

Objectifs de la simulation de réservoir

Présentation d'un réservoir d'hydrocarbures

L'industrie pétrolière s'intéresse aux réservoirs géologiques dans lesquels se sont accumulés des hydrocarbures. L'objectif est alors d'extraire ces hydrocarbures de la manière la plus efficace possible. Dans un premier temps, le sous-sol est foré jusqu'à atteindre la roche *réservoir* où sont situés les hydrocarbures. Dans

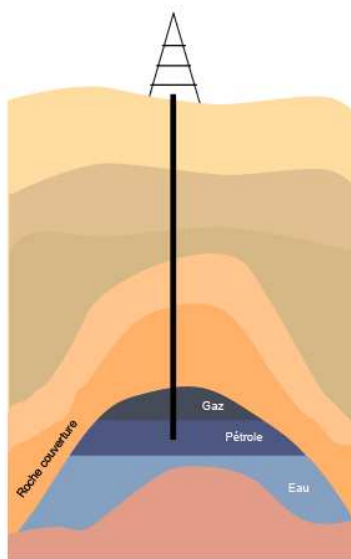


FIGURE 1.1 – Un réservoir d'hydrocarbures simplifié en exploitation

certains cas, la pression initiale du sous-sol peut permettre aux hydrocarbures de remonter à la surface. On parle de *récupération primaire*. Cette méthode ne permet, en général, de récupérer que 5 à 15 % des hydrocarbures présents. La deuxième étape consiste alors à injecter de l'eau à l'intérieur du réservoir pour pouvoir en récupérer une plus grande partie : c'est la *récupération secondaire*. On arrive ainsi à atteindre des taux de récupération de l'ordre de 35 à 45 %. D'autres méthodes permettent d'améliorer encore ce taux de récupération. L'injection de CO_2 et sa dissolution dans la phase hydrocarbure permet de réduire la viscosité de l'huile et ainsi faciliter sa récupération. Des composés chimiques tels que des polymères, des surfactants, des alcalins peuvent augmenter la récupération en réduisant les différences de viscosité et la tension superficielle

entre les différentes phases. Ce type de technique constitue ce que l'on appelle la *récupération améliorée* et permet, en moyenne, d'augmenter de 5 à 15 % le taux de récupération.

Utilisation de la simulation numérique

Nous avons décrit succinctement les méthodes d'exploitation d'un réservoir d'hydrocarbures. Cependant, le choix de l'exploitation ou non d'un gisement d'hydrocarbures est l'aboutissement d'un processus décisionnel assez important. En effet, la mise en place d'une exploitation pétrolière représente un investissement très lourd (quelques millions d'euros par forage). Les compagnies pétrolières chargées d'évaluer l'intérêt d'un gisement pétrolier doivent donc être capables de prévoir le plus précisément possible la quantité d'hydrocarbures qu'elles pourront récupérer. Ces entreprises ont recours à des logiciels de *simulation de réservoir* qui utilisent des données PVT et pétrophysiques mesurées par le biais de différentes techniques (carottes, enregistrements sismiques, ...). Ces simulations ne servent pas seulement à prévoir les quantités d'hydrocarbures produites mais sont également utilisées pour optimiser le placement des puits. Les modèles d'écoulement sont souvent mis au point via un processus dit de calage d'historique où les données du modèle sont modifiées au cours d'un processus d'optimisation itératif nécessitant le lancement de plusieurs simulations d'écoulement et visant à reproduire les données mesurées au cours de l'exploitation.

1.1.2 Intérêt de l'utilisation de nouvelles méthodes numériques

Un simulateur de réservoir constitue donc un outil important pour l'industrie pétrolière. Toutefois, comme nous allons le voir dans ce qui suit, le temps d'exécution et la précision des résultats obtenus sont dépendants d'un changement d'échelle. En effet, un réservoir d'hydrocarbures est constitué de roches sédimentaires formées d'un réseau de pores où les fluides peuvent circuler (voir figure 1.2). La taille des pores est de l'ordre du micromètre. Un réservoir d'hydrocarbures peut, quant à lui, s'étendre sur plusieurs

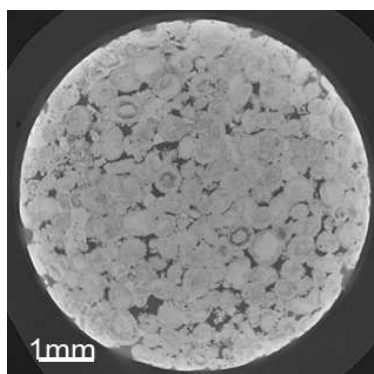


FIGURE 1.2 – Roche poreuse observée au microscope

centaines de kilomètres carrés. Cette différence d'échelle est souvent en partie réduite en introduisant deux grandeurs moyennes caractérisant le milieu poreux à l'échelle du mètre :

- la porosité ϕ représente le rapport du volume poreux sur le volume total de la roche,
- la perméabilité k est la capacité de la roche à laisser un fluide s'écouler sous l'effet d'une différence de pression. Cette grandeur a été introduite par H. Darcy [Dar56].

L'introduction de ces grandeurs moyennées permet d'éviter la distinction entre le pore et la matrice solide. Les équations physiques permettant de simuler un écoulement fluide sont donc écrites à une échelle plus macroscopique. Le modèle constitué des cartes de porosités et perméabilités est appelé *modèle géologique*. Les longueurs caractéristiques de variations de ces propriétés peuvent encore être relativement petites par rapport aux dimensions du réservoir. Ainsi, une résolution numérique de l'écoulement sur le modèle géologique consisterait à définir, dans des cas industriels, une grille de l'ordre du million ou du milliard de mailles. Sur une grille de cette dimension, l'utilisation de méthodes numériques classiques serait trop coûteuse. Cette thèse a pour but de construire et de tester des méthodes multi-échelles pour simuler ces écoulements en

diminuant le temps de calcul tout en maintenant une précision des solutions proches de celles obtenues avec des méthodes classiques.

Les méthodes multi-échelles étudiées dans ce manuscrit ont d'autres applications que la simulation de réservoir, en particulier,

- l'étude du risque lié au stockage de déchets nucléaires dans les sous-sols [AKP07],
- l'étude de la pollution des sols.

1.2 Simulation numérique et méthodes multi-échelles

Nous avons vu, au paragraphe précédent, que la simulation d'écoulement sur le modèle géologique n'était pas réalisable avec des méthodes classiques. En pratique, les porosités et les perméabilités sont souvent mises à l'échelle sur une grille plus grossière. La grille obtenue à l'issue de cette étape dite d'*upscaling* comporte 100 à 1000 fois moins de mailles. Cette nouvelle grille constitue ce qu'on appelle le *modèle de réservoir*. Dans la suite de ce manuscrit, on appellera *modèle fin* le modèle géologique et *modèle grossier* le modèle de réservoir. La simulation d'écoulement sur la grille grossière permet ensuite de calculer des données de production comme, par exemple, les débits, les pressions aux puits ou encore les water cuts¹. Si l'on souhaite obtenir des cartes de saturations ou de pression à l'échelle fine, une fois la simulation effectuée sur la grille grossière, il est nécessaire de passer par une étape de *downscaling*. Ces deux changements d'échelle permettent, certes, de réduire la dimension du modèle de réservoir et donc les temps de calculs, mais aboutissent souvent à une perte de précision au niveau des résultats. Une partie de l'information disponible dans le modèle géologique est perdue suite à l'*upscaling* et il est souvent très difficile de reconstituer l'impact des hétérogénéités présentes à l'échelle fine sur l'écoulement lors du *downscaling*. Les travaux effectués dans cette thèse visent à traiter efficacement cette problématique.

Les méthodes multi-échelles représentent une alternative prometteuse aux techniques traditionnelles d'*upscaling* et de *downscaling*. En effet, ces méthodes permettent de reproduire l'impact sur les solutions des variations des perméabilités et des porosités à l'échelle du modèle géologique tout en effectuant une résolution du système linéaire à une échelle plus grossière. Les champs de pressions et de vitesses obtenus sont plus précis qu'en utilisant une méthode d'*upscaling* et leur calcul est moins coûteux qu'une simulation réalisée sur le modèle géologique car les inconnues intervenant dans la résolution du système sont définies sur un maillage beaucoup plus grossier.

L'objectif principal de cette thèse est d'étudier et quantifier dans quelle mesure les méthodes multi-échelles permettent d'effectuer des simulations d'écoulement directement à partir du modèle géologique tout en limitant les temps de calculs.

1.3 État de l'art des méthodes multi-échelles

La méthode des éléments finis multi-échelles a été initialement introduite par Th.Y. Hou et X.H. Wu dans [HW97] pour résoudre des problèmes elliptiques où le coefficient de diffusion varie selon une échelle beaucoup plus petite que le domaine. Cette méthode introduit des fonctions de base éléments finis spécifiques qui tiennent compte des variations du coefficient de diffusion à l'échelle fine. Le principe de cette méthode est justifié par des résultats d'homogénéisation périodique présentés, par exemple, dans [BLP78], [SP80] et [ZKO94]. D'autres méthodes multi-échelles, basées elles aussi sur des résultats d'homogénéisation périodique, ont ensuite été introduites dans [Arb00], [MBS00], [EE03] et [EH09].

Appliquée à un écoulement diphasique, la méthode de Th.Y. Hou et X.H. Wu ne permet pas de calculer des flux conservatifs à l'échelle fine. Or, cette propriété est importante si l'on souhaite utiliser ces flux pour simuler le transport des fluides et assurer la conservation de la masse. Une seconde méthode multi-échelle basée sur des éléments finis mixtes-hybrides a donc été proposée dans [CH02] et mise en œuvre sur un

1. Water cut : Rapport volumique entre l'eau produite et la production totale de liquide

modèle de type *Black-Oil* dans [KLN⁺09]. Notons qu'une méthode multi-échelle basée sur des volumes finis a également été proposée dans [JLT03] pour la simulation de réservoir. Cette dernière méthode est plus contraignante puisqu'elle nécessite la construction d'un maillage dual et le calcul de fonctions de base sur les deux maillages.

Les méthodes multi-échelles évoquées précédemment permettent de réduire le coût du calcul des pressions et des flux. Dans le cas d'un écoulement diphasique, une fois les flux calculés, une équation de transport doit être résolue pour calculer les saturations des fluides. À ce stade, on utilise classiquement un schéma de type volumes finis directement sur la grille fine. Toutefois, la simulation du problème de transport sur le maillage fin est très contraignante, en particulier si les saturations sont résolues avec un schéma explicite en temps. Dans ce cas précis, une condition de stabilité, appelée aussi condition *CFL*, limite les valeurs du pas de temps et impose un très grand nombre d'itérations jusqu'au temps final. Un schéma implicite peut également être utilisé pour résoudre ce problème. Ce mode de résolution permet d'obtenir des pas de temps plus élevés mais plusieurs résolutions de systèmes linéaires définis sur la grille fine peuvent être nécessaires pour résoudre ce système non linéaire. De plus, là aussi, les valeurs du pas de temps dépendent de la résolution de la grille. Pour réduire les temps de calcul en implicite, une méthode de déraffinement adaptative a été proposée dans [AHE07]. Cette méthode agglomère les mailles où les flux sont peu importants et conserve un maillage fin dans le reste du domaine. Notons enfin qu'une méthode multi-échelle hétérogène (HMM) a récemment été proposée dans [HO10] pour résoudre un problème de transport mais cette méthode sert uniquement à calculer plus précisément une solution sur le maillage grossier et ne permet pas d'obtenir les valeurs des saturations à l'échelle fine. De plus, les hypothèses faites sur les paramètres du problème, notamment sur le champ de vitesse, rendent difficiles son application à des cas plus généraux.

Dans ce mémoire, une nouvelle méthode multi-échelle pour la résolution d'un problème de transport est proposée.

1.4 Présentation des résultats obtenus au cours de la thèse

1.4.1 Résultats théoriques d'homogénéisation

Le problème de transport étudié dans ce manuscrit permet, par exemple, de simuler le déplacement d'un traceur à l'intérieur d'une phase se déplaçant dans un milieu poreux. L'équation à résoudre s'écrit alors

$$\begin{cases} \rho^*(x^*) \frac{\partial c^*}{\partial t^*}(t^*, x^*) + b^*(x^*) \cdot \nabla c^*(t^*, x^*) - \operatorname{div}(A^*(x^*) \nabla c^*(t^*, x^*)) & = 0 \\ c^*(0, x^*) & = c^0(x^*). \end{cases} \quad (1.1)$$

Dans cette équation, ρ^* représente la porosité, b^* la vitesse d'écoulement, A^* le tenseur de diffusion et c^* la concentration du traceur. On suppose que les propriétés physiques (ρ^* , b^* et A^*) varient à une échelle beaucoup plus petite que la taille du réservoir considéré. On note $\varepsilon = \frac{l}{L}$ le rapport entre les longueurs caractéristiques des deux échelles. Ici, l est la taille des hétérogénéités et L la taille du domaine. Nous considérons ici que la convection est du même ordre que la diffusion à l'échelle fine. Nous choisissons également une échelle de temps permettant d'observer la diffusion. L'équation sans dimension obtenue à partir de (1.1) est

$$\begin{cases} \rho^\varepsilon(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon(x) \cdot \nabla u_\varepsilon - \operatorname{div}(A^\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon) & = 0 \\ u_\varepsilon(0, x) & = u^0(x). \end{cases} \quad (1.2)$$

Ce choix d'échelle est également utilisé dans [AR07], [DP05] et [ABMP10]. La plupart des méthodes multi-échelles sont basées sur des résultats d'*homogénéisation périodique*. Nous allons donc supposer les fonctions ρ^ε , b^ε et A^ε périodiques de période ε :

$$\rho^\varepsilon = \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad b^\varepsilon = b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{et} \quad A^\varepsilon = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

avec ρ , b et A périodiques de période 1. L'étude de cette équation dans [MPP05] a permis de montrer que, pour de faibles valeurs de ε , u_ε peut être approchée par une fonction plus simple.

Théorème 1.1. Soit u_ε solution du problème (1.2). Nous construisons les fonctions w_i définies pour chaque direction e_i comme les solutions du problème de cellule

$$\begin{cases} b(y) \cdot (\nabla_y w_i + e_i) - \operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_y w_i + e_i)) &= \rho(y) b^* \cdot e_i \\ w_i \text{ est périodique.} \end{cases} \quad (1.3)$$

Ce problème est posé sur la maille unité Y et b^* est une moyenne de b sur le volume poreux

$$b^* = \frac{1}{\bar{\rho}} \int_Y b(y) dy,$$

où

$$\bar{\rho} = \int_Y \rho(y) dy.$$

Nous définissons ensuite u solution du problème homogénéisé

$$\begin{cases} \bar{\rho} \partial_t u - \operatorname{div} (A^* \nabla u) &= 0, \\ u(0, x) &= u^0(x), \end{cases} \quad (1.4)$$

où la matrice A^* est définie à partir des solutions des problèmes de cellule w_i et de la matrice A :

$$A_{i,j}^* = \int_Y A(y) (\nabla_y w_i + e_i) \cdot (\nabla_y w_j + e_j) dy. \quad (1.5)$$

On construit enfin la fonction u_1 en utilisant la formule

$$u_1(t, x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x) w_i(y). \quad (1.6)$$

La fonction u_ε peut alors être approchée de la manière suivante :

$$u_\varepsilon(t, x) \approx u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (1.7)$$

Remarques 1.1 :

Le terme d'ordre 0 dans l'approximation (1.7) est la fonction u calculée en résolvant le problème parabolique (1.4). Ce problème ne fait pas intervenir de convection ce qui semble surprenant puisque l'on cherche à approcher la fonction u_ε solution du problème de convection-diffusion (1.2). Cependant, l'approximation (1.7) montre que cette fonction est dans un repère mobile par rapport à la solution u_ε . Ainsi, la fonction qui approche u_ε est

$$\tilde{u}_\varepsilon(t, x) = u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right).$$

En reprenant l'équation (1.4), on constate que \tilde{u}_ε est solution de l'équation

$$\begin{cases} \bar{\rho} \partial_t \tilde{u}_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} b^* \cdot \nabla \tilde{u}_\varepsilon - \operatorname{div} (A^* \nabla \tilde{u}_\varepsilon) &= 0, \\ \tilde{u}_\varepsilon(0, x) &= u^0(x). \end{cases}$$

Ainsi, cette fonction \tilde{u}_ε est solution d'un problème de convection-diffusion à convection uniforme.

L'approximation (1.7) montre également que, pour approcher u_ε , il faut d'abord calculer les solutions w_i des problèmes de cellule (1.3). Une fois les fonctions w_i calculées, la formule (1.5) permet d'obtenir la matrice A^* . On utilise alors cette matrice pour résoudre l'équation (1.4) et calculer la fonction u . Avec cette fonction, on peut approcher u_ε car l'approximation (1.7) se réécrit

$$u_\varepsilon(t, x) \approx u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Il suffit donc, pour approcher u_ε , de résoudre les équations (1.3) et (1.4). Les problèmes (1.3) doivent être résolus à l'échelle fine mais ils sont définis sur une maille unitaire. Leur résolution ne nécessite donc pas une grande puissance de calcul. De plus, le problème (1.4) est un problème parabolique où la matrice de diffusion A^* est constante. Ce problème peut donc être résolu numériquement sans trop de difficultés. Au final, les deux résolutions numériques demandent moins de calculs numériques que la résolution du problème (1.2).

Le première nouveauté apportée par ce manuscrit a été de caractériser la vitesse à laquelle la fonction u_ε converge vers

$$u\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right)$$

quand ε se rapproche de 0. Nous démontrons alors le théorème suivant.

Théorème 1.2. *L'écart entre u_ε et $u\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ est de l'ordre de ε . Plus précisément, on a*

$$\left\| u_\varepsilon(t, x) - u\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon u_1\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2((0,T), H^1(\mathbb{R}^N))} \leq C\varepsilon. \quad (1.8)$$

1.4.2 Définition d'une nouvelle méthode multi-échelle et estimation d'erreur

En reprenant les notations définies au paragraphe précédent, nous avons montré que la solution u_ε du problème (1.2) peut être approchée de la manière suivante :

$$u_\varepsilon(t, x) \approx \tilde{u}_\varepsilon(t, x) + \varepsilon \sum_{i=1}^N \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial x_i}(t, x) w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

On remarque que le membre de droite de cette approximation est le début d'un *développement de Taylor*. Ainsi, cette approximation peut se réécrire

$$u_\varepsilon(t, x) \approx \tilde{u}_\varepsilon\left(t, x + \varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right). \quad (1.9)$$

Cette approximation est le point de départ de notre nouvelle méthode éléments finis multi-échelles. Rappelons, qu'une méthode éléments finis consiste à définir des *fonctions de base* et de considérer l'ensemble des fonctions qui sont des combinaisons linéaires de ces fonctions de base. Le principe de la méthode que l'on propose est de construire des fonctions de base particulières en composant des fonctions de base classiques avec des fonctions oscillantes comme dans le membre de droite de l'approximation (1.9). Ainsi, si $(\Phi_i)_{i=1, \dots, D}$ représente un ensemble de fonctions de base classiques, on voudrait définir nos fonctions de base multi-échelles par

$$\Phi_i^\varepsilon = \Phi_i \circ \hat{w}^\varepsilon, \quad (1.10)$$

où $\hat{w}_i^\varepsilon = x_i + \varepsilon w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Cette méthode multi-échelle vise à être appliquée à des cas non périodiques où les paramètres ρ^ε , b^ε et A^ε varient à l'échelle ε . Dans ce cas, il n'est pas suffisant de définir des problèmes de cellule sur une maille unitaire. En fait, les fonctions \hat{w}_i^ε devraient, dans le cas général, être calculées en résolvant les problèmes

$$\frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon(x) \cdot \nabla \hat{w}_i^\varepsilon - \operatorname{div}(A^\varepsilon(x) \nabla \hat{w}_i^\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) b^* \cdot e_i, \quad (1.11)$$

dans tout l'espace. En pratique, ces problèmes sont résolus localement. On définit donc un *maillage grossier* \mathcal{K}_H composé de mailles de taille $H > \varepsilon$. Sur chaque maille $K \in \mathcal{K}_H$ on définit la fonction $\tilde{w}_i^{\varepsilon, K}$ en reprenant l'équation (1.11) :

$$\frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon(x) \cdot \nabla \tilde{w}_i^{\varepsilon, K} - \operatorname{div}\left(A^\varepsilon(x) \nabla \tilde{w}_i^{\varepsilon, K}\right) = \frac{1}{\varepsilon} \rho^\varepsilon(x) b^{*, K} \cdot e_i, \quad (1.12)$$

où $b^{*, K}$ est une moyenne du champ de vitesse sur la maille K :

$$b^{*, K} = \frac{\int_K b^\varepsilon(x) dx}{\int_K \rho^\varepsilon(x) dx}.$$

Pour que chaque problème (1.12) ait une solution unique, nous imposons à la fonction $\tilde{w}_i^{\varepsilon,K}$ des conditions linéaires sur le bord de la maille K . Les problèmes de cellule (1.12) sont alors résolus numériquement en utilisant un maillage fin \mathcal{K}_h de résolution h qui doit être faible par rapport à ε . En regroupant les solutions $\tilde{w}_i^{\varepsilon,K}$ obtenues dans chaque maille $K \in \mathcal{K}_H$, on construit les fonctions $\tilde{w}_i^{\varepsilon,H}$. Nous définissons donc les fonctions de base multi-échelles par

$$\Phi_i^{\varepsilon,H} = \Phi_i \circ \hat{w}^{\varepsilon,H}. \quad (1.13)$$

Une fois ces fonctions de base définies, la méthode multi-échelle consiste simplement à supposer que la solution u_ε est une combinaison linéaire des fonctions $\Phi_i^{\varepsilon,H}$. Nous démontrons dans ce manuscrit que la solution obtenue en utilisant cette approximation est proche de la solution exacte u_ε .

Théorème 1.3. *On note u_ε la solution du problème (1.2). On définit alors $u_{\varepsilon,H}$ la solution obtenue en utilisant la méthode des éléments finis multi-échelles ayant, pour fonctions de base, les $\Phi_i^{\varepsilon,H}$ définies par l'équation (1.13). On a alors*

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,H}\|_{\Omega_T} \leq C \left(H^k + \frac{|b^*|}{\varepsilon} (H^{k+1} + \varepsilon) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} \right), \quad (1.14)$$

où

$$\|u\|_{\Omega_T}^2 = \|u\|_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega))}^2 + |u|_{L^2((0,T),H^1(\Omega))}^2.$$

La présence de termes en $\frac{|b^*|}{\varepsilon}$ dans (1.14) peut sembler surprenante. En fait, ce facteur apparaît car les fonctions de base Φ_i considérées au départ ne sont pas adaptées au problème que nous traitons. En effet, le problème homogénéisé (1.4) est un problème de convection-diffusion si on considère la fonction u dans le repère mobile. Plusieurs méthodes numériques permettent de résoudre efficacement cette classe de problèmes. On peut citer les méthodes de décentrement [BH82] ou la méthode des caractéristiques [BPS83]. On peut donc penser qu'en partant de telles méthodes et en utilisant la même règle de composition que dans l'équation (1.13), on peut approcher la solution u_ε plus efficacement.

1.4.3 Implémentation de notre nouvelle méthode multi-échelle et résultats

La méthode présentée au paragraphe précédent a, par la suite, été implémentée dans deux programmes différents. Nous avons d'abord utilisé le logiciel *FreeFem++* [HPLHO98] permettant de résoudre des équations aux dérivées partielles en utilisant des éléments finis.

Cette méthode a également été implémentée dans la plate-forme de développement *Arcane* [GL09] utilisée à IFP Énergies nouvelles (IFPEN). Cette plate-forme est présentée plus en détails au chapitre 6.

Le chapitre 9 explique comment sont résolues numériquement les différentes équations qui permettent d'obtenir la solution numérique $u_{\varepsilon,H}$ introduite au paragraphe précédent.

Les deux implémentations de cette méthodes nous ont permis de vérifier les résultats prévus par le théorème 1.3 sur un exemple de problème périodique.

Cas d'application

Les résultats présentés ici sont ceux obtenus en utilisant le logiciel *FreeFem++*. On considère le domaine $\Omega = (0,1)^2$. On choisit une condition initiale ayant pour support un sous-domaine de Ω (voir figure 1.3(a)). On impose le champ de vitesse :

$$b^\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} -\delta \sin\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{\varepsilon}\right) + b_x^0 \\ \delta \cos\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{\varepsilon}\right) + b_y^0 \end{pmatrix}.$$

Sa composante horizontale est représentée sur la figure 1.3(b). Ce champ de vitesse est à divergence nulle et de moyenne $b^0 = \begin{pmatrix} b_x^0 \\ b_y^0 \end{pmatrix}$.

On considère un coefficient de diffusion $A = 1$.

Les conditions aux bords du domaine sont périodiques.

Dans la suite, nous utilisons également les valeurs suivantes :

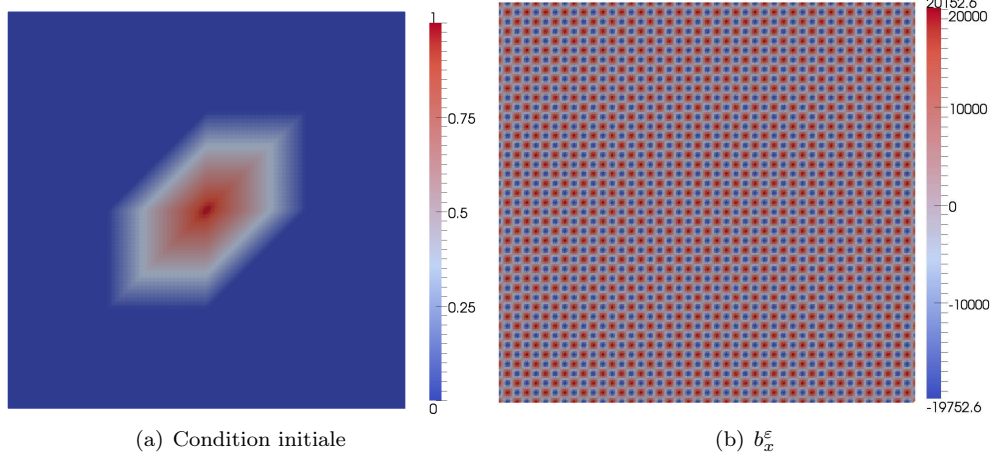


FIGURE 1.3 – À gauche, la condition initiale. À droite, le champ de vitesse b_x^ε imposé dans la direction x

- $\varepsilon = \frac{1}{200}$,
- $\delta = 100$,
- $b_x^0 = b_y^0 = 1$.

Le maillage grossier associé à ce problème est composé de 800 triangles de diamètre

$$H = \frac{1}{20} = 10\varepsilon.$$

Chaque maille grossière contient 5 000 triangles de diamètre

$$h = \frac{1}{1000} = \frac{\varepsilon}{5}.$$

Pour appliquer notre méthode, il n'est pas nécessaire de construire complètement le maillage fin. Si nous l'avions fait, celui-ci aurait été composé de 4 000 000 de triangles.

Résultats obtenus

Nous avons donc appliqué notre méthode multi-échelle à la résolution du problème (1.2) avec les paramètres définis au paragraphe précédent. Pour vérifier la précision de la solution obtenue numériquement, nous la comparons avec la solution homogénéisée u définie par l'équation (1.4). Nous montrons également, la solution que l'on obtient en résolvant numériquement le problème (1.2) sur le maillage grossier avec une méthode numérique classique. Cette solution est appelée "solution grossière". La figure 1.4 permet d'observer ces trois solutions.

On remarque que la solution obtenue avec notre méthode multi-échelle est assez proche de la solution homogénéisée u . La solution obtenue avec une résolution grossière est, ici, très éloignée de cette solution homogénéisée : la solution homogénéisée diffuse davantage que la solution grossière. Ici, la matrice A^* définie par l'équation (1.5) est assez différente du coefficient de diffusion initial A . Ce phénomène, appelé *dispersion de Taylor*, est donc bien pris en compte avec notre méthode multi-échelle.

1.4.4 Implémentation de la méthode des éléments finis mixtes multi-échelles

Au cours de cette thèse, nous présentons également des résultats obtenus en implémentant d'autres méthodes multi-échelles. Ces méthodes issues de l'état de l'art présenté au paragraphe 1.3 permettent, pour un écoulement diphasique, de calculer la pression dans un réservoir ainsi que les flux de saturation sur les interfaces fines. En particulier, la méthode des éléments finis mixtes multi-échelles introduite par Z. Chen et Th.Y. Hou dans [CH02] est présentée au chapitre 5. Les résultats obtenus dans ce chapitre montrent que les flux calculés par cette méthode permettent d'approcher le champ de saturation obtenu avec un maillage fin.

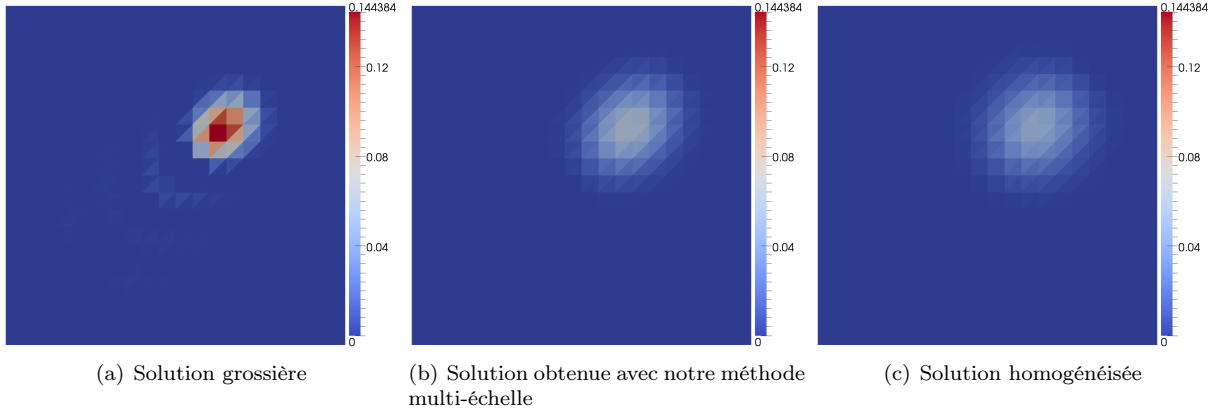


FIGURE 1.4 – Comparaison entre la solution grossière obtenue en effectuant directement le calcul sur le maillage grossier, celle utilisant la méthode multi-échelle et celle obtenue par homogénéisation périodique

Présentation du problème physique

Nous considérons ici un écoulement diphasique dans un milieu poreux. Il y a donc une phase aqueuse et une phase hydrocarbure. Les équations caractérisant l'écoulement diphasique sont les suivantes

$$\begin{cases} v + k\lambda_T(S) \nabla P & = 0 \\ \operatorname{div}(v) & = 0 \\ \phi \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(f_w(S) v) & = 0, \end{cases} \quad (1.15)$$

où

- P est la pression,
- v est la vitesse totale du fluide,
- S est la saturation en eau,
- λ_T est la mobilité totale du fluide,
- f_w est le flux fractionnaire en eau.

Les définitions de la mobilité totale et du flux fractionnaire en eau sont données en détail au chapitre 2.

Principe de la méthode

La méthode des éléments finis mixtes multi-échelles vise à résoudre le problème (1.15). Cette méthode permet d'obtenir des valeurs du champ de vitesse v sur le maillage fin. Ainsi sur chaque face Σ du maillage grossier \mathcal{K}_H , on résout un problème défini sur le domaine formé par la réunion des mailles associées à cette face. Comme pour la méthode présentée au paragraphe 1.4.2, ces problèmes de cellule sont résolus sur un maillage fin \mathcal{K}_h . Cette résolution permet d'obtenir une fonction de base ψ_{Σ} . On exprime alors les flux de la vitesse v_{σ} sur les faces fines σ , en fonction des flux V_{Σ} sur les faces grossières Σ :

$$v_{\sigma} = \sum_{\Sigma} V_{\Sigma} \psi_{\Sigma, \sigma}. \quad (1.16)$$

On considère des pressions constantes sur les mailles grossières. On utilise alors cette expression des flux fins et des pressions pour résoudre les deux premières équations du système (1.15) en utilisant uniquement des variables définies sur le maillage grossier \mathcal{K}_H .

Une fois cette résolution faite, la formule (1.16) permet d'obtenir les flux à l'échelle fine.

Ces flux fins sont alors utilisés pour résoudre la dernière équation du système (1.15) pour calculer le transport de la saturation. L'avantage de cette méthode est que les flux fins calculés par l'équation (1.16) gardent des propriétés indispensables pour que les saturations obtenues aient un sens physique : on ne pourra pas, par exemple, obtenir de saturation négative.

Nous allons maintenant observer la qualité de la solution obtenue avec cette méthode.

Précision de la méthode sur un cas de type réservoir

On va considérer ici un cas d'application à deux dimensions de la méthode des éléments finis mixtes multi-échelles. On dispose d'un réservoir composé de 60 mailles dans la direction x et de 220 mailles dans la direction y . La perméabilité de la roche dans chacune de ces mailles est donnée par la figure 1.5. Ce champ de perméabilité est en fait la couche 85 du cas présenté dans [CB01] pour évaluer différentes méthodes d'upscaling. Ce réservoir n'est, au départ, constitué que de la phase hydrocarbure. Nous étudions alors

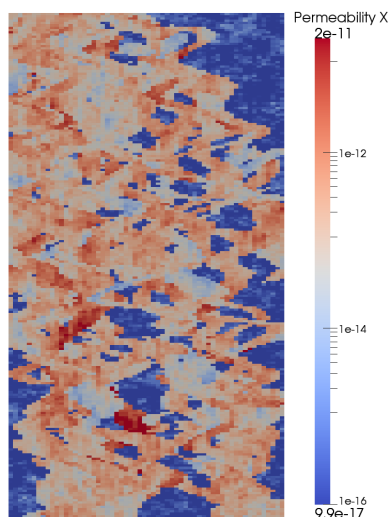


FIGURE 1.5 – Champ de perméabilité utilisé

l'évolution de ce milieu si on y injecte de l'eau sur le bord de droite. Nous décidons d'arrêter la simulation lorsque le volume poreux d'eau injecté est égale à 25% du volume poreux disponible. La figure 1.6 montre les

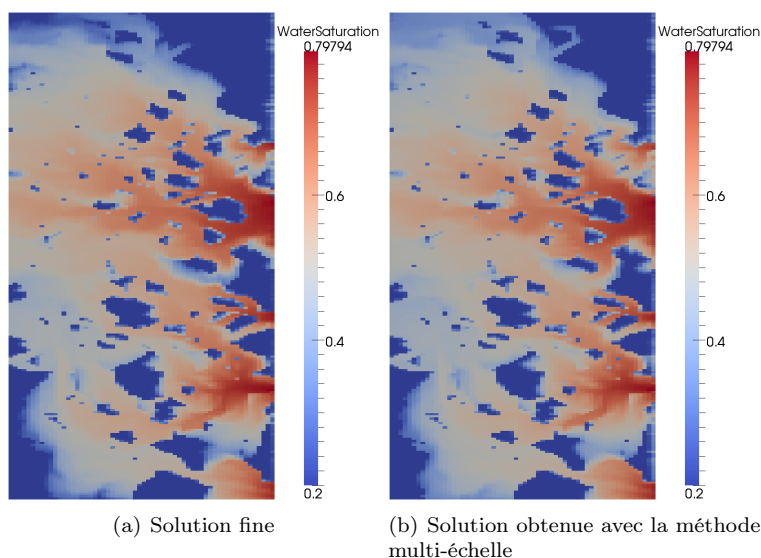


FIGURE 1.6 – Comparaison des saturations obtenues avec les solveurs fin et multi-échelle

résultats obtenus avec un solveur fin classique (à gauche) et avec la méthode des éléments finis mixtes multi-échelles en considérant un maillage grossier composé de 4 mailles dans chaque direction (à droite). Cette figure nous permet de vérifier que la méthode que nous avons implémentée donne une bonne approximation du champ de saturation obtenu avec une méthode classique.

D'un point de vue plus quantitatif, l'écart relatif entre la solution fine et la solution obtenue avec la méthode des éléments finis mixtes multi-échelles est de 6,21% (en norme L^2).

Nous allons maintenant voir que cette méthode permet également d'obtenir de réels gains en terme de performance.

Performance de la méthode des éléments finis mixtes multi-échelles

La méthode des éléments finis mixtes multi-échelles a été implémentée dans la plate-forme *Arcane* utilisée à IFPEN. Cette plate-forme a permis au prototype mis en place d'être adaptable sur des machines composées d'un très grand nombre de cœurs de calcul. En particulier, la méthode des éléments finis mixtes multi-échelles se basent sur des fonctions qui sont calculées localement et de manière indépendante. Ces calculs peuvent donc être effectués en *parallèle*. Le parallélisme utilisé dans notre prototype *Arcane* est précisé dans le chapitre 6. Nous précisons uniquement ici que l'implémentation faite dans ce prototype permet d'utiliser du parallélisme par *échange de message* (de type *MPI*) ainsi que des énumérations parallèles (basé sur du *multithreading* de type *TBB*).

Notre implémentation de la méthode des éléments finis mixtes multi-échelles a été testée sur deux supercalculateurs :

- Le supercalculateur ENER110 appartenant à IFPEN,
- Le supercalculateur CURIE appartenant au GENCI (Grand Équipement National de Calcul Intensif) et hébergé par le CEA.

Sur le supercalculateur ENER110, nous avons appliqué notre méthode multi-échelle à un cas à trois dimensions comprenant plus d'un million de mailles (60 dans la direction x , 220 dans la direction y et 85 dans la direction z). Ce cas est en fait celui présenté dans l'article [CB01]. Nous étudions alors l'évolution de ce milieu si on y injecte de l'eau sur le bord $y = 0$. Nous décidons d'arrêter la simulation lorsque le volume poreux d'eau injecté est égale à 1% du volume poreux disponible.

Les résultats de performance obtenus en comparant les différents solveurs en pression sont présentés dans le tableau 1.1.

Nb cœurs	Solveur fin	Solveur multi-échelle
1	2 939,69 s	105,00 s
2	1 571,63 s	54,65 s
4	817,27 s	33,24 s
8	454,81 s	22,26 s
16	293,56 s	17,36 s

TABLE 1.1 – Temps de calculs de la pression obtenus avec les solveurs en pression fin et multi-échelle en fonction du nombre de cœurs utilisés

On observe que la méthode multi-échelle nécessite beaucoup moins de temps que la résolution fine de la pression (entre 28 et 17 fois plus rapide). De plus, la précision reste intéressante comme le montre la figure 1.7. En fait, l'écart relatif entre le champ de saturation obtenu avec un solveur fin et celui obtenu en utilisant la méthode multi-échelle est de 4,84% (en norme L^2).

Sur le supercalculateur CURIE, nous avons considéré un cas construit à partir d'une réalisation géostatistique en faciès. Dans ce cas, le réservoir est un cube composé de 256 mailles dans chaque direction. Chaque maille est un cube de 5 mètres de côté. Deux faciès ou types de roche sont présents : un faciès réservoir avec une bonne perméabilité de $1D$ et un faciès beaucoup moins perméable de perméabilité égale à $10mD$. La figure 1.8 présente la distribution des perméabilités sur deux couches de ce réservoir. Dans ce cas, on injecte de l'eau sur le bord $x = 0$. Nous arrêtons la simulation lorsque le volume poreux d'eau injecté est égale à 1% du volume poreux disponible. Cette simulation a été faite uniquement sur 128 cœurs afin de vérifier que la méthode multi-échelle reste intéressante pour des cas nécessitant une grande puissance de calcul. Pour ce cas, le temps de résolution en pression avec un solveur fin est de 22 153,31 secondes alors que la résolution en pression avec le solveur multi-échelle nécessite 576,02 secondes. La méthode multi-échelle est donc plus de 38 fois plus rapide qu'un solveur fin classique dans ce cas.

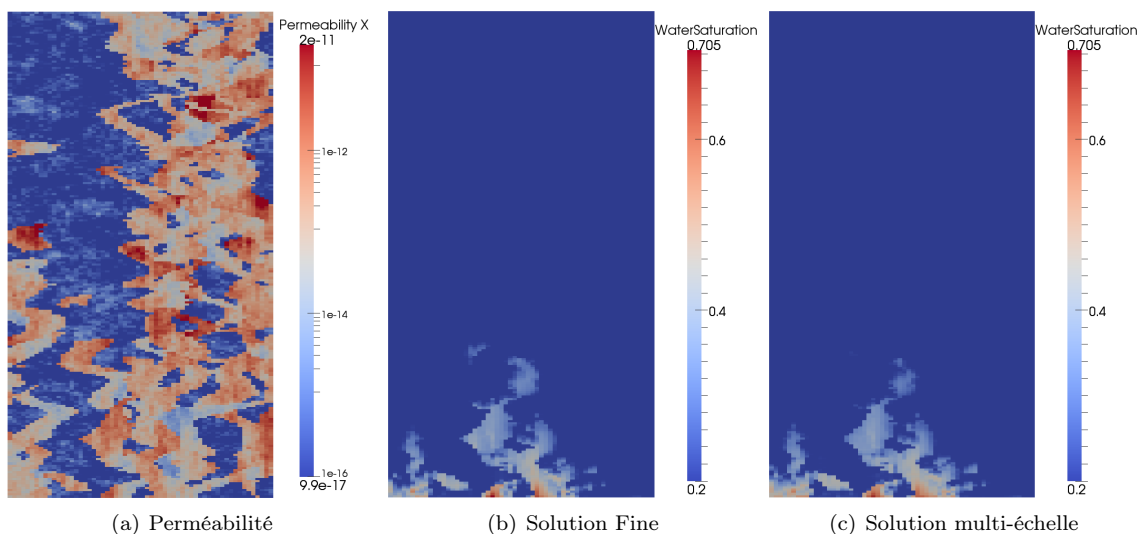


FIGURE 1.7 – Comparaison des saturations obtenues avec la méthode multi-échelle et l’approche classique sur la couche $z = 40$ du cas 3D issu de [CB01]

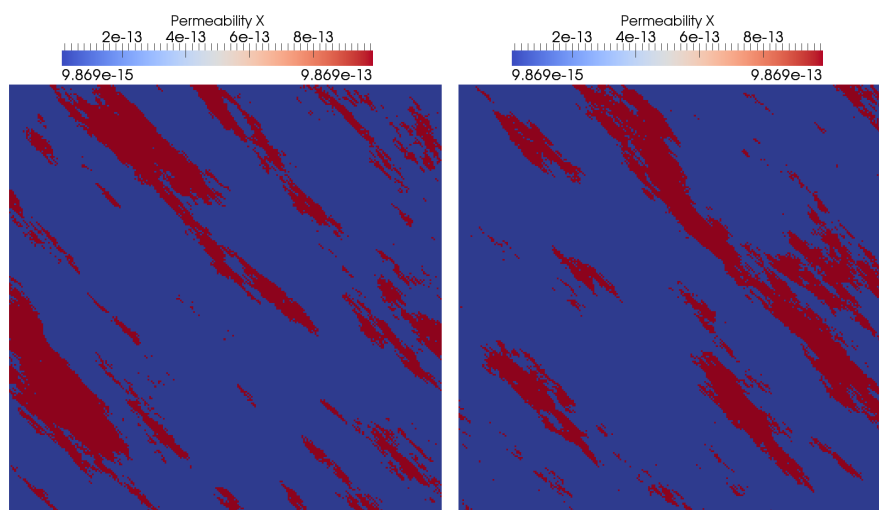


FIGURE 1.8 – Perméabilités du cube composé de 256 mailles dans chaque direction. À gauche pour $z = 200$ et à droite pour $z = 640$

1.5 Perspectives

Nous présentons ici les différentes suites qui pourraient être données aux travaux présentés dans ce mémoire. Certaines perspectives évoquées dans ce paragraphe seront étudiées au cours de la thèse d’A. Konate (en partenariat avec IFPEN et l’Université Paris VI) qui a débuté le 1^{er} octobre 2013.

1.5.1 Généralisation des résultats d’homogénéisation sur le transport

Les travaux effectués au cours de cette thèse ont permis de mettre au point une nouvelle méthode multi-échelle pour résoudre un problème de transport. Nous avons alors pu montrer rigoureusement que cette méthode permet d’approcher de manière assez précise la solution exacte. Cependant, il serait intéressant de

voir si cette méthode peut se généraliser à d'autres cas.

Application à des cas non linéaires

Le problème de transport que nous avons considéré est linéaire, que ce soit pour le terme de diffusion ou le terme de convection. Il serait très utile de savoir si cette méthode peut également s'appliquer à des cas non linéaires. Plusieurs travaux dont [Glo06] ont permis de généraliser certains résultats d'homogénéisation à des problèmes de diffusion présentant certains types de non linéarités. Pour ces cas, la forme des problèmes homogénéisés et de cellule doit être modifiée.

Intégration de la gravité

Le problème de transport que nous avons traité ici ne prend pas en compte le terme de gravité. En fait, on pourrait montrer que l'introduction d'un terme de gravité dans notre équation ne modifierait que légèrement les résultats d'homogénéisation. En fait, il suffirait de résoudre un problème de cellule supplémentaire et d'intégrer la solution obtenue dans la définition du terme d'ordre 1 u_1 .

Cependant, l'ajout de ce terme rend caduque l'approximation (1.9) qui est le point de départ de notre méthode multi-échelle. Il faudrait donc étudier plus précisément ce problème pour, éventuellement, construire une méthode multi-échelle plus adaptée.

1.5.2 Amélioration du module implémenté dans *Arcane* pour calculer la pression

Nous avons implémenté, sur la plate-forme *Arcane*, la méthode des éléments mixtes multi-échelles introduite dans [CH02]. Pour les exemples utilisés dans ce manuscrit, le modèle physique est assez simple (de type *Dead-Oil*) et tous les maillages sont cartésiens.

Application à des problèmes physiques plus complexes

Nous pourrions d'abord appliquer cette méthode à un modèle de type *Black-Oil* [CTP95]. Ce modèle est un modèle compositionnel relativement simple à trois constituants : l'eau, un composant hydrocarbure lourd et un composant hydrocarbure léger. La phase aqueuse ne contient que l'eau, la phase huile peut contenir les deux composants hydrocarbures et la phase gaz n'est composée que du composant léger. L'application de la méthode des éléments finis mixtes multi-échelles au modèle *Black-Oil* a déjà été réalisée dans [KLN⁺09].

Nous rappelons que les conditions aux bords considérées dans ce manuscrit sont uniquement des conditions de type Dirichlet ou Neumann homogène. Ces conditions sont rarement appliquées en simulation de réservoir. En effet, la plupart du temps, les conditions aux bords sont définies grâce à des termes sources liés à la présence de puits. Pour prendre en compte ce type de conditions aux limites, il est nécessaire de modifier la définition des fonctions de base au voisinage des puits [KLN⁺09].

Il serait également intéressant de tenir compte des termes supplémentaires associés à la gravité. Cet ajout a déjà été évoqué au paragraphe 1.5.1.

Application à des maillages non structurés

Les exemples présentés dans ce mémoire utilisent uniquement des maillages cartésiens que ce soit au niveau fin ou au niveau grossier. Durant les 4 derniers mois de la thèse, un stage de Master 2 a été réalisé par M. Shakoor à IFPEN pour étudier les méthodes de *différences finies mimétiques* (MFD) [KLS04] permettant de simuler des écoulements dans des réservoirs discrétisés au moyen de grilles à géométrie Corner Point (CPG). Durant ce stage, cette méthode a également été utilisée sur ce type de maillage pour la résolution des problèmes de cellule intervenant dans la méthode des éléments finis mixtes multi-échelles. Cette approche avait déjà été testée dans [AKL08]. Un exemple de maillage CPG est donné sur la figure 1.9. Comme dans le cas cartésien, le maillage initial est aggloméré de manière régulière dans chaque direction. La figure 1.10 montre le maillage grossier obtenu par ce procédé. Sur cette figure, le maillage de départ ondule comme sur la figure 1.9 mais la visualisation en deux dimensions ne permet pas de le voir facilement. Les résultats obtenus par M. Shakoor, pendant son stage, sont représentés sur la figure 1.11. Sur cette

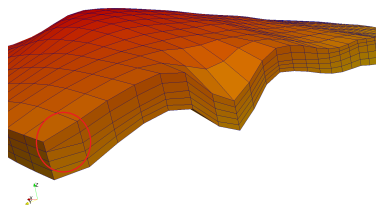


FIGURE 1.9 – Exemple de maillage CPG

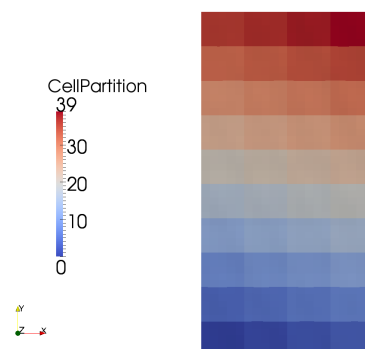


FIGURE 1.10 – Agglomération du maillage CPG (vue de dessus)

figure, on peut observer les fronts de saturation obtenus avec des flux calculés à l’aide de la méthode MFD directement sur la grille fine et des flux calculés par la méthode MFD et l’approche multi-échelle. Une suite à ce travail consistera à mesurer, là aussi, les performances de cette utilisation jointe de la méthode MFD et de la méthode multi-échelle lors de simulations parallèles.

1.5.3 Amélioration du module implémenté dans *Arcane* pour simuler l’évolution d’un traceur

Nous avons également implémenté dans *Arcane* un module permettant de calculer, avec une méthode multi-échelle, l’évolution de la concentration d’un traceur à l’intérieur d’un fluide monophasique se déplaçant dans un milieu poreux.

Ajout d’autres méthodes numériques

Pour l’instant cette méthode multi-échelle se base uniquement sur des éléments finis de type Lagrange d’ordre 1. Comme expliqué dans le chapitre 9, cette limitation est pour l’instant nécessaire car la plate-forme *Arcane* ne définit pas la notion de degré de liberté. Ainsi, une variable doit nécessairement être liée à une entité géométrique. Cependant, cette notion devrait être ajoutée dans une future version d’*Arcane*. Il serait alors intéressant de créer un code générique qui pourrait appliquer cette méthode pour des ordres supérieurs.

Nous avons également vu, au chapitre 9, comment le problème était discrétisé en espace : on applique une méthode des caractéristiques qui est une méthode explicite. Nous pourrions tester cette méthode dans le cas où l’on utilise un schéma de type Euler implicite pour la discrétisation en temps.

Application à d’autres problèmes physiques

Dans les cas considérés dans cette thèse, la vitesse et le tenseur de diffusion sont des données périodiques. Nous pourrions, tout d’abord, envisager d’appliquer cette méthode dans le cas où le champ de vitesse est calculé en résolvant un problème d’écoulement monophasique.

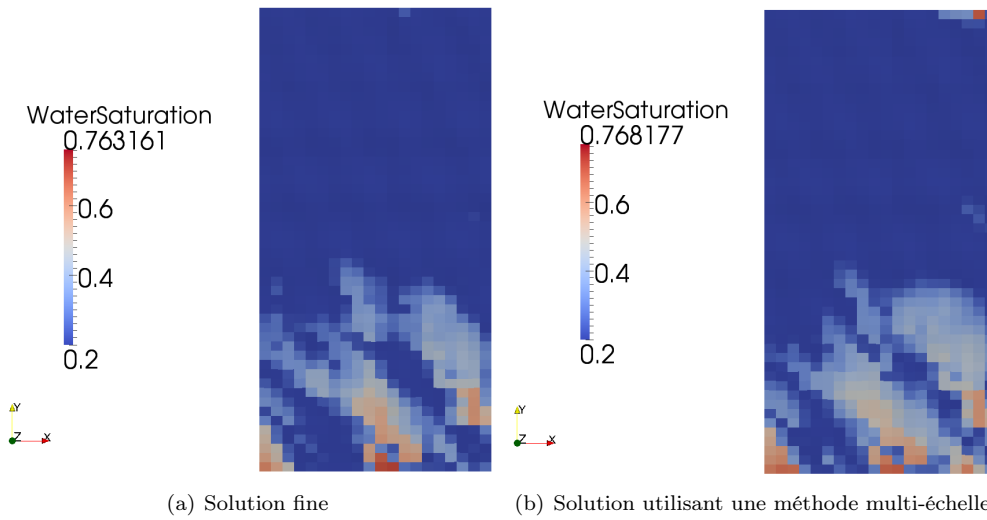


FIGURE 1.11 – À gauche, le front de saturation obtenu en utilisant la méthode MFD sur le maillage fin. À droite, le front de saturation obtenu en utilisant la méthode MFD et la méthode multi-échelle

On pourrait également considérer des cas plus généraux d'application de la méthode multi-échelle. En effet, certains modèles considèrent que le composé dissous modifie les propriétés physiques de la phase [SW05]. La prise en compte de cette modification crée une non linéarité dans l'équation régissant le déplacement de ce constituant. La résolution de ce type de problème avec une méthode multi-échelle semble assez difficile et constitue une bonne perspective pour cette méthode.

Liste des publications et communications

- [1] F. Ouaki, G. Allaire, G. Enchéry and S. Desroziers. A Multiscale Finite Element Method for Transport Modelling. In *Journées scientifiques du GNR MoMaS*, 2011. (Poster)
- [2] F. Ouaki, G. Allaire, G. Enchéry and S. Desroziers. A Multiscale Finite Element Method for Transport Modelling. In *International Conference on Flows and Mechanics in Natural Porous Media from Pore to Field Scale-Pore2Field*, 2011. (Poster)
- [3] G. Allaire, G. Enchéry, S. Desroziers and F. Ouaki. A Multiscale Finite Element Method for Transport Modeling. In *ECCOMAS*, 2012. ISBN : 978-3-9502481-9-7. (Présentation orale, publication dans les actes de congrès)
- [4] F. Ouaki, G. Allaire, S. Desroziers and G. Enchéry. A Multi-Scale Finite Element Method for Transport Modeling. In *SIAM Geosciences*, 2013. (Présentation orale)

Table des figures

1.1	Un réservoir d'hydrocarbures simplifié en exploitation	13
1.2	Roche poreuse observée au microscope	14
1.3	Condition initiale et champ de vitesse dans la direction x	20
1.4	Solutions grossière, multi-échelle et homogénéisée	21
1.5	Champ de perméabilité utilisé	22
1.6	Comparaison des saturations obtenues avec les solveurs fin et multi-échelle	22
1.7	Comparaison des saturations obtenues avec la méthode multi-échelle et l'approche classique sur la couche $z = 40$ du cas 3D issu de [CB01]	24
1.8	Perméabilités du cube composé de 256 mailles dans chaque direction. À gauche pour $z = 200$ et à droite pour $z = 640$	24
1.9	Exemple de maillage CPG	26
1.10	Agglomération du maillage CPG (vue de dessus)	26
1.11	À gauche, le front de saturation obtenu en utilisant la méthode MFD sur le maillage fin. À droite, le front de saturation obtenu en utilisant la méthode MFD et la méthode multi-échelle	27
2.1	Perméabilités de la couche 85 du cas SPE 10	38
2.2	Perméabilités dans les directions x et y pour le cas fracturé	38
2.3	Porosités du cas fracturé	39
2.4	Résultats obtenus avec le solveur fin pour la couche 85 du cas SPE 10	40
2.5	Résultats obtenus avec le solveur fin pour le cas fracturé	40
4.1	Les deux maillages (fin et grossier)	52
4.2	Schéma présentant la discrétisation effectuée pour la Méthode Multi-échelle Hétérogène	54
4.3	En trait plein le maillage \mathcal{K}_H , en tirets le maillage dual $\tilde{\mathcal{K}}_H$	56
4.4	Comparaison des champs de pression obtenus avec la méthode Allaire-Brizzi pour différents maillages grossiers.	71
5.1	Principe de l'agglomération	74
5.2	Discrétisation locale pour une face interne Σ	76
5.3	Discrétisation locale pour une face de bord Σ	76
5.4	Comparaison des pressions obtenues avec les solveurs fin et multi-échelle en utilisant un maillage grossier 12×44	81
5.5	Comparaison des saturations obtenues avec les solveurs fin et multi-échelle <i>Global70</i> pour plusieurs maillages grossiers	82
5.6	Comparaison des saturations obtenues avec les différents solveurs multi-échelles pour un maillage grossier 4×4	82
5.7	Comparaison des saturations obtenues les différents solveurs multi-échelles pour un maillage grossier 10×10	84
6.1	Architecture distribuée	88
6.2	Déroulement d'une application en mode distribué	89
6.3	Architecture partagée	89

6.4	Déroulement d'une application en mode partagé	89
6.5	Architecture traditionnelle d'un supercalculateur	90
6.6	Déroulement d'une application en mode hybride	90
6.7	Organisation d'un programme sous Arcane	92
6.8	Maillage multi-échelle	93
6.9	Diagramme UML représentant le module Multiscale	93
6.10	Diagramme UML représentant les services définissant les modèles de perméabilité	94
6.11	Diagramme UML représentant les services implémentant les différentes méthodes de résolution du système en saturation	94
6.12	Diagramme UML représentant les services représentant les différents solveurs en pression	95
6.13	Diagramme UML représentant les services définissant les différentes méthodes pour calculer les fonctions de base multi-échelles	95
6.14	Comparaison des saturations obtenues avec la méthode multi-échelle et l'approche classique sur la couche $z = 40$ du cas SPE 10 3D	97
6.15	Graphique présentant l'efficacité des différents solveurs	98
6.16	Perméabilités du cube composé de 256 mailles dans chaque direction. À gauche pour $z = 200$ et à droite pour $z = 640$	99
9.1	Solution du problème de cellule obtenue sur FreeFem++ avec des éléments finis \mathbb{P}_1 Lagrange	152
9.2	Solution du problème de cellule obtenue avec notre méthode itérative	153
9.3	Condition initiale et champ de vitesse dans la direction x	155
9.4	Fonction de base sur le maillage grossier fonction de base multi-échelle associée	157
9.5	Solutions grossière, multi-échelle et homogénéisée	157
9.6	Solutions raffinées avec les méthodes multi-échelle et d'homogénéisation	158
9.7	Condition initiale du cas testé sur le prototype <i>Arcane</i>	159
9.8	Solutions grossière, multi-échelle et fine dans Arcane	159