Equations de type Grushin. Les singularités étudiées dans ce manuscrit (voir (1.57)) sont de nature différentes de celles étudiées par J. Vancostenoble, E. Zuazua et S. Ervedoza (voir (1.69)). En effet, ces auteurs considèrent des singularités soit au bord, soit en un point intérieur en dimension supérieure à trois. Le modèle 2D étudié dans ce manuscrit est lui simultanément dégénéré et singulier sur le segment $\{x = 0\}$, qui sépare le domaine $\Omega = (-1, 1) \times (0, 1)$ en deux composantes. Les propriétés de modèles similaires à (1.57) ont déjà été étudiées sous plusieurs angles.

Dans [28], U. Boscain et C. Laurent ont montré dans le cadre $\gamma > 0$ que l'opérateur \tilde{L} défini par (1.59) avec domaine $C_0^\infty((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{T})$ est essentiellement autoadjoint sur $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ si et seulement si $\gamma \in [1, +\infty)$. Ainsi, si $\gamma \in [1, +\infty)$, aucune information ne peut traverser la singularité pour l'équation de la chaleur, des ondes ou de Schrödinger associée : la solution issue d'une condition initiale supportée dans $\Omega^+ := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}; x > 0\}$ reste à support dans Ω^+ . Ces résultats s'adaptent directement à l'opérateur (1.57) : pour $\gamma > 0$, l'opérateur associé avec domaine $C_0^\infty(\Omega \setminus \{x = 0\})$ est essentiellement autoadjoint dans $L^2(\Omega)$ si $c \geq \frac{3}{4}$. Il est donc vain de chercher des propriétés de contrôlabilité avec un contrôle localisé d'un côté de la singularité pour $c \geq \frac{3}{4}$.

L'étude des propriétés de l'opérateur de Laplace-Beltrami L défini par (1.58) a été poursuivie par U. Boscain et D. Prandi [29] dans le cadre $\gamma \in \mathbb{R}$. Parmi d'autres résultats ils ont montré, pour $\gamma \in (-1, 1)$, l'existence d'une extension autoadjointe pour laquelle l'équation de la chaleur associée est bien posée et vérifie des conditions de continuité de part et d'autre de la singularité.

Du point de vue de la contrôlabilité, les propriétés de (1.57) ont été étudiées, dans [14], par K. Beauchard, P. Cannarsa et R. Guglielmi dans le cadre non singulier i.e. $c = 0$. Ils ont montré le résultat suivant concernant la contrôlabilité à zéro.

Théorème 1.24. *Soient $\Omega = (-1, 1) \times (0, 1)$ et ω un ouvert de $(0, 1) \times (0, 1)$.*

- Si $\gamma \in (0, 1)$, le système

$$\begin{cases} \partial_t f - \partial_{xx}^2 f - |x|^{2\gamma} \partial_{yy}^2 f = u(t, x, y) \chi_\omega(x, y), & (t, x, y) \in (0, \infty) \times \Omega, \\ f(t, x, y) = 0, & (t, x, y) \in (0, \infty) \times \partial\Omega, \\ f(0, x, y) = f_0(x, y), & (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (1.70)$$

est contrôlable à zéro en tout temps $T > 0$.

- Si $\gamma = 1$ et $\omega = (a, b) \times (0, 1)$ avec $0 < a < b \leq 1$, il existe $T^* \geq \frac{a^2}{2}$ tel que le système (1.70) soit contrôlable à zéro en temps T pour $T > T^*$ et non contrôlable à zéro en temps T pour $T < T^*$.
- Si $\gamma > 1$, le système (1.70) est non contrôlable à zéro pour tout temps $T > 0$.

La preuve repose sur la décomposition de Fourier en la variable y des solutions du système adjoint de (1.70). Le système est contrôlable à zéro si et seulement si les systèmes unidimensionnels, satisfaits par les coefficients de Fourier, sont observables uniformément par rapport aux fréquences de Fourier. Les inégalités de Carleman développées par K. Beauchard, P. Cannarsa et R. Guglielmi portent donc une attention toute particulière au suivi des fréquences de Fourier. Un corollaire de cette stratégie est la continuation unique du système adjoint de (1.70) pour tout $\gamma > 0$.

Ces idées ont été adaptées partiellement au cas de (1.57) avec $c \neq 0$ dans le cas où la singularité et la dégénérescence sont au bord du domaine par P. Cannarsa et R. Guglielmi [37]. Ils ont montré la contrôlabilité approchée en tout temps de

$$\begin{cases} \partial_t f - \partial_{xx}^2 f - |x|^{2\gamma} \partial_{yy}^2 f + \frac{c}{x^2} f = u(t, x, y) \chi_\omega(x, y), & (t, x, y) \in (0, \infty) \times \Omega, \\ f(t, x, y) = 0, & (t, x, y) \in (0, \infty) \times \partial\Omega, \\ f(0, x, y) = f_0(x, y), & (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (1.71)$$

pour $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, $\omega \subset \Omega$, $\gamma > 0$ et $c > -\frac{1}{4}$ et la contrôlabilité à zéro en temps suffisamment grand pour $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, $\omega = (a, b) \times (0, 1)$ avec $0 < a < b \leq 1$, $\gamma = 1$ et $c > -\frac{1}{4}$.

1.4.4 Principaux résultats

Dans ce manuscrit, on donne une condition nécessaire et suffisante sur le potentiel singulier pour obtenir la contrôlabilité approchée de (1.57) via la continuation unique du système adjoint. Ce résultat, ainsi que deux corollaires, sont détaillés au Chapitre 7. Le Chapitre 7 s'inspire de la prépublication [107].

Dans un premier temps, on considère le problème de contrôle (1.57) muni de conditions au bord de Dirichlet en x et périodiques en y i.e.

$$\begin{cases} \partial_t f - \partial_{xx}^2 f - |x|^{2\gamma} \partial_{yy}^2 f + \frac{c_\nu}{x^2} f = u(t, x, y) \chi_\omega(x, y), & (t, x, y) \in (0, T) \times \Omega, \\ f(t, -1, y) = f(t, 1, y) = 0, & (t, y) \in (0, T) \times (0, 1), \\ f(t, x, 0) = f(t, x, 1), & (t, x) \in (0, T) \times (-1, 1), \\ \partial_y f(t, x, 0) = \partial_y f(t, x, 1), & (t, x) \in (0, T) \times (-1, 1), \\ f(0, x, y) = f_0(x, y), & (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (1.72)$$

avec $\omega \subset \Omega = (-1, 1) \times (0, 1)$, $\gamma > 0$ et $c_\nu = \nu^2 - \frac{1}{4}$ pour $\nu \in (0, 1)$. La borne inférieure $-\frac{1}{4}$ pour la constante du potentiel singulier permet la validité de l'inégalité de Hardy

$$\int_{-1}^1 f'(x)^2 + \frac{c_\nu}{x^2} f(x)^2 dx \geq 0, \quad \text{pour tout } f \in H^1(-1, 1) \text{ tel que } f(0) = 0. \quad (1.73)$$

La borne supérieure $\frac{3}{4}$ pour la constante du potentiel singulier permet d'assurer que l'opérateur étudié n'est pas essentiellement autoadjoint, conformément aux résultats de U. Boscain et C. Laurent [28].

On rappelle que le système (1.72) est approximativement contrôlable en temps $T > 0$ si pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $f_0, f_T \in L^2(\Omega)$, il existe $u \in L^2((0, T) \times \Omega)$ tel que la solution de (1.72) associée satisfasse

$$\|f(T) - f_T\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon. \quad (1.74)$$

Le principal résultat du Chapitre 7 est le suivant (voir le Théorème 7.1 page 187).

Théorème 1.25. *Soient $T > 0$, $\gamma > 0$ et $\nu \in (0, 1)$. Si ω est un sous-domaine de l'une des deux composantes de $\Omega \setminus \{x = 0\}$ alors (1.72) est approximativement contrôlable en temps T si et seulement si $\nu \in (0, \frac{1}{2}]$ i.e. si et seulement si $c_\nu \in (-\frac{1}{4}, 0]$.*

Comme nous le verrons plus tard, si ω intersecte les deux composantes de $\Omega \setminus \{x = 0\}$, alors la contrôlabilité approchée a lieu pour tout $\gamma > 0$ et tout $\nu \in (0, 1)$. Ceci est une conséquence de la continuation unique des opérateurs uniformément paraboliques. Ainsi, le fait d'avoir une singularité interne, et non au bord (comme considéré dans [37]), affecte profondément les propriétés de contrôlabilité.

La première difficulté de ce théorème est de donner un sens aux solutions de (1.72). En effet, à cause de la singularité interne $\frac{1}{x^2}$ les techniques usuelles d'étude du caractère bien posé sont mises en défaut. Dans ce contexte, la régularité n'est pas un facteur limitant. Ainsi, on peut construire des fonctions $f \in C_0^\infty(\Omega)$ telles que $(x, y) \mapsto \frac{1}{x^2} f(x, y) \notin L^2(\Omega)$. Le facteur limitant est ici le comportement de la fonction considérée au voisinage de la singularité. L'inégalité de Hardy (1.73) n'est plus valable si la fonction f n'est pas nulle sur $\{x = 0\}$. Pour les problèmes 1D avec un potentiel singulier au bord, comme par exemple [138, 137], la condition de nullité en $x = 0$ est assurée par les conditions au bord de Dirichlet homogène considérées. La singularité étant ici interne, le cadre fonctionnel doit contenir des informations sur le comportement des fonctions au voisinage de la singularité.

D'après les travaux de U. Boscain et C. Laurent [28], on sait que pour $\nu \in (0, 1)$ l'opérateur $-\partial_{xx}^2 - |x|^{2\gamma} \partial_{yy}^2 + \frac{c_\nu}{x^2}$ avec domaine $C_0^\infty(\Omega \setminus \{x = 0\})$ admet plusieurs extensions

autoadjointes sur $L^2(\Omega)$. On construit $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ une telle extension positive. Ainsi, pour tout $f^0 \in L^2(\Omega)$ et $u \in L^2((0, T) \times \Omega)$, le système

$$\begin{cases} f'(t) = \mathcal{A}f(t) + v(t), & t \in [0, T], \\ f(0) = f^0, \end{cases} \quad (1.75)$$

où $v(t) : (x, y) \in \Omega \mapsto u(t, x, y)\chi_\omega(x, y)$ admet une unique solution faible. La solution de (1.72) est alors entendue au sens de la solution de (1.75). Il en va de même pour le système adjoint de (1.72). La construction de cet opérateur \mathcal{A} est réalisée en Section 7.2. On présente ici la stratégie de cette construction.

Inspirés par les idées du Théorème 1.24, on considère les systèmes 1D obtenus de manière formelle par la décomposition de la solution du système (1.72) homogène dans la base de Fourier périodique en la variable y i.e.

$$\partial_t f_n - \partial_{xx}^2 f_n + \left(\frac{c_\nu}{x^2} + (2n\pi)^2 |x|^{2\gamma} \right) f_n = 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times (-1, 1). \quad (1.76)$$

On construit un domaine $D(A_n)$ tel que l'opérateur

$$A_n := -\partial_{xx}^2 + \left(\frac{c_\nu}{x^2} + (2n\pi)^2 |x|^{2\gamma} \right) \quad (1.77)$$

soit autoadjoint positif. On obtient alors la solution de (1.76) par le semigroupe généré par $-A_n$. Les éléments de $D(A_n)$ sont obtenus comme somme d'une partie régulière H^2 nulle en $x = 0$ et à dérivée nulle en $x = 0$ et d'une partie singulière solution de part et d'autre de la singularité de

$$-\partial_{xx}^2 f + \frac{c_\nu}{x^2} f = 0. \quad (1.78)$$

On impose des conditions de transmission adaptées à travers la singularité pour la partie singulière. Le caractère autoadjoint est obtenu grâce aux conditions de transmission. Le caractère positif est obtenu grâce aux conditions de transmission et à l'inégalité de Hardy (1.73) pour la partie régulière. Finalement, on construit un semigroupe continu de $L^2(\Omega)$ par la procédure suivante

- on décompose $f^0 \in L^2(\Omega)$ dans la base de Fourier périodique en la variable y ,
- on résout (1.76) avec condition initiale f_n^0 donnée par la décomposition précédente,
- on somme dans la base de Fourier précédente les solutions ainsi obtenues.

Le générateur infinitésimal \mathcal{A} du semigroupe $S(t)$ ainsi construit est alors une extension de l'opérateur $-\partial_{xx}^2 - |x|^{2\gamma} \partial_{yy}^2 + \frac{c_\nu}{x^2}$ avec domaine $C_0^\infty(\Omega \setminus \{x = 0\})$. Conformément au caractère essentiellement autoadjoint de cet opérateur, cette construction n'est pas licite pour $\nu \geq 1$: les fonctions singulières considérées dans le domaine de l'opérateur unidimensionnel ne sont plus des fonctions de L^2 .

Le Théorème 1.25 est alors prouvé en montrant la continuation unique du système adjoint de (1.76) dont les solutions sont données par le semigroupe $S(t)$ construit précédemment. La singularité interne empêche d'appliquer les résultats de continuation unique de type Holmgren mentionnés précédemment. On obtient le résultat suivant ramenant la continuation unique du problème en dimension deux à celle d'un problème unidimensionnel avec singularité au bord (voir la Proposition 7.6 page 195).

Proposition 1.2. *Soit $T > 0$, $\gamma > 0$, $\nu \in (0, 1)$ et ω un ouvert de $(-1, 0) \times (0, 1)$. Si $g^0 \in L^2(\Omega)$ vérifie $\chi_\omega S(t)g^0 \equiv 0$ pour presque tout $t \in [0, T]$, alors $S(t)g^0$ est identiquement nul sur $(-1, 0) \times (0, 1)$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, la partie singulière du n^e coefficient de Fourier est identiquement nulle sur $(-1, 1)$.*

Ce résultat utilise les propriétés d'ellipticité de l'opérateur \mathcal{A} sur $(-1, -\varepsilon) \times (0, 1)$ pour tout $\varepsilon \in (0, 1)$ et les résultats classiques de continuation unique pour les équations paraboliques non singulières. La nullité de la partie singulière sur $(-1, 1)$ est assurée par sa nullité sur $(-1, 0)$ et les conditions de transmission à travers la singularité. Ce résultat prouve la continuation unique pour tout $\nu \in (0, 1)$ et tout $\gamma > 0$ si ω intersecte les deux composantes de $\Omega \setminus \{x = 0\}$.

On est alors ramenés à étudier la continuation unique du problème unidimensionnel avec singularité au bord suivant

$$\begin{cases} \partial_t g_n - \partial_{xx}^2 g_n + \left(\frac{c_\nu}{x^2} + (2n\pi)^2 x^{2\gamma}\right) g_n = 0, & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), \\ g_n(t, 0) = g_n(t, 1) = 0, & t \in (0, T), \\ \partial_x g_n(t, 0) = 0, & t \in (0, T). \end{cases} \quad (1.79)$$

Notons que, les problèmes unidimensionnels singuliers au bord mentionnés en Section 1.4.3 se focalisant sur des contrôles distribués sur un sous-domaine, la continuation unique pour ce problème n'est pas traitée dans la littérature.

Pour $\nu \in (0, \frac{1}{2}]$, on prouve une inégalité de Carleman qui entraîne pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la nullité de g_n solution de (1.79). Cette inégalité repose principalement sur la condition de Neumann supplémentaire en $x = 0$ et sur le fait que $c_\nu \leq 0$ pour $\nu \in (0, \frac{1}{2}]$.

Pour $\nu \in (\frac{1}{2}, 1)$, on construit en utilisant des fonctions de Bessel une solution explicite non nulle de (1.79) pour $n = 0$, ce qui prouve le Théorème 1.25.

En corollaire, on déduit la condition nécessaire et suffisante suivante de contrôlabilité approchée de l'équation de la chaleur unidimensionnelle avec potentiel singulier $\frac{1}{x^2}$ (voir le Théorème 7.3 page 188).

Théorème 1.26. *Soient $T > 0$ et $\nu \in (0, 1)$. Si ω est un ouvert de $(-1, 0)$ ou $(0, 1)$, alors le système*

$$\begin{cases} \partial_t f - \partial_{xx}^2 f + \frac{c_\nu}{x^2} f = u(t, x)\chi_\omega(x), & (t, x) \in (0, T) \times (-1, 1), \\ f(t, -1) = f(t, 1) = 0, & t \in (0, T), \end{cases} \quad (1.80)$$

est approximativement contrôlable en temps T si et seulement si $\nu \in (0, \frac{1}{2}]$ i.e. si et seulement si $c_\nu \in (-\frac{1}{4}, 0]$.

Les solutions du système (1.80) sont définies via le semigroupe généré par l'opérateur $(-A_0, D(A_0))$ mentionné en (1.77).

Un deuxième corollaire consiste en l'adaptation du Théorème 1.25 (voir le Théorème 7.2 page 187) pour des conditions au bord de Dirichlet homogène.

Théorème 1.27. *Soient $T > 0$, $\gamma > 0$ et $\nu \in (0, 1)$. Pour $\ell > 0$, on pose $\Omega^\ell := (-1, 1) \times (0, \ell)$. On considère l'opérateur (1.57) avec conditions de Dirichlet homogènes.*

$$\begin{cases} \partial_t f - \partial_{xx}^2 f - |x|^{2\gamma} \partial_{yy}^2 f + \frac{c_\nu}{x^2} f = u(t, x, y) \chi_\omega(x, y), & (t, x, y) \in (0, T) \times \Omega^\ell, \\ f(t, x, y) = 0, & (t, x, y) \in (0, T) \times \partial\Omega^\ell, \\ f(0, x, y) = f^0(x, y), & (x, y) \in \Omega^\ell. \end{cases} \quad (1.81)$$

Si $\nu \in (0, \frac{1}{2}]$, alors le système (1.81) est approximativement contrôlable en temps T , pour tout $\ell > 0$.

Si $\nu \in (\frac{1}{2}, 1)$ et $\gamma = 1$, il existe des valeurs de $\ell > 0$ telles que pour tout $T > 0$ le système (1.81) n'est pas approximativement contrôlable en temps T .

La construction des solutions de (1.81) est similaire à celle des solutions de (1.72). Le résultat positif est identique à celui du Théorème 1.27. Le résultat négatif du Théorème 1.27 étant basé sur un contre-exemple explicite pour le coefficient de Fourier associé à la fréquence nulle, on adapte ce résultat pour des fréquences non nulles. C'est cette adaptation qui utilise des longueurs spécifiques du domaine dans la direction y et la restriction $\gamma = 1$.

1.4.5 Perspectives

Au vu des résultats présentés dans la Section 1.4.4, certaines questions et extensions apparaissent naturellement.

Contrôlabilité à zéro. Lorsque le système (1.72) est approximativement contrôlable, on peut s'interroger sur la contrôlabilité à zéro de ce système et donc sur l'observabilité du système adjoint. La validité d'inégalités de Carleman pour des opérateurs 2D de type Grushin est un problème ouvert. Vu la construction du semigroupe $S(t)$ et la stratégie utilisée dans [14], une direction d'étude serait de prouver l'observabilité, par un intervalle $(a, b) \subset (-1, 0)$, des systèmes adjoints unidimensionnels, uniformément par rapport à la fréquence de Fourier. Le système 2D (1.72) serait alors observable par une bande verticale $\omega = (a, b) \times (0, 1)$, grâce à l'égalité de Bessel-Parseval. Dans cette direction, il est peu probable que l'inégalité de Carleman démontrée au Chapitre 7 soit utilisable. En effet, la condition de Neumann supplémentaire en $x = 0$ dans (1.79) est fondamentale pour la validité de cette inégalité. De plus, la présence de fonctions singulières compromet la stratégie d'inégalités de Carleman basée sur des intégrations par parties. Déjà, pour l'équation de la chaleur unidimensionnelle singulière (1.80) la contrôlabilité à zéro est un problème ouvert.

Cas des conditions de Dirichlet On peut aussi s'interroger sur la non contrôlabilité du système (1.81) avec conditions de bord de Dirichlet pour $\gamma > 0$ et ℓ quelconque. Les conditions imposées sur γ et ℓ au Théorème 1.27 sont purement techniques et liées à l'utilisation de solutions explicites. On conjecture que le système (1.81) ne vérifie pas la propriété de contrôle approché pour $\gamma > 0$ et ℓ quelconque. La preuve de ce résultat nécessite probablement des outils différents.