



Détermination d'un terme de dissipation à partir des résultats de sous structuration

————— oOo —————

Le chapitre à venir a pour objet une étude de faisabilité concernant la détermination d'un terme de dissipation sur les zones les plus sollicitées du Bras Elastomérique.

La démarche peut se résumer en deux étapes :

1. On détermine, dans un premier temps, la zone la plus sollicitée en terme de contraintes et de déformations via un calcul de sous structuration (comportement élastique),
2. puis, en considérant les solutions élastiques en contraintes et déformations ($\bar{\sigma}_0, \bar{\epsilon}_0$) comme les amplitudes des solutions que l'on obtiendrait, sous sollicitations harmoniques, à partir du modèle rhéologique de POYNTING-THOMSON, un terme de dissipation est déterminé. Cette grandeur résulte de l'établissement de relations entre les coefficients du modèle en grandes déformations (supposés identifiés via l'algorithme du paragraphe § II.2.3) et leurs homologues définissant le modèle en petites perturbations.

————— oOo —————

PLAN DU CHAPITRE V

V.1	Introduction et motivations de l'étude	165
V.2	Choix du modèle	165
V.2.1	Cas d'une sollicitation monodimensionnelle	165
V.2.2	Identification des caractéristiques du modèle de POYNTING-THOMSON en petites perturbations en fonctions d'un jeu de paramètres identifiés en grandes déformations	167
V.2.2.a	Démarche	167
V.2.2.b	linéarisation du modèle	167
V.2.2.c	identification des paramètres	168
V.3	Cas d'un chargement de traction harmonique	171
V.4	Conclusion	173

V.1 Introduction et motivations de l'étude

L'hétérogénéité et la complexité de structures telles que le Bras Elastomérique (cf. chapitre IV), nous a contraint, malgré la mise en place de techniques de sous structuration simplifiant grandement le problème numérique, à adopter des comportements simples pour les différents constituants (élasticité linéaire). Ce cadre présente deux inconvénients majeurs dans le cadre de sollicitations harmoniques :

- d'une part, il ne rend pas compte du caractère amortissant des élastomères
- et d'autre part il ne tient pas compte de l'échauffement lié aux propriétés visqueuses de ces matériaux.

Le premier point est en partie résolu par une méthode énergétique et moyennant quelques hypothèses (cf. § IV.4.4.d). Le second fait l'objet de l'étude présentée dans ce chapitre, à savoir la détermination, sous un jeu minimum d'hypothèses, de la dissipation au coeur de l'élastomère. Ce résultat est à prendre comme une première indication quant aux lieux privilégiés d'augmentation de température et donc d'un éventuel endommagement dû aux effets thermiques.

V.2 Choix du modèle

Le modèle de KELVIN-VOIGT a été présenté au paragraphe § IV.4.4.d dans le cadre de la détermination de l'amortissement global du Bras Elastomérique. La dissipation intrinsèque est une grandeur locale qui réclame a priori plus de précision que d'éventuelles grandeurs globales. C'est pour cette raison que l'on choisit d'utiliser le modèle de POYNTING-THOMSON. On rappelle que ce modèle est mis en oeuvre dans les chapitres II et III.

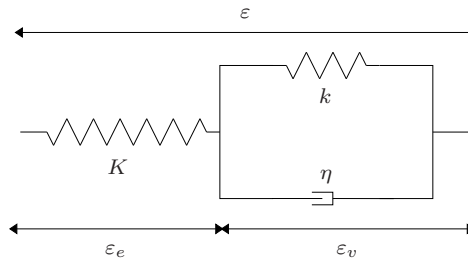


FIGURE V.1 – *Modèle de POYNTING-THOMSON en petite déformation.*

V.2.1 Cas d'une sollicitation monodimensionnelle

Sous l'hypothèse des petites perturbations, le modèle est gouverné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v \\ \sigma = K(\varepsilon - \varepsilon_v) = k\varepsilon_v + \eta\dot{\varepsilon}_v \end{cases} \quad (\text{V.1})$$

Dans le cas d'une sollicitation en déformation monodimensionnelle, d'amplitude ε_0 , de pulsation ω et de déphasage nul, on a en notation complexe :

$$\varepsilon^* = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \text{ avec } \varepsilon_0 \in \mathcal{R}^+, \quad (\text{V.2})$$

$$\sigma^* = \frac{K(k + i\omega\eta)}{k + K + i\omega\eta} \varepsilon_0 e^{i\omega t}, \quad (\text{V.3})$$

$$\varepsilon_v^* = \frac{K}{k + K + i\omega\eta} \varepsilon_0 e^{i\omega t}. \quad (\text{V.4})$$

Le retour aux notations réelles donne alors une contrainte de la forme :

$$\sigma = \sigma_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{V.5})$$

avec

$$\begin{cases} \sigma_0 = \frac{K\varepsilon_0}{(k + K)^2 + \omega^2\eta^2} [(k(K + k) + \omega^2\eta^2)^2 + K^2\omega^2\eta^2]^{1/2} \\ \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{K\omega\eta}{k(K + k) + \omega^2\eta^2} \right) \end{cases}, \quad (\text{V.6})$$

et une déformation visqueuse donnée par :

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{v0} \cos(\omega t + \beta) \quad (\text{V.7})$$

où

$$\begin{cases} \varepsilon_{v0} = \frac{K\varepsilon_0}{[(k + K)^2 + \omega^2\eta^2]^{1/2}} \\ \beta = \tan^{-1} \left(\frac{\omega\eta}{k + K} \right) \end{cases}. \quad (\text{V.8})$$

La dissipation intrinsèque instantanée peut alors se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \phi^{int} &= \eta \dot{\varepsilon}_v^2 \\ &= \eta \frac{K^2 \varepsilon_0^2 \omega^2}{(k + K)^2 + \omega^2 \eta^2} \sin^2(\omega t + \beta). \end{aligned} \quad (\text{V.9})$$

L'énergie dissipée sur un cycle se met alors sous la forme :

$$\begin{aligned} W^{int} &= \int_0^{2\pi/\omega} \phi^{int}(t) dt \\ &= \eta \frac{K^2 \varepsilon_0^2 \omega \pi}{(k + K)^2 + \omega^2 \eta^2}. \end{aligned} \quad (\text{V.10})$$

V.2.2 Identification des caractéristiques du modèle de POYNTING-THOMSON en petites perturbations en fonctions d'un jeu de paramètres identifiés en grandes déformations

V.2.2.a Démarche

On se propose, dans ce paragraphe, de déterminer les coefficients du modèle de POYNTING-THOMSON, dans le cadre des petites perturbations à partir des coefficients identifiés en grandes déformations de ce même modèle.

La démarche est la suivante : on linéarise les équations du modèle obtenues au chapitre II en grandes déformations, puis on détermine les caractéristiques de traction et de cisaillement du modèle en petites déformations.

V.2.2.b linéarisation du modèle

On rappelle les équations du modèle de POYNTING-THOMSON en grandes transformations :

$$\begin{cases} \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{S}} = \bar{\bar{\pi}} = 2\rho_0 \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \left(\left(\frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \right) \bar{\bar{1}} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \right) + p \bar{\bar{F}}^{-T} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\bar{\bar{C}}}_v} - \rho_0 \bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \left(\left(\frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \right) \bar{\bar{1}} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \right) \\ \quad + \left(\frac{\partial \psi_v}{\partial I_1^v} + \frac{\partial \psi_v}{\partial I_2^v} I_1^v \right) \bar{\bar{1}} - \frac{\partial \psi_v}{\partial I_2^v} \bar{\bar{C}}_v + q \bar{\bar{C}}_v^{-1} = 0 \end{cases} \quad (\text{V.11})$$

avec, pour les potentiels énergie libre et le pseudo-potentiel de dissipation, les formes suivantes :

$$\begin{cases} \psi_e(\bar{\bar{C}}_e) = c_1 (I_1^e - 3) + c_2 \ln \left(\frac{I_2^e}{3} \right) \\ \psi_v(\bar{\bar{C}}_v) = a_1 (I_1^v - 3) \\ \varphi(\dot{\bar{\bar{C}}}_v) = \frac{\nu}{2} \dot{\bar{\bar{C}}}_v : \dot{\bar{\bar{C}}}_v \end{cases} \quad (\text{V.12})$$

Sous l'hypothèse des petites perturbations, on rappelle que :

$$\begin{cases} \bar{\bar{C}} = 1 + 2\bar{\bar{\varepsilon}} \\ \bar{\bar{C}}_v = 1 + 2\bar{\bar{\varepsilon}}_v \end{cases} \quad (\text{V.13})$$

et que

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\pi}} = \bar{\bar{S}}. \quad (\text{V.14})$$

Les conditions d'incompressibilité se traduisent par :

$$\text{tr} \bar{\bar{\varepsilon}} = \text{tr} \bar{\bar{\varepsilon}}_v = \text{tr} \bar{\bar{\varepsilon}}_e = 0. \quad (\text{V.15})$$

On pose, de plus :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1^e = \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} = c_1 + c_2 + \frac{2c_2}{3} \underbrace{\text{tr} \bar{\bar{\varepsilon}}_e}_{=0} + \mathcal{O}(\bar{\bar{\varepsilon}}_e^2) \\ w_2^e = \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} = \frac{c_2}{3} - \frac{4c_2}{9} \underbrace{\text{tr} \bar{\bar{\varepsilon}}_e}_{=0} + \mathcal{O}(\bar{\bar{\varepsilon}}_e^2) \\ w_v = \frac{\partial \psi_v}{\partial I_1^v} = a_1 \\ \frac{\partial \psi_v}{\partial I_2^v} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{V.16})$$

si bien que l'on a pour (V.11a), aux termes d'ordre 2 près :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{S}} &= 2w_1^e(\bar{\bar{1}} - 2\bar{\bar{\varepsilon}}_v) - 2w_2^e(\bar{\bar{1}} - 4\bar{\bar{\varepsilon}}_v + 2\bar{\bar{\varepsilon}}) + p(\bar{\bar{1}} - 2\bar{\bar{\varepsilon}}) \\ &= \underbrace{(2w_1^e - 2w_2^e + p)}_{p'} \bar{\bar{1}} - 4w_2^e \bar{\bar{\varepsilon}} - 4(w_1^e - 2w_2^e) \bar{\bar{\varepsilon}}_v - 2p \bar{\bar{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (\text{V.17})$$

et donc

$$\boxed{\bar{\bar{\sigma}} = p' \bar{\bar{1}} + 4 \left(c_1 + \frac{c_2}{3} \right) (\bar{\bar{\varepsilon}} - \bar{\bar{\varepsilon}}_v)} \quad (\text{V.18})$$

Il en va de même pour (V.11b) :

$$\begin{aligned} \nu \dot{\bar{\bar{C}}}_v - \bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \left(w_1^e \bar{\bar{1}} - w_2^e \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \right) + w_v \bar{\bar{1}} + q \bar{\bar{C}}_v^{-1} &= 0 \\ 2\nu \dot{\bar{\bar{\varepsilon}}}_v - w_1^e(\bar{\bar{1}} - 4\bar{\bar{\varepsilon}}_v + 2\bar{\bar{\varepsilon}}) + w_2^e(\bar{\bar{1}} - 6\bar{\bar{\varepsilon}}_v + 4\bar{\bar{\varepsilon}}) + w_v \bar{\bar{1}} + q \bar{\bar{C}}_v^{-1} &= 0 \\ 2\nu \dot{\bar{\bar{\varepsilon}}}_v + \underbrace{(w_2^e - w_1^e + w_v + q)}_{q'} \bar{\bar{1}} + (4w_2^e - 2w_1^e)(\bar{\bar{\varepsilon}} - \bar{\bar{\varepsilon}}_v) + 2w^v \bar{\bar{\varepsilon}}_v &= 0 \end{aligned}$$

On adopte la forme suivante :

$$\boxed{2 \left(c_1 + \frac{c_2}{3} \right) (\bar{\bar{\varepsilon}} - \bar{\bar{\varepsilon}}_v) = 2\nu \dot{\bar{\bar{\varepsilon}}}_v + 2a_1 \bar{\bar{\varepsilon}}_v + q' \bar{\bar{1}}} \quad (\text{V.19})$$

V.2.2.c identification des paramètres

Les équations (V.18) et (V.19) permettent alors l'identification des paramètres du modèle de POYNTING-THOMSON sous l'hypothèse des petites perturbations et ce, en considérant les cas de chargement de cisaillement et de traction.

Chargement de cisaillement

On pose dans ce cas :

$$[\sigma] \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\varepsilon_v] = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{xy}^v & 0 \\ \varepsilon_{xy}^v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V.20})$$

Les équations (V.18), (V.19) donnent alors :

$$\begin{cases} \sigma_{xy} = 4 \left(c_1 + \frac{c_2}{3} \right) (\varepsilon_{xy} - \varepsilon_{xy}^v) \\ 2 \left(c_1 + \frac{c_2}{3} \right) (\varepsilon_{xy} - \varepsilon_{xy}^v) = 2\nu \dot{\varepsilon}_{xy} + 2a_1 \varepsilon_{xy}^v \end{cases} \quad (\text{V.21})$$

Les caractéristiques de cisaillement du modèle en petites déformations sont alors données par :

$$\begin{cases} K_c = 2 \left(c_1 + \frac{c_2}{3} \right) \\ k_c = 2a_1 \\ \eta_c = 2\nu \end{cases} \quad (\text{V.22})$$

Chargement de traction

Ce cas de chargement implique les formes suivantes des différentes grandeurs cinématiques et sthéniques :

$$[\sigma] \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_y \end{bmatrix}, \quad [\varepsilon_v] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^v & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y^v & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_y^v \end{bmatrix}, \quad (\text{V.23})$$

si bien que (V.18) donne :

$$\begin{cases} \sigma_x = p' + 4 \left(c_1 + \frac{c_2}{3} \right) (\varepsilon_x - \varepsilon_x^v) \\ 0 = p' + 4 \left(c_1 + \frac{c_2}{3} \right) (\varepsilon_y - \varepsilon_y^v) \end{cases} \quad (\text{V.24})$$

Une combinaison de ces deux équations permet l'élimination du terme de pression. Puis la condition d'incompressibilité globale (resp. visqueuse) permet d'exprimer ε_y (resp. ε_y^v) en fonction ε_x (resp. ε_x^v) :

$$\boxed{\sigma_x = 6 \left(c_1 + \frac{c_2}{3} \right) (\varepsilon_x - \varepsilon_x^v)}. \quad (\text{V.25})$$

Par une démarche analogue sur l'équation (V.19), on a :

$$\begin{cases} \sigma_x = 4\nu \dot{\varepsilon}_x^v + 4a_1 \varepsilon_x^v + (2q' + p') \\ 0 = 4\nu \dot{\varepsilon}_y^v + 4a_1 \varepsilon_y^v + (2q' + p') \end{cases} \quad (\text{V.26})$$

et donc

$$\boxed{\sigma_x = 6\nu \dot{\varepsilon}_x^v + 6a_1 \varepsilon_x^v}. \quad (\text{V.27})$$

V.25 et V.27 permettent alors de déduire les caractéristiques de traction du modèle comme étant :

$$\begin{cases} K_t = 6 \left(c_1 + \frac{c_2}{3} \right) \\ k_t = 6a_1 \\ \eta_t = 6\nu \end{cases} \quad (\text{V.28})$$

V.3 Cas d'un chargement de traction harmonique

On se propose, à titre d'illustration, d'observer l'évolution du terme de dissipation le long de la zone intermédiaire (cf. FIG. IV.8) dans le cas d'un chargement de traction harmonique de fréquence $6Hz$. Les résultats présentés FIG. V.2 sont normalisés dans un souci de confidentialité.

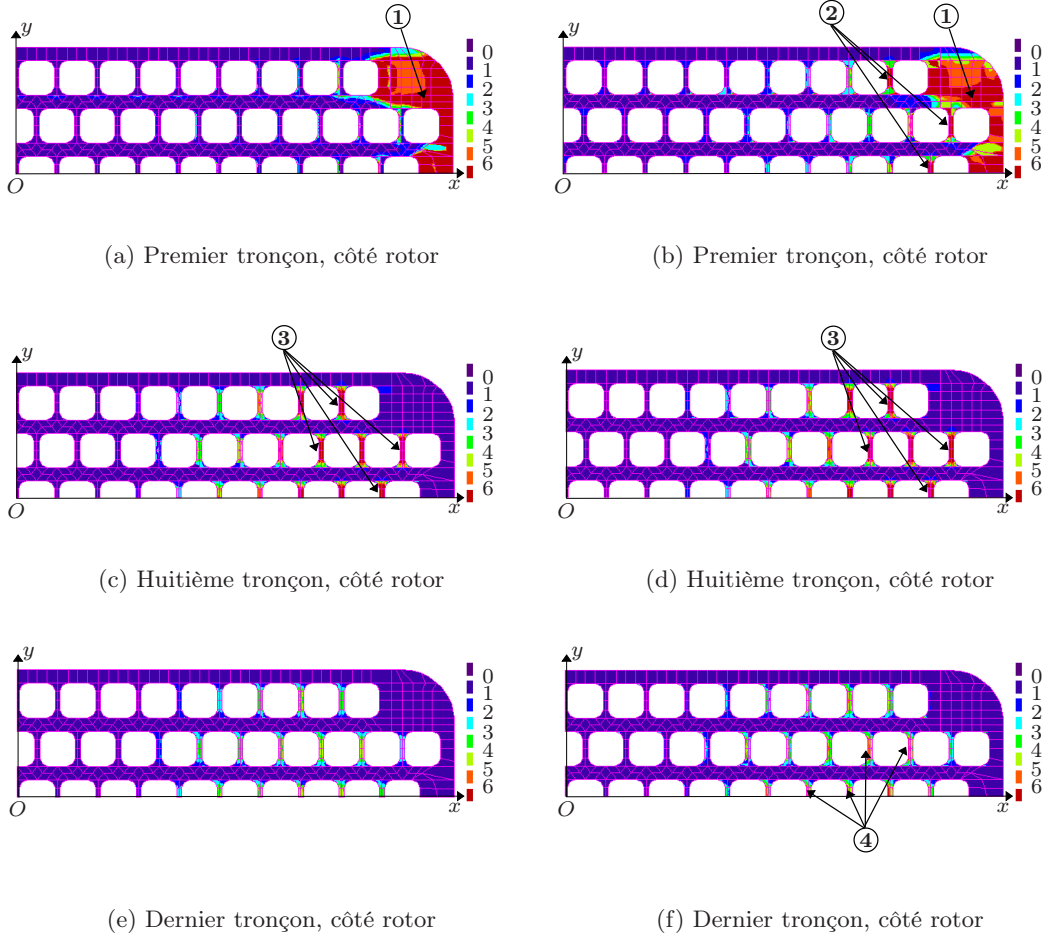


FIGURE V.2 – *Evolution normalisée du terme de dissipation le long de la zone intermédiaire.*

Cette étude met en évidence, sur le premier tronçon, un terme de dissipation important sur l'extérieur de la pièce (①, FIG. V.2(a) et FIG. V.2(b)). Une concentration fait sont apparition entre les baguettes de verre sur la section de droite de ce même tronçon (②, FIG. V.2(b)). Puis, ce phénomène semble se généraliser à toutes les zones d'élastomère situées entre les baguettes de verre pour atteindre un maximum sur le huitième tronçon (③, FIG. V.2(c) et FIG. V.2(d)). Le terme source s'amenuise par la suite pour finalement réaugmenter – sans pour autant atteindre les niveaux précédents – à la frontière zone intermédiaire / partie courante. Ceci semble, une fois de plus, mettre en avant le rôle prépondérant joué par les baguettes de verres qui, par une déformation en tonneau importante, influent fortement sur les zones d'élastomère les séparant.

V.4 Conclusion

L'objet de ce chapitre n'est pas de produire une étude complète sur l'ensemble des charge-ments présentés au chapitre IV, mais de proposer une méthode permettant une première approche d'un terme de dissipation mécanique et ce, à partir d'un unique calcul élastique.

La démarche est basée sur, d'une part, une linéarisation au premier ordre des équations gouvernant le modèle de POYNTING-THOMSON dans le cadre défini dans le chapitre II et, d'autre part, par la prise en compte des solutions en contraintes et déformations $(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon})$ d'un problème élastique comme les amplitudes des solutions d'un problème équivalent mais faisant intervenir un comportement viscoélastique (modèle de POYNTING-THOMSON) et sous une sollicitation harmonique.

Il est certain que les résultats présentés, à titre d'exemple et d'illustration, au paragraphe § V.3 sont à considérer avec prudence de par les hypothèses formulées pour arriver à ces résultats. Cependant, on constate que au moins d'un point de vue qualitatif, les résultats obtenus présentent une assez bonne cohérence et peuvent donner une bonne idée du comportement dissipatif local de pièces complexes telles que le Bras Elastomérique.

Par ailleurs, il ne semble pas exclu, après une vérification plus quantitative des niveaux de dissipation, de prendre en compte ce terme mécanique comme un terme source d'un calcul thermique qui pourra à son tour donner une bonne indication sur les niveaux de température atteint dans la pièce, sa répartition, son évolution et sur une éventuelle fatigue thermique.

Conclusion

Ce manuscrit aborde deux types de difficulté classiquement rencontrées dans la résolution numérique de problèmes (thermo-)mécaniques :

- D’une part, une difficulté d’ordre comportementale (*i.e.* on ne s’intéresse qu’au matériau), avec la proposition d’un algorithme de couplage thermo-mécanique en vue de caractériser le comportement d’un élastomère.
- D’autre part, une difficulté que l’on peut qualifier de numérique, dans le sens où elle réside davantage dans l’organisation des calculs que dans le comportement des matériaux.
- Finalement, une ébauche de réponse est donnée dans le cas d’un problème présentant simultanément ces deux difficultés.

De manière plus détaillée, concernant la caractérisation d’un élastomère, on part d’une formulation thermodynamique en grandes déformations ramenée au cadre des descriptions à configurations intermédiaires. Ceci permet, après la prise en compte de l’incompressibilité, de pleinement établir, à la fois les lois de comportement et les lois d’évolution des différentes variables internes introduites. Un résultat intermédiaire sur la décomposition du potentiel énergie libre permet de ramener cette description à une généralisation aux grandes transformations de modèles rhéologiques.

Partant de ces résultats, on s’attache à identifier le comportement d’un élastomère. Pour ce faire, on considère une description à un seul état intermédiaire visqueux définissant ainsi les trois modèles rhéologiques de MAXWELL, ZENER et POYNTING-THOMSON. Le choix d’un unique état intermédiaire visqueux se justifie par des constatations expérimentales qui semblent mettre en évidence le caractère dominant mais non exclusif de la viscosité. Une formulation monodimensionnelle, des trois assemblages rhéologiques précités permet la mise en place d’un algorithme d’identification [BOUKAMEL et MÉO, 2000] ainsi que la détermination du modèle et de ses composantes représentant au mieux le matériau, c’est-à-dire le modèle de POYNTING-THOMSON auquel sont associés les potentiels hyperélastiques de GENT-THOMAS et de NÉOHOOKE et un potentiel de dissipation dépendant quadratiquement de la dérivée temporelle de la variable interne.

Enfin, la formulation éléments finis de ce modèle fait l’objet d’une attention particulière quant au choix des éléments mixtes et leur organisation spatiale. Ceci permet de privilégier les éléments

à déplacement quadratique et à pression constante.

Les élastomères présentant une forte sensibilité aux conditions de température extérieure et une production de chaleur interne non négligeable, une généralisation de l'algorithme de couplage thermo-mécanique proposé par BÉRARDI [1995] est proposée. L'adaptation (et la validation) de cet algorithme aux cas de sollicitations mécaniques cycliques est mise en place, permettant une comparaison de résultats numériques et expérimentaux. Cette confrontation met en évidence, comme attendu, une convergence du champ de température numérique vers un état stable, mais la température de stabilisation est nettement supérieure aux valeurs expérimentales. Ce phénomène peut traduire une surévaluation du terme source dans le calcul thermique, c'est-à-dire de la dissipation mécanique. Un recalage de cette grandeur, sur la partie asymptotique de la courbe d'évolution en température au centre de l'élastomère, permet alors une bonne concordance numérique/expérimentale sur l'évolution complète (*i.e.* asymptotique finale mais aussi en début d'évolution), en un autre point de mesure (au comportement thermique différent du point de recalage). A une température extérieure différente, ce même coefficient donne une évolution correcte de la température aux deux points de mesure. Ce terme correcteur peut trouver une explication, sur la base des travaux de SIMO [1987] ; GOVINDJEE et SIMO [1991, 1992], dans l'hypothèse que seule une partie de l'énergie mécanique est dissipée en chaleur, le reste servant au réarrangement ou à l'endommagement des chaînes moléculaires. Ceci semble en particulier se justifier dans le cas d'essais cyclés d'élastomères ou un endommagement continu est expérimentalement constaté par MIEHE [1995]. Cette hypothèse constitue une perspective intéressante au présent travail ; la principale difficulté réside dans la définition d'une campagne d'essais afin de mettre en évidence expérimentalement cet endommagement et, le cas échéant, de déterminer les coefficients inhérents à sa prise en compte numérique.

L'autre aspect de ce travail de thèse, présenté au chapitre IV, concerne les modélisations d'assemblages de structures une à une invariantes dans une direction. La difficulté de ces modélisations ne réside ni dans le comportement des matériaux, ni dans une éventuelle formulation en grandes déformations puisque l'on choisit de décrire les différents matériaux via une loi élastique linéaire, mais dans l'organisation de calculs lourds de plusieurs millions de degrés de liberté. Pour passer outre cette difficulté, une méthode de sous structuration – en fait, un couplage de deux méthodes – est mise en place et ce, en usant au maximum des propriétés d'invariance des différentes parties constitutives.

On applique cette méthode à la modélisation d'un Bras Elastomérique. Cette pièce mécanique complexe développée par la société EUROCOPTER est composée d'une centaine de baguettes en composites unidirectionnels, noyées dans différentes matrices en élastomère. Les résultats locaux obtenus par cette méthode présentent une bonne cohérence avec les résultats expérimentaux. Par la suite, on détermine l'amortissement global de la pièce à l'aide d'une méthode énergétique.

Le cinquième chapitre présente une étude de faisabilité pour la prise en compte des effets dissipatifs locaux sur une structure complexe – ici le Bras Elastomérique – sous une sollicitation harmonique, à partir des résultats élastiques obtenus au chapitre IV.

Il semble utopique, mis à part par une parallélisation massive du calcul, d'envisager un calcul thermo-mécanique analogue à ceux présentés au chapitre III, une itération d'un calcul non linéaire étant équivalente en terme de temps CPU à un calcul élastique complet. L'alternative, proposée au chapitre V, est basée sur :

- d'une part, la linéarisation des différentes équations (lois de comportement, d'évolution de la variable interne et d'incompressibilité) obtenues en grandes transformations sur le modèle de POYNTING-THOMSON
- et d'autre part, sur la prise en compte des résultats en contraintes et déformations déterminés au chapitre IV dans le cas élastique comme les amplitudes des solutions sous régime harmonique.

Ceci permet de déterminer un terme de dissipation locale sur des sections fortement sollicitées à partir des coefficients du modèle en grandes transformations et identifiés via l'algorithme présenté au chapitre II.

Une autre mise en oeuvre possible, plus coûteuse en temps car obligeant un calcul complet de sous structuration, est d'isoler une sous structure supplémentaire – une zone fortement sollicitée déterminée par un calcul élastique – et d'affecter à ses différents constituants un comportement non linéaire.

BIBLIOGRAPHIE

- F. ANDRIEUX, K. SAANOUNI et F. SIDOROFF. Sur les solides hyperélastiques à compressibilité induite par l'endommagement. *C. R. Acad. Sci.*, 324(SérieIIb) :281–288, 1997.
- SURESNES AÉROSPATIALE. *Calcul de l'attache feuilletée E.F.B.* DCR/M-64481/F-97, 1997.
- I. BABUŠKA et R. NARASIMHAN. The babuška-bressi condition and the patch test : an example. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 140:183–199, 1997.
- K.J. BATHE. The inf-sup condition and its evaluation for mixed finite element methods. *Computers and Structures*, 79:243–252, 2001.
- G. BÉRARDI. *Modélisation numérique du comportement thermo-viscoélastique d'un élastomère en grandes déformations*. Thèse de Doctorat, Université de Provence, 1995.
- B. BERNSTEIN, E.A. KEARSLEY et L.J. ZAPAS. A study of stress relaxation with finite strain. *Transaction of the Society of Rheology*, 7:391–410, 1963.
- A. BOUKAMEL. *Etude théorique et expérimentale d'un stratifié caoutchouc-acier en grandes déformations*. Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille II, 1988.
- A. BOUKAMEL, C. GABRIELI et S. MÉO. Modélisation en grandes déformations viscoélastiques des élastomères. *Actes du Troisième Colloque National en Calcul des Structures*, pages 387–396, 1997.
- A. BOUKAMEL et S. MÉO. Identification de modèles rhéologiques en grandes déformations. 2000.
- J.L. CHABOCHE. Continuous damage mechanics, part 1&2. *Journal of Applied Mechanics*, 55: 233–247, 1988.
- D. CHAPELLE et K.J. BATHE. The inf-sup test. *Comp. And Struct.*, 4/5:537–545, 1993.
- J.S. CHEN, W. HAN, C.T. WU et W. DUAN. On the perturbed lagrangian formulation for nearly incompressible and incompressible hyperelasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 142:335–351, 1997.
- J.S. CHEN, S. YOON, H.P. WANG et W. K. LIU. An improved reproducing kernel particle method for nearly incompressible finite elasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 181: 117–145, 2000.

- R.M. CHRISTENSEN. *Theory of viscoelasticity, an introduction*. Academic Press Inc., New York, 1971.
- A. CHRYSOCHOOS et R. PEYROUX. Modélisation numérique des couplages en thermomécanique des solides. *Revue européenne des éléments finis*, 6:673–724, 1997.
- B.D. COLEMAN et W. NOLL. Foundations of linear viscoelasticity. *Rev. Mod. Phys.*, 33:239–249, 1961.
- M.A. CRISFIELD et V.C NORRIS. Lessons for incompressible and near-incompressible elasticity drawn from the driven cavity flow problem. *Computers and Structures*, 75:529–538, 2000.
- D. DELORME. *Modélisation numérique du comportement mécanique de matériaux composites à matrices élastomériques*. Thèse de Doctorat, Université de la Méditerranée, 1997.
- Y. ESCAIG. *Décomposition de domaines multiniveaux et traitements distribués pour la résolution de problèmes de grande taille*. Thèse de Doctorat, Université de Compiègne, 1992.
- Y. ESCAIG, M VAYSSADE et G. TOUZOT. Une méthode de décomposition de domaines multifrontale multiniveaux. *Revue européenne des éléments finis*, 3(1):312–337, 1994.
- C. GABRIELI. *Modélisation théorique et numérique du comportement viscoélastique d'élastomères sous sollicitations harmoniques*. Thèse de Doctorat, Université de la Méditerranée, 1995.
- A.N. GENT et A.G. THOMAS. *Forms for the stored strain energy function for vulcanised rubber*. Masson, 1973.
- P GERMAIN. *Cours de Mécanique des milieux continus, tome 1*. Masson, 1973.
- P GERMAIN. *Mécanique 1&2. Cours de l'Ecole Polytechnique*. Ellipses, 1986.
- S. GOVINDJEE et J. SIMO. Transition from micro-mechanics to computationally efficient phenomenology: carbon black filled rubbers incorporating mullins' effect. *J. Mech. Phys. Solids*, 40:213–233, 1992.
- S. GOVINDJEE et J.C. SIMO. A micro-mechanically based continuum damage model for carbon black-filled rubbers incorporating mullins' effect. *J. Mech. Phys. Solids*, 39:87–112, 1991.
- B. HALPHEN et NGUYEN QUOC SON. Sur les matériaux standards généralisés. *J. Méc.*, 14:39–63, 1975.
- L.J. HART-SMITH. Elasticity parameters for finite deformations of rubber-like materials. *J. Appl. Math. Phys.*, 17:608–626, 1966.
- G.A. HOLZAPFEL et J. SIMO. Entropy elasticity of isotropic rubber-like solids at finite strains. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 132:17–44, 1996.
- J.F. IMBERT. *Analyse des structures par éléments finis*. Cepadues édition, 1979.
- M.F JAZZAR. *Modélisation du comportement hyperélastique quasi incompressible de structures acier-élastomères et validation expérimentale*. Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille II, 1993.

-
- J. LAMBERT-DIANI et C. REY. Elaboration de nouvelles lois de comportement pour les élastomères : principe et avantages. *C. R. Acad. Sci.*, 326(SérieIIb) :483–488, 1998.
- F. LARABA-ABBES. *Etude des comportements hyperélastique et viscohyperélastique de deux élastomères de type NR et PDMS par extensométrie optique bidimensionnelle*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale Paris, 1998.
- P. LE TALLEC. Compatibility condition and existence results in discret finite incompressible elasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 27 :239–259, 1981.
- P. LE TALLEC. Numerical analysis of viscoelastic problems. Masson, 1990.
- P. LE TALLEC et C. RAHIER. Numerical models of steady rolling for non-linear viscoelastic structures in finite deformations. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 37 :1159–1186, 1994.
- J. LELONG-FERRAND et J.M. ARNUADIÈS. *Cours de mathématiques, Tome1, Algèbre*. Dunod, Paris, 1978.
- J. LEMAÎTRE. How to use damage mechanics. *Nuclear Engineering Design*, 80 :233–245, 1984.
- J. LEMAÎTRE et J.L. CHABOCHE. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, 1985.
- A.I. LEONOV. On thermodynamics and stability of general maxwell-like viscoelastic constitutive equations, theoretical and applied rheology. *XIth Int. Cong. On Rheology*, pages 97–99, 1992.
- A. LION. A physically based method to represent the thermo-mechanical behaviour of elastomers. *Acta Mechanica*, 123 :1–25, 1996.
- A. LION. On the large deformation behaviour of reinforced rubber at different temperatures. *J. Mech. Phys. Solids*, 45 :1805–1834, 1997.
- M.R. MAHERI et R.D ADAMS. Finite-element prediction of modal response of damped layered composite panels. *Composites Science and Technology*, 55 :13–23, 1995.
- D.S. MALKUS. Finite element with penalties in nonlinear elasticity. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 16 :121–136, 1980.
- D.S. MALKUS et T.J.R. HUGHES. Mixed finite element methods – reduced and selective integration technique – a unification of concepts. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 15 :63–81, 1978.
- C. MIEHE. Discontinuous and continuous damage evolution in ogden-type large-strain elastic materials. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 14 :697–720, 1995.
- J.J. MOREAU. Lois d'élasticité en grande déformation. *Séminaire d'analyse convexe*, pages 12.1–12.54, 1979.
- K.N. MORMAN. Original contributions. an adaptation of finite linear viscoelasticity theory for rubber-like by use of the generalised strain measure. *Rheologica Acta*, 27 :3–14, 1988.
- J.C. NAGTEGALL, D.M. PARKS et J.R. RICE. On numerically accurate finite element solutions in fully plastic range. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 4 :153–177, 1974.

- J.T. ODEN. A theory of penalty methods for finite element approximations of highly nonlinear problems in continuum mechanics. *Computers and Structures*, 8:445–449, 1978.
- J.T. ODEN et N. KIKUCHI. Finite element methods for constrained problems in elasticity. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 18:701–725, 1982.
- J.T. ODEN, N. KIKUCHI et Y.J. SONG. Penalty-finite elements methods for the analysis of stokesian flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 31:297–329, 1982.
- R.W. OGDEN. Large deformation isotropic elasticity, on the correlation of theory and experiment for incompressible rubber-like solids. *Proc. Roy. Soc., Lond.*, A326:565–584, 1972.
- J.K. SEUNG, S.K. KYEONG et Y.C. JIN. Viscoelastic model of finitely deforming rubber and its finite element analysis. *ASME, Journal of Applied Mechanics.*, 64:835–841, 1997.
- F. SIDOROFF. The geometrical concept of intermediate configuration and elastic finite strain. *Arch. Mech.*, 25(2):299–309, 1973.
- F. SIDOROFF. Un modèle viscoélastique non linéaire avec configuration intermédiaire. *J. Méc.*, 13(4):679–713, 1974.
- F. SIDOROFF. Variables internes en viscoélasticité, 1. variable internes scalaires et tensorielles. *J. Méc.*, 14(3):545–566, 1975a.
- F. SIDOROFF. Variables internes en viscoélasticité, 2. milieux avec configuration intermédiaire. *J. Méc.*, 14(4):571–595, 1975b.
- F. SIDOROFF. Variables internes en viscoélasticité, 3. milieux avec plusieurs configurations intermédiaires. *J. Méc.*, 15(1):85–118, 1976.
- F. SIDOROFF. Rhéologie non-linéaire et variables internes tensorielles. *Symposium franco-polonais, Cracovie*. 1977.
- F. SIDOROFF. Cours sur les grandes déformations. *Ecole d'été, Sophia-Antipolis*, 1982.
- J.C. SIMO. On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model : fomulation and computational aspects. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 60:153–163, 1987.
- L.R.G. TRELOAR. The elasticity of a network of long chain molecules i. *Trans. Faraday Soc.*, 39:36–64, 1943.
- L.R.G. TRELOAR. The present status of the theory of large elastic deformations. *The rheology of elastomers*, 1957.
- C. TRUESDELL et W. NOLL. *The non-linear field theories of mechanics*. Springer Verlag, 1973.
- J. VANTOMME. Parametric study of material damping in fibre-reinforced plastics. *Composites*, 26:147–153, 1995.
- O.C. ZIENKIEWICZ et R.L. TAYLOR. *The finite elements method*, volume 1&2. Mac Graw-Hill Book Compagny, London, 1991.

O.C. ZIENKIEWICZ et R.L. TAYLOR. The finite element patch test revisited. a computer test for convergence, validation and error estimates. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 149: 223–254, 1997.