

DÉPIÉGEAGE DES VORTEX

le cas par exemple d'expériences sur les vortex [95] et de simulations numériques pour des colloïdes [96], des cristaux de *Wigner* [97] ou encore des réseaux de vortex [74]. En particulier dans [74], nous avons étudiés par simulations numériques le dépiégeage plastique de réseaux $2D$ de vortex en présence d'un piégeage fort : une transition de phase continue est observée, et le régime critique associé à la transition de dépiégeage est trouvé chaotique, de plus deux exposants critiques caractérisant la vitesse sont mesurés $\beta = 1.3 \pm 0.1$ (à $T = 0$) et $\delta^{-1} = 0.75 \pm 0.1$ (à $F = F_c$ et $T \neq 0$). La modélisation du dépiégeage plastique est difficile et les résultats expérimentaux et numériques ne permettent pas encore un large consensus sur la nature de la transition.

4.3.2 Dépiégeage élastique

Lorsque le piégeage est faible, l'élasticité domine le désordre et les déformations de la structure périodique sont faibles par rapport à la situation d'équilibre. Le dépiégeage est brutal avec un écoulement élastique des particules : les vortex se mettent en mouvement en bloc à partir de F_c en suivant des canaux statiques présentant une certaine rugosité (voir la figure 4.4a). Le dépiégeage brusque se manifeste sur la courbe $v(F)$ par une tangente verticale à F_c (voir la figure 4.4b).

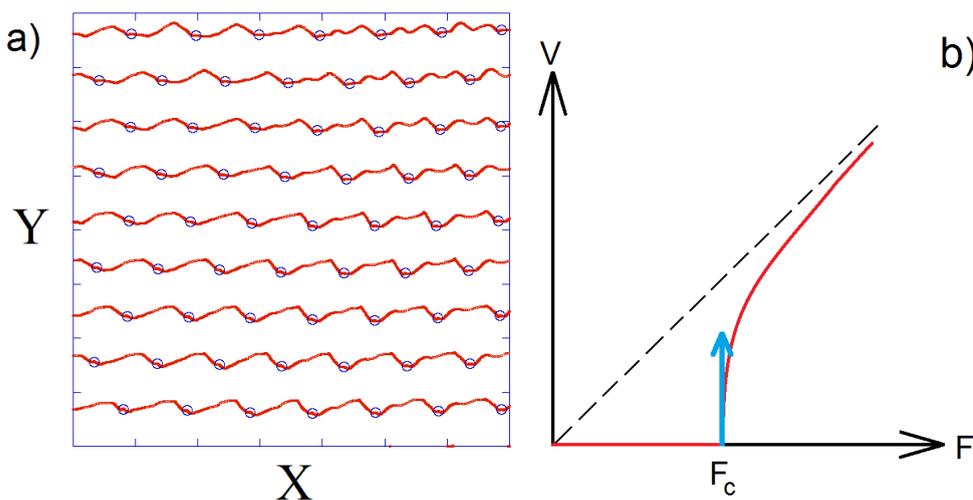


FIGURE 4.4 – a) Exemple de trajectoire des vortex, en rouge, au seuil de dépiégeage pour le cas élastique et un instantané des vortex est également représenté, en bleu (cette figure est issue de nos simulations). b) Allure de la courbe réponse vitesse-force $v(F)$ dans le cas du dépiégeage élastique, la vitesse augmente rapidement avec une tangente verticale en F_c (la vitesse obtenue sans désordre est représentée en pointillé).

Les exposants critiques de dépiégeage dans le cas élastique ont pu être calculés par le groupe de renormalisation fonctionnel en dimension $4 - \epsilon$ (voir par exemple [98] pour les ondes de densité de charge ou [99] pour les interfaces). Une étude plus récente [100] a montré qu'il n'existe que deux classes d'universalité (une pour les interfaces et une pour les systèmes périodiques) pour les systèmes élastiques désordonnés dans le cas du dépiégeage élastique. La valeur de l'exposant β calculée au premier ordre en ϵ est $\beta = 1 - \frac{\epsilon}{9}$ pour

les interfaces et $\beta = 1 - \frac{\epsilon}{6}$ pour les systèmes périodiques. Un calcul de renormalisation à deux boucles a été mené dans l'article [101] où les valeurs des exposants à l'ordre ϵ^2 sont présentés. La comparaison détaillée entre les valeurs théoriques des exposants critiques et celles obtenues par simulations numériques montre une bonne adéquation (voir par exemple [102]). D'autres contributions numériques sont également disponibles pour la détermination des classes d'universalité et des exposants critiques associés (voir [103] et les références à l'intérieur).

Des exposants critiques ont été déterminés numériquement pour différents systèmes. L'exposant β est le plus facile à déterminer et il apparaît souvent dans la littérature. Les simulations numériques réalisées en dimension $D = 2$ montrent des transitions du second ordre pour les interfaces avec $\beta \approx 1/3$ [104, 105, 106]. Cependant dans le cas des systèmes périodiques des exposants variés sont trouvés pour : les ondes de densité de charge $\beta = 0.65 \pm 0.05$ [107] et $\beta = 0.64 \pm 0.03$ [108], les cristaux de Wigner $\beta \sim 0.66$ dans [109], les colloïdes avec $\beta = 0.66 \pm 0.02$ pour [96], $\beta \approx 0.5$ dans [110] et $\beta = 0.92 \pm 0.01$ chez [111], ou encore dans des systèmes de type *stripes* [42] avec $\beta = 0.35$. Notons qu'une étude du réseau de vortex à $D = 3$ a évalué $\beta = 0.65 \pm 0.01$ [112], alors que pour un réseau de vortex à $D = 2$ une valeur surprenante de exposant $\beta = 1.11 \pm 0.05$ ($\beta > 1$) a été mesurée [113].

Nos simulations numériques sur les réseaux de vortex à $D = 2$ tentent d'apporter une contribution à la compréhension du dépiégeage élastique dans ces systèmes.

4.3.3 Le modèle à une particule

Un modèle simple permettant de rendre compte du dépiégeage est réalisé à partir du modèle à une particule (*i.e.* le *single-particle* modèle) dans lequel une particule, représentant un vortex dans notre cas, se déplaçant dans un potentiel périodique sinusoïdal unidimensionnel noté V (et représentant le potentiel de piégeage effectif) est soumise à une force d'entraînement F . A l'origine ce modèle a été appliqué au cas des ondes de densité de charge [79]. L'équation sur-amortie de la dynamique s'écrit :

$$\eta \frac{dx}{dt} = F - \frac{dV}{dx} \quad (4.10)$$

où η est le coefficient de viscosité. En terme de système dynamique nous avons à faire à un flot du premier ordre avec une bifurcation nœud-col contrôlée par F . En supposant que F_c est la valeur maximale de $\frac{dV}{dx}$, alors pour $F < F_c$ le système présente deux points fixes, l'un stable et l'autre instable. La particule reste piégée au niveau du point d'équilibre stable qui est attracteur. Lorsque F tend vers F_c les deux points fixes se rapprochent et fusionnent au niveau de $F = F_c$ en un seul point fixe semi-stable : le point attracteur disparaît et le système est déstabilisé. Finalement pour $F > F_c$ il y a disparition de tout point fixe et la particule avance constamment.

4.4. CONSIDÉRATIONS NUMÉRIQUES

Un calcul du temps T mis par la particule pour parcourir une période du potentiel peut s'effectuer à partir de l'intégration de l'équation (4.10). On obtient ainsi $T \propto (F - F_c)^{-1/2}$, et donc une vitesse moyenne de la particule :

$$v \propto (F - F_c)^{1/2} \quad (4.11)$$

Ainsi, la vitesse au seuil de la transition de dépiégeage est caractérisée par un exposant critique $\beta = \frac{1}{2}$ et le dépiégeage est continu. Le modèle est discuté plus en détail dans [41] en relation avec le dépiégeage d'un ligne. Ce modèle est très utile dans la suite pour caractériser des effets de taille finie de la simulation.

4.4 Considérations numériques

Dans cette partie nous revenons sur le choix des paramètres de simulation afin d'obtenir une équation de la dynamique qui corresponde à l'équation sur-amortie utilisée couramment pour les vortex. Nous présentons également la machine de calcul utilisée pour nos simulations. Quelques tests de performances sont aussi exposés.

4.4.1 Limite sur-amortie

Afin de résoudre le système d'équations (3.14), nous ne pouvons pas poser $m = 0$ afin d'éliminer le terme inertiel $m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$ sans faire diverger les solutions de l'équation (cela se comprend aisément à partir de la relation (3.2c) du schéma d'intégration), et nous devons alors choisir correctement les paramètres m et η afin d'avoir le terme inertiel qui soit très inférieur au terme frictionnel $\eta \frac{d\vec{r}_i}{dt}$. Comme précisé dans le paragraphe 3.4.2 concernant les paramètres utilisés lors de nos simulations, nous avons pris $\frac{\eta}{m} = 0.1$. Ce choix permet à l'équation du mouvement disponible dans le code de dynamique moléculaire (*i.e.* l'équation de Newton du second ordre) d'atteindre la limite sur-amortie de la dynamique telle qu'elle est utilisée dans la littérature (équation du premier ordre).

Dans le programme LAMMPS il apparaît que la définition de la viscosité η fait intervenir la masse des vortex m et un paramètre d'amortissement (*damping* et noté *damp* en anglais) suivant le rapport $\eta = \frac{m}{damp}$. Nous avons effectué plusieurs tests afin de savoir quel était le meilleur choix à prendre pour m et *damp* afin d'obtenir la limite attendue. Nous avons observé que pour m fixé la diminution du paramètre *damp* fait diminuer le rapport inertiel sur frictionnel, néanmoins le temps de la simulation augmente (en effet à pas de temps Δt fixé η va modifier la vitesse des vortex et donc le temps de la simulation). A l'inverse, lorsque *damp* est fixé et m diminue le rapport inertiel sur frictionnel augmente mais le temps de simulation diminue. Il faut donc faire un compromis entre un rapport du terme inertiel sur le terme frictionnel le plus faible possible et le meilleur temps de simulation réalisable : la valeur de $\eta = 10^{-3}$ (avec $m = 10^{-2}$ et *damp* = 10) correspond à cette valeur optimale. Pour des valeurs supérieures $\eta \geq 10^{-3}$ l'équation différentielle du

second ordre donne la même physique que l'équation sur-amortie mais c'est pour la valeur $\eta = 10^{-3}$ que le temps de simulation est le plus rapide, et quand $\eta < 10^{-3}$ la physique simulée ne correspond plus du tout à celle que l'on obtient avec l'équation du premier ordre.

Afin de contrôler la physique simulée nous avons comparé nos simulations effectuées sous LAMMPS à un code de dynamique intégrant les équations du mouvement sur-amorties des vortex via un algorithme de *Runge-Kutta* d'ordre 2 (comme dans [74] et où nous avons pris soin d'intégrer correctement les équations en prenant un pas de temps suffisamment petit par rapport aux temps caractéristiques du système) pour une taille de boîte de simulation fixée $(L_x, L_y) = (50, 60)\lambda_L$ et en prenant un piégeage faible tel que $\alpha_p \approx 1.5 \cdot 10^{-5}$. Lorsque $\eta = 10^{-3}$ dans LAMMPS nous n'observons pas de différence avec le code séquentiel (où $\eta = 1$) que ce soit en ce qui concerne la vitesse moyenne des vortex ou en ce qui concerne les trajectoires des vortex au cours du temps, de plus nous avons trouvé des valeurs identiques de l'exposant critique β .

4.4.2 Machine de calcul

Nos simulations à grandes échelles des réseaux de vortex ont été lancées sur le cluster du *Centre de Calcul Scientifique de la Région Centre* (CCSC) qui est une des actions du projet du Programme Pluri-Formations de Calcul Scientifique et Modélisation des universités d'Orléans et de Tours (PPF CaSciModOT). Nous remercions généreusement l'accès qui nous a été fourni à ce cluster afin de faire tourner nos simulations dans le cadre de cette étude. Ce projet réunit différents laboratoires de recherche des campus des universités d'Orléans et de Tours, et leur permet d'accéder à une machine de calcul parallèle haute performance dotant ainsi les membres du projet CaSciModOT d'un méso-centre de calcul (à mi chemin entre des stations de travail et des grands centres nationaux de calcul). La machine de calcul est installée physiquement dans les locaux de l'Institut des Sciences de la Terre d'Orléans (ISTO).

La machine est une machine IBM utilisant la technologie Blade, elle comporte un serveur frontal (nommé Phoebus) qui assure la liaison entre les nœuds et les utilisateurs, deux serveurs qui assurent les différents services et un espace de stockage de 5 *To*. Elle est composée de 56 lames réparties de la façon suivante : 3 groupes de 14 lames possédant un biprocesseur quadricœur, 1 groupe de 14 lames avec un biprocesseur hexacœur et 32 *Go* de mémoire RAM par lame. Cela porte à un total de 504 cœurs utilisables pour le calcul et une puissance crête de calcul estimée à 6 *TFlops* (1 *TFlops* = 10^{12} *flops* ou opérations à virgule flottante par seconde, pour se fixer les idées un ordinateur de bureau a une puissance crête de l'ordre du gigaflops 10^9 *flops* alors que les supercalculateurs se mesurent en petaflops 10^{15} *flops*). Deux réseaux existent dans la machine de calcul : un réseau d'administration en Ethernet 1 *Gb/s* et un réseau de calcul Infiniband caractérisé par une latence de 1.7 μ s et une bande passante de 1.5 *Go/s* (Infiniband est une technologie de réseau qui fournit une interface haut débit, la latence correspondant au temps passé entre l'envoi d'une requête et la réception de la réponse correspondante, alors que la bande passante correspond au débit maximal obtenu).



FIGURE 4.5 – Photographie illustrant la machine de calcul, on peut voir les lames encastées dans leur châssis. Image issue de la présentation de F. Loulergue lors des Journées Informatique de la Région Centre (JIRC) 2009.

4.4.3 Tests de performance

Nous effectuons ici des tests de performance sur nos simulations numériques (appelés couramment *benchmarking* en anglais) pour diverses tailles de systèmes qui sont représentatives de celles que nous allons utiliser par la suite. Nous nous fixons toujours $\alpha_p \approx 1.5 \cdot 10^{-5}$ correspondant à un piégeage faible (nous allons voir dans la section suivante quelles sont les valeurs des paramètres à prendre pour être en piégeage faible ou fort) et nous simulons différentes tailles rectangulaires $(L_x, L_y)\lambda_L$ que l'on référencera dans cette section par le nombre de vortex N_v qui leur est associé, voir tableau 4.2 (nous disposons initialement nos vortex selon un réseau triangulaire parfait avec $L_x = N_x a_0$ et $L_y = N_y a_0 \sqrt{3}/2$ où N_x est le nombre de vortex dans la direction x et N_y suivant la direction y , le nombre de vortex total est donné par $N_v = N_x N_y$).

Comme nous pouvons le voir les tailles vont d'une boîte presque carrée à des formes très allongées, nous parlerons dans la section 4.5.4 des conséquences possibles de cette anisotropie sur les propriétés critiques du système. Pour nos tests de performance cela nous importe peu pour l'instant étant donné que nous nous intéressons à la qualité de la parallélisation et non à la physique sous-jacente du système. Deux quantités importantes pour caractériser et mesurer l'efficacité du parallélisme sont l'accélération $A(P)$ et l'efficacité $E(P)$ où P indique le nombre de processeurs et/ou de cœurs sur lequel est exécuté le programme. Elles sont définies de la façon suivante

4.4. CONSIDÉRATIONS NUMÉRIQUES

$(L_x, L_y)\lambda_L$	Nombre de vortex N_v
(15, 18)	270
(40, 48)	1920
(100, 50)	5000
(200, 30)	6000
(400, 20)	8000
(100, 120)	12000

TABLE 4.2 – Tableau indiquant le nombre de vortex pour chaque taille de système simulé.

$$A(P) = \frac{T_1}{T_p} \quad (4.12a)$$

$$E(P) = \frac{A(P)}{P} \quad (4.12b)$$

avec T_1 et T_p les temps d'exécution pour respectivement 1 et P processeurs. On s'attend à ce que la valeur théorique maximale de A et E soit obtenue lorsque $T_p = \frac{T_1}{P}$ ce qui implique une accélération et une efficacité théorique de $A(P) = P$ et $E(P) = 100\%$. Sans rentrer dans les détails du code et de son architecture parallèle qui sortent du cadre de cette étude, nous allons utiliser ces deux quantités et d'autres grandeurs qui vont caractériser nos simulations afin d'étudier leurs performances en fonction du nombre de processeurs utilisés. Cela nous permettra de savoir quel est le nombre optimal de processeurs que nous aurons à utiliser pour chaque nombre de particules (c'est-à-dire chaque taille de système). Le but de cette évaluation est double : dans un premier temps optimiser le temps de calcul de nos simulations (un trop grand nombre de processeurs pouvant pénaliser la simulation comme nous le verrons) et dans un second temps ne pas consommer une quantité inutile de ressources sur le cluster CCSC afin de ne pas pénaliser les autres utilisateurs.

Les évaluations suivantes ont été effectuées pour différentes tailles de boîtes avec à chaque fois un nombre de pas de temps à évaluer fixé à 10^4 , tous les autres paramètres de la simulation demeurent inchangés et seul le nombre de processeurs exécutant la simulation varie. Notons juste que pour chaque taille nous n'avons effectué qu'une seule simulation à un nombre de processeurs fixé. Cette manière de procéder est suffisante pour avoir la tendance générale de l'efficacité de la simulation en fonction du nombre de processeurs. Cependant si l'on souhaite une étude plus précise, il faut au moins moyenner les grandeurs à déterminer sur plusieurs simulations pour chaque nombre P de processeur. En effet d'autres tâches pouvant tourner simultanément sur le cluster, des facteurs tels que la répartition de charge ou encore la communication entre les nœuds peuvent influencer légèrement les mesures effectuées.

Nous représentons sur la figure 4.6a) l'accélération $A(P)$ et sur la figure 4.6b) l'efficacité $E(P)$ obtenues pour les différentes tailles de systèmes précisées au dessus. Comme nous pouvons le voir sur ces deux figures lorsque le système contient peu de vortex (c'est-à-dire

4.4. CONSIDÉRATIONS NUMÉRIQUES

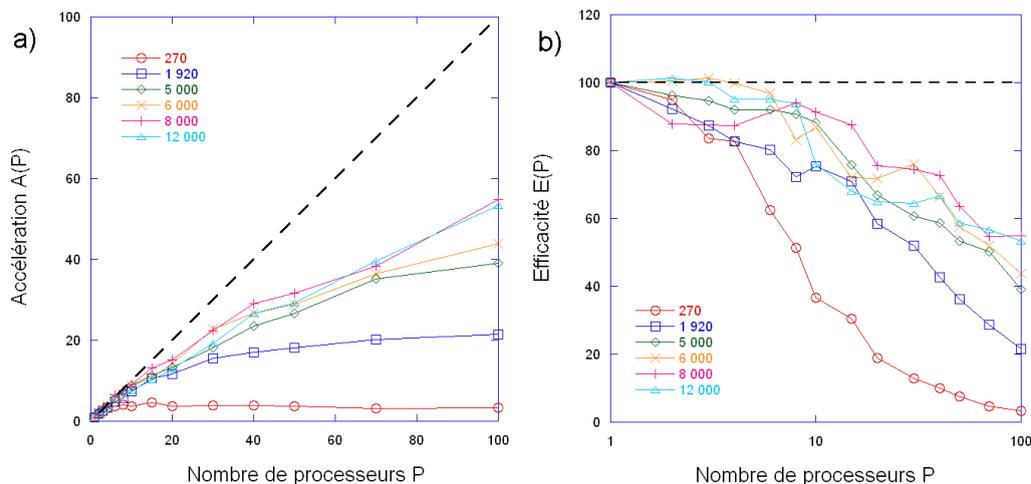


FIGURE 4.6 – Accélération $A(P)$ (figure a) et Efficacité $E(P)$ (figure b) en fonction du nombre de processeurs P pour différentes tailles de systèmes (la ligne en pointillée indique le cas théorique idéal).

les plus petites tailles telles que $(15, 18\sqrt{3}/2)\lambda_L$ ou $(40, 48\sqrt{3}/2)\lambda_L$ alors la simulation est efficace du point de vue du parallélisme tant que le nombre de processeurs n'est pas trop important. Par exemple, pour 270 vortex une valeur de $P \approx 6$ est suffisante alors que pour 1920 vortex nous pouvons prendre $P \approx 20$. Lorsque le nombre de vortex devient plus important (et donc des systèmes plus grands) nous pouvons exécuter nos simulations sur une plus grande quantité de processeurs, $P \approx 40$ par exemple pour 8000 vortex. Le choix de la valeur précise du nombre de processeurs à utiliser peut être pris en choisissant une efficacité d'au moins 60% à 70%, cette valeur est prise de façon arbitraire néanmoins elle nous paraît suffisante. Notons que l'accélération (et donc l'efficacité qui en découle) ne suit pas la valeur théorique maximale, c'est-à-dire qu'elle n'a pas un comportement linéaire (ou une constante en ce qui concerne l'efficacité). Cela peut s'expliquer entre autres par le fait que l'accélération est limitée par la partie non-parallélisée du code (cf la loi d'*Amdahl* [114]).

D'autres quantités permettent de choisir le nombre optimal P de processeurs adapté à chaque taille. Citons le temps d'exécution de la simulation sur le CPU qui nous a été utile pour définir l'accélération et l'efficacité, ou encore la quantité de mémoire utilisée par processeur lors de notre simulation (ces deux grandeurs, ainsi que d'autres statistiques, sont affichées par LAMMPS dans un fichier qui sert de journal d'événements). Nous affichons en figure 4.7a) le temps CPU d'exécution (en secondes) en fonction du nombre P et en figure 4.7b) la quantité de mémoire requise par nos simulation (en *MBytes*/processeur) en fonction de P .

Sur la figure 4.7a) on voit pour les grandes tailles que l'on peut gagner un peu plus d'un ordre de grandeur en vitesse d'exécution pour des valeurs de P supérieures à 10, cependant pour les petites tailles (et c'est encore plus visible pour la plus petite taille avec 270 vortex) à partir d'un certain nombre de processeurs P nous n'arrivons plus à gagner en vitesse d'exécution. En ce qui concerne la figure 4.7b) on se rend compte également que

4.4. CONSIDÉRATIONS NUMÉRIQUES

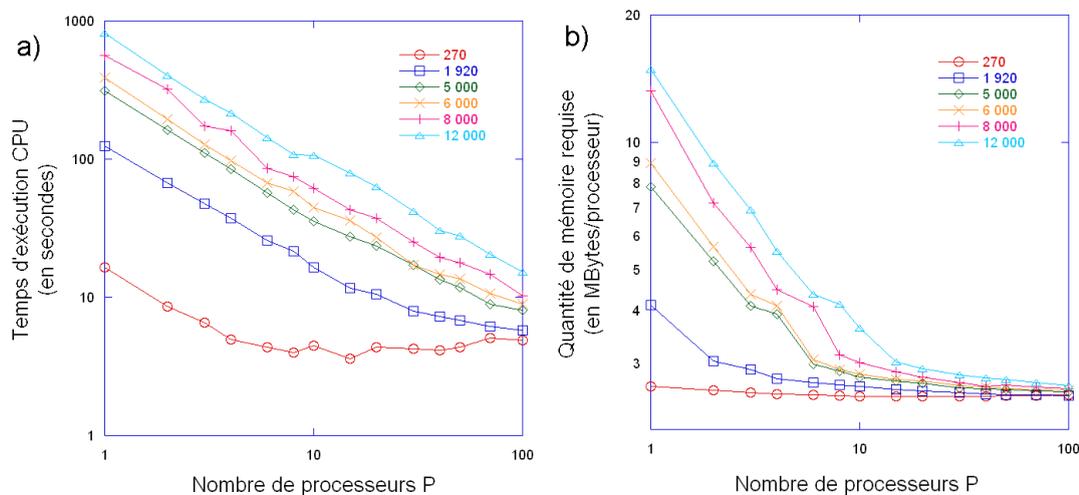


FIGURE 4.7 – Temps d'exécution CPU en secondes (sur la figure a) et quantité de mémoire requise en *MBytes*/processeur (sur la figure b) en fonction du nombre de processeurs P pour les tailles de systèmes définies précédemment.

la quantité de mémoire utilisée par processeur décroît jusqu'à tendre vers une constante.

Finissons cette section de benchmarking en donnant le détail du temps CPU d'exécution des simulations que nous venons de citer. Nous allons présenter les grandeurs les plus chronophages en pourcentage du temps d'exécution en fonction du nombre de processeurs utilisées. Nous observons l'évolution de ces grandeurs : le calcul de la force par paire de vortex, le calcul des voisins et la communication par MPI (la catégorie "autres" comprend les différentes opérations, calculs et sorties effectués par LAMMPS). Nous affichons sur la figure 4.8 ces différentes quantités pour les différentes tailles utilisées précédemment,

Pour les petites tailles on observe une très nette diminution du temps passé à calculer les forces au profit du temps passé à la communication entre les nœuds qui augmente, ce qui explique pourquoi il est préférable d'utiliser un faible nombre de processeurs pour ces tailles. Le temps lié au calcul des voisins tend à diminuer avec le nombre de processeurs reflétant le fait qu'il y ait très peu de vortex dans la cellule de simulation.

Lorsque l'on s'intéresse aux grandes tailles de système le temps associé au calcul de la force diminue encore une fois mais cette réduction est bien moins brusque qu'auparavant et le temps passé à la communication entre les nœuds, bien qu'augmentant ici aussi, ne tire pas profit de cette baisse. Cependant le temps passé au calcul des voisins n'est pas trop impacté par cet accroissement du nombre de processeurs (il diminue tout de même légèrement). La fraction du temps passé aux diverses opérations augmente quant à lui lorsque l'on choisit un trop grand nombre de processeurs, et ce quel que soit le nombre de vortex utilisés (ceci pouvant entre autres s'expliquer par des parties du code non parallélisées qui vont faire augmenter le temps d'exécution).

Grâce à tous ces tests de performance nous avons pu visualiser l'évolution de nos si-

4.5. ÉTUDE À TEMPÉRATURE NULLE

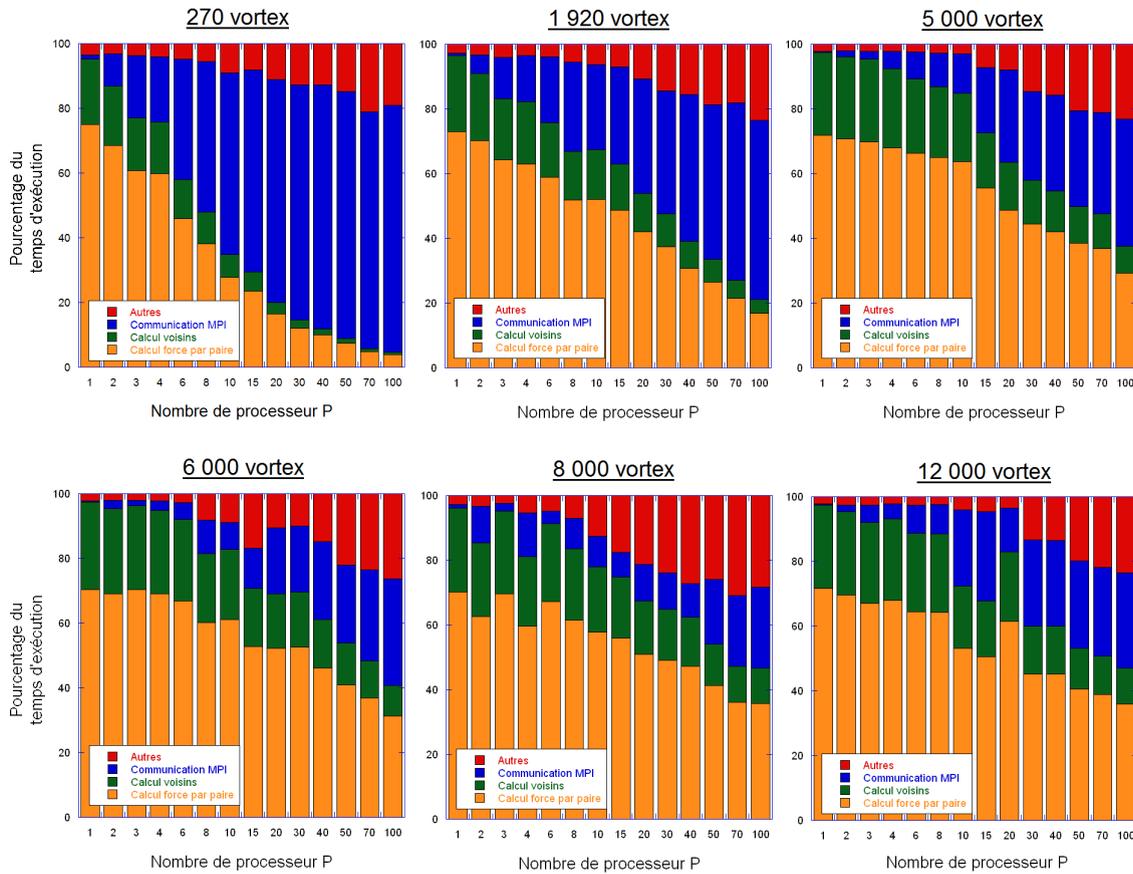


FIGURE 4.8 – Pourcentage du temps CPU d'exécution passé en fonction du nombre de processeurs P pour le calcul de la force par paire de vortex (en orange), le calcul des voisins (en vert), la communication MPI (en bleu) et le temps restant étant regroupé dans la section "autres" (en rouge). Différentes tailles sont proposées.

mulations avec le nombre de processeurs alloués à l'exécution du code. Nous nous rendons compte que le choix du nombre optimal de processeurs à utiliser découle d'un compromis entre : une trop grande quantité de processeurs pouvant avoir un effet négatif sur la parallélisation de la simulation, et un nombre trop faible de processeurs exécutant le programme qui peut ne pas présenter un grand avantage par rapport à une version séquentielle du code. Toutes les simulations que nous allons utiliser par la suite de l'étude prendront en compte ces résultats et nous aurons toujours à l'idée le souci d'optimiser le temps d'exécution de nos simulations.

4.5 Étude à température nulle

Cette partie est consacrée aux résultats que nous avons obtenus pour le dépiégeage des vortex en piègeage faible à température nulle. Notre développement s'articule autour de plusieurs points. Nous présentons la dynamique des vortex, la réponse du système à une

force extérieure et la détermination de l'exposant critique β . Nous déterminons la longueur de corrélation du système et des effets de taille finie, et nous mesurons les exposants associés (respectivement ν et ν_{FS}). L'étude de cette transition à température nulle est faite en utilisant une loi d'échelle de taille finie, et enfin nous déterminons l'exposant critique α associé à l'équivalent de la chaleur spécifique.

4.5.1 Crossover élastique - plastique

Comme nous l'avons précisé précédemment (section 4.3) la dynamique du système peut être dominée soit par l'élasticité soit par le désordre, suivant le rapport de l'intensité des interactions vortex-pièges et vortex-vortex noté α_p/α_v . Afin de déterminer les valeurs d'intensité d'interactions qui génèrent telle ou telle dynamique nous sélectionnons une taille de système $(400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$ (ce choix de taille sera justifié a posteriori). A paramètres du système fixés nous faisons évoluer seulement l'intensité de piégeage, *i.e.* la valeur de α_p , et pour chaque valeur d'intensité de piégeage différente nous réalisons plusieurs réalisations de désordre. Par *réalisation de désordre* nous sous-entendons que la taille du système reste fixe et seule la répartition aléatoire des pièges change au sein de la cellule de simulation de la manière expliquée en section 3.3.2, nous emploierons indifféremment le mot d'*échantillon* ou de réalisation de désordre par la suite.

Nous partons d'un réseau triangulaire parfait à haute vitesse que nous laissons relaxer, puis la force d'entraînement est lentement diminuée jusqu'à atteindre la force critique de dépiégeage F_c^{sample} en dessous de laquelle le système complètement piégé possède une vitesse moyenne nulle. Nous présentons sur la figure 4.9 l'évolution de la valeur moyenne de la force critique de dépiégeage $\overline{F_c}$ en fonction de l'intensité de piégeage relative α_p/α_v (la moyenne définie par l'overline $\overline{\quad}$ représente la moyenne sur les réalisations de désordre).

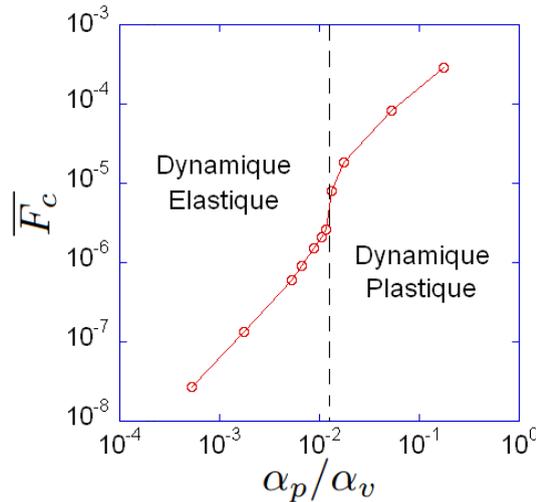


FIGURE 4.9 – Évolution de la force critique de dépiégeage $\overline{F_c}$ moyennée sur les réalisations de désordre en fonction de l'intensité de piégeage relative α_p/α_v . La taille du système reste fixée à $(L_x, L_y) = (400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$ soit $N_v = 8000$ vortex.

4.5. ÉTUDE À TEMPÉRATURE NULLE

Nous observons sur la figure 4.9 une diminution de la force critique lorsque α_p/α_v diminue, ce phénomène est logique puisqu'il traduit le fait qu'il faut appliquer une force extérieure plus faible pour mettre en mouvement le système lorsque l'intensité du piégeage diminue (la profondeur des puits de piégeage diminuant, il faut "tirer" moins fortement sur le réseau de vortex pour le dépiéger). Autour de $\alpha_p/\alpha_v \approx 10^{-2}$ se situe un brusque décrochage de la force critique qui représente la frontière de séparation entre une dynamique élastique régie par l'élasticité et une dynamique plastique dominée par le désordre. Cette soudaine diminution coïncide avec le changement de forme de la courbe vitesse-force et la perte d'ordre observée dans les trajectoires (comme expliqué dans la section 4.3), elle traduit donc la transition entre un régime plastique (pour $\alpha_p/\alpha_v > 10^{-2}$) et un régime élastique (pour $\alpha_p/\alpha_v < 10^{-2}$). Un tel comportement a déjà été observé dans d'autres simulations de réseaux de vortex [115] et de systèmes de colloïdes [96].

4.5.2 Dynamique des vortex

Afin d'avoir un aperçu de la dynamique des vortex dans le régime élastique nous représentons sur la figure 4.10 les trajectoires typiques des vortex au seuil du dépiégeage élastique pour une boîte de taille $(100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$, présentant $N_v = 12000$ vortex, pour une valeur d'intensité de piégeage relative de $\alpha_p/\alpha_v \approx 5 \cdot 10^{-3}$.

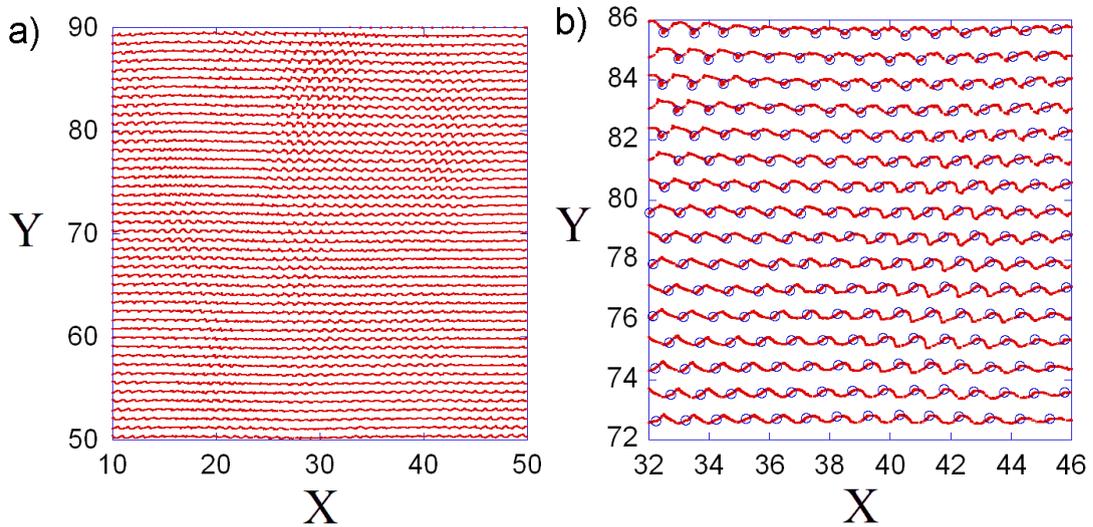


FIGURE 4.10 – Trajectoire typique des vortex au seuil du dépiégeage élastique pour $\alpha_p/\alpha_v \approx 5 \cdot 10^{-3}$ avec $N_v = 12000$. a) Dans un souci de clarté, seulement une petite région de la boîte de simulation $(100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$ est affichée. b) Une région encore plus zoomée est présentée avec en surimpression un instantané des vortex à un temps donné (en cercle noir).

Sur les figures 4.10a) (où une région seulement de la cellule de simulation est affichée pour la clarté du propos) et 4.10b) (correspondant à une région encore plus zoomée avec en surimpression un instantané des vortex) nous observons que tous les vortex se dépiègent simultanément et avec la même vitesse, impliquant que chaque vortex garde les mêmes

4.5. ÉTUDE À TEMPÉRATURE NULLE

voisins au cours du mouvement. On constate également que la structure est topologiquement ordonnée et les vortex s'écoulent le long de canaux statiques rugueux et élastiquement couplés. En effet aucun défaut topologique n'est visible et le réseau triangulaire n'est que légèrement déformé : les vortex se déplacent le long de canaux statiques présentant une rugosité. La dynamique associée est très saccadée près du seuil et la vitesse du centre de masse des vortex présente une périodicité temporelle avec une période correspondant au temps mis par chaque vortex pour remplacer son voisin le précédant sur le même canal.

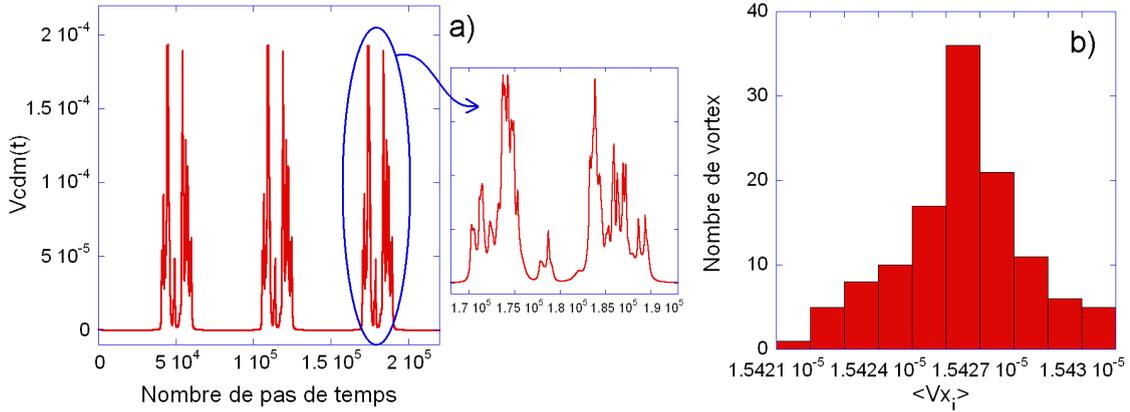


FIGURE 4.11 – Taille de la boîte considérée $(100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$, au seuil de dépiégeage : a) Évolution temporelle de la vitesse longitudinale du centre de masse des vortex $V_x^{\text{cm}}(t)$. On voit bien que cette vitesse est périodique, nous avons agrandi une période afin de se rendre compte que ce n'est pas une fonction triviale. b) Histogramme de la vitesse individuelle des vortex moyennée temporellement $\langle (V_x^{\text{cm}})_i \rangle$ où l'on a considéré un vortex par canal, soit un total de 120 vortex.

Comme on l'observe sur la figure 4.11a) la vitesse longitudinale du centre de masse en fonction du temps est périodique mais n'est pas triviale. On observe de longs intervalles de temps où la vitesse est très faible suivis par de brusques augmentations de cette dernière. Cette dépendance temporelle de la vitesse reflète le mouvement saccadé des vortex au seuil de dépiégeage. Ces longues périodes de temps où la vitesse est quasi-nulle peuvent s'expliquer par le fait que nous sommes proche de la force critique de dépiégeage F_c et donc proche de la bifurcation nœud-col, du point de vue du système dynamique un goulot d'étranglement apparaît alors dont l'origine provient du fantôme du point fixe stable.

Les canaux élastiquement couplés sont directement mis en évidence par la visualisation de la trajectoire des vortex qui indique qu'aucun défaut n'est créé et que les vortex conservent toujours les mêmes voisins (deux canaux se déplacent donc avec une vitesse moyenne semblable). Nous pouvons également le constater quantitativement à partir de la distribution des vitesses des canaux, obtenue en considérant un vortex par canal (c'est-à-dire 120 vortex pour une boîte de taille $(100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$) et en déterminant la vitesse moyenne des vortex $\langle (V_x)_i \rangle$ ($i = 1, \dots, 120$) pour chacun des canaux. La figure 4.11b) représente l'historgramme des vitesses dans le cas où $N_v = 12000$ au niveau du seuil de dépiégeage. Nous remarquons que la distribution des vitesses est bien décrite par une gaus-

4.5. ÉTUDE À TEMPÉRATURE NULLE

sienne avec un écart type relatif inférieur à 10^{-3} indiquant que les vitesses individuelles dans chacun des canaux sont très proches. Ce résultat accrédite ainsi le fait que les canaux sont couplés.

4.5.3 Réponse vitesse-force

Intéressons-nous maintenant à la réponse du système en fonction de la force appliquée. Nous évaluons la vitesse longitudinale moyenne $\langle V_x^{\text{cm}}(t) \rangle$ du centre de masse des vortex en fonction de la force F et de la force réduite f

$$f = \frac{F - F_c^{\text{sample}}}{F_c^{\text{sample}}} \quad (4.13)$$

avec F_c^{sample} la force critique pour une réalisation de désordre donnée. Par la suite de l'étude, et tant que nous n'indiquerons pas le contraire, nous posons l'intensité relative du désordre telle que $\alpha_p/\alpha_v \approx 5 \cdot 10^{-3}$. La courbe de réponse vitesse-force typique que nous obtenons pour une réalisation de désordre est présentée en figure 4.12a) en échelle linéaire pour $N_v = 8000$ vortex. Elle correspond bien au comportement attendu dans le cas d'un régime élastique (avec un dépiégeage rapide des vortex).

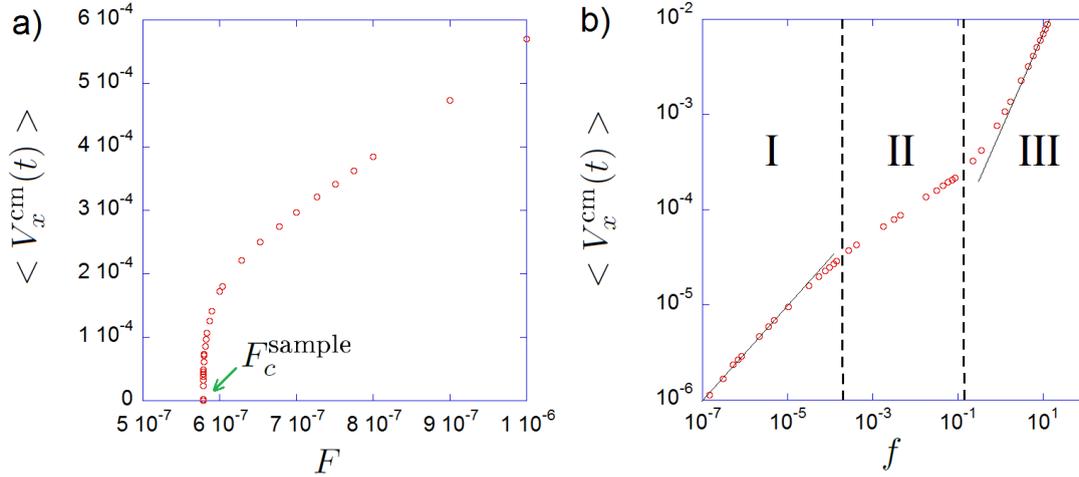


FIGURE 4.12 – a) Courbe de réponse vitesse-force du système $\langle V_x^{\text{cm}}(t) \rangle$ en fonction de F en échelle linéaire. b) Courbe de la vitesse $\langle V_x^{\text{cm}}(t) \rangle$ en fonction de la force réduite f en échelle logarithmique présentant les trois régions distinguables. Ces courbes sont représentatives de la situation obtenue quelque soit la taille de la boîte ou encore l'intensité relative de désordre (tant que nous sommes dans le régime élastique avec $\alpha_p/\alpha_v < 10^{-2}$). Dans cet exemple particulier nous avons $N_v = 8000$ vortex et $\alpha_p/\alpha_v \approx 5 \cdot 10^{-3}$.

Nous représentons sur la figure 4.12b) la courbe typique que l'on obtient pour une réalisation de désordre pour la vitesse en fonction de la force réduite f en échelle logarithmique, toujours pour $N_v = 8000$ vortex. Nous pouvons distinguer trois régions en fonction de f :

- la région I est la manifestation des effets de taille finie dans le système simulé dont la signature est le régime à une particule [74] (cf la section 4.3.3) avec un comportement

4.5. ÉTUDE À TEMPÉRATURE NULLE

tel que $\langle V_x^{\text{cm}} \rangle \sim f^{1/2}$ comme l'indique la ligne en trait continu. En effet dans ce régime la longueur de corrélation le long des canaux est plus grande que la taille de la boîte, le système se comporte alors comme une particule unique à un degré de liberté placée dans un potentiel périodique.

- la région II est identifiée comme étant le régime critique de la transition de dépiéage continue où la loi de puissance $\langle V_x^{\text{cm}} \rangle \sim f^\beta$ est mesurée (avec $\beta < 1$).
- la région III est celle où le système se situe loin du dépiéage et approche asymptotiquement le régime linéaire $\langle V_x^{\text{cm}} \rangle \sim f$ indiqué par la ligne en trait continu obtenu sans désordre.

Nous pouvons remarquer que dans la région I (*single-particle regime*) un dépiéage avec hystérésis a été observé pour quelques réalisations de désordre, avec différentes valeurs de force critique F_c^{up} et F_c^{down} suivant que la force était respectivement augmentée ou diminuée (dans cette situation la vitesse mesurée dépendait de l'histoire du système et des pas de force utilisés lors de la variation de la force). Nous avons représenté sur la figure 4.13a) un exemple d'une telle situation pour un système de taille $(40, 48\sqrt{3}/2)\lambda_L$, soit $N_v = 1920$ vortex, où les courbes avec des cercles ouverts et pleins correspondent respectivement à plusieurs descentes et montées de force autour des valeurs F_c^{up} et F_c^{down} . Cependant il faut noter que la largeur $F_c^{\text{up}} - F_c^{\text{down}}$ diminue lorsque la taille du système augmente, ce qui indique que le phénomène d'hystérésis est lié à un effet de taille finie et non à une transition de phase discontinue (voir la figure 4.13b qui présente la largeur relative $(F_c^{\text{up}} - F_c^{\text{down}})/F_c^{\text{down}}$ en fonction de la taille de boîte).

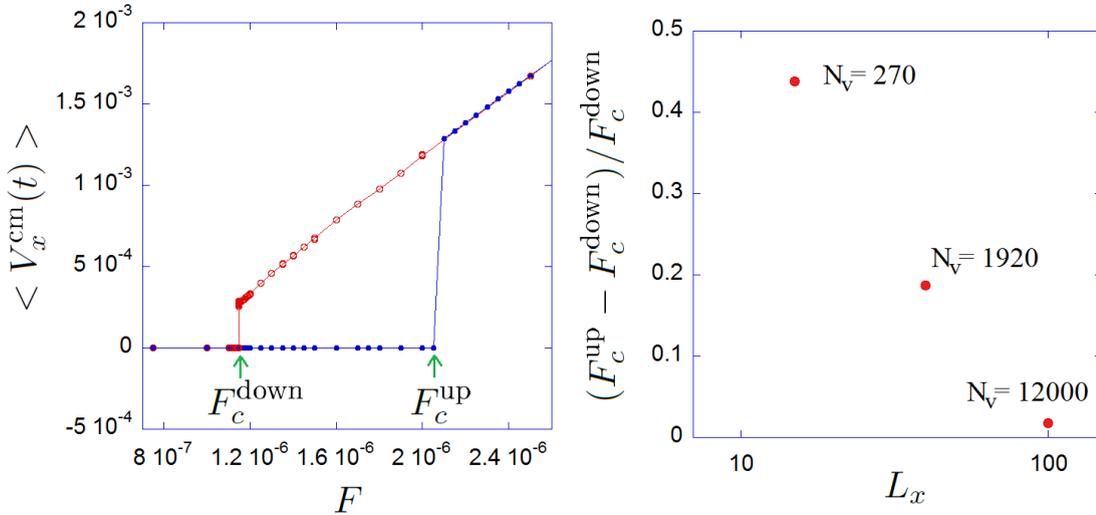


FIGURE 4.13 – a) Courbe typique de la vitesse moyenne $\langle V_x^{\text{cm}}(t) \rangle$ en fonction de F pour les quelques réalisations de désordre présentant un dépiéage hystérétique. La courbe avec des cercles ouverts correspond à plusieurs descentes en force avec F_c^{down} comme force critique alors que celle avec des cercles pleins correspond à plusieurs montées en force avec F_c^{up} leur force critique. b) Évolution de la largeur relative de l'hystérésis $(F_c^{\text{up}} - F_c^{\text{down}})/F_c^{\text{down}}$ en fonction de la taille L_x de la boîte de simulation (et donc de la taille du système via le nombre de vortex présents).

4.5.4 Exposant de dépiégeage β

Nous déterminons l'exposant critique de dépiégeage β à partir d'un ensemble de simulations obtenues en faisant varier la taille du système. Plusieurs réalisations permettent de déterminer une statistique des valeurs de β pour une taille donnée. Afin d'étudier les propriétés critiques des systèmes simulés nous définissons, en plus de la force réduite f , une vitesse réduite v

$$v = \overline{\left(\frac{\langle V_x^{\text{cm}}(t) \rangle}{F_c^{\text{sample}}} \right)} \quad (4.14)$$

où $\langle V_x^{\text{cm}}(t) \rangle$ est la vitesse longitudinale moyenne du centre de masse des vortex et F_c^{sample} la force critique déterminées pour une réalisation de désordre donnée. L'overline $\overline{\dots}$ représente une moyenne sur toutes les réalisations de désordre réalisées pour une valeur fixée de f . Cette procédure a été utilisée dans des simulations numériques d'interfaces élastiques en milieu désordonné [116]. Elle présente l'avantage de mieux superposer les courbes provenant de différentes réalisations de désordre, ce qui n'est pas toujours le cas avec l'utilisation de $\langle V_x^{\text{cm}}(t) \rangle$ puisque la vitesse dépend assez fortement de F_c^{sample} au voisinage du dépiégeage.

En utilisant cette définition de v nous pouvons tracer la vitesse en fonction de f pour différentes tailles de système. Nous affichons sur les figures 4.14a) et 4.14b) la courbe $v(f)$ en échelle logarithmique pour deux tailles de systèmes (L_x, L_y) , soit respectivement $(100, 50\sqrt{3}/2)\lambda_L$ moyennée sur $N = 21$ échantillons et $(400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$ moyennée sur $N = 14$ échantillons.

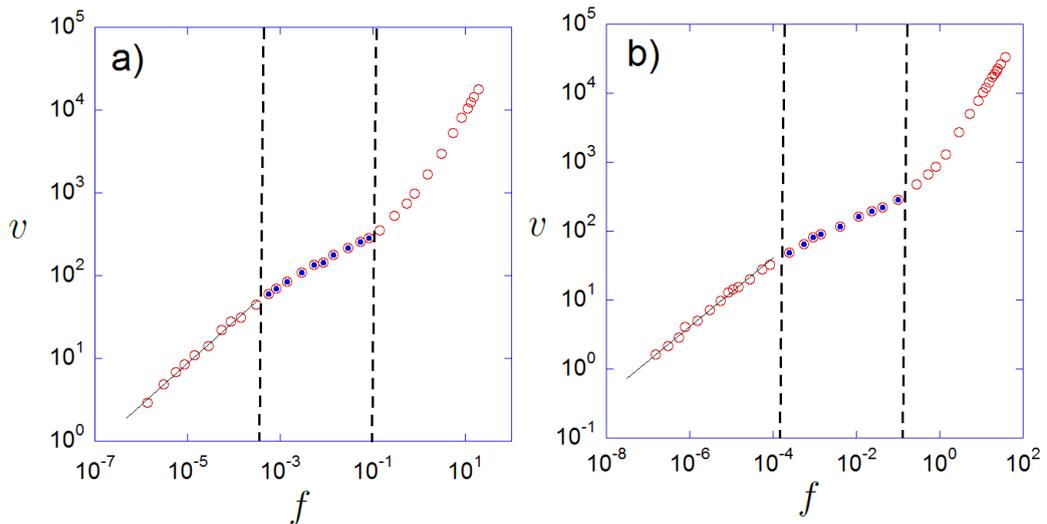


FIGURE 4.14 – Courbes de la vitesse réduite v en fonction de la force réduite f pour les tailles : a) $(100, 50\sqrt{3}/2)\lambda_L$ moyennée sur $N = 21$ échantillons, et b) $(400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$ moyennée sur $N = 14$ échantillons. Les trois régimes décrits précédemment (cf section 4.5.3) sont affichés, ainsi que la pente $1/2$ indiquant le régime *single-particle* avec la ligne en trait continu.

4.5. ÉTUDE À TEMPÉRATURE NULLE

Les trois régions décrites précédemment sont visibles pour chacune des tailles étudiées. L'exposant de dépiégeage β est déterminé à partir d'une régression du type loi de puissance $v \sim f^\beta$ appliquée dans la région critique II des courbes $v(f)$ (les cercles pleins sur les graphiques). A chaque valeur de β obtenue pour différentes tailles, nous associons une incertitude donnée par l'erreur standard sur la valeur de β déduite de la régression. Afin d'étudier les effets de la taille de la cellule de simulation sur les propriétés critiques et en particulier sur la valeur de β nous utilisons différentes formes rectangulaires (allant d'une taille presque carrée à une forme rectangulaire très allongée présentant une anisotropie dans la géométrie de la boîte). La figure 4.15a) présente l'évolution de l'exposant β en fonction de la taille transverse L_y pour une taille longitudinale fixée à $L_x = 100\lambda_L$, et la figure 4.15b) montre l'évolution de β en fonction de la taille longitudinale L_x pour diverses tailles transverses $L_y \geq 18\sqrt{3}/2\lambda_L$.

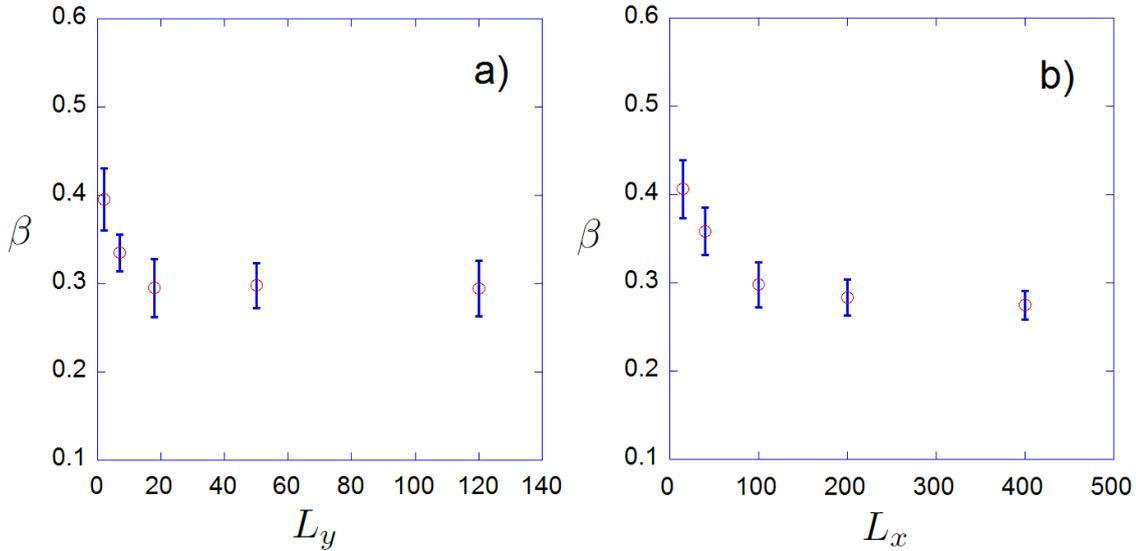


FIGURE 4.15 – Exposant de dépiégeage β extrait de la régression du type loi de puissance $v \sim f^\beta$ dans la région II des courbes de réponse $v(f)$ moyennées sur le désordre. Les incertitudes liées à chaque valeur de β représentent l'erreur standard associée à la valeur de l'exposant extraite de la régression. Pour plus de détails voir le texte associé.

Sur la courbe de 4.15a) les moyennes sont réalisées sur $N = (9, 7, 4, 21, 4)$ échantillons pour respectivement $L_y = (2, 7, 18, 50, 120)\sqrt{3}/2\lambda_L$. On observe que la valeur de l'exposant β mesurée pour des valeurs de $L_y \geq 18\sqrt{3}/2\lambda_L$ devient indépendante de la taille transverse L_y . En particulier elle ne dépend pas de l'anisotropie de la boîte de simulation puisque nous relevons des valeurs identiques de l'exposant lorsque le système est de forme carrée avec $(100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$. Quant à la courbe de 4.15b) les moyennes sont réalisées sur $N = (44, 47, 39, 12, 27)$ échantillons pour respectivement $L_x = (15, 40, 100, 200, 400)\lambda_L$. On en déduit une valeur constante de β pour $L_x \geq 100\lambda_L$. Ainsi β est indépendant de la taille et de la forme du système pourvu que,

$$\begin{cases} L_x \geq 100\lambda_L \\ L_y \geq 18\sqrt{3}/2\lambda_L \end{cases} \quad (4.15)$$

Finalement en prenant la valeur moyenne des exposants β réalisant ces deux conditions (soit 78 réalisations de désordre), nous mesurons :

$$\boxed{\beta = 0.29 \pm 0.03} \quad (4.16)$$

Notons que la moyenne des valeurs individuelles β_i obtenues pour chaque réalisation de désordre conduit à un résultat très similaire, soit $\beta = 0.27 \pm 0.04$.

4.5.5 Exposant de corrélation de taille finie ν_{FS}

L'utilisation de systèmes finis en simulations numériques implique des effets notables sur l'étude des transitions de phase du second ordre. En effet les divergences dans les fonctions de réponse du système sont "arrondies", voire également décalées par rapport au système de taille infinie. Ces effets sont généralement étudiés dans le cadre de la théorie des lois d'échelles en taille finie comme nous l'avons rappelé en section 4.2.2. Outre son apport à la compréhension du comportement à la limite thermodynamique de la transition de phase à partir de systèmes de taille finie, cette approche permet également d'extraire de plus amples informations concernant les longueurs caractéristiques du système.

A partir d'un théorème général développé pour les systèmes désordonnés [117] une longueur de taille finie ξ_{FS} peut être définie à partir des propriétés statistiques d'un grand nombre d'échantillons de taille finie. L'exposant ν_{FS} caractérisant la divergence d'une telle longueur au seuil du dépiégeage $\xi_{\text{FS}} \sim f^{-\nu_{\text{FS}}}$ doit satisfaire à l'inégalité $\nu_{\text{FS}} \geq 2/d$.

Distribution des forces critiques

Nous commençons par examiner la distribution des forces critiques pour chaque taille de système et leur largeur $\Delta F_c(L_x)$. De cette mesure nous pourrions extraire l'exposant ν_{FS} associé à ξ_{FS} .

Sur la figure 4.16b) nous montrons à titre d'exemple la distribution des forces critiques pour les 39 échantillons présentés en section 4.5.4 avec la taille $L_x = 100\lambda_L$ (la condition $L_y \geq 18\sqrt{3}/2\lambda_L$ étant toujours considérée). Une étude sur la distribution des forces critiques d'un système élastique dans un milieu désordonné a été réalisé précédemment [118]. Pour les systèmes périodiques la distribution y a été trouvée comme étant toujours gaussienne, alors que pour les variétés aléatoires il existe une famille de fonctions universelles allant de la distribution gaussienne à la distribution de Gumbel. A partir de la distribution typique obtenue pour toutes les tailles de notre système, et que nous décrivons par une distribution gaussienne, nous estimons une largeur ΔF_c . La figure 4.16a) montre l'évolution des largeurs ΔF_c en fonction de la taille longitudinale L_x des systèmes. Cette largeur peut être vue comme étant l'échelle de force au delà de laquelle la probabilité que le réseau

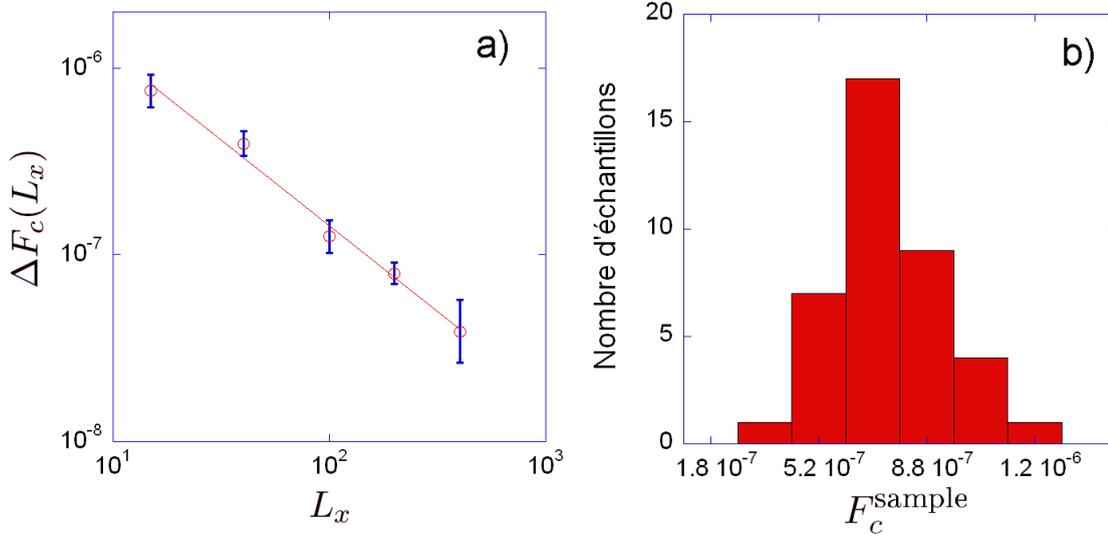


FIGURE 4.16 – a) Évolution de la largeur de la distribution de la force critique $\Delta F_c(L_x)$ en fonction de la taille longitudinale L_x . Nous avons représenté en trait continu une régression du type loi de puissance $\Delta F_c(L_x) \sim L_x^{-1/\nu_{\text{FS}}}$ afin d’extraire l’exposant de taille finie ν_{FS} . L’incertitude de chaque point correspond à l’erreur standard associée à la valeur de la largeur extraite des distributions. Pour plus d’informations voir le paragraphe se reportant à la figure. b) Exemple de distribution des forces critiques F_c^{sample} pour 39 échantillons différents à la taille fixée par $L_x = 100\lambda_L$ (avec toujours $L_y \geq 18\sqrt{3}/2\lambda_L$).

se dépiege change significativement. Les tailles et le nombre de réalisations de désordre pour chaque taille sont ceux considérés dans la figure 4.15b) de la section 4.5.4. De façon analogue au cas des ondes de densité de charge étudié dans le papier [119], la largeur se comporte avec la taille de la façon suivante

$$\Delta F_c(L_x) \sim L_x^{-1/\nu_{\text{FS}}} \quad (4.17)$$

avec un exposant ν_{FS} égal à :

$$\boxed{\nu_{\text{FS}} = 1.09 \pm 0.07} \quad (4.18)$$

Distribution de la force de crossover

Une autre quantité intéressante est la force de crossover F_{cross} séparant le régime critique (région II) et le régime du *single-particle* (région I) des courbes $v(f)$. Nous pouvons identifier F_{cross} à la force en deçà de laquelle des effets de taille finie apparaissent dans le système. De façon similaire à la distribution des forces critiques nous avons déterminé la largeur des distributions des forces de crossover en fonction de la taille du système $\Delta F_{\text{cross}}(L_x)$.

Un exemple de la distribution typique des forces de crossover F_{cross} est présenté sur la figure 4.17b) pour $L_x = 100\lambda_L$. Sur la figure 4.17a) est affichée l’évolution de la largeur de

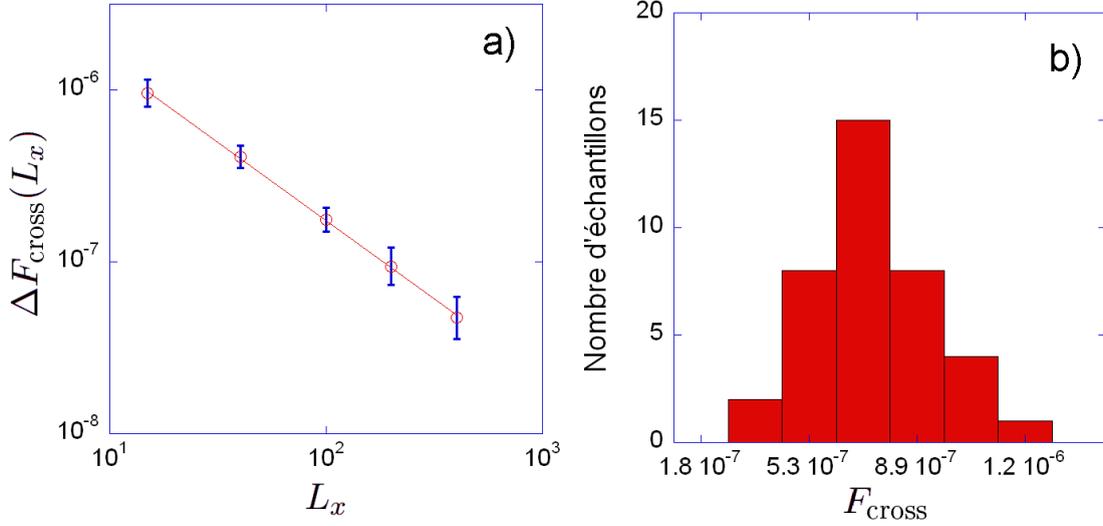


FIGURE 4.17 – a) Évolution de la largeur $\Delta F_{\text{cross}}(L_x)$ avec la taille longitudinale L_x . Une régression en loi de puissance est affichée en trait continu et donne la pente $-1/\nu_{\text{FS}}$. L’incertitude de chaque point correspond à l’erreur standard associée à la valeur de la largeur extraite des distributions. Pour plus d’informations voir le paragraphe se reportant à la figure. b) Exemple de distribution des forces de crossover (entre région I et II des courbes $\nu(f)$) F_{cross} pour les mêmes échantillons que sur la figure 4.16b).

ces distributions $\Delta F_{\text{cross}}(L_x)$ avec la taille longitudinale L_x . Les données utilisées pour ces deux graphiques correspondent à celles de la distribution des forces critiques. On obtient la loi de puissance $\Delta F_{\text{cross}}(L_x) \sim L_x^{-1/\nu_{\text{FS}}}$ avec,

$$\boxed{\nu_{\text{FS}} = 1.09 \pm 0.02} \quad (4.19)$$

Nous observons qu’un seul exposant ν_{FS} contrôle la distribution des forces critiques et celle des forces de crossover de taille finie. Cet exposant caractérise une longueur caractéristique dont il est légitime de se demander le lien avec la longueur de corrélation ξ du système infini. Pour répondre à cela il est utile de déterminer l’exposant intrinsèque ν de la longueur de corrélation ξ et de comparer les valeurs de ν et ν_{FS} .

4.5.6 Exposant de corrélation ν

Lorsque la longueur de corrélation est plus petite que la taille de la boîte $\xi < L_x$ nous nous attendons à ce que

$$\xi \sim (F - F_c^\infty)^{-\nu} \quad (4.20)$$

avec ν l’exposant intrinsèque de la longueur de corrélation et F_c^∞ la force critique pour le système infini. Par contre, $\xi \sim L_x$ lorsque $F \rightarrow F_{\text{cross}}^+$. Il s’ensuit que

$$F_{\text{cross}} - F_c^\infty \sim L_x^{-1/\nu} \quad (4.21)$$

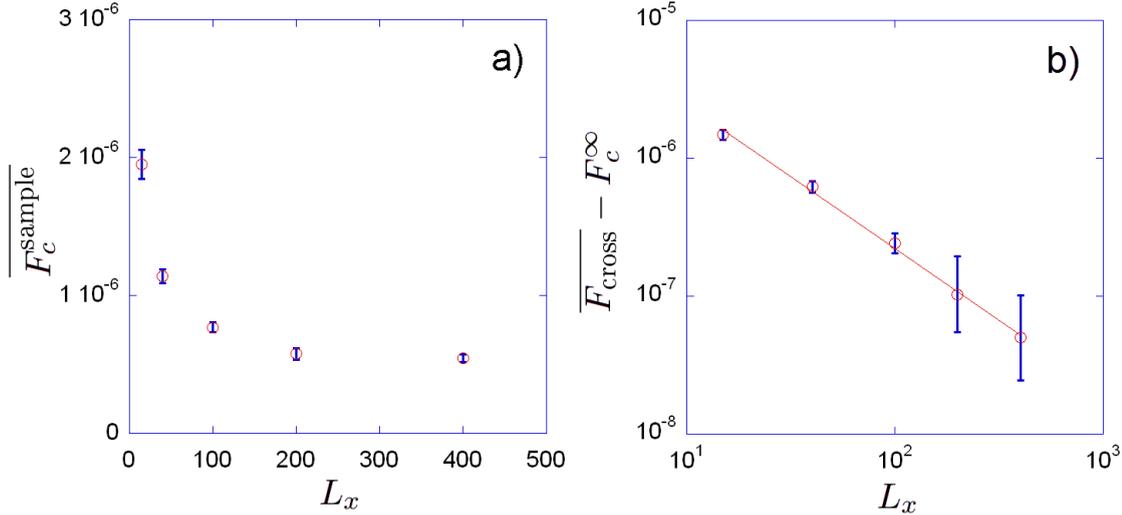


FIGURE 4.18 – a) Évolution de la force critique moyenne $\overline{F_c^{\text{sample}}}$ en fonction de la taille longitudinale L_x . La valeur de F_c^∞ est extraite de cette courbe en prenant sa valeur asymptotique. b) Tracé de $\overline{F_{\text{cross}}} - F_c^\infty$ en fonction de la taille longitudinale L_x . Une régression du type loi de puissance est affichée en trait continu à partir de laquelle nous extrayons la valeur de ν . Les incertitudes affichées sur les deux courbes correspondent aux erreurs standards de nos échantillons (les larges barres d'erreurs pour les deux plus grandes tailles de la figure b) proviennent des erreurs statistiques qui deviennent de la taille de $\overline{F_{\text{cross}}} - F_c^\infty$).

F_c^∞ peut être déterminée à partir de la valeur moyenne sur le désordre de la force critique $\overline{F_c^{\text{sample}}}$ en fonction de la taille longitudinale L_x . La figure 4.18a) montre que $\overline{F_c^{\text{sample}}}$ tend vers une constante que l'on identifie à F_c^∞ . La figure 4.18b) montre la différence $\overline{F_{\text{cross}}} - F_c^\infty$ en fonction de la taille longitudinale L_x , où $\overline{F_{\text{cross}}}$ correspond à la force de crossover moyennée sur le désordre. Les données utilisées ici sont les mêmes que celles employées pour mesurer ν_{FS} . À partir d'une régression en loi de puissance sur ces données nous obtenons,

$$\nu = 1.04 \pm 0.04 \quad (4.22)$$

Cette valeur de ν est très proche de celle déterminée pour l'exposant ν_{FS} . On peut conclure que $\nu = \nu_{\text{FS}}$, de sorte qu'une seule longueur caractéristique existe au seuil de dépiéage, gouvernant à la fois les effets de taille finie et les corrélations entre les vortex. Nous reviendrons sur ce résultat plus loin dans la section 4.5.7.2.

4.5.7 Ordre et corrélations

Nous faisons un aparté par rapport à la détermination des divers exposants critiques caractérisant le dépiéage des vortex pour nous intéresser à l'ordre du réseau de vortex

et aux corrélations en son sein. Nous présentons dans un premier temps le facteur de structure et la triangulation de *Delaunay* afin de caractériser l'ordre de la structure, puis nous introduisons une fonction de corrélation de paires pour déterminer ξ , et ainsi déduire directement ν .

4.5.7.1 Ordre dans le réseau de vortex

Facteur de structure

Afin de caractériser l'ordre dans la structure une quantité utile peut être mesurée : le facteur de structure,

$$S(\vec{k}) = \frac{1}{N_v} \left| \sum_{i=1}^{N_v} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_i} \right|^2 \quad (4.23)$$

qui correspond au module au carré de la transformée de *Fourier* de la densité de vortex. À partir de la visualisation du facteur de structure il est possible de distinguer un liquide d'un solide ordonné. En effet pour une configuration liquide il n'existe pas de réseau régulier pour la position des vortex et le facteur de structure ne présente pas de pics (un liquide étant isotrope nous observerons un anneau autour de l'origine). Au contraire une configuration cristalline présente un arrangement périodique des vortex dans l'espace et $S(\vec{k})$ est également périodique et possède des pics marqués (situés au niveau du réseau réciproque pour un réseau de Bravais).

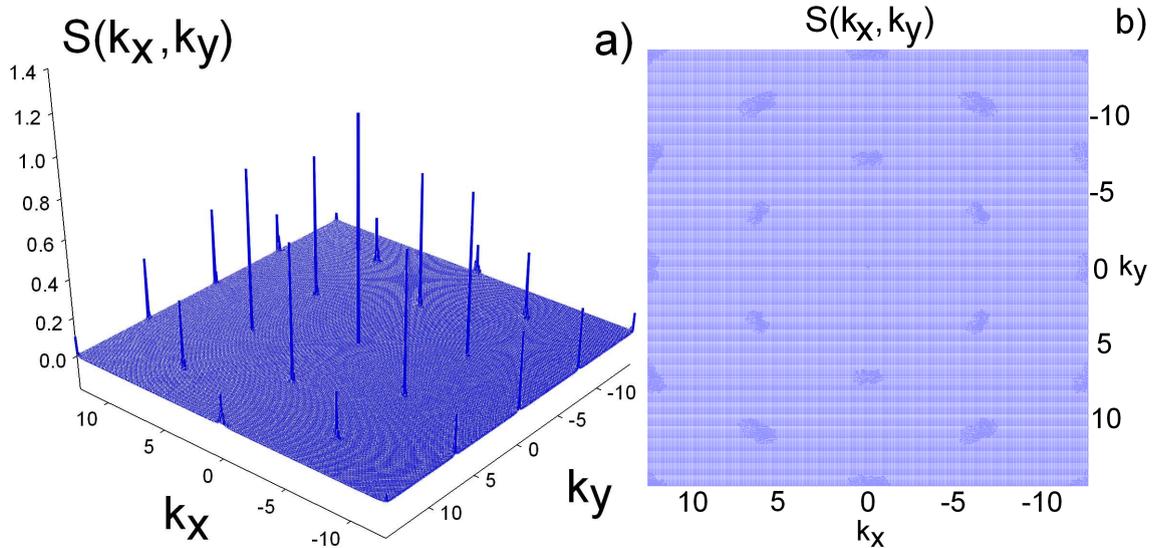


FIGURE 4.19 – a) Facteur de structure $S(k_x, k_y)$ typique moyenné dans le temps, obtenu lors de nos simulations en piégeage faible à température nulle. b) Vue du dessus de $S(k_x, k_y)$ mettant en avant un réseau triangulaire de pics marqués. La taille du système est de $(100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$.

Nous représentons sur les figures 4.19a) et 4.19b) le facteur de structure $S(k_x, k_y)$ pour

une taille de $(100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$ moyenné dans le temps pour une force proche de la force critique de dépiégeage (la moyenne temporelle a été effectuée en moyennant $S(k_x, k_y)$ sur plusieurs pas de temps). Cette courbe est représentative de ce que nous obtenons pour les autres tailles dans nos simulations à température nulle pour le cas du piégeage faible. Une vue en perspective et une du dessus permettent d'observer le comportement typique d'une structure cristalline avec un réseau triangulaire.

Triangulation de Delaunay - Dislocations

Un autre moyen de mesurer qualitativement l'ordre dans la structure est d'effectuer une triangulation de *Delaunay*. C'est une triangulation dans laquelle chaque triangle formé a trois vortex comme sommets et tel que son cercle circonscrit ne contient aucun autre vortex. Cette triangulation permet de rendre compte visuellement de la présence de défauts topologiques dans le réseau en fournissant des informations sur le nombre de premiers voisins de chaque vortex. En effet dans le cas du réseau triangulaire parfait chaque vortex possède six voisins, s'il existe des vortex possédant plus ou moins de six voisins, par exemple cinq ou sept voisins alors des dislocations sont présentes dans la structure.

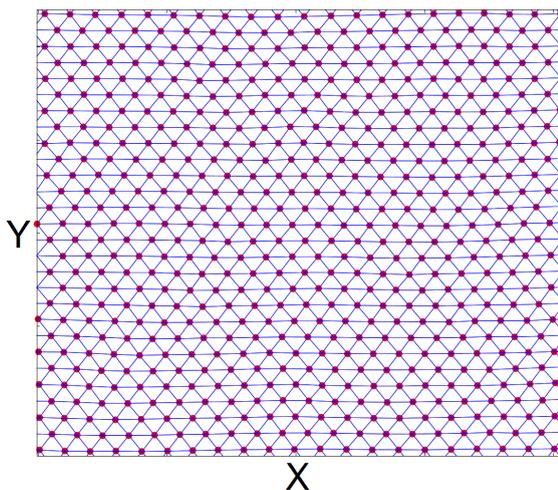


FIGURE 4.20 – Triangulation de Delaunay typique issue de nos simulations à température nulle dans le cas du piégeage faible. La figure représente un instantané de la position des vortex avec la triangulation en traits noirs et les vortex ayant six voisins en cercles pleins. La taille du système est $(100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$.

Nous affichons sur la figure 4.20 une triangulation de *Delaunay* pour une taille de système $(100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$ représentative des simulations que nous effectuons dans le cas du piégeage faible à température nulle. La triangulation est représentée en traits noirs sur un instantané de la position des vortex (issue de la trajectoire de ces derniers pour une force proche de la force critique de dépiégeage), et les vortex possédant six voisins sont représentés en cercles pleins. Comme nous pouvons le voir le réseau de vortex ne présente pas de défauts topologiques et tous les vortex possèdent six voisins.

Ces aspects structurels sont compatibles avec la phase verre de Bragg en mouvement attendue dans le cas du piégeage faible à $3D$. Cependant on attend des dislocations à grandes échelles à $2D$, c'est-à-dire à des échelles plus grandes que la taille de nos boîtes de simulation, et l'analogie avec le verre de Bragg doit être prise avec précaution.

4.5.7.2 Fonctions de corrélation

Fonction de corrélation de la densité

L'étude du comportement des fonctions de corrélation de paires apporte des renseignements sur l'ordre dans la structure et les corrélations qui existent en son sein. La fonction de corrélation de la densité $g(\vec{r})$ permet de confirmer visuellement l'ordre présent dans le réseau en mouvement. Cette fonction de corrélation de la densité est donnée par

$$g(\vec{r}) = \langle \rho(\vec{r}') \rho(\vec{r}' + \vec{r}) \rangle \quad (4.24)$$

avec la densité définie par $\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N_v} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ et $\langle \dots \rangle$ représentant une moyenne sur le temps et l'espace (x, y) . Puisque numériquement nous ne pouvons pas utiliser de fonction de *Dirac*, nous choisissons une fonction gaussienne avec une portée $r_0 = 0.1 a_0$ (mathématiquement cela revient à convoluer la fonction de corrélation avec une fonction de lissage gaussienne). Nous avons vérifié que les résultats obtenus sont indépendants du choix de r_0 tant que la fonction reste suffisamment étroite. Nous obtenons ainsi l'expression suivante pour la fonction de corrélation de la densité implémentée numériquement (où $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$)

$$g(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi r_0^2 L_x L_y} \sum_t \left(\sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}} e^{-|\vec{r} - \vec{r}_{ij}|^2 / (2r_0^2)} \right) \quad (4.25)$$

Nous présentons sur les figures 4.21a-b-c) l'allure de la fonction $g(x, y)$ pour une taille de système $(40, 48\sqrt{3}/2)\lambda_L$ avec une force appliquée proche du dépiégeage. Ce choix de taille peut paraître étrange compte tenu de ce que nous avons expliqué précédemment à propos des tailles longitudinales et transverses minimales à utiliser afin de s'affranchir d'effets de tailles finies pour la détermination du régime critique. Cependant, le calcul de la fonction de corrélation s'effectuant en post-traitement séquentiel avec un temps de calcul variant grossièrement comme $\mathcal{O}(N_v^2)$, la taille présentée ici nécessite déjà un temps de calcul important. En fait, les tests indiquent que l'allure de la courbe ne change pas avec des tailles plus importantes.

À partir de ces graphiques nous observons une structure cristalline avec un réseau triangulaire de pics marqués en accord avec les résultats présentés au-dessus. De plus, on constate que la portée de l'ordre est un peu plus faible dans la direction transverse que dans la direction longitudinale. Notons également l'impossibilité d'obtenir des informations sur la fonction de corrélation au delà d'une distance égale à $\frac{L_i}{2}$ ($i = x$ ou y) à cause de la périodicité spatiale issue des conditions aux bords périodiques appliquées à la simulation.

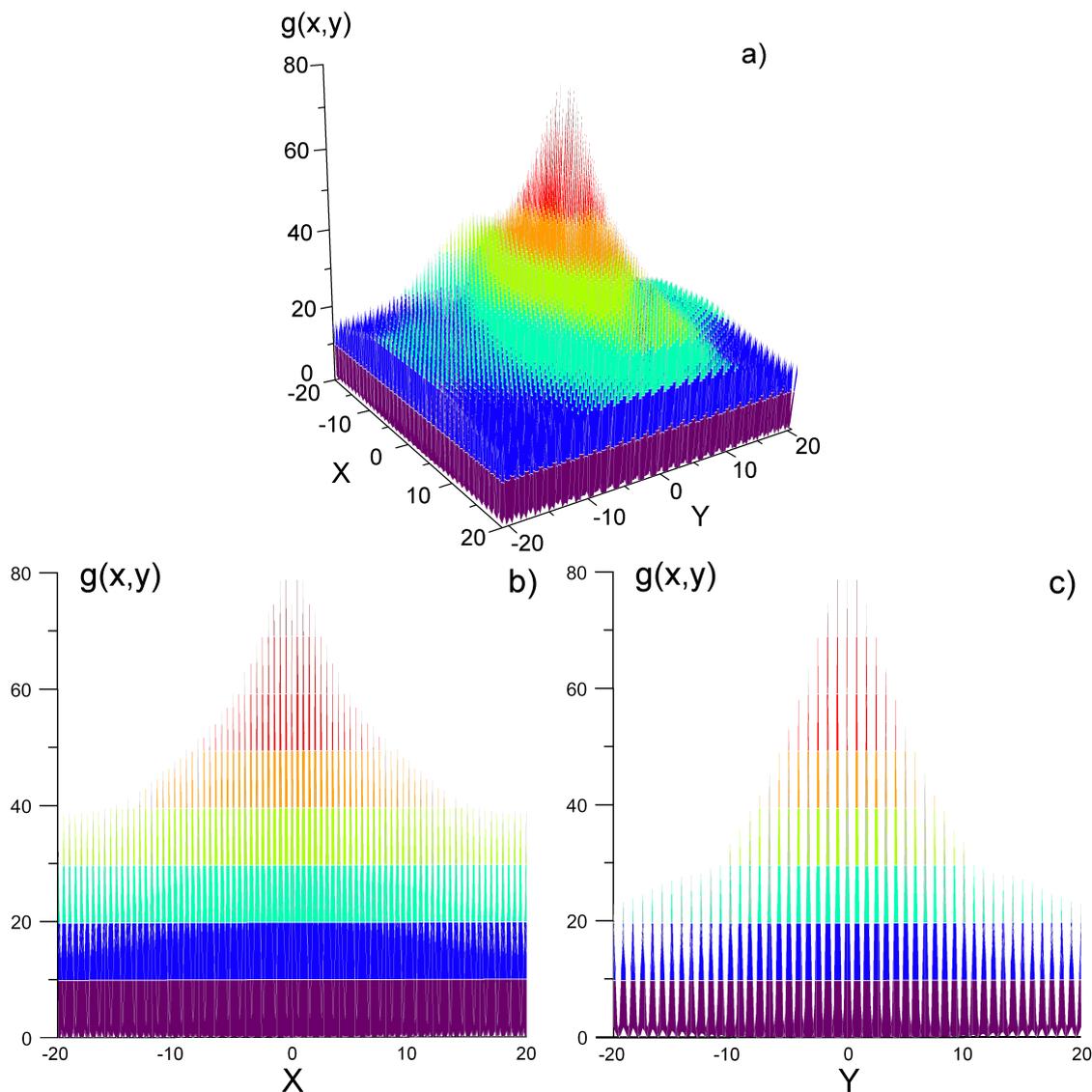


FIGURE 4.21 – Allure de la fonction de corrélation de la densité $g(x,y)$ pour une taille $(40, 48\sqrt{3}/2)\lambda_L$ proche du dépiégeage : a) vue en perspective, b) suivant la direction x et c) suivant la direction y .

Fonction de corrélation des vitesses

Intéressons nous maintenant à la fonction de corrélation des vitesses. Celle-ci permet de déterminer directement la longueur de corrélation ξ du système dans la phase en mouvement. Nous commençons par présenter le champ de vitesse instantanée $\vec{v}(x,y)$ obtenu lors de nos simulations et qui est à la base du calcul de la fonction de corrélation des vitesses. Sur la figure 4.22a) on observe le champ de vitesse instantané pour $N_v = 1920$ vortex avec une force loin du dépiégeage (ce choix permet de ne pas surcharger la figure et reste pour autant représentatif de ce que l'on obtient pour des plus grands systèmes tels

4.5. ÉTUDE À TEMPÉRATURE NULLE

que $N_v = 12000$). Les flèches représentent les vecteurs vitesses instantanées alors que le code couleur indique la norme de ces vecteurs (allant de la couleur bleue pour une faible intensité, à la couleur rouge pour une intensité plus élevée).

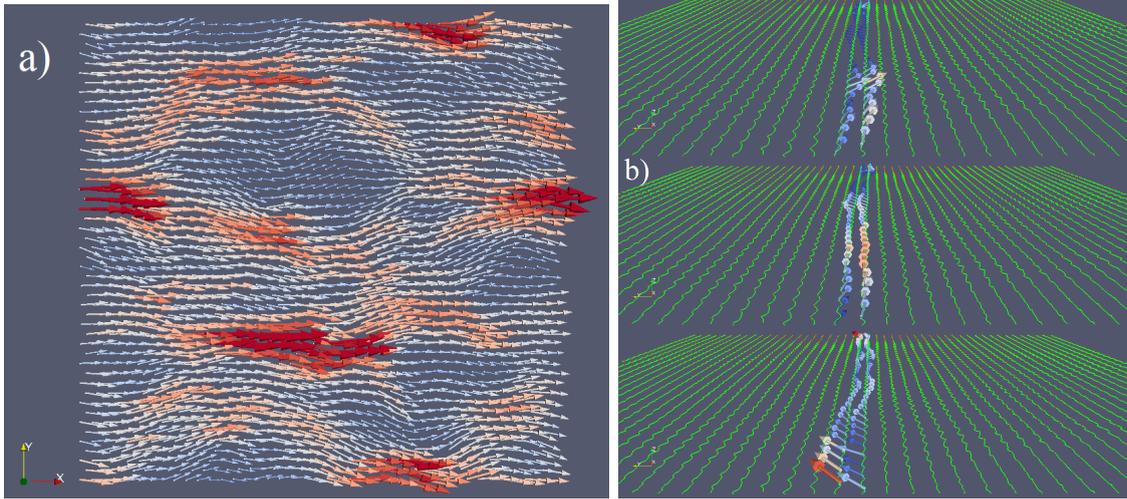


FIGURE 4.22 – a) Champ de vitesse instantanée pour un système contenant $N_v = 1920$ vortex loin du dépiégeage (les flèches représentent les vecteurs vitesses instantanés et la couleur indique la norme de ces vecteurs). b) Vue en perspective du champ de vitesse dans la direction x pour trois pas de temps différents. Les trajectoires sont visibles en couleur verte et seulement deux canaux affichent les vecteurs vitesses instantanés.

Afin de mieux visualiser ce champ de vecteur nous affichons sur la figure 4.22b) une vue en perspective du champ de vitesse dans la direction x de la force appliquée pour différents pas de temps : les trajectoires sont représentées en vert (les vortex correspondent aux points rouges) et nous présentons seulement les vecteurs vitesses pour deux canaux côte à côte. Cette représentation permet par ailleurs d'observer visuellement le couplage des canaux. Ces résultats ainsi que ceux déduits de la fonction de corrélation de la densité nous conduisent à nous intéresser aux corrélations le long de l'axe x (dans le sens de la force d'entraînement), soit :

$$C(\vec{r}) = \langle v_x(\vec{r}^i) v_x(\vec{r}^j + \vec{r}) \rangle \quad (4.26)$$

avec $\langle \dots \rangle$ une moyenne sur le temps et l'espace (x, y) . Similairement à l'implémentation numérique de la fonction de corrélation de la densité, l'équation (4.26) peut s'écrire sous la forme

$$C(\vec{r}) \propto \sum_t \left(\sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}} v_x^i v_x^j e^{-|\vec{r} - \vec{r}_{ij}|^2 / (2r_0^2)} \right) \quad (4.27)$$

Nous présentons sur les figures 4.23a) et 4.23b) l'allure de $C(\vec{r})$ selon une vue en perspective permettant un aperçu général de la fonction, et une vue de profil selon l'axe x

4.5. ÉTUDE À TEMPÉRATURE NULLE

qui est intéressante pour l'identification de ξ . Pour quantifier la valeur de la longueur de corrélation il est nécessaire de choisir une taille de boîte ne causant pas d'effets de taille finie. Le calcul de cette fonction de corrélation s'effectuant en post-traitement séquentiel nous choisissons la taille longitudinale et transverse minimale qui offrent le meilleur rapport "qualité/temps". Ainsi, nous considérons la taille $(100, 18\sqrt{3}/2)\lambda_L$, soit $N_v = 1800$ vortex, pour les résultats concernant $C(\vec{r})$ jusqu'à la fin de cette section. La moyenne temporelle est prise sur une période de la vitesse moyenne du centre de masse des vortex afin de minimiser le temps de calcul (rappelons que cette période correspond au temps mis par chaque vortex pour remplacer le vortex qui le précède sur le même canal) et la force extérieure est choisie telle que le système se situe dans le régime critique (région II des courbes $v(f)$).

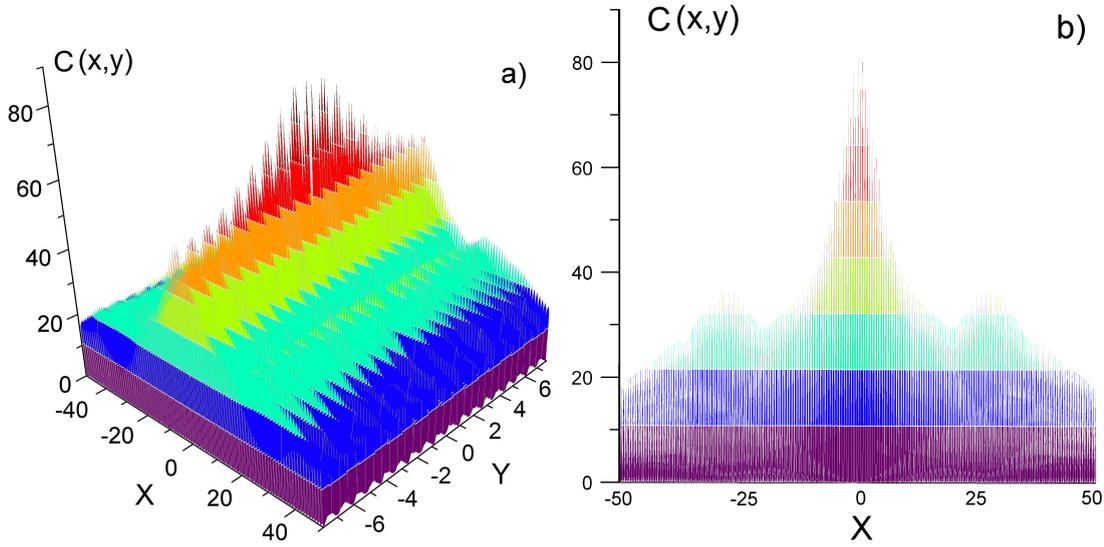


FIGURE 4.23 – Allure de la fonction de corrélation de la composante v_x de la vitesse instantanée pour une taille $(100, 18\sqrt{3}/2)\lambda_L$ dans le régime critique et moyennée sur une période de la vitesse moyenne du centre de masse des vortex : a) vue en perspective, b) vue de profil selon l'axe x .

Notons que similairement à la fonction de corrélation de la densité, $C(\vec{r})$ ne peut être évaluée au delà de la taille de la boîte divisée par 2. Dans la suite, nous nous restreignons aux corrélations selon le sens de l'écoulement x des vitesses longitudinales en effectuant une coupe selon le plan $y = 0$, c'est-à-dire $C(x) \equiv C(x, 0)$. Nous exposons sur la figure 4.24a) l'allure de l'enveloppe de la fonction $C(x)$ pour une réalisation de désordre au niveau de la région I, II et III et que l'on identifie avec les forces F_I , F_{II} et F_{III} (indiquant respectivement le régime *single-particle*, le régime critique et le régime ohmique). Afin d'extraire de ces résultats la longueur de corrélation ξ nous effectuons une régression non linéaire suivant l'équation [106],

$$C(x) \sim C_0 x^{-\kappa} e^{-\frac{x}{\xi}} \quad (4.28)$$

Cette forme fonctionnelle permet de prendre en compte à la fois la décroissance ex-

4.5. ÉTUDE À TEMPÉRATURE NULLE

ponentielle à longue distance caractérisée par l'échelle de longueur ξ et le comportement algébrique à courte portée mesuré par l'exposant κ . Pour les mesures réalisées à différentes forces F nous trouvons que les deux paramètres C_0 et κ demeurent presque constants lorsque $F - F_c^\infty$ varie (avec $\kappa \approx 0.30$). Nous traçons sur la figure 4.24b) la longueur de corrélation ξ extraite de cette simulation en fonction de $F - F_c^\infty$. La flèche noire indique la valeur de $F_{\text{cross}} - F_c^\infty$ avec F_{cross} la force de crossover séparant le régime critique et le régime du *single-particle* des courbes $v(f)$.

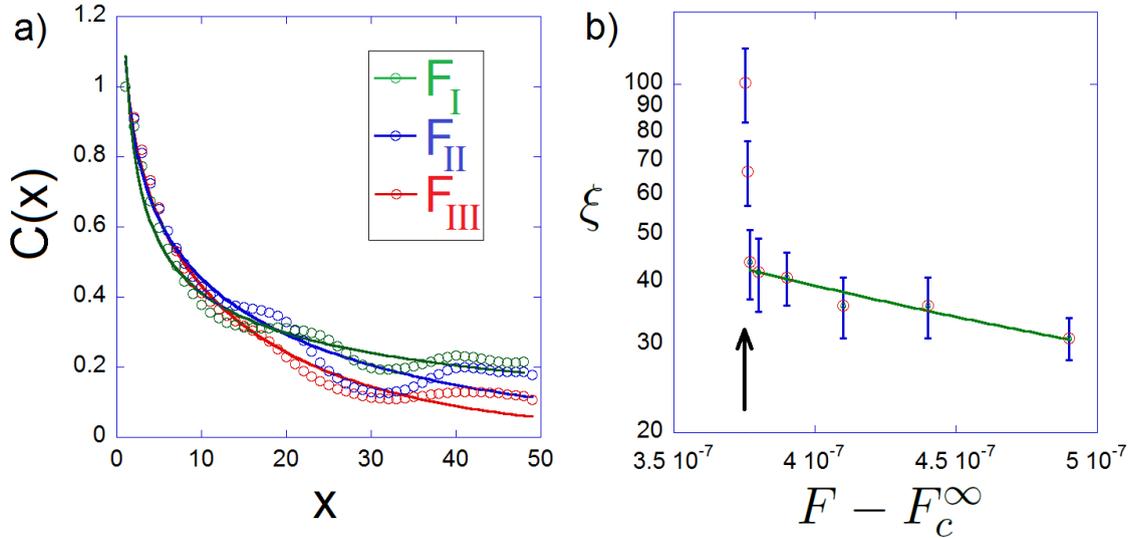


FIGURE 4.24 – a) Allure de l’enveloppe de $C(x)$ pour des forces F_I , F_{II} et F_{III} situant le système dans les trois régions identifiées sur les courbes $v(f)$. Une régression suivant la forme fonctionnelle $C_0 x^{-\kappa} e^{-\frac{x}{\xi}}$ est superposée aux données. b) Évolution de la longueur de corrélation intrinsèque ξ en fonction de $F - F_c^\infty$. Une régression en loi de puissance (en vert) du type $\xi \sim (F - F_c^\infty)^{-\nu}$ est affichée et permet de déterminer $\nu = 1.2 \pm 0.2$. Les barres d’erreurs représentent l’erreur standard associée à la valeur de ξ extraite de la régression de la figure a). La flèche noire indique la valeur de $F_{\text{cross}} - F_c^\infty$ (où F_{cross} est la force de crossover séparant le régime critique et le régime du *single-particle* des courbes $v(f)$). Pour ces deux figures la taille du système est $(100, 18\sqrt{3}/2)\lambda_L$ et une seule réalisation de désordre est considérée.

Comme attendu, des effets de taille finie apparaissent pour $F \rightarrow F_{\text{cross}}^+$, lorsque la longueur ξ devient de l’ordre de la taille longitudinale de la boîte, *i.e.* $\xi \sim L_x$ (où $L_x = 100\lambda_L$). Ce résultat confirme l’hypothèse utilisée pour déterminer indirectement l’exposant ν dans la section 4.5.6. De plus nous obtenons un comportement de la longueur de corrélation tel que $\xi \sim (F - F_c^\infty)^{-\nu}$ pour $F > F_{\text{cross}}$ dans le régime critique (cf sur la figure 4.24b) la régression représentée en couleur verte) d’où l’on tire :

$$\boxed{\nu = 1.2 \pm 0.2} \quad (4.29)$$

Bien que n’ayant été effectué que sur une seule réalisation de désordre et pour une taille donnée, ce résultat est en bon accord avec la valeur de ν déterminée dans la section 4.5.6.

4.5. ÉTUDE À TEMPÉRATURE NULLE

Une étude plus exhaustive avec une moyenne sur le désordre est nécessaire pour une détermination plus précise de cet exposant. Nous constatons néanmoins que ce résultat suggère fortement que la longueur de corrélation intrinsèque contrôle la distribution des forces critiques et celle des forces de crossover liées aux effets de taille finie. Ce résultat est assez surprenant par rapport au cas des ondes de densité de charge, où il a été montré numériquement et par calculs du groupe de renormalisation [98, 101, 119, 120] que les exposants ν et ν_{FS} sont différents, impliquant ainsi plusieurs échelles de longueurs divergentes.

4.5.8 Finite-size scaling

Dans cette section nous mettons à profit la théorie des lois d'échelles en taille finie rappelée en section 4.2.2. Une loi d'échelle relie la vitesse v , la force f et la taille du système L_x à température nulle $T = 0$ telle que

$$v(f, L_x) \sim L_x^{-\beta/\nu} \mathcal{V}(fL_x^{1/\nu}) \quad (4.30)$$

avec \mathcal{V} une fonction d'échelle. Cette relation n'est pertinente qu'au voisinage de la transition de dépiégeage et pour des tailles L_x suffisamment grandes. Considérons les courbes $v(f)$ moyennées sur le désordre pour différentes tailles de systèmes avec $L_x = (40, 100, 200, 400)\lambda_L$ et diverses tailles transverses variant de $L_y = 18\sqrt{3}/2\lambda_L$ à $L_y = 120\sqrt{3}/2\lambda_L$ (le nombre d'échantillons pour la moyenne est le même que pour la détermination de l'exposant β). Nous traçons sur la figure 4.25 la quantité $vL_x^{\beta/\nu}$ en fonction de $fL_x^{1/\nu}$ en utilisant la valeur $\beta = 0.29 \pm 0.03$ et $\nu = 1.04 \pm 0.04$ et en ne retenant que les points des régions I et II.

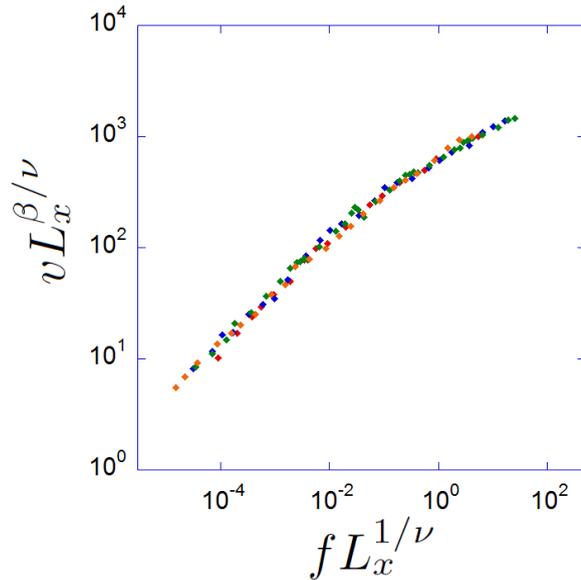


FIGURE 4.25 – Évolution de $vL_x^{\beta/\nu}$ en fonction de $fL_x^{1/\nu}$ pour différentes tailles de systèmes avec $L_x = (40, 100, 200, 400)\lambda_L$. Les valeurs des exposants critiques utilisées sont $\beta = 0.29 \pm 0.03$ et $\nu = 1.04 \pm 0.04$.

On observe une superposition des données en une courbe unique en accord avec l'hy-

pothèse de la loi d'échelle (4.30) et confirmant les valeurs des exposants critiques obtenues précédemment. Le comportement asymptotique de la fonction d'échelle $\mathcal{V}(x)$ est $\mathcal{V}(x) \sim x^\beta$ pour $x \gg 1$, alors que $\mathcal{V}(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$. Cette dernière propriété semble anormale puisqu'on attend $\mathcal{V}(x) \sim \text{constante}$ pour $x \rightarrow 0$. Un tel comportement inhabituel a cependant été observé dans des simulations numériques de la transition de dépiégeage d'interfaces [121]. Son origine provient du régime *single-particle* qui peut partiellement cacher les effets de taille finie habituels.

4.5.9 Autre exposant d'une fonction de réponse

Nous avons déterminé les deux exposants β et ν , le premier étant très discuté dans la littérature alors que le second l'est un peu moins. Nous allons nous intéresser maintenant à l'exposant α associé à la chaleur spécifique. Nos mesures vont nous donner l'ordre de grandeur de cette quantité, nous ne tentons cependant pas d'évaluer précisément l'incertitude associée.

La chaleur spécifique est reliée à la variation de l'énergie moyenne du système avec la force, et s'écrit

$$C_T(F) = \frac{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}{N_v F^2} \quad (4.31)$$

où nous avons divisé par le nombre de vortex N_v dans un souci de comparaison entre différentes tailles. En exploitant la théorie d'échelle en taille finie comme utilisée au-dessus, nous traçons sur la figure 4.26a) la quantité $C_T L_x^{-\alpha/\nu}$ en fonction de $f L_x^{1/\nu}$, où $\nu = 1.04 \pm 0.4$ est fixé et α est recherché de manière à réunir les points sur une même courbe. Les tailles considérées sont $L_x = (40, 100, 200, 400)\lambda_L$ et les tailles transverses varient de $L_y = 18\sqrt{3}/2\lambda_L$ à $L_y = 50\sqrt{3}/2\lambda_L$ avec respectivement une moyenne sur $N = (20, 16, 16, 12, 8)$ échantillons, seuls les points des régions I et II sont pris en compte.

Nous observons une coalescence des points sur une courbe pour la valeur de $\alpha \approx 0.9$. Afin de confirmer cette valeur nous représentons sur la figure 4.26b) le maximum de la chaleur spécifique en fonction de L_x . Conformément à la théorie des lois d'échelle en taille finie nous trouvons $(C_T)_{\max} \sim L_x^{\alpha/\nu}$, d'où l'on tire $\alpha \approx 0.9$. La plus grande dispersion des points obtenue sur la courbe de la loi d'échelle en taille finie résulte à la fois de la plus faible quantité de désordres utilisés pour la moyenne et du nombre de points d'échantillonnage autour du maximum de la fonction de réponse.

4.6 Température finie

Dans cette partie nous présenterons les résultats obtenus pour le dépiégeage des vortex en piégeage faible à température finie. Nous commençons par présenter la fusion du réseau de vortex, puis nous déterminons l'exposant thermique δ de la transition de dépiégeage. Nous examinons l'effet de l'intensité du piégeage sur les exposants critiques, et enfin nous proposons une loi d'échelle permettant de relier les grandeurs ν , f et T entre elles.

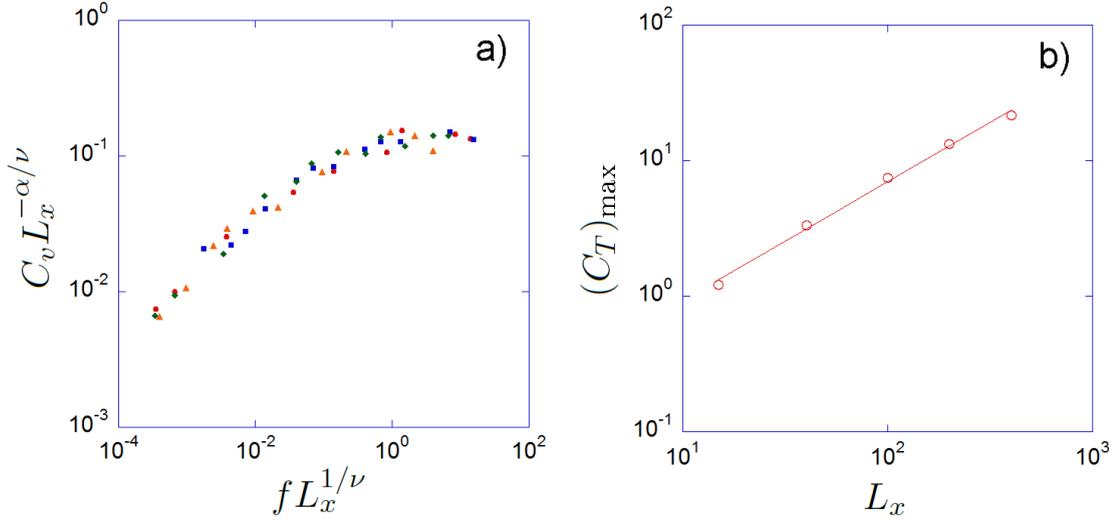


FIGURE 4.26 – a) Évolution de $C_T L_x^{-\alpha/\nu}$ en fonction de $f L_x^{1/\nu}$ avec $\nu = 1.04 \pm 0.4$ pour les tailles de systèmes $L_x = (40, 100, 200, 400)\lambda_L$ moyennées sur le désordre (respectivement $N = (20, 16, 16, 12, 8)$ réalisations de désordres). La superposition des courbes est obtenue pour $\alpha \approx 0.9$. b) Autre mesure de $\alpha \approx 0.9$ via l'évolution de $(C_T)_{\max}$ avec la taille L_x .

4.6.1 Fusion du réseau

Nous attendons une température T_{fusion} au delà de laquelle le réseau fond en un liquide de vortex. L'examen de la structure du réseau à différentes températures pour une force d'entraînement nulle montre qu'en dessous d'une température $T_{\text{fusion}} = 10^{-5}$ le réseau paraît ordonné alors qu'au dessus il est désordonné. La figure 4.27a) et 4.27b) montre une triangulation de *Delaunay* sur un instantané de la position des vortex pour un système de taille $(40, 48\sqrt{3}/2)\lambda_L$ à une température en dessous et au dessus de T_{fusion} .

On observe pour $T < T_{\text{fusion}}$ un très faible nombre de dislocations et la structure est ordonnée. Lorsque $T > T_{\text{fusion}}$ les défauts prolifèrent et la structure est déstabilisée. L'allure de la fonction de corrélation de la densité permet de mettre en évidence la perte de l'ordre à $T = T_{\text{fusion}}$. Nous avons tracé sur les figures 4.28a-e) $g(x, y)$ pour différentes températures autour de T_{fusion} pour une taille $(40, 48\sqrt{3}/2)\lambda_L$.

Au fur et à mesure que la température augmente, la hauteur des pics marqués du réseau diminue tandis que la valeur de $g(x, y)$ entre les pics augmente formant des anneaux à partir de T_{fusion} . Nous pouvons utiliser d'autres grandeurs quantitatives afin de déterminer la température de fusion. Sur la figure 4.29 nous en présentons diverses. Nous montrons la hauteur des pics correspondants aux premiers voisins et la valeur moyenne de $g(x, y)$ entre les pics (au niveau du premier anneau). Ces deux courbes se rejoignent lorsque les pics disparaissent en un anneau indiquant la valeur de la température pour laquelle la transition a lieu. Nous exposons également la fraction $\langle n_6 \rangle$ de vortex, dont le nombre de voisin est égal à six, en fonction de la température. On observe une valeur égale à l'unité en dessous de $T = 10^{-5}$, et dès que cette température est dépassée $\langle n_6 \rangle$ chute brutalement et tend vers une valeur constante non nulle représentant un état du système complète-

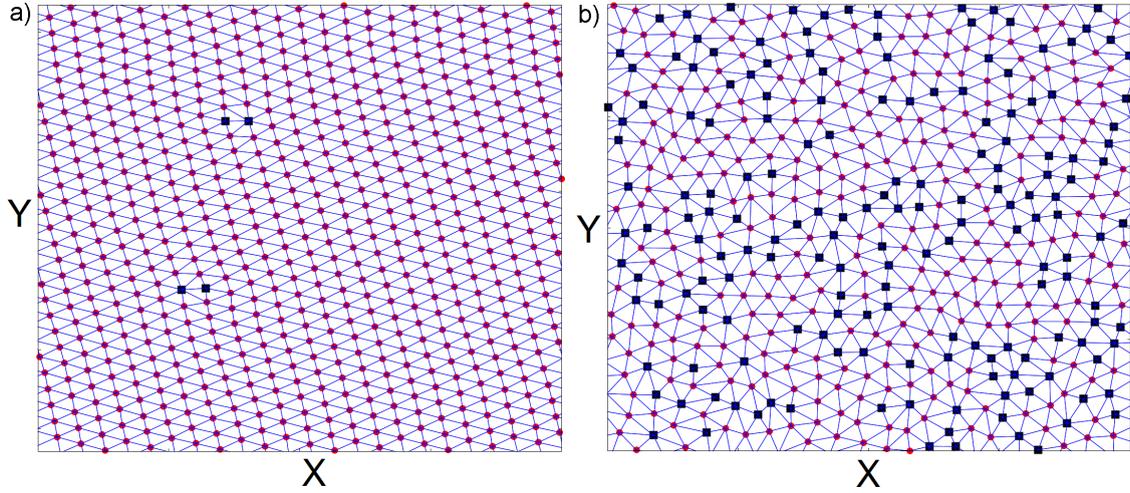


FIGURE 4.27 – Triangulation de Delaunay (en traits bleus) superposée à un instantané de la position des vortex, où les vortex ayant six voisins sont représentés en cercles pleins rouges et ceux dont le nombre de voisins est différent de six sont représentés via des carrés noirs : a) pour $T = 3 \cdot 10^{-6} < T_{\text{fusion}}$ et b) $T = 3 \cdot 10^{-4} > T_{\text{fusion}}$. La taille du système est $(40, 48\sqrt{3}/2)\lambda_L$.

ment désordonné où seulement certains vortex possèdent six voisins. Enfin, nous calculons $C_v(T) \propto \frac{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}{T^2}$ qui présente un pic au niveau de $T = 10^{-5}$. Toutes ces informations indiquent une transition solide/liquide de vortex à $T_{\text{fusion}} = 10^{-5}$ (représentée sur la figure 4.29 par une ligne en traits pointillés).

4.6.2 Exposant thermique δ

Nous déterminons dans cette partie l'exposant thermique δ de la transition de dépiégeage à température finie. Nous avons vu qu'à température nulle le système est piégé en dessous de la force critique F_c , impliquant une valeur nulle de la vitesse moyenne du centre de masse des vortex. À $T \neq 0$, les vortex sont en mouvement pour des valeurs de force $F < F_c$ à cause des fluctuations thermiques qui procurent suffisamment d'énergie aux vortex pour leur permettre de passer les barrières locales d'énergie. Ainsi la vitesse des vortex est toujours $v \neq 0$ quelque soit la force appliquée (bien que très faible pour les faibles valeurs de F), entraînant un arrondissement de la transition de dépiégeage. En utilisant encore une fois l'analogie avec les phénomènes critiques standards nous pouvons prédire la réponse du système en température suivant une loi de puissance à $F = F_c$ telle que

$$v_{F=F_c} \sim T^{1/\delta} \quad (4.32)$$

Nous représentons sur la figure 4.30 la réponse typique observée pour la vitesse réduite v en fonction de la température en échelle logarithmique. Le cas affiché correspond à une taille de système de $(400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$ pour une intensité de désordre relative de $\alpha_p/\alpha_v \approx 5 \cdot 10^{-3}$

4.6. TEMPÉRATURE FINIE

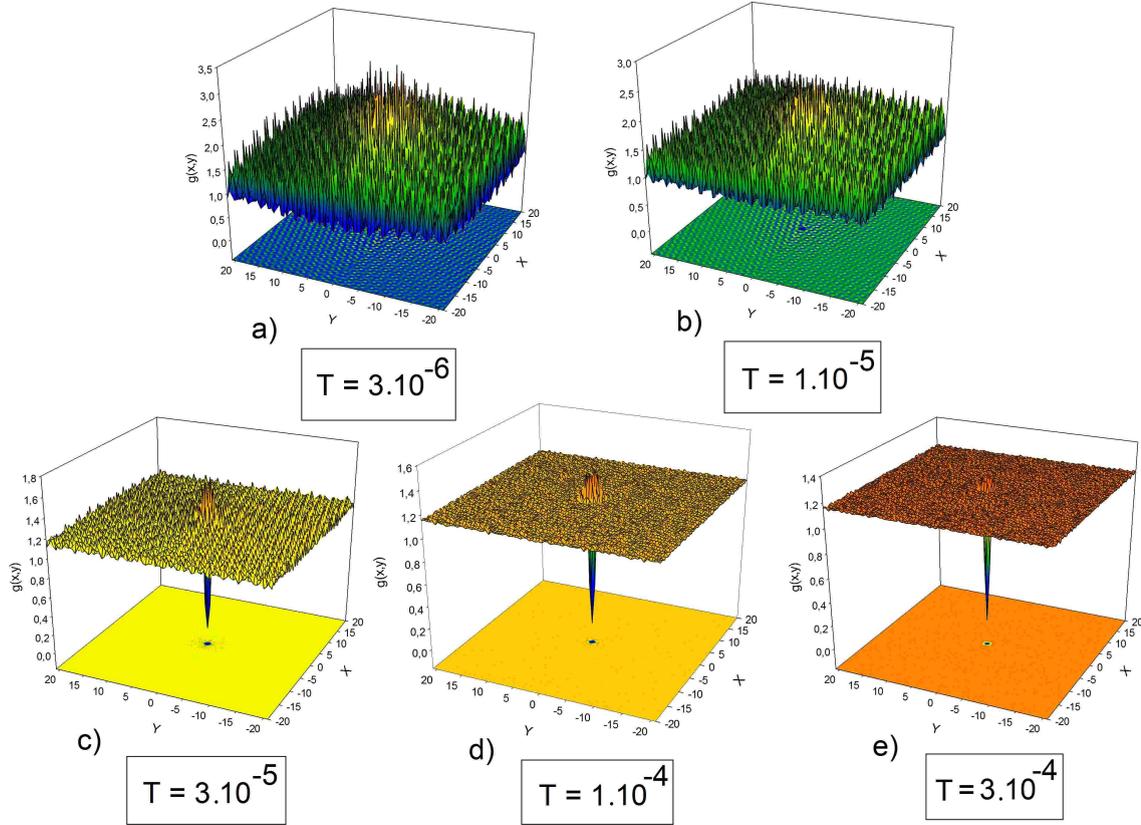


FIGURE 4.28 – Allure de la fonction $g(x, y)$ pour différentes températures en dessous et au dessus de la température de fusion $T_{\text{fusion}} = 10^{-5}$. La température varie de façon croissante entre les figures a) et e). Des courbes de contour sont affichées dans le plan xy pour une meilleure visualisation de la fonction $g(x, y)$.

où la moyenne est réalisée sur $N = 6$ échantillons pour des valeurs fixées de force réduite de $f = (10, 4, 3, 0, -2, -7) \times 10^{-4}$.

Deux comportements sont clairement visibles sur les courbes $v(T)$. En dessous de la force critique, *i.e.* pour $f < 0$, $v(T) \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0$ plus rapidement qu'une loi de puissance. Ce comportement résulte en une courbe $v(T)$ concave dans une échelle log-log. Au dessus de F_c , $v(T = 0) \rightarrow \text{cste}$ ce qui se traduit sur le graphique par une courbe convexe avec une asymptote horizontale lorsque $T \rightarrow 0$. Entre ces deux comportements nous pouvons définir la force critique effective, \overline{F}_c^* , qui représente la force pour laquelle $v_{F=\overline{F}_c^*} \sim T^{1/\delta}$. Ce comportement en loi de puissance est représenté en traits pointillés sur la figure 4.30. La détermination de l'exposant critique δ a été faite sur $N = 8$ réalisations de désordre pour différentes tailles $L_x = (100, 400)\lambda_L$ et avec des tailles transverses $L_y \geq 18\sqrt{3}/2\lambda_L$. Nous obtenons ainsi

$$\boxed{\delta^{-1} = 0.28 \pm 0.05} \quad (4.33)$$

où l'incertitude est déduite des différentes droites que l'on peut tracer au niveau de \overline{F}_c^*

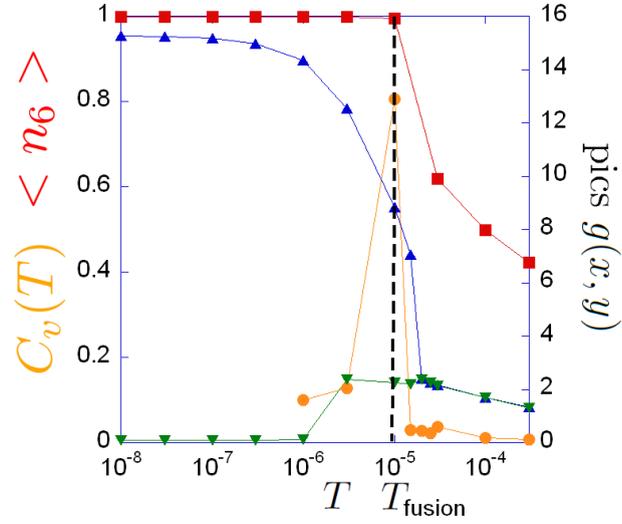


FIGURE 4.29 – Evolution avec la température de différentes quantités : la fraction $\langle n_6 \rangle$ de vortex ayant 6 voisins au cours du mouvement (carrés rouges), la chaleur spécifique $C_v(T)$ (cercles oranges), la hauteur des pics des premiers voisins de $g(x, y)$ (triangles bleus vers le haut) et la valeur moyenne de $g(x, y)$ entre les pics au niveau du premier anneau (triangles vers le bas). Le système considéré ici est d'une taille de $(40, 48\sqrt{3}/2)\lambda_L$ et toutes ces quantités sont moyennées dans le temps.

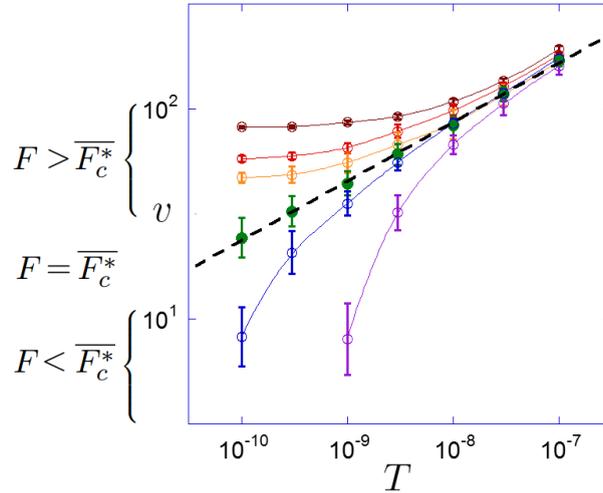


FIGURE 4.30 – Tracé de la vitesse réduite v en fonction de la température T moyennée sur $N = 6$ échantillons pour des valeurs fixées de $f = (10, 4, 3, 0, -2, -7) \times 10^{-4}$ et un système de taille $(400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$. L'intensité de désordre relative est $\alpha_p/\alpha_v \approx 5 \cdot 10^{-3}$, les barres d'erreurs correspondent à l'erreur standard associée à chaque valeur moyennée. L'extrapolation au niveau de \overline{F}_c^* en traits pointillés permet d'obtenir l'exposant δ^{-1} (voir le texte associé pour plus d'informations). Les lignes reliant les points ne sont qu'un guide visuel pour les différentes concavités observables.

pour extrapoler la loi de puissance. Remarquons que les valeurs de température utilisées sont très inférieures à la température de fusion T_{fusion} .

Notons également qu'une nouvelle force critique effective est ainsi introduite. Sa valeur est en parfait accord avec la valeur de la force critique \overline{F}_c obtenue à température nulle. Un traitement des courbes $v(f)$ obtenues à $T = 0$ en utilisant \overline{F}_c^* conduit à un exposant de dépiégeage $\beta = 0.28 \pm 0.05$, en très bon accord avec la valeur $\beta = 0.29 \pm 0.03$ déterminée à $T = 0$. L'incertitude plus importante provient du plus faible nombre d'échantillons traités à température finie (le temps de simulation nécessaire à l'obtention d'une moyenne temporelle correcte de la vitesse augmentant lorsque l'on diminue la température).

Enfin, il convient de noter que la procédure de moyenne des valeurs individuelles δ_i^{-1} (où $i = 1, \dots, N$ échantillons) obtenue pour chaque réalisation de désordre, conduit à un résultat identique *i.e.* $\delta^{-1} = 0.28$.

La relation d'échelle $2 - \alpha = \beta(\delta + 1)$, issue de l'identité de *Widom*, semble être vérifiée à partir des exposants critiques déterminés. Cependant aucune justification théorique ne permet d'utiliser ces relations d'échelles dans le cas d'une transition hors-équilibre.

4.6.3 Différentes intensités de piégeage

Nous venons de déterminer divers exposants critiques, dont ceux caractérisant le dépiégeage à température nulle (β) et finie (δ), pour une valeur d'intensité de désordre relative $\alpha_p/\alpha_v \approx 5 \cdot 10^{-3}$ correspondant à une dynamique élastique. Nous présentons l'évolution de ces exposants avec l'intensité de piégeage.

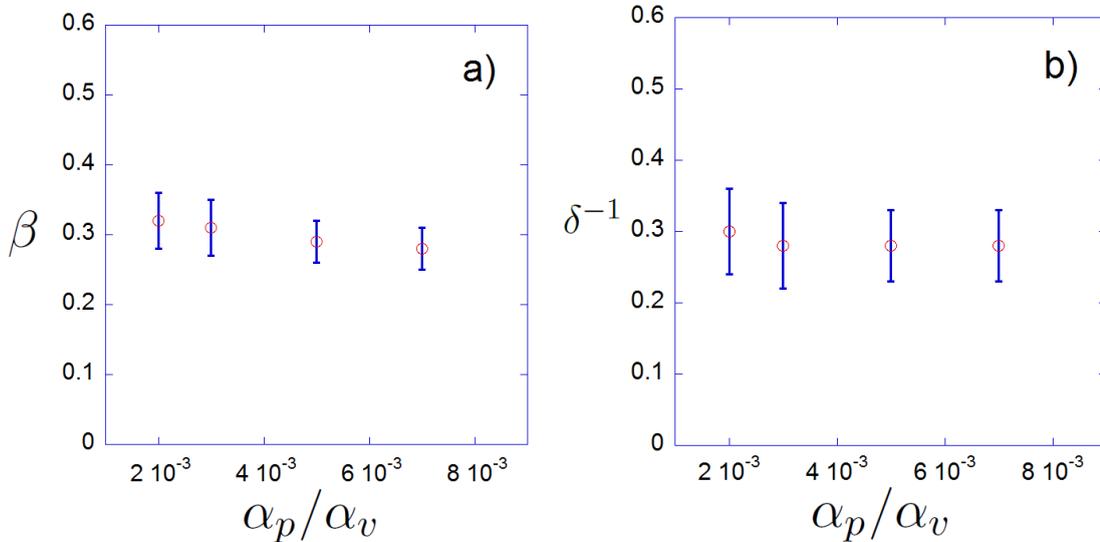


FIGURE 4.31 – Évolution des exposants critiques β (figure a) et δ^{-1} (figure b) avec l'intensité de désordre relative α_p/α_v . Pour plus d'informations quant aux barres d'erreurs, se référer aux sections traitant de l'exposant β et δ^{-1} afin de savoir comment elles sont mesurées habituellement.

Pour différentes tailles de systèmes telles que $L_x \geq 100\lambda_L$ et $L_y \geq 18\sqrt{3}/2\lambda_L$ nous choisissons différentes intensités de désordre relatives $\alpha_p/\alpha_v \approx (2, 3, 5, 7) \times 10^{-3}$. Notons

que lorsque l'intensité de piégeage diminue, le temps de calcul peut devenir déraisonnable au voisinage de la force critique, et il est nécessaire de simuler des tailles de systèmes plus grandes.

Le nombre d'échantillons pour chaque intensité de piégeage a été réparti de la façon suivante : $N = 1$ pour $\alpha_p/\alpha_v \approx 2 \cdot 10^{-3}$ et une taille $L_x = 1000\lambda_L$, $N = 2$ pour $\alpha_p/\alpha_v \approx 3 \cdot 10^{-3}$ et $L_x = 400\lambda_L$, $N = 8$ pour $\alpha_p/\alpha_v \approx 5 \cdot 10^{-3}$ et $L_x = (100, 400)\lambda_L$ et enfin $N = 4$ pour $\alpha_p/\alpha_v \approx 7 \cdot 10^{-3}$ et $L_x = 400\lambda_L$. Les figures 4.31a) et 4.31b) montrent les valeurs des exposants β et δ^{-1} obtenues pour différentes intensités de désordre. On trouve que β et δ^{-1} sont indépendants de l'intensité de piégeage utilisée.

4.6.4 Loi d'échelle reliant (v, f, T)

Le comportement critique de la vitesse au seuil de dépiégeage nous conduit à exprimer v sous la forme d'une fonction homogène généralisée des variables f et T . Afin d'exprimer la relation liant v, f, T en termes de quantités sans dimensions, nous définissons v_0 et T_0 tels que

$$v_{f>0} = v_0 f^\beta \quad (4.34a)$$

$$v_{f=0} = v_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1/\delta} \quad (4.34b)$$

ce qui revient à définir une vitesse adimensionnée \tilde{v} et une température adimensionnelle \tilde{T}

$$\tilde{v} = \frac{v}{v_0} \quad (4.35a)$$

$$\tilde{T} = \frac{T}{T_0} \quad (4.35b)$$

Nous postulons l'ansatz suivant pour la loi d'échelle :

$$\tilde{v}|f|^{-\beta} = S_\pm(\tilde{T}|f|^{-\beta\delta}) \quad (4.36)$$

où $S(x)$ est la fonction d'échelle avec deux branches, S_+ correspond à $f > 0$ et S_- à $f < 0$. Les lois de puissances à température nulle et à force réduite nulle que nous avons obtenues $\tilde{v}_{f>0} = f^\beta$ et $\tilde{v}_{f=0} = \tilde{T}^{1/\delta}$ impliquent pour la fonction d'échelle les comportements asymptotiques suivants,

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} S_+(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} S_\pm(x) = x^{1/\delta} \\ \lim_{x \rightarrow 0} S_-(x) = 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

La branche S_+ présente une asymptote horizontale lorsque $\tilde{T} \rightarrow 0$ définissant ainsi un régime dominé par la force d'entraînement alors que les branches S_{\pm} possèdent une asymptote oblique de pente $1/\delta$ pour $f \rightarrow 0$ définissant un régime dominé par la température. Le changement de variables $(v, T) \rightarrow (\tilde{v}, \tilde{T})$ va translater (dans une échelle logarithmique) la courbe $y = S_{\pm}(x)$ et est équivalent à choisir l'intersection des deux asymptotes (celle horizontale et celle oblique de pente δ^{-1}) comme étant l'origine du système de coordonnées $x = \tilde{T}|f|^{-\beta\delta}$, $y = \tilde{v}|f|^{-\beta}$.

La figure 4.32 montre $\tilde{v}_i|f|^{-\beta}$ en fonction de $\tilde{T}|f|^{-\beta\delta}$ avec $\beta = 0.29 \pm 0.03$ et $\delta^{-1} = 0.28 \pm 0.05$, où les valeurs de ces deux exposants peuvent varier dans la barre d'erreur pour chaque échantillon. Ici \tilde{v}_i correspond à la vitesse obtenue pour chacune des réalisations de désordre, pour les différentes tailles $L_x = (100, 400, 1000)\lambda_L$ contenant $N_v = (5000, 8000, 20000)$ vortex, et les différentes intensités de désordre $10^3 \times \alpha_p/\alpha_v \approx (2, 3, 5, 7)$. On observe une superposition de toutes les courbes individuelles en une courbe unique présentant deux branches associées aux comportements asymptotiques attendus. Rappelons que la valeur de F_c utilisée pour calculer la force réduite f dépend de chaque échantillon. Les deux préfacteurs v_0 et T_0 ne sont pas universels et leur valeur varie d'un échantillon à l'autre, cependant la fonction d'échelle $S_{\pm}(x)$ demeure inchangée. Notons que l'utilisation de la méthode de moyenne sur le désordre utilisée précédemment conduit au même résultat.

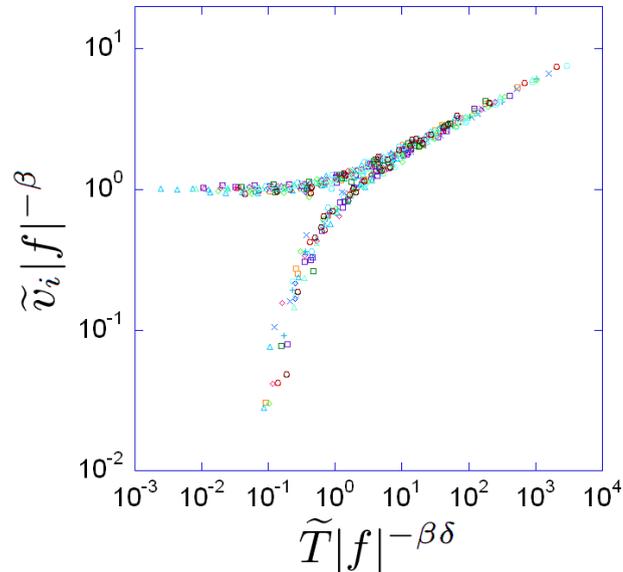


FIGURE 4.32 – Tracé de la loi d'échelle $\tilde{v}_i|f|^{-\beta}$ en fonction de $\tilde{T}|f|^{-\beta\delta}$ avec $\beta = 0.29 \pm 0.03$ et $\delta^{-1} = 0.28 \pm 0.05$ pour $N = 14$ échantillons avec différentes intensités de piégeage relatives $10^3 \times \alpha_p/\alpha_v \approx (2, 3, 5, 7)$, différentes tailles de systèmes $L_x = (100, 400, 1000)\lambda_L$ et pour différentes réalisations de désordre. Pour chaque échantillon la valeur de β et δ^{-1} est autorisée à varier dans la barre d'erreur qui lui est liée.

Ces résultats sont en faveur de l'existence d'un régime critique au seuil de dépiégeage avec des exposants critiques qui ne dépendent pas de l'intensité du piégeage.

4.6.5 Classe d'universalité ?

Comme nous venons de le montrer, la transition de dépiégeage élastique est analogue à une transition de phase du second ordre (continue) avec des exposants de dépiégeage β et thermique δ présentant un certain degré d'universalité par rapport au désordre.

Néanmoins la question de l'existence d'une classe d'universalité pour le dépiégeage élastique reste ouverte. En effet, une grande variété d'exposant β a été trouvée dans la littérature comme nous l'avons déjà remarqué dans le paragraphe 4.3.2. La valeur de l'exposant de dépiégeage obtenu dans ce travail est proche de la valeur $\beta \approx 1/3$ déterminée pour les interfaces dans un espace de dimension $D = 2$ [104, 105, 106]. Cependant il convient de comparer nos résultats à ceux obtenus pour les systèmes périodiques avec un champ de déplacement $N = 2$ dans un espace de dimension $D = 2$. C'est le cas par exemple des systèmes de type stripes [42] (qui sont des systèmes périodiques anisotropes) pour lesquels $\beta = 0.35$. Notons également le résultat obtenu pour un système de vortex supraconducteurs [112] dans un espace de dimension $D = 3$ avec $\beta = 0.65 \pm 0.01$ et $\delta = 2.3 \pm 0.1$, ou encore l'exposant thermique $\delta^{-1} = 0.15 \pm 0.01$ pour les interfaces [106].

D'autre part, la grande variété d'exposants répertoriée dans la section 4.3.2 pour d'autres systèmes périodiques similaires suggère que le type d'interaction entre les particules constituant le système périodique, ainsi que le type de désordre jouent un rôle important, ce qui implique l'absence d'une grande classe d'universalité pour les systèmes périodiques.

4.6.6 Discussion sur les exposants critiques

Il existe beaucoup d'études dans la littérature pour le cas $N = 1$, en particulier pour les ondes de densité de charge où des simulations numériques dans un espace de dimension $D = 2$ [107] donnent des valeurs de $\beta = 0.65 \pm 0.05$ et $\nu = 0.5 \pm 0.1$, alors que nos résultats donnent des valeurs très différentes avec $\beta = 0.29 \pm 0.03$ et $\nu = 1.04 \pm 0.04$. Aussi, nous trouvons une valeur de $\nu \approx 1$ pour l'exposant de la longueur de corrélation intrinsèque alors que $\nu = 1/2$ est attendu pour les ondes de densité de charge au-dessus du seuil de dépiégeage.

De plus, les résultats présentés précédemment en section 4.5.7.2 suggèrent que $\nu = \nu_{\text{FS}}$, en contradiction avec les ondes de densité de charge. En fait, la faible concordance entre nos résultats et ceux des ondes de densité de charge peut provenir du fait que $N = 1$ pour ces dernières alors que $N = 2$ dans nos simulations de vortex.

On remarque que le fait d'insérer la valeur de $\nu = 1$ dans la relation d'échelle STS (Statistical Tilt Symmetry) [122] :

$$\nu = \frac{1}{2 - \zeta} \quad (4.38)$$

donne alors une valeur de $\zeta = 1$. Nous allons par la suite utiliser la relation d'hyperscaling [99, 101, 122] :

$$\beta = \nu(z - \zeta) \quad (4.39)$$

où l'exposant dynamique z est défini par le comportement critique du temps caractéristique d'une avalanche $\tau \sim \xi^z$, où ξ correspond à la taille typique des avalanches [123], alors que l'exposant de rugosité ζ est défini à partir de la fonction de corrélation des déplacements $B(r) \sim r^{2\zeta}$.

En insérant les deux valeurs $\nu = 1$ et $\zeta = 1$ avec la valeur de $z = 5/4$ [124], on obtient $\beta = 1/4$ qui est compatible avec notre résultat de $\beta = 0.29 \pm 0.03$, mais qui n'est pas nécessairement satisfaisant puisque $\zeta = 0$ est attendu dans la relation d'hyperscaling.

4.7 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les résultats de simulations numériques à grandes échelles concernant la dynamique de réseaux $2D$ de vortex supraconducteurs mis en mouvement dans un potentiel désordonné. Un changement de régime a été trouvé entre une dynamique élastique et une dynamique plastique montrant le passage d'un régime dominé par le désordre à un régime dominé par l'élasticité. Notre étude s'est portée sur la transition de dépiégeage des vortex dans le régime élastique obtenu en désordre faible. Notons que les phases haute vitesse de vortex $3D$ en désordre faible [125] et les phases au seuil de dépiégeage plastique en désordre fort [74, 126, 127, 128] ont été étudiées précédemment dans notre équipe.

Au dessus du seuil de dépiégeage tous les vortex se dépiègent simultanément et s'écoulent dans des canaux statiques rugueux couplés élastiquement. Trois régimes dynamiques ont été observés. Le premier est contrôlé par la taille finie de la boîte de simulation et amène au régime *single-particle*. Dans le second régime, une analogie avec les transitions de phase du second ordre a été mise en évidence pour lequel $v \sim f^\beta$ à $T = 0$ avec l'exposant critique $\beta = 0.29 \pm 0.03$, alors que le dernier régime est linéaire. A température nulle une analyse en loi d'échelle en taille finie suggère, a contrario des ondes de densité de charge, qu'il existe une seule longueur caractéristique au dessus du seuil de dépiégeage $\xi \sim f^{-\nu}$, avec $\nu = 1.04 \pm 0.04$. Cette longueur contrôle les corrélations entre vortex et également les propriétés statistiques du système, comme la distribution des forces critiques et des forces de crossover de taille finie. L'exposant $\alpha \approx 0.9$ associé à l'analogie de la chaleur spécifique a été déterminée. L'analyse à température finie a permis de déterminer l'exposant thermique $\delta^{-1} = 0.28 \pm 0.05$ défini par $v \sim T^{1/\delta}$ à $F = F_c$. Une relation indépendante de f entre les variables $\frac{v}{|f|^\beta}$ et $\frac{T}{|f|^{\beta\delta}}$ a été observée. Cette relation d'échelle est indépendante du désordre (son intensité et sa répartition spatiale) dans la gamme du diagramme des paramètres explorés, indiquant ainsi l'existence d'un certain degré d'universalité. Cependant la comparaison avec d'autres systèmes périodiques similaires suggère qu'une vaste classe d'universalité n'existe pas pour la transition de dépiégeage élastique à $2D$, comme cela semble être le cas pour la transition de dépiégeage plastique [74].

Une étude intéressante serait d'affiner la valeur de l'exposant $\nu = 1.2 \pm 0.2$ obtenu par la fonction de corrélation des vitesses en rajoutant de la statistique (*i.e.* effectuer une moyenne sur le désordre). Cela permettrait d'infirmer ou de confirmer le fait que $\nu = \nu_{\text{FS}}$. La détermination de l'exposant de rugosité ζ , à partir de la fonction de corrélation des

4.7. CONCLUSION

déplacements $B(r) = \overline{[\vec{u}(r) - \vec{u}(0)]^2} \sim r^{2\zeta}$, serait instructif afin de vérifier la relation d'échelle d'hyperscaling $\beta = \nu(z - \zeta)$ et de la relation d'échelle STS $\nu = \frac{1}{2 - \zeta}$.

Le système étudié possédant deux composantes $N = 2$, il conviendrait également d'étudier les comportements critiques dans les deux directions afin de discuter quant à une possible anisotropie des comportements, ce qui pourrait être une piste d'explication des comportements obtenus. En particulier il serait intéressant de déterminer l'exposant de corrélation dans la direction L_y .

Une fois ces diverses questions résolues, il serait enrichissant d'étudier l'évolution des exposants critiques, et donc de mettre en avant une possible classe d'universalité, en changeant la dimensionnalité du système (passage de $D = 2$ à $D = 3$) et/ou la portée de l'interaction (cependant cette dernière risque d'entraîner des difficultés numériques à l'application).